

Camilla Björklund

Hållpunkter för lärande

Småbarns möten med matematik





Camilla Björklund (f. Öhberg)

Född i Jakobstad 1977

Student vid Jakobstads gymnasium 1996

Studier i pedagogik vid Åbo Akademi:

PeK (barnträdgårdsläroutbildning) 1999

PeM 2000

PeL 2003

Lärare vid Institutionen för barnpedagogik, Pedagogiska fakulteten,
Åbo Akademi i Jakobstad (2000–2003)

Assistent i pedagogik med barnpedagogisk inriktning vid Pedagogiska
fakulteten, Åbo Akademi i Jakobstad (2003–)

Foto: Camilla Björklund

Pärm: Tove Ahlbäck

Åbo Akademis förlag

Biskopsgatan 13, FIN-20500 ÅBO, Finland

Tel. int. +358-2-215 3292

Fax int. +358-2-215 4490

E-post: forlaget@abo.fi

<http://www.abo.fi/stiftelsen/forlag/>

Distribution: Oy Tibo-Trading Ab

PB 33, FIN-21601 PARGAS, Finland

Tel. int. +358-2-454 9200

Fax int. +358-2-454 9220

E-post: tibo@tibo.net

<http://www.tibo.net>

HÅLLPUNKTER FÖR LÄRANDE

Hållpunkter för lärande

Småbarns möten med matematik

Camilla Björklund

ÅBO 2007

ÅBO AKADEMIS FÖRLAG - ÅBO AKADEMI UNIVERSITY PRESS

CIP Cataloguing in Publication

Björklund, Camilla

Hållpunkter för lärande: småbarns möten
med matematik / Camilla Björklund. -

Åbo : Åbo Akademi förlag, 2007.

Diss.: Åbo Akademi. – Summary.

ISBN 978-951-765-358-9

ISBN 978-951-765-358-9
ISBN 978-951-765-359-6 (digital)
Forsberg
Jakobstad 2007

Abstract

Björklund, C. (2007). Critical conditions of learning – toddlers encountering mathematics. Department of Early Childhood Education, Faculty of Education, Åbo Akademi University, Jakobstad.

Developed from human activities, mathematical knowledge is bound to the world and cultures that men and women experience. One can say that mathematics is rooted in humans' everyday life, an environment where people reach agreement regarding certain "laws" and principles in mathematics. Through interaction with worldly phenomena and people, children will always gain experience that they can then in turn use to understand future situations. Consequently, the environment in which a child grows up plays an important role in what that child experiences and what possibilities for learning that child has.

Variation theory, a branch of phenomenographical research, defines human learning as changes in understanding and acting towards a specific phenomenon. Variation theory implies a focus on that which it is possible to learn in a specific learning situation, since only a limited number of critical aspects of a phenomenon can be simultaneously discerned and focused on.

The aim of this study is to discern how toddlers experience and learn mathematics in a daycare environment. The study focuses on what toddlers experience, how their learning experience is formed, and how toddlers use their understanding to master their environment. Twenty-three children were observed videographically during everyday activities. The videographic methodology aims to describe and interpret human actions in natural settings. The children are aged from 1 year, 1 month to 3 years, 9 months. Descriptions of the toddlers' actions and communication with other children and adults are analyzed phenomenographically in order to discover how the children come to understand the different aspects of mathematics they encounter.

The study's analysis reveals that toddlers encounter various mathematical concepts, similarities and differences, and the relationship between parts and whole. Children form their understanding of such aspects in interaction with other children and adults in their everyday life. The results also show that for a certain type of learning to occur, some critical conditions must exist. Variation, simultaneity, reasonableness and fixed points are critical conditions of learning that appear to be important for toddlers' learning. These four critical conditions are integral parts of the learning process. How children understand mathematics influences how they use mathematics as a tool to master their surrounding world. The results of the study's analysis of how children use their understanding of mathematics shows that children use mathematics to uphold societal rules, to describe their surrounding world, and as a tool for problem solving. Accordingly, mathematics can be considered a very important phenomenon that children should come into contact with in different ways and which needs to be recognized as a necessary part of children's everyday life.

Adults working with young children play an important role in setting perimeters for children's experiences and possibilities to explore mathematical concepts and phenomena. Therefore, this study is significant as regards understanding how children learn mathematics through everyday activities.

Key words: toddlers' learning, experience, mathematics, variation theory, phenomenography, videography

Abstrakt

Björklund, C. (2007). Hållpunkter för lärande – småbarns möten med matematik. Enheten för barnpedagogik, Pedagogiska fakulteten, Åbo Akademi, Jakobstad.

Matematisk kunskap har utvecklats under lång tid och har sin grund i mänsklig verksamhet, vardag och kultur, där människor har gjort vissa överenskommelser om innebörden i begrepp, symboler och principer. Genom interaktion med föremål, företeelser och människor i omvärlden, erfar barn alltid något som har betydelse för hur en framtida situation förstås och tolkas. Den miljö som ett barn växer upp i har således stor betydelse för vilka möjligheter till lärande som erbjuds.

I föreliggande studie grundar sig synen på lärande på den ur fenomenografin utvecklade variationsteorin där lärande definieras som förändrade sätt att förstå och handla i förhållande till ett specifikt fenomen. Variationsteorin fokuserar vad som är möjligt att lära sig i en situation där det förutsätts finnas vissa kritiska aspekter av ett fenomen som samtidigt bör urskiljas och fokuseras för att lärande ska ske.

Syftet med studien är att synliggöra småbarns erfارande och lärande av matematik i daghemsmiljö, där fokus ligger på vad barn erfar, hur detta erfارande gestaltar sig och hur barn använder sin förståelse för att bemästra sin omvärld. Den empiriska studien består av videografiskt observerade episoder av 23 barns vardagliga aktiviteter. Videografi som metodologisk ansats avser att beskriva och tolka mänskliga handlingar i naturliga sammanhang. Barnen i studien är mellan 1 år, 1 månad och 3 år, 9 månader gamla. Beskrivningar av barnens handlande och kommunikation med andra barn och vuxna analyseras utgående från en fenomenografisk ansats för att skilja ur vilka aspekter som erfars och på vilket sätt barn erfar olika aspekter av matematik.

Analysen av vad småbarn erfar av matematisk karaktär synliggör barns möten med matematiska begrepp, barns möjligheter att urskilja likheter och skillnader, samt relationen mellan delar och helhet. Barnen erfar och utvecklar sin förståelse av dessa aspekter av matematik i samspel med andra barn och vuxna i den dagliga verksamheten. I studien framträder vissa kritiska villkor för att lärande av matematik skall ske: variation, samtidighet, rimlighet och hållpunkt. Dessa fyra villkor bör ses som interagerande delar av lärandeprocessen. På vilket sätt barn förstår matematik har i sin tur betydelse för hur de använder sin matematiska kunskap i vardagliga aktiviteter. Analysen visar att barnen på småbarnsavdelningarna använder sig av matematik i syfte att upprätthålla sociala regler, för att beskriva sin omvärld och som ett redskap för problemlösning. Matematik kan således ses som ett betydelsefullt fenomen att möta på varierande sätt och i varierande sammanhang och bör därmed erkännas som en nödvändig del av barns vardagliga liv.

Vuxna som arbetar med småbarn har en betydelsefull roll i att sätta gränser och erbjuda möjligheter för barn att erfara och lära matematiska begrepp och idéer. Den studie som här presenteras kan därmed få implikationer för det pedagogiska arbetet ifråga om att förstå hur småbarn lär matematik i vardagliga aktiviteter.

Sökord: småbarns lärande, erfارande, matematik, variationsteori, fenomenografi, videografi

Innehåll

Figurförteckning

Förord

| | |
|--|----|
| 1 Bakgrund och syfte | 1 |
| 1.1 Möten med matematik | 1 |
| 1.2 Det matematiska arvet | 2 |
| 1.3 Matematisk inriktning i finländsk barndagvård | 5 |
| 1.4 Studiens syfte och frågeställningar | 8 |
| 1.5 Avhandlingens disposition | 8 |
| 2 Kunskapsteoretiska distinktioner | 11 |
| 2.1 Tingens oberoende existens | 12 |
| 2.2 Kunskap baserad på sinnesintryck | 13 |
| 2.3 Kunskapstillägnande som process | 14 |
| 2.4 Variation som grund för lärande | 18 |
| 2.5 Kunskap som överförande av kulturell mening | 20 |
| 3 Forskning om småbarns lärande | 25 |
| 3.1 Lärande i samspel med omvärlden | 25 |
| 3.1.1 Kulturella betingelser för lärandet | 26 |
| 3.1.2 Att bli medveten om sin omvärld | 27 |
| 3.1.3 Kroppen som medium för lärandet | 29 |
| 3.1.4 Imitation och variation | 30 |
| 3.1.5 Att urskilja kvalitativa aspekter av omvärlden | 33 |
| 3.2 Barns matematiska tänkande | 34 |
| 3.2.1 Mot ett logiskt matematiskt tänkande | 34 |
| 3.2.2 En intuitiv känsla för antal | 40 |
| 3.2.3 Relationen mellan delar och helhet | 44 |
| 3.2.4 Symbol- och begreppsförståelse | 46 |
| 3.2.5 Räknandets idé | 50 |
| 3.2.6 Att lösa matematikproblem | 52 |
| 3.3 Ett problematiserande förhållningssätt till småbarn och matematik | 59 |
| 4 Metodologisk förankring – att beskriva och tolka småbarns möten med matematik | 65 |
| 4.1 Metodologiska vägval | 66 |
| 4.2 Kvalitet i vetenskapliga studier | 70 |
| 4.3 Studiens urval och genomförande | 73 |
| 4.4 Analys och tolkning | 74 |
| 5 Vad småbarn erfar i mötet med matematik | 77 |
| 5.1 Matematiska begrepp | 77 |
| 5.1.1 Dimensioner och proportioner | 78 |
| 5.1.2 Positioner | 80 |

| | |
|--|------------|
| 5.1.3 Omfattning | 83 |
| 5.1.4 Månghet..... | 85 |
| 5.1.5 Sekvens | 87 |
| 5.2 Likheter och skillnader..... | 89 |
| 5.2.1 Visuella likheter och skillnader | 89 |
| 5.2.2 Auditiva likheter och skillnader..... | 97 |
| 5.2.3 Taktila likheter och skillnader | 100 |
| 5.2.4 Andra kvalitativa likheter och skillnader | 101 |
| 5.3 Delar och helheter | 102 |
| 5.3.1 Avgränsade delar..... | 102 |
| 5.3.2 Konstanta mängder..... | 105 |
| 5.3.3 Mängdökning | 107 |
| 5.3.4 Mängdminskning..... | 109 |
| 5.3.5 Mängddelning | 110 |
| 5.3.6 Parbildning..... | 111 |
| 5.3.7 Ordningsföljd..... | 113 |
| 5.4 Sammanfattning av vad småbarn erfar i mötet med matematik..... | 116 |
| 6 Kritiska villkor för småbarns lärande av matematik..... | 119 |
| 6.1 Samtidighet | 120 |
| 6.1.1 Att urskilja det gemensamma och specifika | 121 |
| 6.1.2 Att bilda mönster | 122 |
| 6.1.3 Att markera delar | 124 |
| 6.2 Variation | 126 |
| 6.2.1 Att sätta ramar för innebörden | 126 |
| 6.2.2 Att dela och sammanföra | 128 |
| 6.2.3 Att variera inom mängden..... | 129 |
| 6.3 Rimlighet | 130 |
| 6.3.1 Att relatera till kroppen | 130 |
| 6.3.2 Att beskriva mängder med räkneord | 132 |
| 6.3.3 Att gestalta matematiska begrepp..... | 134 |
| 6.4 Hållpunkt | 135 |
| 6.4.1 Att relatera till en konkret referenspunkt..... | 136 |
| 6.4.2 Att relatera till tidigare erfarna fenomen | 139 |
| 6.4.3 Att kategorisera..... | 140 |
| 6.4.4 Att strukturera händelser..... | 141 |
| 6.5 Sammanfattning av kritiska villkor för småbarns lärande av matematik | 143 |
| 7 Hur småbarn tillämpar sin förståelse av matematik..... | 145 |
| 7.1 Sociala spelregler..... | 145 |
| 7.2 Beskrivning av världen | 148 |
| 7.3 Redskap för problemlösning..... | 152 |
| 8 Diskussion..... | 157 |
| 8.1 Småbarns möten med matematik | 158 |

| | |
|---|------------|
| 8.2 Kritiska villkor för lärande | 165 |
| 8.3 Att tillämpa sina färdigheter | 168 |
| 8.4 Metoddiskussion | 168 |
| 8.5 Pedagogiska implikationer | 169 |
| 8.6 Fortsatt forskning | 171 |
| Summary | 173 |
| Referenser | 185 |

Figurförteckning

Figur 1. Barnens sittplatser runt bordet

81

Förord

Att skriva en doktorsavhandling är som en resa på öppet hav. Färden har ett mål, någonstans i fjärran, men vindar och havsströmmar gör att det inte på förhand kan bestämmas exakt vilken väg man ska ta. När färden når sitt mål och farkosten läggs an vid bryggan känns det befriande att ha kämpat, ibland i medvind och någon gång i motvind, och under resans gång lärt sig förstå och bemästra svårigheter och möjligheter som dykt upp. Under den här resans gång har jag lärt mig väldigt mycket, både om det område som forskningen berör och om mig själv och mitt tänkande.

För att bedriva vetenskapligt arbete krävs utrustning, tid och uppmuntran, vilket Svenska kulturfonden och Stiftelsen för Österbottens högskola gjort möjligt med ekonomiska bidrag och stipendier. Stiftelsens för Åbo Akademi forskningsinstitut har därtill bidragit med understöd för resor till kongresser, där många erfarenheter gjorts och internationella kontakter knutits.

Språket är en viktig del i den vetenskapliga avhandlingen. Sofie Tjärus har varit mitt bollplank i språkliga frågor under flera år, vilket jag är mycket tacksam för. Jag vill också tacka Barbro Wiik för noggrann granskning och värdefulla kommentarer som förbättrat avhandlingens spåk och Cynthia Sandström, för granskningen av det engelska språket.

För att nå sitt mål behöver man också stöd och erfarenheter av mera kunniga personer som tidigare tagit sig genom stormar av olika slag. Tack alla kollegor, forskare och vänner vid Enheten för barnpedagogik, Åbo Akademi i Jakobstad. Våra seminarier och kafferumsdiskussioner har ofta lett till fler frågor än svar, men ju mer man får veta, desto mer vet man att man ännu inte vet. Den nyfikenhet som väcks vid sådana tillfällen torde vara forskarens bästa källa för motivation. Min handledare professor Marita Lindahl har varit ett tålmodigt och uppskattat stöd i min strävan att hitta en väg att följa mot målet.Handledningssessionerna har varit krävande men också utmanande och har alltid lett mig vidare i mitt tänkande och gett mig mod att fortsätta färden.

De barn som deltagit i studien och personalen på daghemmens småbarnsavdelningar har varit ovärderliga resurser i studiet av småbarns erfarenhet och lärande av matematik. Ett stort tack riktas därför till barn, föräldrar och personal som välvilligt och med intresse låtit mig ta del av vardagen på småbarnsavdelningarna.

Ett stort tack riktas ytterligare till min underbara familj, som fått mig att stå stadigt i vardagen och många gånger räddat mig från att ta mig vatten över huvudet. Vardagen som mamma har också inspirerat mig och gång på gång visat att jag kan känna mig trygg i den analys och tolkning jag gör. Småbarns erfarenhet av matematik varje dag, i många olika sammanhang, därför riktar jag ett speciellt tack till Linnea, som dagligen visar mig matematik ur sitt perspektiv!

Jakobstad i mars 2007

Camilla Björklund

1 Bakgrund och syfte

1.1 Möten med matematik

Internationell forskning om småbarns lärande har fört med sig att det lilla barnet inte längre ses som skört och fragmentariskt, utan som en relativt kompetent och social person med förmågor och färdigheter, redo att ge sig ut i och att bemästra världen (Sommer, 1997; 2005). I denna förunderliga, men spännande värld sker många möten mellan barnet och fenomen av varierande slag. Möten med människor, ting och företeelser i olika sammanhang gör att barnet skapar sig en föreställning om hur hans eller hennes värld är beskaffad och hur olika fenomen, såsom matematiska symboler, begrepp och principer, kan förstås och användas. Ett möte med matematik kan då gestalta sig på följande sätt:

Linnea (1 år, 7 månader) letar i en låda med träklossar. I lådan finns kvadrater, trianglar, cylindrar och halvcirklar samt stavar i olika längder. Linnea lyfter ur några klossar och tar en röd halvcirkelformad kloss i sin hand. Hon håller klossen i handen och fortsätter leta i lådan. Linnea hittar en träfärgad halvcirkelformad kloss, som hon håller i sin andra hand. Linnea stiger upp från golvet och går fram till sin mamma, lägger klossarna med de raka sidorna mot varandra så att de tillsammans bildar en hel cirkel, håller händerna om klossarna så att delarna hålls ihop, visar klossarna för mamman och säger glatt "boll".

Att skilja former från varandra, att upptäcka hur två delar kan sättas samman och plötsligt bilda en ny form som känns igen som "boll", är en gestaltning av hur matematik kan te sig i ett litet barns vardag. Matematik är således ett fenomen som kan upptäckas bland träklossarna i en låda. Det lilla barnets glädje av upptäckten och möjligheten att förmedla sin upptäckt och sitt meningsskapande är uppenbar. Barnet är efter en sådan upptäckt en erfarenhet rikare som gör att framtida möten med former av olika slag möjligen förstås på ett förändrat sätt.

Förutom form kan åtminstone siffror, mönster, uppställningar, problemlösning, logiskt tänkande, språk och struktur sägas vara aspekter av matematik och listan kan säkert göras längre. Matematik är ett fenomen som många människor förknippar med skolans textuppgifter eller uträkningar där siffror och bokstäver byter plats efter något visst mönster. För någon annan kanske matematik ses som ett språk för att strukturera upp omvärlden i hanterbara och mätbara delar. Klockan är ett utmärkt exempel på ett sådant typiskt matematiskt redskap som används för att strukturera vardagens arbete och fritid i timmar och minuter. De siffror i olika utformning som omger människan är ett annat redskap, med vars hjälp det är möjligt att jämföra, förmedla och dokumentera mängder, massa eller tid.

Det samhälle som de flesta människor lever i i dag har gjort människan beroende av att förstå och att kunna använda olika former av matematik i en mängd olika sammanhang. En vanlig vardag kan se ut så att läraren stiger upp klockan sju och kokar frukostägget i tre minuter. Hon väljer mellan en tesked och en matsked men bestämmer att teskeden är tillräckligt liten för att få upp det löskokta innehållet ur ägget. För säkerhets skull kontrolleras att bäst före-datumet inte gått ut på mjölken till kaffet och läraren bläddrar sedan i dagstidningen fram till sidan tre med sportnyheterna där hon nöjd konstaterar att favoritfotbollslaget vann sin hemmamatch med 3–2. Efter en titt på klockan, vars långa visare pekar på sexan och korta visare mitt emellan sju och åtta, tas en snabb titt på termometern utanför köksfönstret. Läraren bedömer att fem minusgrader kräver mössa och vantar, höger vante på höger hand och vänster vante på vänster hand, alla fingrar i rätt finger på vanten. Därefter rusar läraren till hissen och trycker på knappen med symbolen 1, för att komma ner till bottenvåningen, hon går ut på gatan, ser att en buss närmar sig, bestämmer sig för att springa och hinner samtidigt med bussen fram till hållplatsen där hon kliver på buss nummer 82 som tar henne till arbetsplatsen. Lärarens vardag har just börjat men redan har hon gjort många möten med matematik som fått henne att göra uppskattningar av tidsanvändning, bedömning av rimligt klädval och jämförelser och värdering av mängder, antal och avstånd. Lärarens dag fortsätter antagligen med liknande avgörande, men ofta oreflekterade, möten med matematik i olika former.

Att skilja ur det matematiska innehåll som människan möter under en helt vanlig dag synliggör hur beroende människan är av att förstå och att kunna använda sig av matematik. Å andra sidan har det västerländska samhället gjort viss matematisk kunskap, såsom huvudräkning, i det närmaste till kuriosakunskap. Det lär i skrivande stund finnas en bank på Åland där kassörskan fortfarande inte använder någon dator, utan traditionella bankböcker. Kassörskans matematiska tänkande och sinne för matematik är då desto viktigare för att hon ska utföra sitt arbete utan felaktigheter, vilket ju förväntas av en bankkassörskan som har hand om andra människors pengar. I dag äger dock de flesta finländare en mobiltelefon, och alla mobiltelefoner på marknaden torde ha kalkylator för beräkningar med de fyra räknesätten. Det mesta räknandet sker därför i dag datoriserat, oberoende av om beräkningen gäller mellanskillnaden vid byte av bil eller när det är frågan om mera avancerade beräkningar av atomers relativa hastighet, där mobiltelefonens kapacitet knappast räcker till. Trots tillgången till hjälpmedel av olika slag, anses matematiskt tänkande och kunnande vara en viktig förmåga i dagens och framtidens samhälle. Snarare är det så att matematiskt kunnande blivit ännu viktigare i dag när en vanlig medborgare har tillgång till också avancerade hjälpmedel såsom kalkylator i fickformat. Kunnandet inbegriper nu att verkligen förstå i vilka sammanhang kalkylatorn skall användas på ett visst sätt och huruvida svaren kan tänkas vara rimliga.

1.2 Det matematiska arvet

Matematik kan sägas vara ett av de största bidragen till människans utvecklande av samhällen och kultur. Den moderna vuxna människan förstår

överlag grunderna i att räkna och att mäta, och använder matematiska färdigheter dagligen. Matematik är dock inte enbart symboler och aritmetiska knep som lärs ut i skolan, utan matematik har oavbrutet varit kopplad till all mänsklig verksamhet och kultur. Mankiewicz (2001) menar att matematiskt tänkande i första hand handlar om föreställningar om tid och rum, om tal och om att upptäcka samband. Devlin (1994) ser också betydelsen av samband i försöket att definiera matematik. Han påstår nämligen att matematik är studiet av mönster, både konkret erfarna och imaginära.

Matematikens historia går tillbaka åtminstone 5000 år i tiden. De matematiska system och begrepp som vuxit fram har haft och har fortfarande stor betydelse för hur människor kommunicerar och samspelar med varandra i vardagen (Stewart, 2001). De språkliga variationerna, och till exempel spår av sätt att räkna på kroppsdelar, tyder på en universell historisk utveckling. I möten mellan olika folkslag tas nya fungerande system och uppsättningar av räkneord över, som kan ersätta tidigare använda system. Detta innebär att ingen enskild individ eller grupp av människor har infört en form av räkneord eller ett system som sedan anammats och spridits vidare av andra folkslag. I stället antas system och tänkesätt ha utvecklats samtidigt på olika håll, påverkade av möten med andra sätt att tänka och använda matematiska redskap (Butterworth, 1999; Mankiewicz, 2001). Att lära sig ett system är en strategi som gör det möjligt att slippa memorera oändliga mängder fakta, vilket gör att fungerande system gärna tas tillvara och utvecklas för att underlätta det dagliga livet. Tiobassystemet är exempel på ett fungerande och välutvecklat system där varje siffras namn, ordningsföljd och antalsinnebörd inte behöver läras utantill eftersom innebörden ligger i själva strukturen (Nuñez & Bryant, 1996).

Det allra tidigaste fyndet som tyder på numeriska noteringar har hittats i södra Afrika. Ett ben har ristats med 29 tydliga skårar och dateras till omkring 35 000 f.Kr. Benet påminner om så kallade kalenderkäppar som används för att markera tidens gång. Ett något nyare fynd från 30 000 f.Kr. är ett vargben som upptäcktes i dåvarande Tjeckoslovakien som har 55 skårar i två serier med grupper om fem. Den tydliga grupperingen av markeringar tolkas som en notering av någon mängd, möjligen en förteckning över hur många djur som har nedlagts. Sådana skårar på ben gestaltar, enligt Säljö (2005), en idé som ett symboliskt uttryck och ett intellektuellt redskap i och med att redskapet avsiktligt skapats i syfte att dokumentera och kommunicera något av betydelse.

De främsta ledtrådarna till utvecklingen av matematik torde komma från det gammalbabyloniska riket (2000–500 f.Kr.). Tidiga skrifter på lertavlor visar att babylonierna använde ett talsystem med 60 som bas, vilket gjorde att de kunde göra avancerade beräkningar och noggranna astronomiska förutsägelser. Att använda 60 som bas lever kvar ännu i dag bland annat i sättet att mäta tid där en timme motsvarar 60 minuter. Samtida med babylonierna men på andra sidan jordklotet levde mayafolken (1000 f.Kr.–900 e.Kr.). Mayafolken utvecklade också väl fungerande talsystem, men använde basen 20. De fäste också stor vikt vid astronomiska beräkningar och förutsåg till exempel mån- och solförmörkelser med förbluffande noggrannhet. Oberoende av varandra har alltså flera folkslag utvecklat avancerade metoder för beräkningar och för att hålla reda på naturens skeenden. Också

den välkända "Pythagoras sats" är kunskap som i själva verket utvecklades och användes för geometriska beräkningar i Kina, Indien och Babylonien långt innan grekiska Pythagoras bevisade satsens giltighet (Mankiewicz, 2001).

Det babyloniska studiet av matematik berörde, enligt Devlin (1994), i huvudsak tal, tillvägagångssätt och tekniker för beräkningar och mätningar. Under tiden 500 f.Kr.–300 e.Kr. avancerade studiet av matematik i Grekland och fokuserade då mera på geometri, det vill säga tal kopplat till former. Talen hade naturligtvis sin betydelse i studiet, men talteorierna accepterades som redskap för att beräkna ytor och former. Euklides (ca 325–265 f.Kr.) är, enligt Mankiewicz (2001), en av de mer välkända grekiska matematikerna vid denna tid. Han skrev det kända verket *Elementa* som är en sammanfattning av definitioner och regler för geometri. *Elementa* har kopierats gång på gång och varit en mycket betydelsefull lärobok som översatts och redigerats för att passa även andra kulturers intressen än den grekiska. Också i Kina sammanställdes vid ungefär samma tid skriftliga verk om traditionella metoder att beräkna geometriska problem, men enligt den kinesiska traditionen beskrivs dessa ofta som lösningar på vardagliga problem, såsom hur man styckar land eller hur många tupper och kycklingar som kan köpas för en viss summa pengar.

Många matematiska framsteg och utvecklandet av mera noggranna metoder för beräkningar har sin utgångspunkt i filosofiska, astronomiska och religiösa föreställningar. Till exempel användes matematik i Europa i början av första årtusendet efter Kristus för att göra upp kalendrar som visar när påsken infaller, vilket kräver goda kunskaper i astronomi och matematik. I grekiska och romerska skolor och universitet ansågs matematik vara en viktig del av undervisningen, medan den allmänna kunskapen för gemene man samtidigt var ytterst elementär. Den ekonomiska tillväxten i 1500-talets Europa skapade dock behov av räknekunniga personer både för handel och för sjöfart. Detta gjorde att hantverkare, köpmän och sjömän behövde utbildning i grundläggande matematik för att hantera olika system av vikter, mått, valutor, bokföring och navigering. Vid denna tid blir de arabiska siffrorna också mera allmänna även om det ännu in på 1800-talet användes räknestavar där till exempel betalda belopp bokförs med skåror och vardera parten behåller var sin stav (Mankiewicz, 2001).

I varje aspekt av människans aktiviteter, vare sig det gäller handel, jordbruk, spel eller krigsföring, är matematik synlig. Vare sig det är en snickare som uppskattar mängden virke som behövs för att göra en möbel eller två barn som delar en kaka, så försiggår matematiskt tänkande. Ofta upplevs matematik i sådana fall nära knuten till det vardagliga meningsfulla livet där hushållandet med material och strävan efter jämlikhet är betydelsefullt och tycks långt från algoritmer och strategier som av tradition lärs ut i skolan (Butterworth, 1999; Mankiewicz, 2001). Matematik är på så sätt en högst mänsklig aktivitet. Devlin (1994) påstår till och med att studiet av matematik är studiet av mänskligheten, eftersom varje begrepp, varje punkt eller yta är en abstraktion av den omvärld som formulerats av människan och som existerar i mänsklighetens kollektiva medvetande.

Under 2000-talet värderas matematik som akademiskt ämne fortfarande högt, inte minst i jämförande studier över skolframgångar (se till exempel

Pisa-studien, OECD, 2004). Den livsmiljö som ett barn är delaktigt i sätter ramar för den kunskap som anses viktig i just den tiden och den kulturen (Sommer, 2005). När ett barn växer upp i Norden finns det därför förväntningar på barnet att det skall ta till sig kunskap om matematik och kunna använda denna kunskap i olika sammanhang. Som vuxna har de flesta inga svårigheter att förstå till exempel vilken betydelse en siffra har i ett visst sammanhang. Siffran fem kan innebära fem russin lika väl som fem barn, en femeurosedel är lika mycket värd som fem eneuroslantar, femman på bussen har ingen egentlig numerisk betydelse medan femman på resultatlistan över 100-metersloppet har en bestämd betydelse för rangordningen. För ett barn som stiftar bekantskap med siffran fem är innebörden antagligen inte lika självklar. Symbolen förekommer i många olika sammanhang men det som är uppenbart för en vuxen bör ses ur barnets perspektiv – hur ska symbolen tolkas vid varje enskilt tillfälle? Uppgiften är inte alldeles lätt, men utgör ändå något som det tas för givet att barn lär sig för att klara sig i det dagliga livet.

1.3 Matematisk inriktning i finländsk barndagvård

Matematik är en del av det dagliga livet, både för vuxna och för barn. Att det är ett fenomen och ämnesområde som bör ingå i barns fostran och socialisation är inte heller någon ny tanke. Redan de gamla grekerna värderade matematik högt som kunskapsämne, även om matematik som inriktning i småbarnsfostran lyfts fram i ett betydligt senare skede. Friedrich Fröbel, en romantiker inspirerad av Rousseau, var verksam som pedagog under början av 1800-talet och hade ett brinnande intresse för natur, naturvetenskap och matematik. Fröbel studerade hos Pestalozzi och fann sitt livs kall i att undervisa. Han har haft stort inflytande på pedagogiken och barndagvården i Finland, vilket har satt sina spår bland annat i begreppet 'barntädgård' och de lekgåvor som kan återfinnas på många daghem ännu i dag (Helenius, 2001).

Frøbels lekgåvor består av klossar i geometriska former och även andra material, med vars hjälp barn tänktes konkretisera och bättre kunna förstå sin omvärld. Den grundläggande tanken är att barnet utvecklas och lär sig genom att i fri sysselsättning upptäcka strukturer och generella drag i de geometriska figurerna och deras motsvarigheter i omvärlden. Matematiken har således en framträdande plats i Frøbels pedagogik, vilket kommer till uttryck inte minst i hans uppfattning att människan kan komma till insikt och förstå naturen genom matematiska uttryck (Fröbel, 1995/orig. 1826). Matematik ses av Fröbel som en ständigt utvecklande verksamhet av kunskapsalstrande, som inte består av bestämda former och sanningar utan utvecklas oavbrutet genom människans sökande efter enhetlighet och mångfald. Fröbel beskriver barnets utveckling som en helhet, där alla sinnen stimuleras och barnet utmanas till jämförelse och upptäckt av samband. Han anser att barnet först bör bekanta sig med grundformer för att sedan arbeta med delar som tillsammans bildar en helhet. Klossarna som ingår i lekgåvorna kan därför sättas samman på många olika sätt och Fröbel uppmuntrar denna fria lek med gåvorna, samtidigt som gåvornas utformning i sig själv uppmuntrar

till systematisering och struktur. Det första medvetna erfandet av geometri kan vara när en vuxen och ett barn tillsammans försöker sätta samman varje del på en bestämd plats för att bilda den ursprungliga formen. "En uppfostran av människan utan matematik och i synnerhet utan grundlig kunskap om talen, vartill sluter sig kunskapen om form och storlek, blir därför ett lappverk utan någon enhetlighet" (Fröbel, 1995/1826, 141).

Den pedagogik och de metoder som Fröbel utvecklade spred sig snabbt i Europa under 1800-talet. Industrialiseringen och urbaniseringen gjorde att samhället ställde nya krav på familjeförsörjning och den institution som Fröbel byggt upp i form av barnträdgården fick sin givna plats och sitt värde. I och med att utbildade personer mer organiserat hade hand om barngrupper, föddes möjligheten att utveckla barnpedagogiken och arbetssätten. Leken var alltid av stor betydelse för Fröbel. Leggåvorna och aktiviteterna ska uppmuntra barn att på ett mångsidigt sätt undersöka, analysera, jämföra, sortera, upptäcka likheter och skillnader, samt att minska, öka eller dela mängder på varierande sätt. Frøbels pedagogik har dock kritiserats för dess styvhet och inflexibilitet i och med att den logiska kedjan av aktiviteter och lekgåvor inte bör brytas, vilket har gjort att lekgåvorna fallit i glömska och sällan används så som de ursprungligen var tänkta (Helenius, 2001).

Den finländska folkskolans fader, Uno Cygnaeus, besökte under mitten av 1800-talet barnträdgårdar i Mellaneuropa och fattade tycke för dem. Han tog med sig idén till Finland och såg till att de första barnträdgårdslärarna kunde ta till sig de nya pedagogiska idéerna utomlands. De finländska barnträdgårdarna för 3–6-åriga barn som fick sin början i slutet av 1800-talet har på så sätt, enligt Helenius (2001) samt Niiranen och Kinos (2001), blivit starkt influerade av Frøbels tankegångar. Naturligtvis har barnpedagogiken utvecklats och arbetet i barnträdgårdarna med barn yngre än skolåldern har genomgått många förändringar under det efterföljande århundradet. Den röda tråden fram tills dagvårdslagen trädde i kraft år 1973 tycks ändå, enligt Niiranen och Kinos (2001), vara en Fröbelinspirerad pedagogik, även om det i första hand är arbetssätt och metoder som förts vidare, inte alltid en medvetandegjord pedagogisk grundsyn i arbetet. Av betydelse är då närhet, omvårdnad och en hemlik miljö där barn och vuxna tillsammans upptäcker världen, men också att barnet genom fri lek tillägnar sig de färdigheter han eller hon behöver för sitt vuxna liv.

Niiranen och Kinos (2001) menar att dagvårdslagen från år 1973 och de riktlinjer för dagvården som arbetades fram för såväl barn mellan 3 och 6 år som mellan 0 och 3 år, visserligen lyfter fram betydelsen av en mera medveten pedagogik i barndagvården, men ofta blev verksamheten inrutad och styrd av de vuxnas tankegångar och intressen, med utvecklingspsykologiska teorier som grund. I *Dagvårdens verksamhetsplan för barn under tre år* (1986) uttrycks tydligt att dagvården inte är ämnad som förvaring av barn medan föräldrarna förvärvsarbetar, utan skall vara ett stöd för barnets fostran och utveckling till en social och aktiv individ redan från tidig ålder. De områden som i huvudsak fokuseras i verksamhetsplanen är fysisk, språklig och social fostran och omvårdnad utgående från barnets utvecklingsnivå. Piagets inflytande är mycket tydligt och lägger en grund för verksamheten där barns tankeutveckling ses i form av stadier och "att kunna eller inte kunna". I fråga om lärande av matematik nämns endast att barn genom

försök och misstag utvecklar sina sinnen och till exempel lär sig känna igen former. Lek beskrivs som barns naturliga sätt att utforska omvärlden och som en verksamhet där alla viktiga färdigheter kan utvecklas. Barn skall dock utmanas och fördes med utmaningar lämpliga för deras utvecklingsnivå och på så sätt utveckla sitt tänkande genom aktiv problemlösning (Hännikäinen & Rasku-Puttonen, 2001).

En "barncentrerad renässans" uppkom under 1990-talet i och med nya forskningsrön och influenser av alternativa arbets- och förhållningssätt till barn. Barn ges i dag större frihet och möjligheter till egna initiativ och aktiviteter. Niiranen och Kinos (2001) menar att synen på barns lärande vänder mot ett synsätt där barnet aktivt skapar sin förståelse av omvärlden i samspel med andra människor och ting. Pedagogens uppgift är att ta tillvara situationer där barnets förundran och frågor uppmärksammas och att tillsammans med barnet söka svar på frågor som är relevanta sett ur barnets perspektiv. När barn tidigare uppmuntrades att själva utforska, är nu det viktiga inte att göra och "ha" kunskap utan att ifrågasätta och tillsammans med andra försöka förstå ett fenomen, till exempel så som Pramling Samuelssons (se till exempel Pramling, 1994) många studier och projekt visar (Hännikäinen & Rasku-Puttonen, 2001). Vallberg Roth (2002, 126) beskriver denna förändring till dagens syn på barnet som en förändring "från likhetsbarn till ett pluralistiskt, situerat barn". Lärande kan inte undvikas och det blir allt mer intressant att diskutera *vad* barn lär sig och hur kontexten som barn deltar i påverkar lärandets utfall.

Det nationella styrdokumentet *Grunderna för planen för småbarnsfostran* (Stakes, 2005) fungerar i dag som en ram för det pedagogiska arbetet med barn mellan 0 och 5 år i Finland. Fostran ses som kulturellt bunden där syftet är att förbättra samhället och världen samt att stöda en balanserad tillväxt, utveckling och inläring hos barnet. Barnets självständiga lek ses fortfarande som en betydelsefull aspekt av barnets lärande även om samspelet med lyhörda kommunicerande vuxna lyfts fram som en central del. Enligt Hujala (2002) bygger grunden för den pedagogiska verksamheten på erkännandet av barnet som en aktiv meningsskapare i lärandeprocessen, medvetenhet om betydelsen av interaktion mellan barn och omgivning samt uppmärksamhet på det ansvar vuxna har att erbjuda barn en utmanande miljö för lärande. I *Grunderna för planen för småbarnsfostran* betonas ytterligare barnets perspektiv och individualitet i strävan att stöda barns självständighetsutveckling. Genomgående eftersträvas ett helhetstänkande såväl i den dagliga verksamheten som i barnets hela utveckling som människa. I växelverkan med människor och ting i omvärlden anses barnet hela tiden lära sig, även om det inom småbarnsfostran ställs upp några centrala inriktningar, där matematisk inriktning är en del av denna helhet. Syftet med de innehållsliga inriktningarna är inte att barn skall studera ett läroämne, utan att barn skall tillägna sig medel och färdigheter som hjälper dem att förstå och kritiskt granska de mångfasetterade fenomen som de möter i omvärlden. Den matematiska inriktningen innebär att barn bör ges möjlighet att jämföra, dra slutsatser och bekanta sig med begreppssystem och räknande i vardagsanknutna och lekrelaterade situationer som intresserar dem.

1.4 Studiens syfte och frågeställningar

Under senare år har den pedagogiska forskningen allt mer uppmärksammat yngre barns lärande och även deras utveckling av matematiskt tänkande. Att matematik inte är kunskap som börjar drillas vid skolstarten är de flesta barnpedagoger överens om, i synnerhet som *Grunderna för planen för småbarnsfostran* (Stakes, 2005) också poängterar en matematisk inriktning i verksamheten på daghemmen. Det pedagogiska styrdokumentet tar utgångspunkt i att barn anses utveckla sin förståelse och kunskap utgående från tidigare erfarenheter. Kunskapen byggs upp i samspel med omgivningen, till exempel så att intryck från omgivningen och barnets fantasi vävs samman till en lek som barnet engagerar sig i. En sådan syn på barns lärande förutsätter att barn är nyfikna och lärolystna av naturen och kapabla att tillägna sig ny kunskap utgående från tidigare erfarenheter och det de erfar i stunden, vilket även pedagogisk forskning om småbarn ger belägg för (se Lindahl, 1996; Öhberg, 2004).

I föreliggande avhandling används ofta begreppet 'småbarn', vilket kräver ett förtydligande för att missuppfattningar skall kunna undvikas. Om inget annat anges antas småbarn vara i åldern 0–3 år, eftersom barn på daghemmens småbarnsavdelningar vanligtvis är i denna ålder. Begreppet 'barn' kan dock avse både småbarn och barn äldre än tre år.

Det övergripande syftet med föreliggande avhandling är att synliggöra småbarns möten med matematik i daghemsmiljön. Syftet med den empiriska studien är därmed att urskilja och beskriva småbarns erfarenhet och lärande av matematik. Fokus ligger på *vad* barn erfar av matematisk karaktär, *hur* detta erfarenhet gestaltar sig och *hur* barn använder sin förståelse för att bemästra sin omvärld. Forskaren försöker beskriva och analysera småbarns möten med matematik, så som matematik framträder för barnen i daghemsmiljön. I dessa möten bildar sig barn uppfattningar av olika aspekter av matematik och får möjlighet att utveckla sin förståelse av de matematiska fenomen som finns tillgängliga i deras miljö. Hur barn undersöker, använder och förmedlar sig om fenomen i omvärlden tolkas som uttryck för hur de förstår de fenomen som kulturen och miljön tillhandahåller.

Avsikten med en studie av detta slag är att göra det möjligt för dem som arbetar med barn att upptäcka den förståelse och den mångfald av erfarenheter av matematisk karaktär som barn tillägnar sig i vardagen. På så sätt kan barns lärande stimuleras och miljön kan göras inbjudande och utmanande för barnens utforskande aktiviteter.

1.5 Avhandlingens disposition

Kapitel 1 Bakgrund och syfte

I det inledande kapitlet ges en kort beskrivning av den matematik som barn och vuxna kan möta i vardagen. En historisk tillbakablick visar hur matematiska principer som används i vardagliga sammanhang vuxit fram under många år och fortfarande är en betydelsefull del av all mänsklig verksamhet.

Den matematiska inriktningen i finländsk barndagvård presenteras även kort innan forskningsproblemet och syftet med studien preciseras.

Kapitel 2 Kunskapsteoretiska distinktioner

Frågor om kunskapens natur och relationen mellan människa och omvärld kan följa många inriktningar. Synen på matematik och barns lärande får betydande konsekvenser för hur undervisning och fostran genomförs. Det är därför nödvändigt att lyfta fram några riktningar som såväl i pedagogisk verksamhet som i forskning har och har haft betydelse för hur människan antas lära sig matematik.

Kapitel 3 Forskning om småbarns lärande

För att göra en tillförlitlig tolkning av småbarns erfارande och lärande är det nödvändigt att ha en viss förförståelse för det generella i barns tankeutveckling och lärandeprocess, utan att på förhand ställa upp fasta tolkningskriterier. En redovisning av tidigare och aktuell forskning inom området fungerar som bakgrund för den förståelse och de förväntningar som forskaren har av de kvalitativt skilda sätt som barn kan förstå matematik på.

Kapitel 4 Metodologisk förankring – att beskriva och tolka småbarns möten med matematik

Den analys och de tolkningar som görs i en studie har alltid en grund i vissa antaganden om människan, omvärlden och kunskapen. För att analys och tolkning skall kunna ses som tillförlitliga bör den ontologiska och epistemologiska grundsynen läggas fram och problematiseras. De metodologiska vägvalen diskuteras därför i kapitel fyra och leder vidare till en beskrivning av hur den aktuella studien genomförts och analyserats.

Kapitel 5 Vad småbarn erfar i mötet med matematik

I kapitlet redovisas resultatet av den analys som gjorts beträffande vad småbarn erfar i mötet med matematik. Möten med människor, ting och företeelser är alltid situationer som ger barnet möjlighet att erfar något och lära sig något. Det är dessa möjligheter till lärande som beskrivs och uttolkas med fokus på lärandets objekt.

Kapitel 6 Kritiska villkor för småbarns lärande av matematik

Lärande är en process som alltid inbegriper en akt av något slag. I föreliggande studie fokuseras lärandets akt och sådana kritiska villkor som framträder som betydelsefulla i småbarns strävan att förstå matematik som de möter i sin vardag.

Kapitel 7 Hur småbarn tillämpar sin förståelse av matematik

Matematik är inget objekt i sig, utan ett redskap. I de sammanhang som barn på olika sätt använder sig av detta redskap tolkas deras handlingar som uttryck för hur barn förstår syftet med matematik och dess användningsmöjligheter.

Kapitel 8 Diskussion

De resultat som presenteras i föreliggande studie diskuteras avslutningsvis i ljuset av tidigare forskning och teorier om barns tankeutveckling och lärande av matematik. Den fenomenografiska och den videografiska ansatsen problematiseras och diskuteras i förhållande till metodologiska frågeställningar. Diskussionen utmynnar i pedagogiska implikationer och tankar om fortsatt forskning.

2 Kunskapsteoretiska distinktioner

Hur människans relation till sin omvärld och till fenomenen i den förstås, får oundvikligen konsekvenser för hur lärande kan beskrivas och tolkas. Varje pedagog som i utövandet av sitt yrke strävar efter att något barn skall lära sig något om världen, har mer eller mindre medvetet en idé om hur lärandet sker och vad som karakteriserar kunskapen. I detta kapitel redovisas i stora drag olika sätt att förstå matematik och matematikinläring. Dessa kunskapstraditioner har haft och har betydelse för hur lärandet av matematik förstås och hur undervisning genomförs. Barnen i föreliggande studie antas leva och lära i en värld där andra människors förståelse och förhållningssätt kan ha betydelse för barnets möjligheter till lärande. I studiet av barns erfarenhet och lärande är relationen mellan människan och den omvärld hon deltar i och erfar därför nödvändig att lyfta fram och problematisera.

Den grundläggande synen på vad matematik egentligen är får betydande följder för hur människan antas tillägna sig matematisk kunskap. Frågan om vad kunskap är har utmanat filosofers tänkande under lång tid. Åsikterna går isär, men de grunder som sägs kunna säkerställa en utsaga som sann är avgörande för vad som karakteriserar skillnaden i åsikterna. Två viktiga begrepp som återkommer i diskussionen om sann kunskap är a priori och a posteriori kunskap. Kunskap a priori grundar sig på logiskt resonemang och slutledningar, medan kunskap a posteriori grundar sig på empiri och observationer av omvärlden.

Matematik har i tusentals år ansetts vara den del av det mänskliga tänkandet som kan bidra med exakthet och absolut universell sanning (Ernest, 1998). Huruvida så är fallet eller om matematik kan förstås på annat sätt får konsekvenser för såväl ontologiska, epistemologiska som ideologiska spörsmål om människa, kultur och lärande. Filosofer och matematiker har genom tiderna försökt beskriva och förstå matematikens väsen, vilket lätt kan leda till en mystifiering av fenomenet matematik. Matematik är ändå i grunden en mänsklig verksamhet med förankring i den värld och kultur som människan lever i och spelar på så sätt en betydande roll i alla mänskliga sammanhang (Hersh, 1997). Matematiska idéer och matematisk verksamhet växer fram ur samhällets behov att hantera mängder, ytor och volymer, för att sköta ekonomi, göra kalendrar eller tillverka maskiner. Andersson (2006) menar att med en matematisk förmåga avses den medfödda förmågan som människan har att förstå idén med till exempel antal och volym, samt förmågan att reflektera över, resonera och dra slutsatser om sådana fenomen. Matematisk kunskap är på många sätt kumulativ, det vill säga kunskap och kunnande är resultatet av en lång utveckling, men det är såväl en historisk och kulturell utveckling som en individuell.

2.1 Tingens oberoende existens

Platon filosoferade redan på 400-talet f.Kr. över matematik, dess väsen och mening. Platons sätt att se på världen och människan i världen innebär att matematik existerar, både som struktur och objekt, oberoende av människan och hennes verksamhet. Att tänka matematiskt innebär då att upptäcka redan existerande samband av matematik. Matematisk kunskap består i detta fall av beskrivningar av matematiska strukturer och objekt samt hur strukturerna relaterar till varandra (Ernest, 1998; Shapiro, 2000).

Platons idéer bygger, enligt Hersh (1997), på pythagoreernas världsbild, nämligen att matematiken i sig är gudomlig i och med de matematiska mönster och regelbundenheter som kan återfinnas i naturen. Ett känt exempel är sambandet mellan tal och musikaliska intervall, där längden på en sträng kan relateras till harmonier som uppkommer när strängen spelas. Att förstå matematik innebär på så sätt en skymt av en gudomlig visdom, något som inte kan accepteras som ett verk av människan. Ett sådant synsätt skiljer tydligt människan från den värld hon upplever med sina sinnen. Kunskapen blir absolut och synsättet ger inte egentligen någon vägledning till hur människan kan tänkas tillägna sig denna kunskap.

Trots att detta sätt att förstå matematik på flera sätt känns vardagsfrämmande, är matematik ett fenomen där det ofta förutsätts finnas ett rätt svar, men det epistemologiska problemet kvarstår hur människan kan upptäcka det rätta svaret och hur hon kan veta att det är svaret om hon inte redan känner till det. Platon åskådliggör kunskapstillägandet i en berättelse där en pojke utan skolning återerinar sig kunskap om geometri. Kunskapen sägs finnas hos pojken från ett tidigare liv och han behöver enbart påminnas om det rätta svaret för att känna igen det (Shapiro, 2000). I och med detta rationalistiska tänkesätt kan matematik vara något som bara är ämnat för vissa att förstå och problem med matematikinläringen kan inte lösas på något mänskligt sätt.

En annan rationalist som kan nämnas i sammanhanget är Frege. Frege levde visserligen ca 2000 år efter Platon, men den grundläggande synen på kunskap som resultat av återerinring, eller logisk slutledning, kan kännas igen hos dem båda. Frege (2002/orig.1884) menar att matematik är intimt förbunden med logik, i och med att vissa förhållanden bevisas med hjälp av gemensamt överenskomna tecken och symboler. En matematiker strävar efter att bevisa samband, där inga motsägelser stöts på och där det är möjligt att uppnå ordning och lagmässighet. Frege ger som exempel $2 + 3 = 5$, vilket för de flesta matematiker, filosofer och människor med grundskoleutbildning ter sig lätt att bevisa. Fingrarna fungerar utmärkt för att åskådliggöra satsen och utföra operationen. Det är också förhållandevis lätt att föreställa sig två fingrar och tre fingrar som tillsammans bildar fem fingrar på en hand. Men att bevisa $135\,664 + 37\,863 = 173\,527$, är inte längre lika enkelt för gemene man. Hur ser $173\,527$ uppsträckta fingrar ut och hur kan någon vara säker på att det är så många? De båda satserna är i grunden lika men ändå olika. Frege vill inte skilja mellan små och stora tal i bevisföringen eftersom små och stora tal är logiskt relaterade till varandra i och med att varje tal kan definieras ur andra tal ($5 = 3 + 2$, där $3 = 2 + 1$ och $2 = 1 + 1$). På detta sätt är det också enligt Frege möjligt att tänka sig det logiska

i hur ett flersiffrigt tal är uppbyggt, även om det inte är möjligt att föreställa sig en mängd bestående av så många föremål.

Frege (2002/1884) strävar efter att definiera talbegreppens innebörd och tallagarna genom en mycket detaljerad analys. Han framhåller betydelsen av att förstå talbegrepp i sitt sammanhang och inte enskilt. Det är till exempel inte möjligt att föreställa sig "två" utan att föreställa sig två stycken av något. Tal är inte någon egenskap hos föremål, såsom "grönt" eller "mjukt", utan kan användas för att jämföra kvalitativt skilda ting. Talen får på så sätt en abstrakt och generell prägel. På samma sätt anser Frege att talbegreppen inte heller kan vara subjektiva, eftersom talen då skulle få lika många personliga innebörder som det finns människor. En överenskommen betydelse är alltså förutsättningen och denna kan människan resonera sig fram till genom analys och logik. Logisk sanning ses enligt Frege som absolut och generellt gällande. Talbegrepp existerar således, utgående från Freges logiska slutledning, oberoende av den tänkande människan (Shapiro, 2000). Den ontologiska frågan hur människan kan ha kunskap om något objekt i en sådan abstrakt värld har dock gjort denna typ av analytiskt resonemang problematisk.

2.2 Kunskap baserad på sinnesintryck

Motpolen till det rationalistiska resonemanget som Platon gav upphov till, är en empiristisk tolkning av människans varande i världen. Människan föds då som ett tomt blad och tillägnar sig kunskap om sin omvärld helt och hållet genom sina sinnesintryck (Shapiro, 2000). Detta resonemang för med sig att ett begrepp alltid är förknippat med ett fysiskt erfaret objekt, vilket innebär att till exempel en cirkel inte kan existera utan att hänvisa till någon specifik cirkel. Lärande innebär att kunskapen som genereras ur empirin relateras till tidigare erfarenheter och en förändring i individens kunskap sker. Undervisning innebär då att förse den lärande individen med sådana erfarenheter som kan förändra kunskapen i önskad riktning.

En av de mest kända empiristerna är John Locke. Enligt Locke (1916/orig. 1693) är det uppfostran som gör människan till den hon är, vilket innebär att alla intryck som barnet utsätts för formar dess personlighet. Undervisning handlar på så sätt också om karaktärsdanandet av barn. Övning och vana anses vara av stor vikt för intellektuell utveckling, eftersom regler glöms bort, men det som blivit en vana förblir betydelsefullt för människan. Locke menar dock att människan har förmågor och begåvning som skiljer henne från andra människor, vilket också bör tas i beaktande i uppfostran. Målet med uppfostran, liksom undervisning, är dock alltid att forma en förständig och välartad människa. Fel och brister hos människan kan alltid tränas bort, utgående från Lockes sätt att se på utveckling och lärande.

Locke (1916/1693) ser matematik främst som ett redskap för att förstå andra vetenskaper. Locke menar att barn lär sig matematik genom att öva på en sak åt gången tills det är väl inpräntat. Först när kunskapen är fullkomligt begripen, tillåts barnet bekanta sig med ett nytt begrepp.

För en empirist finns det enligt Shapiro (2000) ingen möjlighet att veta något om världen annat än genom sinnesintrycken eller kunskap som genererats

ur erfarenheter och konkreta sinnesintryck. Ingen kunskap kan således vara fullkomligt a priori. Endast konkret erfarna fenomen existerar och bygger upp människans uppfattningar och idéer om den värld hon lever i. Generaliseringar av erfarenheter gör att människan förväntar sig vissa skeenden och erfar något som "sant", till exempel har $2 + 3$ visat sig vara 5 så många gånger att individen till slut förväntar sig att $2 + 3$ alltid skall vara lika många som 5. Antal bör alltid vara antal av något och geometri har en innebörd endast som hänvisning till konkreta former. Tillämpningen av detta ter sig enligt Engström (1998) problematisk, eftersom den konkreta erfarenheten av till exempel en vattendroppe och en vattendroppe till inte längre ses som två vattendroppar utan som en något större vattendroppe. Erfarenheterna av att sätta samman en sten och en sten till är då inte något att bygga förståelsen av vattendroppars mängd och massa på. Empirismen stöter likaså på svårigheter när idéer, visserligen grundade på erfarenheter, studeras och relateras på allt högre abstraktionsnivåer, långt från de konkret erfarna fenomenen. Empirismens pedagogiska följd blir ett behavioristiskt sätt att se på lärande och undervisning där den lärande tränar färdigheter och kunskap överförs hierarkiskt.

Empirismen i dess ursprungliga form med John Locke som förgrundsfigur möter kritik på grund av dess hävdan att sinnesintrycken representerar världen så som den är. Däremot har Lockes filosofi inneburit ett annorlunda sätt att tänka där fokus skiftat från det ontologiska till erfarenheternas betydelse för hur människan förstår omvärlden (von Glasersfeld, 1997). Detta byte av filosofisk fokus leder bland annat till Kant och vidare till det konstruktivistiska sättet att tänka där kunskap och kunskapstillägnande i högre grad problematiseras och diskuteras.

2.3 Kunskapstillägnande som process

Som en syntes mellan rationalismen och empirismen kan en mera humanistisk syn på matematik återfinnas hos Kant (Hersh, 1997; Shapiro, 2000). Kant (2004/orig.1781) utvecklar bland annat idéer om grunderna för det matematiska tänkandet hos människan och menar att det endast är den fenomenella världen, människans egen upplevelse, som kan undersökas vetenskapligt och fås kunskap om. Matematik är därmed förknippad med människans erfarenheter och föreställningar om världen. All kunskap tar sin början i erfandet men kunskapens utformning beror på den process som bearbetar sinnesintrycken och formar föreställningar om det erfarna.

Kant (2004/1781) menar att matematik alltid är kunskap a priori, eftersom samband och relationer kan beskrivas i matematiska termer utgående från jämförelser och slutledningar. Rummet är, enligt Kant, en grundläggande aspekt av människans kunskapstillägnande och måste förstås a priori. Rummet är en form som alla erfarenheter relateras till. Ett ting kan inte föreställas utan att förhållandet till rummet tas i beaktande. Tiden är inte heller något empiriskt begrepp som härletts ur erfarenhet, utan en subjektiv betingelse för människans erfande. Tid är inget i sig självt utan på samma sätt som rummet en betingelse för erfandet. Tiden och rummet är givna a priori och ligger till grund för människans erfarenheter och därmed även förståelse. I och med detta antagande växer kunskap om antal och geometri

fram i mötet med tid och rum genom logisk slutledning och intuition. Intuitionen innebär en idé om hur saker och ting samverkar och relaterar till varandra, dock inte som någon medfödd kunskap, utan som en föreställning grundad på erfarenheter. Syftet med intuitionen är att ge sinnesföreställningarna ett sammanhang. På så sätt kan kunskap a priori och a posteriori inte helt och hållet skiljas från varandra. Vissa gemensamt överenskomna "lagar" binder samman generella mänskliga erfarenheter med individuella tolkningar av matematiska fenomen. Människan är dock inte en passiv observatör av vad som sker i omvärlden, utan spelar en aktiv roll i organiserandet av erfarenheter och vägval i utforskande aktiviteter och problemlösning.

Ernest (1998) anser att Kants resonemang öppnar för möjligheten att se matematisk kunskap som meningsfull för den enskilda individen, liksom att kunskapen aldrig är fullständig. Å andra sidan har resonemanget sina svagheter i just den subjektiva innebörden av matematisk kunskap. Kants idéer torde dock, enligt Ernest (1998) och Shapiro (2000), kunna tolkas som att kunskap visserligen är grundad i den mänskliga vardagliga verksamheten, men bygger på någon form av generalisering av de individuella erfarenheterna.

I och med psykologins framväxt under 1900-talet ökar intresset för hur människan tar till sig kunskap och vad som sker i människans medvetande när hon lär sig något. Kunskapstillägnet ses som ett resultat av människans handlingar och interaktion med omvärlden och beskrivs ofta i form av kognitiva processer. Konstruktivism är benämningen på en inriktning som ser människans tankeutveckling och lärande som konstruktioner av kunskap genererade ur erfarenheter av fenomen i omvärlden där Kants transcendentala idealism ligger till grund. Ur ett konstruktivistiskt perspektiv kan kunskap inte överföras som ett absolut objekt till människan, eftersom kunskap är resultatet av en fortgående process eller konstruktion grundad på människans aktivitet.

Den konstruktivistiska synen på människans utveckling och lärande känns igen bland annat hos Piaget (se till exempel Piaget, 1959; 1968; 1977) som formulerar en teori om hur människans kunskapstillägnande står i relation till omvärlden. Utgående från observationer av och intervjuer med barn i olika åldrar konstaterar Piaget att människan från födelsen är en upptäckande och aktivt utforskande varelse, vars tankeutveckling kan förstås i form av strukturer och som processer, som sätts igång i mötet med omvärlden. Kunskapstillägnet är därmed mera än enbart kognitiva funktioner. Piaget utgår från att människans kunskap är uppbyggd av tankestrukturer där handlingar som förändrar strukturerna leder till fortsatt utveckling. Redan från födelsen antas människan vara redo att ta till sig, organisera och använda information från både den fysiska och den sociala omgivningen. Det finns därför inga tydliga gränser mellan vad som är biologiskt arv och miljöpåverkan.

Piaget (1977) hävdar att kunskap om världen kan fås endast genom handling. Människan lär sig först vilka egenskaper föremål och företeelser i omvärlden har genom att hantera föremål och fysiskt undersöka dem. Piaget menar att när föremål och företeelser kopplas samman och på olika sätt relateras till varandra får handlingarna en annan karaktär och innebörd, till

exempel som logisk-matematiska. Det är alltså genom handling som människans förståelse av omvärlden grundläggs. Att tillägna sig förståelse av omvärlden är således i hög grad en aktiv och konstruktiv process, menar Piaget och Inhelder (1977). Med mer erfarenhet upptäcker barn förutsägbara mönster, vilket gör att barnet förväntar sig vissa skeenden och agerar även avsiktligt för att få saker och ting att ske. På detta sätt är barnets tidigare tillägnade färdigheter och förståelse betydelsefulla också i nya sammanhang. För att tänka på och reflektera över omvärlden behöver barnet ha förmåga att se omvärlden i hanterbara delar. Med detta menas att världen ses som avgränsade beständiga objekt som existerar över tid, det vill säga att saker och ting är åtskilda från varandra och har specifika egenskaper som inte förändras från stund till stund.

Piaget och Inhelder (1977) anser att utgående från de erfarenheter barn får bildas mönster av verkligheten när något beteende ger tillfredsställande resultat. Sådana grundläggande beteendemönster bildar i sin tur vad Piaget (1972) kallar scheman. Scheman är en serie av ordnade handlingar som utvecklats genom upprepade handlingar i likadana eller motsvarande situationer. Dessa scheman kan senare "tas fram" för att användas också i situationer som i fråga om tid och rum skiljer sig från det ursprungliga handlingsmönstret. Scheman bör dock inte förväxlas med begrepp eftersom begrepp, enligt Piaget, är konstruerade av mentala representationer och av den generella innebörd som uttrycks i det verbala språket.

Piaget har haft stor betydelse för förståelsen av barns framväxande förståelse av omvärlden. Det mest betydande bidraget är måhända de begrepp som beskriver lärandeprocessen. Piaget (1962; 1972; se även Piaget & Inhelder, 1977) menar att varje beteende hos barnet består av två motpoler: *assimilation* och *ackommodation*. Det centrala i Piagets teori är jämvikten mellan dessa poler. Lärande är möjligt i och med att nya erfarenheter anpassas (*assimileras*) till tidigare scheman eller förståelse. *Assimilationen* omfattar tre aspekter: *repetition*, där barnet upprepar en aktivitet som väcker intresse och lägger grunden till ett schema, *igenkännande* där barnet upprepar samma handlingsmönster men med andra liknande objekt och *generalisering*, där barnet prövar samma handlingar också i helt nya situationer. På så sätt upptäcker barnet likheter och skillnader hos fenomen i omvärlden och upptäcker nya kombinationer av rörelsemönster och objekt. När det upplevda skiljer sig från det redan kända, anpassas (*ackommoderas*) i sin tur den förståelse som barnet redan har till den nya situationen. Växelverkan och strävan efter jämvikt mellan *assimilation* och *ackommodation* är den process som gör att barnet lär. Utan *assimilation* kan barnet inte förstå nya situationer eftersom det då inte har några erfarenheter eller föreställningar att utgå från, medan enbart *assimilationen*, utan *ackommodationen*, skulle förvränga upplevelserna till att alltid likna redan kända scheman. Utvecklingen bygger på att barnet inte uppfattar objekten som sådana utan som kopplade till handlingar, som en oreflekterad och förbegreppslik form av abstraktion.

Enligt Piaget (1972) kan det te sig paradoxalt att ett barn förmår utveckla logisk-matematiska idéer och hypoteser utgående från konkreta handlingar med fysiska objekt. Gåtan har dock sin lösning i matematikens abstraherande och generaliserande natur. Det som barnet erfar i interaktionen

med olika objekt, är inte objekten i sig själva utan handlingen eller "operationen" som inbegriper objekten. På så sätt är barnets erfande också överförbart till andra objekt i omvärlden som en form av generalisering.

Piaget och Inhelder (1977) beskriver barns generella kognitiva utveckling i fyra stadier där barnets förståelse utvecklas i takt med mognad, erfarenhet och samspel med omvärlden. Den kognitiva, känslomässiga och sociala utvecklingen är oskiljaktiga från varandra och utvecklas också samtidigt i mötet med omvärlden. Piaget förutsätter en dualistisk relation mellan människa och omvärld, där världen ur ett sådant logiskt konstruktivistiskt perspektiv ses som avgränsade beständiga objekt som existerar över tid, det vill säga att saker och ting är åtskilda från varandra och har specifika egenskaper som inte förändras från stund till stund. Piaget (1972, 90–91) påstår:

Objects certainly exist, and they involve structures which also exist independently of us. But objects and their regularities are known to us only in virtue of operational structures which are applied to them and form the framework of the process of assimilation which enables us to attain them.

Piaget (1972) tar fasta på Kants tanke om den aktivt erfande människan men förklarar den av Kant antagna intuitionen som en teori om hur barn konstruerar sin förståelse av fenomen genom upprepade möten med fenomenen i omvärlden. Någon absolut kunskap existerar inte heller eftersom ny kunskap alltid integrerar tidigare kunskap.

Utgående från Piaget har det även utvecklats ett sätt att förstå hur människan aktivt konstruerar sin förståelse av omvärlden som i högre grad tar omgivningen i beaktande utvecklats, nämligen radikal konstruktivism. Under en lång tid har von Glasersfeld (2001) arbetat med en teori om människans tänkande och vetande, till stor del utgående från Piagets teori om människans kognitiva utveckling. von Glasersfeld ser dock kunskap som fallibilistisk, det vill säga felbar och saknande självklara sanningar. Människan strävar efter att skapa ordning och mening i det hon erfar i vardagen där nya erfarenheter kan leda till att gamla "sanningar" revideras. I synnerhet framhåller von Glasersfeld att människan alltid gör en tolkning av det hon erfar av omvärlden. Även om en fysisk värld existerar så kan människan inte erfara den ofärgat. Att beskriva världen objektivt blir därmed en omöjlighet eftersom en observation förutsätter en observatör. Kunskapen blir således inte överförbar utan beroende av perspektiv och tidigare erfarenheter.

Rasmussen (1998) ser tydliga likheter mellan det radikal konstruktivistiska synsättet och det fenomenologiska sättet att beskriva människans varande i världen. Rasmussen menar att det ur båda synsätten framträder en idé om att människan strävar efter att tolka omvärlden, inte att förstå den ontologiskt. Synsätten frångår då det dualistiska sättet att förstå relationen mellan människan och omvärld. Utgående från det som människan erfar, drar hon slutsatser som är relaterade till tidigare erfarenheter. Kunskaper kan därmed inte bygga direkt på varandra, eftersom Husserl (1989) menar att kunskaper bekräftas, förstärks och anpassas till varandra. Kunskap är därmed inte avgränsade enheter utan relaterar alltid till tidigare tillägnad kunskap och erfarenheter. Å andra sidan kan kunskaper också, enligt Husserl, säga emot varandra och stå i konflikt med varandra när jämförelser

görs med erfarenheter som grund, eftersom nya erfarenheter inte alltid överensstämmer med människans föreställningar om något fenomen. Husserl menar att människan utifrån sina erfarenheter bildar sig uppfattningar om olika fenomen. En människa som föds döv kan till exempel ha kunskap om toner och hur dessa bildar harmonier, men hur detta gestaltar sig som musik har hon svårigheter att föreställa sig. Eftersom erfarenheterna har betydelse för hur fenomen uppfattas och på vilket sätt kunskap tillägnas, förstås också varje fenomen individuellt. Detta fenomenologiska antagande om människans erfarende och lärande får, enligt Campbell (2001) betydande konsekvenser för undervisning, i synnerhet matematikundervisning. Logiken och strukturerna i matematik erfars alltid utgående från det som människan erfar och relaterar till, vilket för med sig att läraren och den lärande kan ha vitt skilda uppfattningar om innebörden av ett matematiskt fenomen. Campbell menar dock att ur ett fenomenologiskt perspektiv bör undervisning och begreppsbyggnad ta sin utgångspunkt i den lärandes erfarenheter och "lived experience".

2.4 Variation som grund för lärande

På liknande sätt som många konstruktivister anser Marton (1997) att omvärlden kan erfaras på kvalitativt skilda sätt av olika människor, och definierar begreppet kunskap som förståelse. Med andra ord finns det olika kunskap om samma fenomen. Till skillnad från den allmänna konstruktivistiska synen på kunskapstilläggnandet betraktar Marton, utgående från ett fenomenografiskt synsätt, kunskap som relationen mellan människan och det fenomen hon erfar i en icke-dualistisk värld. I erfandet avspeglas kvaliteter i människans tänkande och även beskaffenheten hos det fenomen som erfaras. Kunskap är inte en avbildning av verkligheten utan en individuell förståelse av omvärlden som bygger på erfarenheter. Lärande handlar därmed om att successivt tillägna sig kunskap om eller förståelse av omvärlden på mer differentierade, mer integrerade och mer effektiva sätt.

Marton (1992) är av den åsikten att människan erfar och förstår en situations ingående delar eller aspekter *som helhet*. Utgående från ett icke-dualistiskt synsätt definierar människans totala och samtidiga erfarende hans eller hennes medvetande. Därför är människan också medveten om många saker samtidigt, medan vissa erfarenheter träder fram och andra finns mer i bakgrunden. I kontrast till idén om inre föreställningar som förutsättning för att organisera handlingar (jfr Piaget), anser Marton att en situation alltid förstås i relation till tidigare erfarenheter som ständigt är närvarande i medvetandet. Barnet erfar därför alltid mer än vad som upplevs i stunden, eftersom de tidigare erfarenheter som inte direkt framträder "fyller i" det som inte sinnena ger. Medvetandet är på så sätt oändligt och sträcker sig utanför tid och rum till exempel så att barnet tänker sig en lösning på ett problem eller förväntar sig vissa händelser. Resonemanget för med sig att det är omöjligt att leta reda på en inre bild eller applicera en föreställning om något på ett fenomen, om människan inte redan har en föreställning om fenomenet i medvetandet. På detta sätt motsäger sig ett dualistiskt synsätt sig självt (se även Bowden & Marton, 1998; Marton & Booth, 2000).

Marton och Booth (2000) menar att lärande innebär att samtidigt fokusera medvetandet på sådana aspekter av ett fenomen som den lärande individen inte tidigare har kunnat urskilja. Runesson och Marton (2002) preciserar detta som att en kritisk aspekt är ett sådant karaktärsdrag hos fenomenet som är nödvändigt att fokusera för att en viss förståelse skall framträda i den lärandes medvetande. Genom variation kan den lärande människan upptäcka dessa olika aspekter. Till exempel uppfattas en persons längd utgående från aspekten "långhet", som förutsätter att långheten kan variera och att en persons långhet skiljer sig från en annan persons (Runesson, 2005). Sådana aspekter måste samtidigt lyftas fram och medvetet fokuseras för att människan skall förstå fenomenet på ett visst sätt. Att lära innebär då att i medvetandet samtidigt fokusera dessa aspekter och förstå fenomenet på ett förändrat sätt (Marton, 2002). Att människor uppfattar fenomen på olika sätt beror därmed på vilka kritiska aspekter av fenomenet som människorna samtidigt fokuserar i sitt medvetande (Bowden & Marton, 1998).

Marton, Wen och Wong (2005) menar att variation som grund för lärande handlar om att uppfatta det som varierar inom ett fenomen. När en individ erfar ett fenomen på varierande sätt framträder de konstanta kritiska aspekterna, vilket gör att den lärande individen urskiljer samband och kommer således bättre ihåg det som lärts. Variation i lärandet omfattar å ena sidan att urskilja hur samma fenomen gestaltar sig i olika sammanhang, det vill säga innebörden hålls konstant, å andra sidan innebär variationen att uppfatta vad ett fenomen *inte* är, det vill säga vad som är specifikt hos ett fenomen. Likheter och skillnader bör därmed ses som förutsättningar för lärande.

Runesson (2005) hävdar att lärande kan studeras med fokus på tre olika perspektiv. "The lived object of learning" innebär det som den lärande lärt sig, "the intended object of learning" innebär den förståelse som en lärare har för avsikt att en grupp barn skall tillägna sig och "the enacted object of learning" vilket innebär den förståelse som uppkommer i samspelet mellan två eller fler personer i en lärandeakt. Runesson (1999) utvecklar i sina studier det sist nämnda perspektivet, det vill säga den förståelse som är möjlig att nå i en lärandesituation, och kallar detta "variationsteori för lärande", eller förkortat "variationsteori". Marton och Morris (2002) påpekar också att flertalet empiriska studier visar att vad den lärande individen egentligen lär sig är beroende av vad individen ges möjlighet till att lära sig. I lärandesituationen finns vissa förutsättningar för att lärande skall ske, vilket kan ta sig uttryck som att den lärande inser vissa samband i en problemlösningssituation och ser sambanden som en ram, inom vilken problemets delar kan variera. Det viktiga är därmed inte vad som undervisas utan vad de lärande individerna har möjlighet att erfa.

Runesson (1999) samt Carlgren och Marton (2002) hävdar att lärande innebär att erfa nya dimensioner och mönster i omvärlden. Centrala aspekter av lärandet är variation, urskiljning och samtidighet. Urskiljning och variation är nämligen av stor betydelse för all mänsklig aktivitet och förståelse som bygger på att människans medvetande alltid är riktat mot något. För att överhuvudtaget kunna urskilja något i omvärlden måste människan erfa variation, dels hur ett fenomen skiljer sig från den omgivande världen, dels hur fenomenet varierar inom sig. I och med variationen framträder således

också det invarianta hos ett fenomen, vilket gör att innebörden framträder och fenomenet kan förstås också i andra sammanhang. Tidigare erfarenheter har alltså stor betydelse för hur människan handlar i nya situationer. Att kasta en boll mot ett specifikt mål innebär att kastaren samtidigt gör bedömningar av avstånd, bollens vikt, riktning och armens kaströrelse. För att göra riktiga bedömningar och utföra kastet är det till fördel om kastaren har tidigare erfarenheter av att ha kastat olika bollar från olika ställen mot mål på varierande avstånd och samtidigt relatera dess erfarenheter till varandra och till kastsituationen. Sådana varierande erfarenheter gör därför kastaren bättre rustad att möta en ny obekant kastsituation (Bowden & Marton, 1998). Samtidigheten är likaså avgörande för att variationen skall framträda, eftersom människan samtidigt bör urskilja och medvetet fokusera vad som varierar och vad som förblir invariant. För att förstå "fem" bör alltså, utifrån detta resonemang, flera sätt att förstå fenomenet "fem" fokuseras, det vill säga att "fem" samtidigt betyder en mängd av viss storlek (såsom ett visst antal bollar), en placering i räkneramsan samt att fem som mängd består av delar som sinsemellan har en viss relation till varandra. Vad som varierar och vad som är konstant är grundläggande aspekter att beakta för att förstå ett fenomen och följaktligen för att lärande skall ske (Runesson & Marton, 2002).

Att två individer inte kan sägas förstå ett fenomen på exakt samma sätt får naturligtvis konsekvenser för hur lärandeprocessen förstås och hur undervisning organiseras. En fråga som snabbt uppkommer är hur det kan vara möjligt för två personer att överhuvudtaget förstå varandra om varje erfärande är individuellt. Enligt von Glasersfeld (1995) kan individer kommunicera med och förstå varandra eftersom de tillsammans förhandlar om innebörden i det erfarna. Samspelet med andra människor har därmed betydelse för hur ett fenomen förstås, eftersom mötet med andra sätt att förstå samma fenomen lyfter fram variationen, som i sig är en förutsättning för att lära (Runesson, 2005). Marton och Booth (2000) hävdar att det är genom variation som den lärande människan kan upptäcka olika aspekter som ingår i förståelsen av ett fenomen. De olika aspekterna av ett fenomen måste samtidigt lyftas fram och medvetet fokuseras för att människan skall förstå fenomenet på ett visst sätt. Att lära innebär då att i medvetandet samtidigt fokusera dessa aspekter vilket låter sig göras i problematiserande och reflekterande undervisningssammanhang.

2.5 Kunskap som överförande av kulturell mening

Säljö (2005) hävdar att den konstruktivistiska tanken om att människan tillägnar sig så kallade inre representationer av omvärlden ger en alltför snäv och passiv bild av människans kunskapstillägnande. Säljö menar nämligen utifrån ett sociokulturellt perspektiv att lärande är en del av alla mänskliga handlingar, som en integrerad del av sociala praktiker. Det sociokulturella perspektivet på lärande stöder sig till stor del på Vygotskij (1978; 1980) som poängterar att kunskap alltid har en social och historisk bakgrund. Allt kunskapstillägnande, såväl kognitivt, kommunikativt som emotionellt, sker i samspel med andra människor där generell kunskap så småningom blir till

individuell förståelse. Han lägger därmed stor vikt vid den sociokulturella omgivningens roll för barnets utveckling. Vygotskijs syn på barnets kognitiva utveckling innebär att barnet lär sig lösa problem i interaktion med andra människor. Att tillsammans med någon annan klara av en uppgift ses som en utgångspunkt för fortsatt individuell utveckling.

Kunskap och generella principer som är allmänt vedertagna, inte minst inom matematik, är enligt Lave och Wenger (1991) alltid situerade i en kontext. Den mening som en matematisk princip har är alltid relaterad till sammanhanget. Lave och Wenger (1991, 34) förklarar att "the generality of any form of knowledge always lies in the power to renegotiate the meaning of the past and future in constructing the meaning of present circumstances". Det är här möjligt att känna igen vissa drag av Hegel (1979/orig.1807) som lyfter fram att barnet föds till en kulturell och historisk värld som utvecklats långt innan människan fötts och som kommer att fortsätta utvecklas också efter människans levnadstid. Lave och Wenger (1991) hävdar också att människan alltid är engagerad i en lärandeprocess eftersom hon ingår i en kultur och ett sammanhang där människan strävar efter att skapa mening. Så sker oberoende om kontexten är direkt ämnad för undervisning eller ej. I och med den meningsskapande sociala praxis som människan ständigt är involverad i förutsätter detta ett icke-dualistiskt perspektiv på människan och hennes varande i världen. Kunskap är på så sätt den relation av meningsskapande som sker mellan aktivt handlande människor. Innebörden i begrepp blir klar när begreppen används i sina sammanhang, vilket för med sig att lärande även inbegriper en identitetsutveckling i och med det ständiga meningsskapande som sker inom kontextens ramar. Således bidrar också individen till att kulturen utvecklas eftersom deltagandet och meningsskapandet är ömsesidigt mellan människor.

Wittgenstein (1978) motsätter sig i likhet med Lave och Wenger ett platonskt sätt att förstå matematik som objekt och menar i stället att matematiker är uppfinnare snarare än upptäckare. Någon utommänsklig matematik finns inte utan varje matematisk princip och begrepps innebörd är skapad och formad av människan och den kultur hon lever i. Att ta till sig formella kunskaper utan att anknyta till den direkt erfarna världen är en omöjlighet. Sättet att se på matematik och inte minst matematikinläring har i och med Wittgensteins filosofiska tänkande tagit en socialkonstruktivistisk ansats. Ernest (1998) bygger vidare på denna ansats och vill göra gällande att matematisk kunskap omfattar såväl kunskap om användningsmöjligheter, kunskap grundad på logisk slutledning som tyst kunskap och faktakunskap. En sådan definition på matematisk kunskap vidgar begreppet och tar i beaktande också historia och social kontext där begrepp och förståelse vuxit fram i och med olika former av mänsklig verksamhet. Kunskapen är historiskt, kulturellt och socialt bunden och innebörden är alltid beroende av vems perspektiv tolkningen utgår ifrån.

Wittgenstein (1978) diskuterar sanningsbegreppet i fråga om matematik och kunskap och menar att matematisk kunskap är kulturella överenskommelser. Praktiska behov avgör vad som är "sann" matematisk kunskap. Han konstaterar att den mänskliga verksamheten ofta inbegriper räknande och att dagligen använda matematik. Genom att ta del av denna verksamhet och därmed socialiseras in i en kultur av användande av matematik, lär sig också

det lilla barnet innebörden av talbegrepp och räknepprinciper, så som de förstås i den kultur barnet växer upp. Att två motsvaras av just "två objekt" och varken fler eller färre, har helt och hållet sin grund i det gemensamt överenskomna sättet att uttrycka det erfarna i en specifik kontext. Wittgenstein (1978, 344) sammanfattar detta som att "meaning resides in social patterns of use, which are themselves irrevocably woven into other aspects of social life", innebörden framträder alltså i sitt sammanhang och i användning.

Wittgenstein (1978) menar att matematiska begrepp får sin egentliga innebörd först när de används. Begreppen gestaltas på så sätt i en matematisk omgivning och endast i samspelet med andra har matematik betydelse och mening. På samma sätt som människor bör vara överens om innebörden och värderingen i de ord som används i kommunikation, är matematiska symboler och begrepp alltid tolkade och har en förutfattad mening i det sammanhang de används. Enligt Ernest (1998) innebär förståelse och skapande av mening i ord och begrepp en gemensam förståelse av hur begreppet skall tolkas, vilket är beroende av den kultur människan tar del av, hur och med vem hon kommunicerar och interagerar samt vilken social praktik hon tar del av. Att tänka logiskt är således också beroende av en delad livsvärld och de värderingar som där råder. Oberoende om människan använder stenar, kulor, pinnar eller mera avancerade symboler som sätts ner på papper för att utföra och kommunicera beräkningar, handlar det i grund och botten om att dela och kommunicera idéer och gemensamt överenskomna begrepp (Hersh, 1997).

Att förstå och lära sig matematik innebär i och med detta socialt bundna resonemang att människan alltid är aktiv i konstruerandet av mening i en social kontext (Packer & Goicoechea, 2000). En sådan humanistisk syn på matematik betyder också att någon ofelbar kunskap inte kan finnas. Hersh (1997, xi) sammanfattar ett humanistiskt sätt att förstå matematik som "...mathematics must be understood as a human activity, a social phenomenon, part of human culture, historically evolved, and intelligible only in a social context". Den inriktning som går under benämningen sociokulturell teori, tar i hög grad fasta på den kulturella och historiska aspekten av kunskapsstillägandet. Enligt Lave och Wenger (1991) innebär lärande ur ett sådant perspektiv att människan alltmer blir en deltagare i en social praktik och anammar den kunskap och de färdigheter som är nödvändiga i den kulturen. Det som Vygotskij kallar 'den närmaste utvecklingszonen' innebär enligt Lave och Wenger skillnaden mellan den historiskt kulturella kunskapen och det som individen erfar i ett specifikt sammanhang.

Det socialkonstruktivistiska synsättet innebär att studera och tolka individuella erfarenanden som situerade i kontext (Cobb & Yackel, 1996). I likhet med det sociokulturella perspektivet anses lärande och förståelse vara sociala och kulturella handlingar. Det sociokulturella perspektivet tenderar dock att tolka individens deltagande i ett vidare sammanhang, där socialkonstruktivistiska studier mera fokuserar på lokala sociala kontexter såsom ett klassrum. Det socialkonstruktivistiska sättet att se på lärande innebär att barnet i samspel med andra människor diskuterar och resonerar om olika tolkningar för att konstruera en gemensam förståelse. Det sociokulturella perspektivet däremot ser lärande mera som en process där deltagarna i kulturen anammar arbetsätt och tolkningar av varandra. Att lära sig mate-

matik innebär då sociokulturellt sett att rekonstruera av kulturen redan accepterade tolkningar och arbetssätt. I stort sett fokuserar det sociokulturella perspektivet på hur sociohistorisk innebörd i en kultur förs vidare från generation till generation, medan det socialkonstruktivistiska perspektivet fokuserar hur mening konstrueras, både individuellt och kollektivt, i en snävare kontext.

Illeris (2001) anser att lärande innebär en motorisk, kognitiv eller emotionell förändring hos människan som finns kvar under en längre tid. Enligt Illeris omfattar denna förändring dels den interaktion som sker mellan den sociala, kulturella och materiella världen och individen, dels hur människan kognitivt bearbetar det hon erfar. Att enbart studera den ena processen är därmed inte nog för att förstå lärandet. Illeris lyfter förutom individen och miljön också fram en tredje aspekt i lärandeprocessen, nämligen den emotionella sidan som omfattar motivation och fungerar som drivkraft i lärandet. Alla dessa aspekter ingår i lärandet som därtill alltid är situerat i en kontext. Människa och miljö kan således aldrig förstås utan att kopplas till varandra.

Enligt Packer och Goicoechea (2000), skiljer sig det sociokulturella synsättet från Piagets logisk-konstruktivistiska synsätt, i fråga om kunskapens natur. Att ta del av en kultur innebär också att påverka och forma den sociala världen. Packer och Goicoechea framhåller dock att dessa två synsätt fokuserar på olika aspekter av lärandet och därför inte bör sägas vara endera sanna eller falska. Lärande innebär såväl en personlig utveckling, som ett deltagande i och överförande av en kultur. Även om intresset för en analys är det individuella erfandet, inverkar den kontext och kultur människan deltar i (Cobb & Yackel, 1996).

3 Forskning om småbarns lärande

I och med de senaste decenniernas ökade intresse för forskning om småbarns erfارande och lärande kan det konstateras att barn i de yngre åldrarna i hög grad är kompetenta och meningsskapande individer som strävar efter att förstå och bemästra sin omvärld. I detta kapitel presenteras tidigare forskning om småbarns lärande och i synnerhet barns framväxande förståelse av matematik, för att belysa den bakgrund mot vilken föreliggande studie tolkas och förstås.

3.1 Lärande i samspel med omvärlden

Barn föds in i en social värld, som är utformad långt innan barnet föds och som kommer att finnas kvar långt efter att barnet vuxit upp och levt sitt liv. De historiska och kulturella ramarna utgör både möjligheter och gränser för lärande och utveckling. Barnets utveckling kan enligt Hundeide (2006) ses som en resa i ett kulturellt landskap, där barnet kan välja bland flera vägar. För att förstå ett barns utveckling och lärande bör dessa möjligheter och begränsningar tas i beaktande. Barns utveckling och lärande är därmed inte alltid så fria och öppna som de klassiska utvecklingsteorierna kan ge intryck av. Visserligen sker utveckling individuellt, men den sociala omgivningen sätter upp ramar och erbjuder möjliga erfarenheter. Hundeide menar vidare att det är befängt att tänka sig att människan under sina första år självständigt skulle kunna utveckla färdigheter och förmågor som tagit århundraden att utveckla. Naturligtvis tar barnet intryck av sin omgivning och strävar efter att skapa mening av det han eller hon erfar och på så sätt utvecklas förståelse och färdigheter. Valsiner (1997) menar att barnets utveckling och lärande pågår i en värld som inte enbart är fysiskt strukturerad, utan också organiserad enligt innebörd, där barnet skapar sin individuella förståelse av omvärlden. Detta meningsskapande sker ofta i samspel med andra människor, både vuxna och jämnåriga. Barnet blir då en medkonstruktör av omvärlden och kulturen, där uppfattningar och innebörd formas i ett meningsfullt samspel. Klockan, räkneramsan eller alfabetet är enligt Säljö (2005) exempel på system som det tagit tusentals år att utveckla, men som kulturen tillhandahåller för barnet att lära sig. Att använda sådana medierade system bidrar till att strukturera en komplex värld.

Sternberg (1996) hävdar att matematiskt tänkande inte egentligen finns definierat eller klassificerat som begrepp. Därför finns det också många sätt att studera och diskutera matematiskt tänkande. Många studier tar sin utgångspunkt i psykologin och kognitionsteorier, men när matematiskt tänkande diskuteras ur ett pedagogiskt eller didaktiskt perspektiv blir den lärandes omgivning, kultur och relationer till andra människor betydelsefulla.

3.1.1 Kulturella betingelser för lärandet

Schoenfeld (1994) menar att matematik innebär att observera och koda likheter och skillnader i omvärlden, ofta genom symboliska representationer. Matematik är därmed, enligt Schoenfeld, skapandet av förståelse av hur saker och ting relaterar till varandra, där människan har utvecklat vissa redskap eller hjälpmedel som stöd för att uppfatta och beskriva denna relation. På så sätt är matematik en social vetenskap där det är av betydelse att symboliskt göra sig förstådd och att förstå andra. Dess koppling till den levda världen är således tydlig och matematik blir en nödvändighet i det vardagliga livet.

För att förstå småbarns lärande är det enligt Vygotskij (1978) först och främst betydelsefullt att utgå från att barn lär sig långt innan de börjar skolan eller på annat sätt deltar i organiserad undervisning. Oberoende av i vilket sammanhang lärande är tänkt att ske, har det en historia hos barnet som gör att barnet redan har en egen förståelse av det som undervisas. Den lärande människan anses tillägna sig nya kunskaper och färdigheter i interaktion med omvärlden och andra människor, där tidigare färdigheter och kunskaper övergår i ny kunskap. Vygotskij ser därmed barns kognitiva utveckling ur ett socialt perspektiv och hävdar att andra människors handlande har betydelse för barnets utveckling. Barnet föds till en värld där föremål och handlingar redan har en innebörd, definierad av kulturen. Vad barnet riktar sitt intresse mot är i första hand beroende av vilka behov barnet har men föremålen stimulerar i sin tur barnet till handling. Vygotskij menar att människan upptäcker innebörden hos föremål före egenskaper som färg eller form. Att erfara innebörden hos olika föremål leder i sin tur till abstrakt tänkande, medan innebörden i handlingar stimulerar utvecklingen av barnets egna avsikter. Leken har på så sätt stor betydelse för barns kognitiva utveckling, eftersom barnet i leken kan ikläda sig rollen av en annan människa och på så sätt upptäcka andra perspektiv och aspekter av omvärlden.

Bruner (1996) poängterar också kulturens betydelse för utveckling och lärande och menar att kulturen formar det individuella medvetandet genom meningsbildandet. I mötet med världen och olika kulturella sammanhang uppfattar barn vad saker och ting handlar om. Även om den uppfattade meningen är individuell är den alltid kulturellt situerad, enligt Bruner. Därför är det också möjligt att kommunicera om denna mening. Kunskap och kommunikation är på så sätt oskiljaktiga där kulturen gör vissa redskap tillgängliga och världen möjlig att förstå på ett kommunicerbart sätt.

Den vuxna människan använder sig dagligen av räkneord med varierande innebörd och användningsområden. Innebörden av räkneord består enligt Fuson och Hall (1983) av kunskap om räkneramsan, räkneorden i räkneramsan, antal (kardinaltal), ordningstal (ordinaltal), mätetal samt symboler. För att dessa olika betydelser skall synliggöras krävs det att barnet kommer i kontakt med räkneorden i många olika sammanhang. Ernest (1998) menar likaså att ett barn lär sig matematik i samspel med andra människor som ingår i samma sociala kontext. I samspelet och kommunikationen med vuxna kan barnet ta del av den kollektiva förståelsen och kunskapen om ett fenomen. Mix (2002) visar detta i en studie av ett barns bildande av talbegrepp hur sociala aktiviteter spontant upptas av barn och visar sig utmana barns tänkande mera än aktiviteter där föremål sorteras och manipuleras

utan koppling till andra människor eller sociala aktiviteter. Det sociala samspellet är därmed betydelsefullt för den kognitiva utvecklingen eftersom aktiviteterna tillsammans med andra människor då blir meningsfulla.

Saxe, Dawson, Fall och Howard (1996) framhåller att matematik är en nödvändig sociokulturell verksamhet som inbegriper artefakter (tal och mätsystem), social interaktion (partner att till exempel byta kulor eller Pokémonkort med), aktivitetsmönster (institutionaliserade aktiviteter som följer mönster, till exempel att räkna i en skolbok) och den individuella kunskapen (räkneoperationer, talfakta). För att hantera sådana aktiviteter och uppgifter i vardagen är det nödvändigt att individens kognition samspelar med ett vardagligt kulturellt liv. Saxe et al. visar att också vuxna som inte tidigare kommit i kontakt med aritmetik utvecklar sitt tänkande på liknande sätt som barn, det vill säga kognitiva färdigheter utvecklas enligt ett visst mönster, men relaterat till de tidigare erfarenheter som människan har, som är starkt influerade av mångfalden och komplexiteten i den kultur människan lever i.

Butterworth (1999) anser likaså att det i studiet av barns tankeutveckling är nödvändigt att ta i beaktande att utvecklingsprocessen inbegriper en växelverkan mellan den individuella utvecklingen och kulturens ramar. Han beskriver detta som att barn föds med en "matematisk hjärna", det vill säga förmågor färdiga att utvecklas beroende på vilka möjligheter, behov och förväntningar som barnet möter i sin vardag.

Nuñes och Bryant (1996) intresserar sig för hur barn lär sig matematik, men också vilken inverkan den matematiska förståelsen har för barns tänkande och handlande. Först och främst anser de att matematik bör ses som en viktig del av barns vardag. Matematik är framför allt ett redskap för att klara sig i det vardagliga livet. Utan matematiskt kunnande har individen svårt att överleva i den kultur han eller hon föds i. Samtidigt är det kulturen som sätter ramarna för vilket matematiskt kunnande som krävs av det uppväxande barnet. Nuñes och Bryant hävdar att egenskapen att vara räknekunnig inte enbart innebär att korrekt kunna utföra aritmetiska operationer. Att kunna räkna innebär också att uppfatta och resonera kring numerära och spatiala relationer på varierande sätt, till exempel genom att använda system för att mäta, använda miniräknare eller datorer samt att förstå innebörden av terminologi som area och volym och övrigt som är en del av den egna kulturen.

3.1.2 Att bli medveten om sin omvärld

Nuñes och Bryant (1996) vill visa att hur barn lär sig matematik inte enbart är en individuell utveckling av förståelse, utan lärande sker inom en komplex social ram. I synnerhet när avsikten är att studera matematiskt tänkande och lärande ur ett mera praktiskt perspektiv, till exempel pedagogiskt, blir den sociala och kulturella aspekten oerhört betydelsefull och bör inte glömmas bort. Piagets teori om barns kognitiva utveckling har ofta utsatts för kritik för att den inte tillräckligt lyfter fram den inverkan den sociala omgivningen har på barns tankeutveckling, men Piaget (1972) poängterar dock att både den fysiska och sociala miljö som barn växer upp i är avgörande för hur utvecklingen framskrider.

Piaget (1972) utgår från att det nyfödda barnet upplever att det lever i en värld där allt som sker relateras till barnet självt. Detta relaterande sker dock odifferentierat och ofreflekterat. Genom sin egen aktivitet kopplar barnet småningom samman sina handlingar med objekt i omvärlden, till exempel när barnet griper tag i något. Under barnets första år blir det allt mera medvetet om att det själv är ett av många objekt i omvärlden och även kan påverka andra objekt med kroppen. Denna upptäckt innebär initiativtagande, koordinerande av rörelser och förväntningar på vad som sker i omvärlden. I piagetanska termer tillägnar sig barnet "spatio-temporal permanens", det vill säga att objekten i omvärlden sinsemellan påverkar varandra också utan barnets ingripande. Vidare betyder detta ett visst perspektivtagande där barnet uppfattar sig själv som en del av många andra objekt i världen och förmår handla på ett avsiktligt sätt i denna värld.

Nutbrown (1999) beskriver barns tänkande och lärande med begreppet schema, men på ett annorlunda sätt än Piaget. Nutbrown förklarar scheman, utgående från Athey, som upprepade mönster av handlingar och tänkande som kan leda till utveckling när barnets erfarenheter anpassas till barnets tanke- och handlingsmönster. Scheman är, enligt Nutbrown, den form som handlingarna följer. Innehållet kan variera men bearbetas på det sätt som handlingsmönstret avgränsar. Det centrala i den beskrivning av scheman som Nutbrown gör är att barn agerar avsiktligt och kombinerar sina handlingar till alltmer komplexa mönster. Samma idé återkommer i olika sammanhang och olika handlingsmönster kan omfatta såväl formen på föremål som konkreta handlingar, till exempel kan ett cirkulärt schema omfatta såväl intresset för den runda formen (bollar och tallrikar) som cirkelrörelser (springa runt i cirkel eller snurra på föremål). Tidiga mönster bildar en grund för senare utveckling när handlingsmönstren koordineras. Sammankopplade mönster bildar mer komplexa begrepp till exempel så att ett tidigare intresse för fram-och-tillbaka-rörelser övergår i ett intresse för berättelser där det centrala är att "komma och gå" eller att göra och läsa kartor där innebörden är att gå från ett ställe till ett annat. De tidiga erfarenheterna är därför, enligt Nutbrown, betydelsefulla för att barnet skall uppmärksamma och förstå olika aspekter av sin omvärld på varierande abstraktionsnivåer.

Enligt von Glasersfeld (2001) strävar barn efter att förstå fenomen i omvärlden genom att fokusera på vad som kan tänkas vara karakteristiskt för det erfarna fenomenet. Det bör således först ske ett urval av vilka karakteristika som kan leda till en bättre förståelse. För att göra detta urval måste barnet ha en aning om vad som är relevant att fokusera. Denna aning är avgörande för meningsskapandet. Att "veta" innebär enligt von Glasersfeld att förmå handla på ett effektivt sätt i en specifik situation så att målet för aktiviteten nås. Lärande innebär då att anpassa sig till den erfarna världen så som människan själv förstår den.

För att småbarn skall kunna handla avsiktligt är det nödvändigt att barn har en viss innebördsförståelse. Lindahl (1996) menar att småbarn alltid erfar fenomen utgående från sina egna föreställningar. När ett barn visar sig förstå innebörden av ett fenomen innebär detta att barnet fått fördjupade insikter och förståelse av fenomenets karaktär. Lindahls studier visar till exempel hur en ettåring i en låtsaslek återskapar minnesbilder och bearbetar tidigare erfarenheter av att handla i en affär, där innebörden i affärssitua-

tionen är det centrala. Förståelse av innebörden hos fenomen utökas i och med nya erfarenheter, vilket kan komma till uttryck i barns handlingar. Barn blir medvetna om sitt lärande genom att de uppmärksammar förändringen mellan att kunna och att inte kunna. Lärande är för barnet att kunna, att bemästra eller att göra. På så sätt har småbarn en viss medvetenhet om sitt lärande redan innan de kan uttrycka detta verbalt.

Pramlings (1983; 1991) studie av barns uppfattningar av lärande visar att barn uppfattar lärande på tre kvalitativt skilda sätt. I Pramlings studie ger barn uttryck för att man kan lära sig göra, veta och förstå, i en hierarkisk ordning. Redan Dewey (1997/orig.1916) diskuterar kunskapsutveckling hos det lärande barnet och tar fasta på att kunskap om "hur man gör" något kan utvecklas till kunskap som "vetande". Om den lärande individen anser sig ha behov av kunskapen och finner mening i att veta, kan kunskapen fördjupas så att individen också kan använda sig av kunskapen på ett reflekterande sätt i nya situationer.

Marton (1992) ser lärande som förändrad förståelse av fenomen i omvärlden, vilket innebär att individens sätt att vara medveten om ett fenomen förändras. För att detta skall vara möjligt måste individen först bli medveten om sina egna tankar i en viss situation. Därefter kan individen reflektera över om idéerna är tillämpbara i en aktuell situation för att lösa ett visst problem. Individen behöver då kunna jämföra sina tidigare tankar med nuvarande och dessutom uppfatta skillnaden. För att barn skall bli medvetna om sin egen förståelse av olika aspekter av omvärlden är det nödvändigt att möta ting och människor i den omvärlden. Det centrala är då den kommunikation som uppstår mellan barnet och omvärlden där barnet har möjlighet att bli medvetet om sitt eget tänkande och sin förståelse (Pramling Samuelsson & Asplund Carlsson, 2003).

3.1.3 Kroppen som medium för lärandet

Husserl (1976) anser att världen inte enbart är en värld av ting som visar sig för människan, utan människan är själv delaktig i världen inte minst genom sina uppfattningar och värderingar. Människan lever inte bara i världen, utan även med sin kropp och med tingen, det vill säga också *med* världen. Merleau-Ponty (1962) hävdar vidare att världen är vad den är endast i relation till människans erfarenheter. Detta innebär att när barnet rör sig i rummet gör det ständigt bedömningar utifrån sin egen kropp och de erfarenheter det har av kroppen i relation till omvärlden. Løkken (2000) tar fasta på detta i sina studier av småbarns deltagande och relationsbildande i pedagogisk kontext. Småbarn kommunicerar genom uttrycksfulla kroppsliga handlingar, vilket innebär att barn långt innan det verbala språket utvecklats har en uppfattning och känsla av att vara-i-världen. Småbarns naturliga aktiviteter är meningsskapande till sin karaktär, vilket för med sig att lärande om världen och fenomenen i den också är ett perspektivtagande, där sättet att förstå något baserar sig på de erfarenheter barnet har. Att försöka förstå småbarns livsvärld innebär således att ta del av ett oflekterat varande-i-världen, där mening på ett naturligt sätt uttrycks genom gester och kroppsliga uttryck. Løkken menar att i och med småbarns avsiktliga handlingar förstår barnet sig själv och sin omvärld, utan att begreppsligt reflektera över detta.

Kroppen fungerar, enligt Merleau-Ponty (1962), som det medium människan använder för att erfara omvärlden, eftersom det är genom kroppen och sinna som hon erfar olika fenomen. Samtidigt är det via världen som människan blir medveten om sin kropp. Langeveld (1986) menar att människan har ett naturligt behov av att söka mening i sin omvärld. Att skapa mening har dock också sina begränsningar i människans egen kropp. Merleau-Ponty (1962) hävdar att den fysiska kroppen inte går att skilja från det psykiska, eftersom det inte finns någon mänsklig handling som inte har någon slags avsikt, vilket således skapar en relation mellan det fysiska och det psykiska. I och med att barn blir mer medvetna om sin kropp och dess begränsningar, använder de sin egen kropp för att utforska världen. Den levda kroppen är därmed barns tillgång till världen. Om kroppen förändras, förändras också världen eftersom kroppsuppfattningen så intimt hör samman med den upplevda världen. I och med att den egna kroppen är det mest välbekanta för barn, är det också naturligt att de har kroppen som referenspunkt i mötet med omvärlden. Lindahl (1996) liksom Doverborg och Pramling Samuelsson (1999) konstaterar utgående från empiriska studier av barns erfalande och lärande att det speciellt för småbarn är själva upplevelsen av något som ger förståelse. Till exempel använder sig barn gärna av sin egen kropp som mått när de skall uppskatta storlek eller höjd. Den egna kroppen ger en bättre uppfattning av hur långt, brett eller högt något är än om de använder måttband med centimeter och millimeter angivna.

När ett barn lär sig gå upptäcker det enligt Fosse och Munter (1996) nya perspektiv och får då också fler möjligheter att utveckla rumsuppfattning och formigenkännande, som är en del av grunden för den geometriska förståelsen av omvärlden. Barnet får också en mängd intryck av symmetri genom sina erfanden i vardagen. Till exempel genom att lyssna till musik, att se sin egen kropp och andra föremål läggs grunden till att uppfatta symmetri där likheten är det centrala. Också motoriska övningar, såsom att klappa händerna, utvecklar den geometriska förståelsen genom upplevelsen av symmetri. Proportioner och multiplikativa relationer hör på liknande sätt, enligt Curcio och Schwartz (2006), nära samman med den mänskliga kroppen. Fem fingrar relaterar till en hel hand på samma sätt som tio fingrar relaterar till två händer. Också småbarn kan på så sätt bli intuitivt medvetna om talenheter, när en hand samtidigt är ett och fem, som en hand och fem fingrar, där erfandet av den egna kroppens utformning spelar en viktig roll.

3.1.4 Imitation och variation

Ursprunget till barns föreställningar om världen är enligt Piaget (1962) imitation. Imitationen antas alltid ha en innebörd som uttrycks i barnets handlingar. Piaget hävdar att barn som är omkring ett halvt år gamla inte kan härma ljud och rörelser som de inte själva utfört tidigare. Ett barn bör nämligen tidigare ha tillägnat sig scheman för att kunna utföra den aktuella rörelsen eller det vokala uttrycket. Piaget ser imitation som en aktiv process av assimilation i och med att barnet tycks vilja fortsätta samspela med imitationspartnern genom att upprepa den handling som imiteras. I och med att barnet bildar övergripande scheman av de erfarenheter det får, kan barnet när det närmar sig ettårsåldern så småningom imitera handlingar som det inte utfört tidigare. Detta är enligt Piaget möjligt, eftersom barnets scheman för en viss handling möjliggör jämförelse med liknande handlingar. Konflikten

mellan det redan kända och det nya annorlunda attraherar barnet till att utforska omvärlden genom att upprepa och härma. Att uppleva en variation av fenomen i omvärlden är därför, enligt Piaget, viktigt för barnets tänkande, eftersom imitation av nya fenomen innebär bearbetning av redan kända fenomen.

Ullstadius (1998) menar att imitation inbegriper en frivillig och målinriktad aktivitet där avsikten är att upprepa en handling som en modell gör. Trots att avsikten är att upprepa en handling kan imitationen ha olika innebörd för barnet. Imitationen kan vara social eller individuell men är alltid interpersonell i och med att den inbegriper två personer; imitatören och hans eller hennes modell. Detta betyder inte att aktiviteten är interaktiv i bemärkelsen att båda parter alltid är aktiva. Modell och imitator spelar olika roller där modellen inte alltid behöver vara medveten om att han eller hon blir imiterad. I så fall är imitationen enbart för imitatören själv.

När småbarn imiterar att räkka ut tungan gör de, enligt Meltzoff och Moore (1999), ibland så kallade kreativa misstag. Barnet tar tillvara och använder tidigare tillägnade kunskaper och färdigheter för att organisera sina handlingar att likna modellens. Modellen kan till exempel räkka ut tungan åt sidan och när barnet upprepar handlingen räcker det ut tungan rakt framåt, men vrider hela huvudet åt sidan. På så sätt skapar barnet en liknande situation där det räcker ut tungan åt sidan. Detta indikerar att imitationer inte enbart är reflexmässiga handlingar utan aktivt konstruerade handlingar av barnet själv, vilket även bekräftas av att barnet genom flera upprepningar förändrar handlingarna till att mer likna modellens. Piaget (1962) har även gjort liknande observationer, men tolkar dessa på ett annat sätt. Piaget konstaterar att barn yngre än ett år tycks göra misstag när de imiterar. När barnet skall imitera att öppna och sluta ögonen, öppnar och sluter barnet munnen i stället. På liknande sätt sträcker barnet upp ett finger i stället för att räkka ut tungan. Piaget förklarar detta så att barn har ett övergripande schema som behandlar "att öppna och stänga"-rörelsen eftersom barn inte har erfarenheter av att koppla ihop de olika rörelserna och därmed inget specifikt schema för den "misslyckade" imitationen. Enligt Stern (1991) har sådana handlingar en förklaring i barnets amodala förmåga, det vill säga en medfödd förmåga att överföra sinnesintryck mellan olika sinnen. Lindahl och Pramling Samuelsson (2002) gör å sin sida tolkningen att småbarn inte egentligen gör misstag, utan varierar sina handlingar som strategier för lärande.

Hur barn imiterar är enligt Meltzoff och Moore (1999) en viktig länk till att förstå hur barn uppfattar sig själva och andra människor. Det mest intressanta är därmed inte *att* småbarn förmår imitera, utan snarare *på vilket sätt* de imiterar, vilket innebär att deras handlingar kan berätta något om tänkandet och vilket syfte imitationen har. Kagan (1981) beskriver hur barn i ettårsåldern främst imiterar handlingar som andra människor gör, antingen som exakta imitationer eller fragment av modellens handlingar. När barn är omkring 16 månader gamla tenderar de däremot att imitera hela händelser exakt, med samma föremål som modellen använder. Först när barn närmar sig tvåårsåldern börjar de enligt Kagan variera imitationerna genom att använda andra föremål än modellen, samt genom att förändra det iakttagna beteendet.

Imitationerna ger också enligt Meltzoff och Moore (1999) information om småbarns föreställningar i och med så kallade fördröjda imitationer, där barn imiterar en person eller en handling efter att händelsen eller personen försvunnit ur deras synfält. I fördröjda imitationer utgår barn inte från vad de ser, utan från vad de minns av det som skett. I vissa fall kan barn helt nonchalera intryck som de får av en nuvarande situation och agera utifrån tidigare händelser. Piaget (1962) menar att småbarns fördröjda imitationer kräver att barnet har inre representationer, det vill säga en föreställning om ett fenomen som stannar kvar i medvetandet. Dessutom krävs, enligt Piaget, för många att agera utgående från representationerna av originalet. Meltzoff och Moore (1999) konstaterar också utgående från studier av barns fördröjda imitationer, att spädbarn verkar ha så kallade representationer av fenomen som de tidigare enbart erfart visuellt. Representationerna är bestående över tid och barnet tycks även kunna använda dem som grund för ageranden vid senare tillfällen. Det intressanta med fördröjda imitationer är att barnets tanke eller föreställning om något inte är beroende av kontext, eftersom barnet kan upprepa samma handling i andra sammanhang. Det finns därmed klara likheter mellan fördröjda imitationer och det som Piaget kallar objekt-permanens, det vill säga att föremål existerar även om de inte syns (objekt-permanens förklaras närmare på sid. 35).

Omvärlden är i ständig förändring, antingen genom naturfenomen som människan inte råår på eller också genom andra människors ageranden som gör att omvärlden påverkas för den enskilda individen. Detta för, enligt Valsiner (1997), med sig att barn i sina möten med variationer i miljön också är tvunget att vara flexibelt i sitt samspel med omvärlden.

Phillips och Soltis (1991) framhåller att imitationer är en del av barns sätt att bemästra och lära i omvärlden. Lindahl och Pramling Samuelsson (2002) visar därtill att småbarns lärande innefattar två parallella processer. Imitation och variation är processer som gör att barnet upprepar och på så sätt utforskar en handling, samtidigt som barnet själv varierar och utvecklar handlingarna som en strategi för lärande. Öhberg (2004) visar också i en studie av småbarns strategier för problemlösning hur barn tar modell av äldre barn och anpassar en aktivitet utgående från den egna förmågan och färdigheter och lyckas i och med variationen utföra imitationen i enlighet med deras egen avsikt.

Lindahl (1996) konstaterar, liksom Doverborg och Pramling Samuelsson (1999), att lärande till stor del handlar om att upptäcka skillnader mellan föremål eller företeelser. Det måste finnas variation samtidigt som innehållet är konstant. Om världen är konstant och utan variation kan inget lärande ske. Människan behöver erfara att något bekant har förändrats för att få förståelse för det som inträffat. Bowden och Marton (1998) menar att det som människan egentligen lär sig, är just variationen. Med detta menar de att när människan erfar variationer av ett fenomen, upptäcker hon det som definierar fenomenet, dess så kallade kritiska aspekter. Genom denna upptäckt kan människan också förstå och agera i nya situationer. Människans varierande erfarenheter från tidigare situationer gör att hon upptäcker vad som skiljer en situation från en annan, men även vad situationerna har gemensamt. Människan tenderar att upptäcka i första hand variationerna inom ett fenomen och därefter det invarianta. Det kritiska för

lärande är, enligt Bowden och Marton, att människan samtidigt erfar variationen och det konstanta, vilket leder till att hon erfar fenomenet på ett annorlunda sätt än tidigare. Lindahl och Pramling Samuelsson (2002), liksom Öhberg (2004) visar att småbarns lärande är beroende av tidigare erfarenheter och i synnerhet varierande erfarenheter. Pramling Samuelsson och Asplund Carlsson (2003) konstaterar sammanfattningsvis att variation är källan till lärande, i och med att den ger barn förutsättningar för att urskilja och erfara mångfalden, samt ger beredskap för möten med nya situationer.

3.1.5 Att urskilja kvalitativa aspekter av omvärlden

Att tillägna sig kunskap innebär enligt Molander (1993) att förstå de begrepp som ingår i kunskapen, där också förståelse av användningssammanhangen är nödvändig. På detta sätt är kunskap inte en avbildning av verkligheten utan en individuell förståelse av omvärlden och kunskapens uttrycksmöjligheter som bygger på erfarenheter. Bruner (1996) hävdar att även småbarn kan tillägna sig någon form av förståelse av matematiska och fysikaliska principer. Som exempel nämner han principen om jämvikt som på ett naturligt sätt ingår i barns vardag där de får erfarenhet av balansgungan. I skolan får barn senare experimentera med hävstänger och kanske till och med räkna ut kraftmoment. Denna spiralprincip bygger på att samma idé kan upprepas i alltmer avancerade former så att förståelsen fördjupas och förändras kvalitativt. Bruner påstår att sådana idéer endast kan tillägnas om barn vid en tidig ålder har en förståelse av idén utgående från en konkret upplevelse.

Doverborg, Pramling och Qvarsell (1990) anser liksom Bruner (1996) att grundläggande färdigheter, såväl manuella som intellektuella, har en kumulativ struktur. Detta innebär att utvecklandet av nya färdigheter bygger på tidigare förvärvade färdigheter. Strukturens utveckling inleds med en insikt i vad färdigheten går ut på, det vill säga meningen med att kunna något. Det essentiella för lärande är enligt Suomala (1999) den lärandes motivation och känsla av mening i en lärandesituation.

Marton (1997) menar att omvärlden erfars olika av olika människor och definierar begreppet kunskap som förståelse. Med andra ord finns det olika kunskap om samma fenomen. Lärande handlar om att tillägna sig kunskap om eller förståelse av fenomen i omvärlden på mer differentierade och mer integrerade sätt. Utgående från detta antagande innebär småbarns lärande, enligt Lindahl (1996), en ständig reorganisering av omvärldsbilden som förverkligas genom barnets egen avsiktlighet och eget intresse. När småbarn riktar sitt medvetande mot olika uppgifter synliggörs barnets avsikter och även förståelse i deras handlingar.

Runesson (2006) beskriver lärande som att samtidigt bli medveten om fler kritiska aspekter av ett fenomen. Detta innebär att barnet bör urskilja att något varierar för att upptäcka hur fenomenet gestaltas på ett nytt sätt. Runesson hävdar därmed att variation och samtidighet är kritiska villkor för lärande. I och med att den lärande individen själv varierar sina handlingar öppnar detta upp för att upptäcka fler dimensioner i erfandet, så att fler aspekter kan fokuseras. Att urskilja någon aspekt av ett fenomen förutsätter variation, antingen direkt erfaren eller i jämförelse med tidigare erfarna feno-

men. Runesson menar därmed att en lärandesituation karakteriseras av de möjligheter att urskilja variation som finns tillgängliga.

3.2 Barns matematiska tänkande

Det har gjorts en hel del studier om hur barn i olika åldrar förstår principerna för att räkna och använda aritmetiska beräkningar för att lösa problem. Många studier fokuserar på barns förmåga, eller bristande förmåga, vilket gör att undersökningsgrupperna sällan består av yngre barn än treåringar. Trots detta är det ingen ny tanke att barns förståelse av matematik har sin grund redan tidigare i livet. Ifall intresset för vad som är grundläggande för förståelsen av matematik hos barnet fokuseras, är det naturligt att tänka sig användandet av räkneorden som en förhållandevis sen förståelse, medan förståelsen av principerna grundläggs redan tidigare. Den mångfald av studier och experiment där barn använder sig av räkneord och räkneprinciper är därför mera ett nedslag i barnets utveckling. Många studier är snarare kartläggningar av vad barn förmår vid vilken ålder, samt vilka felsvar barn ger och vad detta kan resultera i.

En av de många forskare som studerat barns felsvar i strävandet efter att förstå det matematiska tänkandets utveckling är Jean Piaget. Piaget (1959; 1962) utgår från att kunskap är uppbyggd av tankestrukturer där handlingar som förändrar strukturerna leder till problemlösningsförmåga och fortsatt utveckling. Nyare teorier om lärande och resultat av småbarnsforskning (se Donaldson, 1978; Starkey & Gelman, 1982; Stern, 1991; Marton, 1992; Mix, 2002) utmanar dock Piagets tolkningar av människans medvetande, tankeutveckling och kognitiva förmågor. Ofta visar det sig att Piagets testsituationer upplevs som främmande och svåra att förstå sett ur barnets perspektiv. Trots att Piagets undersökningar och teorier kan kritiseras, hävdar Sommer (1997) att Piagets syn på barns kognitiva utveckling fortfarande har stor betydelse för bland annat kognitionpsykologisk forskning, men också när intresset är att studera barns framväxande förståelse kan Piaget bidra med viss bakgrundsförståelse.

3.2.1 Mot ett logiskt matematiskt tänkande

Någon gång innan barn i regel börjar skolan tillägnar sig barn den förståelse av tal och antal som det tagit mänskligheten tusentals år att utveckla. Denna förståelse innebär att tre äpplen har något gemensamt med tre barn eller tre bord. Det gemensamma är "treheten", vilket inte kan erfaras som något konkret utan som en abstrakt enhet (Devlin, 1994). Det logiska tänkandet har tydliga kopplingar till matematisk förståelse, eftersom matematiska system bygger på strukturer och överenskommelser med en logisk grund. Tänkanget omfattar många aspekter, varav att förstå objekts varaktighet, mängders beständighet, att upptäcka samband och att uppfatta idén med serier är betydelsefulla för att utveckla förståelsen av den matematik som barn möter i det moderna samhället.

Objektens varaktighet

Piaget (1959; 1962; se även Piaget & Inhelder, 1977) beskriver utvecklingen av barns kognitiva tänkande i fyra stadier där det första stadiet karakteriseras som sensorisk-motoriskt. Under denna period (0–2 år) utvecklas motoriska beteendemönster som krypa, gå, smaka, bita och kasta. Upprepade erfarenheter bildar så kallade scheman som gör det möjligt för barnet att känna igen föremål och händelser. Erfarenheter av omvärlden gör att barnet utvecklar objektpermanens, det vill säga barnet inser att ett föremål existerar fastän det inte syns, till exempel att nallen existerar fastän den göms under en filt. Objektpermanens är inte en medfödd förmåga utan utvecklas enligt Piaget vid 11–12 månaders ålder och anses vara början till de inre föreställningar som möjliggör organisering av yttre handlingar och målmedvetenhet. Piaget (1977) menar att barnet under sina första månader lever i en värld där objekt inte förväntas existera om de inte erfars med sinnena. Objektens varaktighet och existens är nära knutna till lokalisering i rummet, vilket enligt Piaget kan ses i att barn som närmar sig ettårsåldern ofta letar efter gömda föremål där det *vanligtvis* återfinns, även om ett barn sett att föremålet för stunden gömts på ett nytt ställe.

En förutsättning för det logiska tänkandet är uppfattningen om objekts beständighet över tid och rum. Wynn och Chiang (1998) menar att barn tidigt uppfattar att föremål inte kan försvinna spårlöst eller dyka upp ur tomma intet. Spädbarn reagerar nämligen genom att längre fokusera blicken på en händelse där två föremål döljs bakom en skärm och överraskande nog finns endast ett föremål kvar när skärmen tas bort. Å andra sidan reagerar barnen i Wynn och Chiangs studie inte över att *ett* föremål göms och är försvunnet när skärmen tas bort, vilket antyder att barn vid åtta månaders ålder inte uppfattar avsaknaden av föremål som något överraskande. Det tycks vara av betydelse att barn har en möjlighet att fokusera sitt medvetande på konkreta objekt för att uppfatta relationen till andra objekt. Utan något konkret att relatera till blir relationen svårare att fokusera och uppfatta.

Att upptäcka samband

Enligt den teori som Piaget (1977) arbetat fram karakteriseras det andra stadiet i barns tankeutveckling (det föroperationella stadiet, 2–6 års ålder) av att barn inte är lika beroende av omedelbara sinnesintryck, eftersom de då inser att föremål existerar även utom synhåll. Symboler kan skapas och barnet deltar i låtsaslekar, eftersom det kan föreställa sig något föremål eller någon företeelse i medvetandet och även återvända till ett tidigare skeende i minnet. Trots detta hävdar Piaget att barn ser allt ur sitt eget perspektiv; de är egocentriska.

Butterworth och Harris (1994) påstår att barn från två års ålder gradvis utvecklar ett systematiskt logiskt tänkande. Så småningom brukar barn börja intressera sig för att systematiskt sortera och klassificera föremål men på ett intuitivt och icke-begreppsligt plan. Småbarnsforskning under senare år visar dock att barn redan i ettårsåldern sorterar och klassificerar som strategier för problemlösning (se till exempel Öhberg, 2004). Piaget (1952; 1977) menar vidare att barn i 5–6-årsåldern kan uppfatta och jämföra delar av ett fenomen, men inte jämföra delar med helheten. Så kallad transitiv slutledning innebär att barn inser att om $A < B$ och $B < C$ så bör också $A < C$, även om

barnet inte erfar A och C samtidigt. Förståelsen av denna storleksrelation är central för att förstå och göra serier, vilket i sin tur är grundläggande för att behärska talföljden. Innebörden i att göra serier beskrivs närmare på sidorna 39–40.

Ett annat klassiskt exempel på barns logiska, eller bristande logiska förmåga är när ett lågt, brett glas fylls med vatten som sedan hålls över i ett högt smalt glas. Barn i 5–6-årsåldern accepterar att det andra glaset innehåller samma vatten som det första, men kvantiteten sägs ha förändrats. Det barn som upptäckt att mängder och längder är lika många eller långa oberoende av spridning eller utsträckning i rummet bör med nödvändighet uppfatta kompensationen mellan vilken aspekt som ökar och vilken aspekt som minskar i motsvarande grad. Denna insikt kan inte uppkomma av konkreta erfarenheter allena, utan kräver enligt Piaget (1977) logiskt tänkande som uppträder hos barn först i 7–8-årsåldern. Förståelsen bygger även på förmågan att frånga det direkt erfarna och se samband mellan olika aspekter av det studerade fenomenet. Höjden på ett glas avslöjar inte alla samband eftersom också bredden på glaset och sambandet mellan dessa har betydelse för den totala volymen. Kvantitativa kompensationer mellan olika aspekter av fenomenet och reversibilitet i operationerna är det samband som karakteriserar detta kunskapstillägnande.

Reversibilitet innebär att tänka sig en händelsesekvens omvänt, vilket enligt Piagets studier framträder först i skolåldern. Till exempel sägs fyraåringen veta att han har en bror, men han kan inte tänka sig att brodern samtidigt har ett syskon (Piaget, 1968; 1972; 1977). Innan det reversibla tänkandet utvecklas kan barn inte heller tänka sig underordnade kategorier eller klassificeringar där ett objekt kan klassificeras olika beroende på vilken egenskap som tas i beaktande. Ett exempel på detta är att ett föremål A konstateras finnas till vänster om B, men kan då inte samtidigt vara till höger om föremål C. På samma sätt kan ett föremål enligt Piaget (1972) inte vara samtidigt mindre än och större än andra föremål. Det irreversibla tänkandet sägs även ligga bakom det unga barnets avsaknad av invarianter, det vill säga att barn inte har konstanta referenspunkter att jämföra nya intryck med.

De stadier som karakteriseras av logik och förmåga till samarbete har enligt Piaget (1968) sin början först i det tredje, konkreta operationella stadiet (7–12 år). Barn förmår i denna ålder frånga sina egna perspektiv och bryter sig således ur sin egocentrism i och med att det kan föreställa sig andras sätt att tänka, vilket möjliggör perspektivtagande och samarbete med andra. I och med de konkreta operationerna som Piaget (1972) menar framträder i skolåldern kan barnet börja förstå mätandets idé. Att mäta innebär en syntes av att förstå relationen mellan delar och deras ordningsföljd. Det operationella tänkandet karakteriseras av dess bundenhet till konkreta objekt och följer en del efter del-struktur. Först i det mest avancerade formella operationernas stadium sägs barn kunna göra upp hypoteser och reflektera över eventuella följder av ett resonemang.

Övergången från ett sätt att förstå till ett annat sker enligt Piaget (1977) i strävan efter jämvikt av det redan kända och det nya i en situation. Kunskapen regleras ständigt och bildar allt mer avancerade strukturer av förståelse. Visserligen är erfarenheterna betydelsefulla för utvecklingen av tankestrukturer men inte på ett sådant sätt att erfarenheterna i sig står för

motorn i utvecklingsprocessen. Det är snarare så, menar Piaget, att barns kunskap utvecklas i och med den logiska konstruktionen av en idé och innebörd som barn erfar i mötet med föremål och företeelser i omvärlden.

Bellagamba och Tomasello (1999) konstaterar att barn någon gång innan 18 månaders ålder utvecklar förmågan att tänka sig resultatet av en handling, vilket visar sig i deras strävan att utföra uppgifter där de antingen vet eller inte vet aktivitetens utfall. Yngre barn försöker inte utföra en handling som de ser att en modell misslyckas med. Bellagamba och Tomasello tolkar barns handlingar så att yngre barn konkret behöver erfara sambandet mellan handlingen och resultatet för att uppfatta avsikten. Förmågan att uppfatta sambandet och innebörden av delarna i en situation är av stor betydelse för att tillägna sig och använda kunskap, färdigheter och redskap som finns tillgängliga i omvärlden.

Beilin (1992) menar att Piagets senare forskning visar att redan det sensorisk-motoriska barnet är logiskt när det kan förutse resultatet av sina handlingar. Barns logiska tänkande finns därmed innan de utvecklat det verbala språket. Perner (1991) visar på forskningsresultat där barn i två-årsåldern uppenbarligen kan jämföra ett skeende med vad som borde ha skett. Detta innebär att barn kan ha förmåga att frångå en verklig upplevd situation och föreställa sig en tänkt situation. Perner menar att när barn kan tänka sig alternativa skeenden så har de även en djupare förståelse av det som sker. Parallellt med att barn tillägnar sig färdigheter och kunskaper utvecklas också deras tänkande (Pramling, 1983; 1991). Detta innebär att när barn blir medvetna om sina färdigheter och kunskaper, lägger det i sin tur grunden till förmågan att reflektera över sina handlingar och sitt tänkande.

Konservering av mängder

Konserverandet av mängd och antal är en av de principer som Piaget (1952; 1977) anser vara grundläggande för numerisk förståelse. Att konservera antal innebär förståelse av att spridningen på objekt som ingår i en mängd inte påverkar det totala antalet. Piaget visade detta i ett i dag klassiskt exempel där föremål placerats i två identiska rader. Föremålen i den ena raden sprids ut inför barnet som sedan frågas i vilken rad det finns flest föremål. Barn i 4–5-årsåldern svarar ofta att den mera utspridda raden är flera till antalet, även om inga föremål lagts till eller tagits ifrån. Barnet har då inte heller uppfattat den numeriska innebörden av en mängd. På liknande sätt uppfattar barn i 5–6-årsåldern två lika långa parallella linjer som förskjutits något så att den övre linjen sträcker sig en bit framför och den undre linjen något bakom den andra, den övre linjen som "längre", eftersom den upplevs sträcka sig längre. Förmågan att konservera antal bygger således på en logisk koordinering av de aspekter som barnet erfar hos föremål eller företeelser. Detta är i sin tur avgörande för klassificering, när kvaliteterna hos föremålen upplevs som jämställda, och seriering när kvaliteterna skiljer föremålen åt.

Även om barn i 3–4-årsåldern inte lyckas utföra Piagets konserveringstest visar studier av Gelman (1982) att barn ändå har förmåga att konservera mängder. Gelman hävdar nämligen att förmågan att konservera mängder grundar sig på ett-till-ett-korrespondens, på så sätt att barn omedvetet

relaterar objekt ett-till-ett för att jämföra och bestämma mängder. Betydelsen av ett-till-ett-korrespondens framkommer till exempel när barn får möjlighet att räkna antalet i en mängd, jämföra med en annan mängd ett-till-ett och sedan bedöma huruvida mängderna är konstanta eller ej. Till och med tre år gamla barn kunde i Gelmans studie ge övertygande förklaringar till varför de ansåg att antalet i en mängd var oförändrat eller ej. Det kritiska tycks vara just möjligheten att inledningsvis jämföra små mängder ett-till-ett och på så sätt blir barnet medvetandegjort på en strategi som stöder det i dess tänkande. Om barnet först räknar små mängder ordnade ett-till-ett och jämför dessa med varandra kan det göra rimliga uppskattningar om en mängd på tio har samma antal enheter när spridningen på enheterna förändrats. Barnet för då över en implicit idé om ett-till-ett-korrespondens så att det inser att också större mängder bibehåller sitt antal enheter.

Piaget (1952) hävdar att ett-till-ett-korrespondens kan uppkomma i två olika situationer; när barn vill jämföra mängder utan att behöva räkna, eller i syfte att para ihop heterogena föremål såsom en kopp med ett fat, ett ägg med en äggkopp, det vill säga aktiviteter som utmanar barnet att finna en motsvarande del. Piaget visar dock i sina test att trots att barn i femårsåldern parar ihop föremål med varandra så uppfattar de inte de totala mängderna som konstanta, utan måste jämföra mängderna ännu en gång ett-till-ett även om inget lagts till eller tagits bort. Mix (2002) presenterar däremot resultat från en studie av barns ett-till-ett-korresponderande aktiviteter som visar att barn redan en kort tid efter ettårsdagen är engagerade i sociala aktiviteter där idén är att objekt paras ihop med andra objekt, ofta så att varje person tilldelas ett föremål. Öhbergs (2004) studie av ettåringars problemlösande aktiviteter visar därtill att barn i ensamma aktiviteter parar ihop koppar med fat och kopp+fat med kokplatta. Det visar sig alltså att barn i självinitierade aktiviteter och sociala kontexter tillägnar sig tidiga erfarenheter av konserverande av mängder, även om de inte fullständigt inser den konserverande innebörden av ett-till-ett-korrespondensen.

För att jämföra och göra en uppskattning av likheterna och skillnaderna mellan två längder, krävs att mätaren tänker logiskt, enligt Nuñez och Bryant (1996). Att mäta innebär att utgå från en referenspunkt som uppfattas vara konstant, det vill säga denna referenspunkt förändras inte utan behåller samma längd från ett tillfälle till ett annat. Ytterligare bör mätaren vara på det klara med att om A är lika lång som referenspunkten och B är lika lång som referenspunkten så är också A lika lång som B. Detta är förutsättningen för att använda mer standardiserade mätinstrument som måttband, litermått eller våg, men fungerar också med icke-standardiserade mått som kroppsdelar eller andra föremål. Barn bör alltså förstå "transitiv slutledning" (Piaget, 1977) och logiken i hur enheter bildas och används för att till fullo förstå mätandets idé. Hur olika enheter definieras är i sin tur kulturellt betingat, men kräver att mätaren inser relationen mellan olika enheter.

Malmer (1996) beskriver en strategi inom matematisk begreppsinsläring som utgår från att mäta alla föremål mot ett enda föremål. Detta kan användas också vid aritmetiska erfarenanden där barn på så sätt kan få en förförståelse av mätetalsidén. En utveckling av denna idé kunde vara till exempel att använda stavar av olika längd och mäta hur många korta som går på en lång stav. I praktiken kan detta fungera som en introduktion till bråkform.

Den grundläggande idén är dock att egenskaper såsom längden hos objekt är varaktig och inte förändras beroende av tid eller rum.

Att seriera

Att seriera innebär att ordna objekt i en serie där förhållandet mellan objekten är avgörande för vilket objekt som kommer före och efter något annat. Vissa kvaliteter fokuseras medan andra inte tas i beaktande. Serier kan göras utgående från vilka egenskaper som helst, vare sig det gäller färgnyansers intensitet, längden på stavar eller antal i mängder. Varje föremål förhåller sig på ett visst sätt till det närmast föregående och närmast efterföljande, vilket för med sig att i bildandet av en serie tas både delarnas inbördes förhållande i beaktande men också delarnas förhållande till helheten.

Barn i åldern 4–7 kan enligt Piaget (1977) frånga vissa kvaliteter hos föremål och fokusera på någon gemensam kvalitet som gör att föremålen kan kategoriseras och bilda en grupp. Det kritiska för att förstå talens numeriska innebörd är att frånga kvalitativa likheter och skillnader och bilda en serie där kvantiteten är avgörande för talens ordningsföljd och innebörd. Talförståelse gestaltar sig därmed som en syntes av kategorisering och seriering (Piaget, 1952; 1977), en syntes som tar form genom logiskt tänkande. Kopplingen mellan position i en ordningsföljd och kardinalitet, det vill säga att det sist uppräknade räkneordet avser den totala mängden, blir nämligen allt mer tydlig ju mera utvecklad förmågan till seriering är. Barnet tar då i beaktande alla de delar som utgör en helhet och deras inbördes relationer till varandra. Piaget ger även exempel på 10–12 månader gamla barn som gör enkla serier av tre föremål i olika storlekar och menar att detta är början till kardinalitet även om barn ännu i fyraårsåldern i första hand tycks fokusera relationen mellan två föremål åt gången utan att ta hänsyn till helheten. Piaget ger som exempel att när barnet fokuserar en sticka bland många i varierande längder och uppmanas välja den längsta stickan av alla, så tenderar barn att välja vilken längre sticka som helst, och ser därmed enligt Piagets tolkning inte till helheten, vilket är nödvändigt för att göra en serie.

Doverborg (1987) har gjort en undersökning med barn i åldrarna 3–7 där hon bitt barn att ställa föremål i storleksordning. Resultaten av undersökningen visade att 69 % av treåringarna och 20 % av fyraåringarna inte förstår serieringsuppgiften utan vill ordna föremålen på annat sätt. Doverborg förklarar resultaten så att uppgiften att ställa föremålen på rad i storleksordning inte har någon innebörd för barnen. Många forskare har konstaterat att meningsinnehållet i uppgifter som presenteras för barn har en avgörande betydelse för resultaten. Även om barn inte på uppmaning gör serier av olika objekt så visar sig småbarn ändå ha en intuitiv kunskap om idén i och med att de kan observeras göra serier spontant i självvalda aktiviteter.

På liknande sätt som idén om att seriera kan bygga på att urskilja och ordna föremål enligt vissa synliga egenskaper, har en sekvens av tid att göra med ordningen av händelser. Charlesworth (1996) anser att det finns två sidor av begreppet tid: sekvens och varaktighet. Att ordna föremål enligt mönster är därmed kopplat till att uppfatta ordningen av händelser, till exempel att stiga upp på morgonen, borsta tänderna och sedan gå till daghemmet, vilket enligt barnets erfarenheter sker i en viss ordning på morgonen, alltså en sekvens

över tid. Varaktighet har å andra sidan att göra med hur länge en händelse pågår, vilket brukar beskrivas i minuter, timmar, dagar eller kort respektive lång tid.

Tid är ett svårgripbart begrepp för barn, främst eftersom begreppet är abstrakt och ofta svårt att konkretisera. Charlesworth (1996) hävdar att barn relaterar tid till personliga erfarenheter, sociala aktiviteter och kulturell tid. Till de personliga erfarenheterna hör barnets egen historia, nutid och framtid relaterat till barnet självt. Därför kan det vara svårt för barnet att tänka sig en tid innan det var fött och framtiden kan vara imorgon lika gärna som "när jag blir stor". Tid i form av sociala aktiviteter är däremot lättare att få grepp om för det unga barnet i och med dagliga rutiner som barnet lär sig känna igen och följa. Tid uppfattas då som en sekvens av förutsägbara händelser. Kulturell tid bestäms å sin sida av till exempel klocka och kalender, vilket kan vara svårt att förstå bakgrunden till, men som barnet snart lär sig relaterade begrepp till (sekunder, minuter, timmar, månader, år). Språket har enligt Charlesworth lika stor betydelse för att barns förståelse av tidsbegreppen som av andra matematiska begrepp.

3.2.2 En intuitiv känsla för antal

Långt innan det verbala språket utvecklas och talbegreppens innebörd blir klar framträder någon form av uppfattning om antal. Denna tidiga uppfattning tycks finnas hos såväl människor som djur. Det finns en mängd studier som visar hur råttor, apor och duvor har en intuitiv uppfattning om antal och mängder och förmår jämföra och manipulera föremål aritmetiskt (se Gallistel, Gelman & Cordes, 2005, för en sammanfattning av de mest relevanta studierna). Sådana studier genomförs i form av experiment där till exempel en råtta tränas att trycka ner en viss spak när ett visst antal markeringar visas eller när en ljudsignal ljuder under en viss tid. Färre antal markeringar eller större skillnader i tidsperiodernas varaktighet urskiljs relativt enkelt, men ju fler markeringar som visas eller ju längre intervaller som ljuder, desto svårare tycks det vara att uppfatta skillnaden. Om markeringarna presenteras i en tidsföljd, tycks detta också ha en numerär innebörd för experimentdeltagaren. Form eller varaktighet ger alltså ledtrådar till antalet. Föga förvånande gäller detsamma för människor, ju närmare i antal två mängder är desto svårare är det att avgöra vilken mängd som är större och mindre, eller hur lång en tidsföljd är jämfört med en annan.

Piaget (1952) menar även att barn i första hand uppfattar rumsliga likheter och skillnader, vilket kan visa sig i att barn som uppmanas välja ut lika många knappar som en modell väljer att göra en figur som påminner om modellen till form och storlek, men utan att ta hänsyn till antalet delar som figuren består av. Antalsuppfattningen är därmed intuitiv och barnet strävar efter att skapa en generell motsvarighet till modellen. Det är dock allmänt vedertaget, grundat på en mängd empiriska studier, att barn redan innan de har utvecklat färdigheten att uttrycka sig verbalt har en intuitiv uppfattning om antal.

Subitiser

Den process som innebär att direkt uppfatta en skillnad mellan en, två, tre eller till och med fyra enheter utan att räkna kallas subitizing eller subitiser

(Gelman & Gallistel, 1978; Gelman, Gallistel & Cordes, 2005). Starkey, Spelke och Gelman (1990) visar i en studie av 6–8 månader gamla barn att det tycks finnas en sådan intuitiv uppfattningsförmåga för numerära likheter och skillnader. Enligt Gelman, Gallistel och Cordes (2005) är det denna grundläggande aritmetiska förmåga som utgör startpunkten för symboliska och verbala representationer av antal.

Att uppskatta mängder och intuitivt bedöma antal är en framväxande färdighet som blir mera noggrann i takt med att barnet får fler erfarenheter. Lipton och Spelke (2003) jämför sex månader gamla barn med nio månader gamla barn och konstaterar att äldre barn diskriminerar åtta enheter från tolv enheter, i jämförelse med yngre barn som skiljer ur åtta från sexton enheter. Att diskriminera enheter innebär i detta fall att skilja ur enheter som tillsammans bildar olika stora mängder. Numerär diskriminering ökar således i precision innan det verbala språket och symboliskt räknande utvecklas. Det står därmed klart att barn har förmågan att urskilja skillnader i mängder redan i tidig ålder.

Starkey, Spelke och Gelmans studie (1990) grundar sig på spädbarns val av fokus. Studien visar att barn tenderar att uppmärksamma numerära likheter framför färg eller form. Studien visar också att barn har förmåga att urskilja numerära likheter eller skillnader över sinnesmodaliteterna syn och hörsel. De tidigaste numerära förmågorna tycks ha en generell struktur som framträder långt innan det verbala språket utvecklas eller kulturella erfarenheter har hunnit sätta sina spår hos det lilla barnet.

I kontrast till den studie av Starkey, Spelke och Gelman som visar att spädbarn uppfattar ett numerärt samband mellan olika sinnesintryck, presenterar Mix, Huttenlocher och Levine (1996) en studie som visar att barn först i 3–4-årsåldern tycks förmå göra en sådan numerär koppling som Starkey et al. föreslår. Mix et al. menar att denna förmåga uppträder i samband med att barn lär sig det språkliga räkningsystemet. De svårigheter som barn i treårsåldern tycks ha att skilja ur likheter hos mängder tolkas som beroende av det medvetna val som barnet måste göra i uppgiften, vilket skiljer sig från det mera passiva urvalet som görs i spädbarnsstudier. Däremot klarar treåringarna bättre av att upptäcka numerära likheter hos visuella mängder. Det kan dock finnas en rimlig förklaring till dessa överraskande och motstridiga resultat, nämligen att den intuitiva uppfattningen av likheter och skillnader i antal möter det mera medvetna resonemanget som räknandet för med sig. Barn upplever att räknandet är en strategi som kan tänkas fungera för att jämföra mängder, och försöker använda denna medvetna urskiljning trots att de ännu inte har en tillräckligt utvecklad färdighet och innebördsförståelse. I synnerhet när det är frågan om auditiva intryck tycks likheterna och skillnaderna vara svårare att urskilja.

Att förstå och definiera tal som antal handlar visserligen om att upptäcka en generell princip, men har alltid subjektiva inslag. Neuman (1989) diskuterar utvecklingen av talförståelse utgående från en studie av barns uppfattningar av tal. Hon konstaterar att det för de flesta vuxna är uppenbart att större tal består av sammansatta enheter, som en mental föreställning av grupper om till exempel tio eller hundra. Mindre tal behöver däremot den vuxna människan inte längre föreställa sig som en sammansättning av enheter, utan uppfattar talen som ett fenomen i sig, "fem" uppfattas som fem stycken av

något slag och tycks vara svårt att desto närmare beskriva, medan "hundra-tre" gärna beskrivs som hundra stycken och tre till. Neumans studie visar hur barn strävar efter att "se" antal, till exempel genom att gruppera fingrarna på olika sätt och då göra talmängden mera konkret och tydlig att urskilja och föreställa sig.

Neuman (1989) visar i en studie av barn i skolans första klass hur sjuåringar uppskattar mängder och omfång utgående från visuella intryck. Hon menar att barn erfar räkneorden som "litet", "mycket" eller "mitt emellan", det vill säga inte som små eller stora objekt utan som uppskattade mängder av objekt. Tal som nämns senare i räkneramsan bedöms motsvara ett större omfång. När det gäller behärskningen av de fyra räknesätten är det antagligen nödvändigt att känna till talens varierande innebörder, talens månghet och sekvens (Carlgren & Marton, 2002). Även Aunio, Niemivirta, Hautamäki, Van Luit, Shi och Zhang (2006) konstaterar att räkneförmågan handlar dels om att uppskatta mängder, till exempel som mer eller mindre, dels om en kardinalitetsgivande sekvens i form av räkneramsan.

Neumans (1989) studier visar att matematiksvårigheter tycks ha ett samband med förmågan att uppfatta ett tal just om en sammanbunden helhet av ett visst antal delar, alltså en mängds månghet. Gelman och Gallistel (1978) påvisar att vuxna snabbt uppfattar till exempel antal i en rad och i en kvadratisk form, vilket gör att de förhållandevis snabbt subitiserar också en större mängd. Lindström, Marton, Lindahl och Packendorff (manus) visar hur 5–7 år gamla barn utvecklar bättre förmåga att förstå tal och antal, liksom att svara på frågor som berör addition och subtraktion, efter att ha tränat på att känna igen mönster som subitisering, det vill säga att intuitivt uppfatta hur många delar en mängd består av.

Tidiga aritmetiska färdigheter

Wynn (1998) liksom McCrink och Wynn (2004) presenterar resultat av experiment med spädbarn där nio månader gamla barn inte enbart urskiljer likheter och skillnader i mängder om tre eller fyra, utan också tycks skilja ur större mängder, såsom fem och tio i antal. Testen går ut på att kontrollera huruvida barn förväntar sig att mängder ökar eller minskar och resultaten visar att rörelse- eller formigenkänning inte är det mest centrala utan det numerära fokuseras i första hand när det rör sig om sådana större mängder. Detta innebär att barn innan de utvecklat ett verbalt språk bedömer utfallet av aritmetiska uppgifter där objekt sätts till eller tas ifrån en mängd. Enligt McCrink och Wynn har människan därmed en tidig kognitiv förmåga att uppskatta förändringar hos mängder. Sådan spädbarnsforskning visar att barn yngre än ett år tycks ha så kallade aritmetiska förväntningar. Aritmetiska förväntningar innebär att barnet förväntar sig att när objekt tillförs en mängd så påverkas mängden som helhet, samt att motsvarande förändring sker när objekt tas från en mängd, det vill säga att barnet förväntar sig att när ett föremål göms och ytterligare ett föremål göms på samma ställe, så skall det finnas två (eller i varje fall fler än ett) föremål på gömstället. Dessa förväntningar tar sig sådana uttryck att barn letar efter föremål tills de funnit det antal som de förväntar sig.

Aritmetiska förväntningar förutsätter vad Piaget (1977) kallar objektpermanens, det vill säga att föremål existerar trots att de inte syns. Langer, Gillette

och Arriaga (2003) påpekar att studier gjorda med fem månader gamla barn visar att vissa barn visar sig ha aritmetiska förväntningar medan andra tycks sakna dem. Den studie som Langer et al. gjort indikerar att perceptuell diskriminering uppträder senare än sensoriskt motoriska operationer, det vill säga att barn vid yngre ålder lättare urskiljer förändringar i antal när de har möjlighet att själva agera i situationen än när de skall skilja ur mängder enbart visuellt. Andra studier som bygger på barns fokuserande av blicken på överraskande företeelser visar trots allt att barn som bara är 3–4 månader gamla tycks diskriminera och uppmärksamma likheter och skillnader. Clearfield (2004) menar dock att spädbarn inte nödvändigtvis uppfattar skillnader i antal utan att det är perceptuella förändringar i rytm eller tidsintervaller som barn uppmärksammar. Skillnaderna i forskningsresultat kan enligt Cashon och Cohen (2000) bero på att barn i olika åldrar tenderar att fokusera på olika saker. Yngre spädbarn fokuserar hellre rörelser medan äldre spädbarn väljer föremål av en viss karaktär.

Småbarn har visat sig kunna använda sina aritmetiska färdigheter för att konstruera strategier för att skilja ur och jämföra uppsättningar av föremål (Gallistel & Gelman, 1991). Barn i fyraårsåldern är enligt Zur och Gelman (2004) skickliga på att uppskatta små och även större mängder. De har en "känsla" för antalet och vilket talbegrepp som kan tänkas motsvara antalet. Barn uppfattar också i de flesta fall värderingen i talbegreppen så att i en situation där en mängd ökar, uppskattas antalet med ett talbegrepp som återfinns senare i räkneramsan. Zur och Gelmans studie visar också att när barn snabbt ger en uppskattning av en mängd, tenderar de att uppskatta närmare det verkliga antalet än när de tar tid på sig att komma fram till en gissning. En tänkbar förklaring är att barn i sina snabba uppskattningar implicit använder mentala strategier för addition och subtraktion eller ett-till-ett korrespondens. Zur och Gelman hävdar att de snabba svaren då inte handlar om subitisering, eftersom grupperna av föremål vars antal skall uppskattas döljs för barnen i testsituationerna.

Hunting (2003) har genomfört studier med tre år gamla barn i syfte att närmare undersöka barns förståelse av del-helhetsrelationer i antal upp till fem eller sex. Studien går ut på att fem "spindlar" gömmer sig, en åt gången, under en sten (icke genomskinlig kopp) och barnet uppmanas säga hur många spindlar som finns under koppen. Barnen i studien visar sig ha olika strategier för att hålla reda på hur många spindlar som inte längre är synliga, det vill säga delar relaterade till helheten. Ett tillvägagångssätt som verkar vara vanligt innan barn är säkra räknare är att visualisera situationen som de försöker minnas, eller förändringen som skett, genom att använda fingrarna som stöd. Men det finns också treåringar som förmår tänka sig att när de uppfattat tre spindlar i stället för fyra och fått möjlighet att korrigera sitt svar, så bör också den återstående mängden förändras till en färre än vad barnet trodde inledningsvis. Huntings studie visar också att det finns barn i treårsåldern som ännu inte tagit kardinalitetsprincipen till sig, och ej heller läser räkneramsan konstant, men ändå uppfattar antal till exempel genom att visa tre fingrar när tre spindlar gått in under koppen och inte längre syns. Barnet gestaltar således sin uppfattning av antalet med fingrarna utan att uttrycka antalet verbalt.

3.2.3 Relationen mellan delar och helhet

Aunio, Niemivirta, Hautamäki, Van Luit, Shi och Zhang (2006) hävdar att den numeriska färdigheten hos människan omfattar såväl en generell som en specifik numerisk förståelse. En generell numerisk förståelse innebär att ett barn uppfattar mängders numerära innebörd och relationer, vilket gör att barnet kan jämföra, organisera och uppskatta mängder som mer eller mindre, fler eller färre. Specifik numerisk förståelse innebär däremot att använda talbegreppen och aritmetiska färdigheter. Den senare formen av förståelse anses vara mer formad av undervisning och kulturellt inflytande men torde bygga på den tidigare generella förståelsen. Det är högst troligt att språkliga variationer, det basssystem och de undervisningsmetoder som används har betydelse för hur barns aritmetiska förståelse utvecklas. Den generella förståelsen av numerära samband är dock mycket betydelsefull som grund för utvecklingen av matematiskt tänkande i och med att förmågan att urskilja relationen mellan mängders storlek eller omfattning kräver fokusering på mängdens helhet och delar.

Att forma en konstant helhet innebär att ett barn uppfattar att delar oberoende av spridning tillsammans bildar en helhet. Piaget (1952; 1977) och många forskare efter honom konstaterar dock att småbarn inte förmår konservera antal eller mängder. Piaget (1977, 40) menar att "conservation of a whole supposes a set of hierarchic inclusions joining to this whole the parts of which it is formed". Att uppfatta helheten innebär därmed att förmå relatera delarna till varandra och till helheten. Piaget visar på barns bristande förmåga att konservera antal genom experiment där delar i en av två identiska rader av föremål sprids ut. Barn yngre än skolåldern svarar ofta att en mera utspridd rad innehåller fler delar. Det kan finnas många tänkbara orsaker till att barn tappar fokus på det numerära i uppgiften. Rörelsen när föremål sprids ut kan locka uppmärksamheten från helheten till de enskilda delarna, överensstämmelsen ett-till-ett mellan två från början likadana rader kanske inte längre är lika uppenbar, eller också fångar det visuella totala intrycket barns uppmärksamhet. Mix (2002) visar dock att barn i ettårsåldern förmår para ihop delar från olika mängder när de själva tar initiativ och engagerar sig i sociala aktiviteter. Piagets klassiska test med spridda rader är antagligen inte meningsfulla för yngre barn vilket gör att de i högre grad misslyckas med konserveringstesten.

Betydelsen av att finna en mening i uppgiften kan ses när småbarn skickligt lägger pussel där varje pusselbit har sin motsvarighet i en fördjupning i pusselramen. Pusslet har en tydlig innebörd i och med att fördjupningarna för varje pusselbit har en indirekt uppmaning att finna det som saknas, till skillnad från att para ihop leksaksbilar med leksaksdjur där syftet med hopparandet inte är lika uppenbart. Mix (2002) hävdar att aktiviteter med sådana pussel kan fungera som en övergång från att para ihop objekt ett-till-ett till mera medvetet jämförande av mängder. Fokus kan då läggas på jämförelse mellan två mängder, för att upptäcka den numeriska likheten i och med att varje fördjupning "frågar efter" en pusselbit och barnet lätt uppfattar när delarna har fått sin tänkta plats och huruvida det blir någon bit eller plats över. Den naturliga kopplingen tycks leda barnets tänkande så att barnet förmår relatera delar till varandra på ett mera kompetent sätt.

Piaget (1952) påstår att barns oförmåga att konservera och skilja ur antal beror på svårigheter att bryta ner en helhet i delar. Svårigheterna har i sin tur en orsak i det irreversibla tänkandet, eftersom barn inte inser att delar kan sättas samman på varierande sätt och ändå bilda samma helhet. När barn upptäcker denna motsatta relation mellan delar och helhet kan också den numerära förståelsen träda fram. Det är därför betydelsefullt att barnet gör kvalitativa jämförelser mellan delar och helhet för att upptäcka hur varje enskild del påverkar helheten.

Markman (1979) lyfter fram en annan betydande orsak till varför barn misslyckas i Piagets konserveringsuppgift. Enligt Markman har barnets fokusering på del-helhetsrelationen mellan föremålen i uppgiften stor inverkan på hur barn förstår situationen. Om barn förmår uppfatta helheten, och inte enbart en grupp av skilda föremål, tenderar barn att oftare lyckas lösa Piagets uppgift. Markman skiljer åt de två sätten att förstå och menar att fokusering på antingen "samling" eller "klass" är avgörande. Ett träd kan sägas höra till en klass av träd, såsom björk eller bok, men en samling träd innebär till exempel en skog. Ett träd som erfars utanför sin kontext kan visserligen definieras som tillhörande en viss klass av träd, men för att höra till en samling träd måste den skog som trädet är en del av också tas i beaktande. På samma sätt menar Markman att barns fokusering har betydelse för hur de uppfattar konserveringsuppgifter. En samling har alltså en tydlig del-helhetsrelation (en björk är en *del* av en skog). Kardinaltal, det vill säga det sist nämnda talet i räkneramsan anger totala mängden, bygger likaså enligt Markman på förståelsen av helheten som en samling delar. Det är inte tillräckligt att fokusera de enskilda delarna som skall räknas, utan helheten måste tas i beaktande. Relationen mellan det individuella och kollektiva bör alltså uppfattas samtidigt.

Markmans (1979) studie visar att barn som uppmanas fokusera på helheten (en samling föremål) också oftare följer kardinalitetsprincipen. I och med att barn ges stöd i att fokusera på helheten förmår de föreställa sig en mängd som en samling av delar och kan då lättare bortse från till exempel spridning eller andra kvaliteter hos föremålen. Barn lyckas också på detta sätt bättre verbalisera och finna numeriska grunder för sina uppfattningar. Markman menar att det inte vållar några större problem för barn att särskilja delar från varandra, men det problematiska uppstår när barn samtidigt skall uppfatta delarna som ingående i en helhet.

Benoit, Lehalle och Jouen (2004) diskuterar hur barn yngre än skolåldern tillägnar sig förståelse av talbegreppens kardinala innebörd. De hävdar att barn från treårsåldern i högre grad använder rätt talbegrepp när helheten fokuseras framför delarna. De visar detta genom att jämföra barns begrepps-användning vid uppräknande av 1–6 stycken föremål när föremålen visas ett efter ett och när den totala mängden visas samtidigt. När barn tillåts subitiserar hela mängden tenderar de att oftare uppfatta antalet korrekt än när de uppmanas räkna delarna en efter en. Subitisering, där fokusen alltså läggs på att uppfatta helheten, kan därmed sägas vara en viktig aspekt av att förstå talens kardinalitetsinnebörd. Redan Werner (1948) menar att barnet först ser världen som en odifferentierad helhet. I och med att barnet utvecklas mentalt, börjar det urskilja delar i helheten. Delarna relaterar alltid till den innebörd som helheten har för barnet, vilket för med sig att barn först

inte urskiljer delarna i en bild utan uppfattar helheten och innebörden. Således menar Werner att barn har ett associativt minne, eftersom de relaterar delar till en helhet och strävar efter att bygga upp helheten igen.

Ahlberg (1994; 1995) lyfter också fram betydelsen av att gruppera och omstrukturera delar i en helhet för utvecklandet av förståelse av tal och räkneprinciper. Barn bör få tillfälle att lösa problem där de grupperar mängder av föremål på olika sätt och på så sätt erfar hur delmängderna relaterar till varandra. Ahlberg menar att barn då lär sig uppfatta talmönster, vilket innebär att de inte alltid behöver räkna upp från räkneramsans början utan ser genast talrelationer och kan kombinera de tal som ingår i uppgiften. På så sätt kan barn uppleva hur tal och mängder är relaterade till varandra och småningom förstå del-helhetsrelationen (Ahlberg & Hamberger, 1995).

3.2.4 Symbol- och begreppsförståelse

Hägglom (2000) lyfter fram tre karaktärsdrag för matematiken, som även har betydelse för undervisning och inläring. Hon menar att begrepps-bildning och olika sätt att representera begrepp är stommen i matematik. I och med att begreppsbyggnaden också handlar om olika sätt att representera begreppen har språket således en betydande roll, både i form av skriftligt symbolspråk och talat språk. Språket hjälper barn att kommunicera sin förståelse och stöder utvecklandet av reflektion av och argument för lösningar på problem. Som ett tredje karaktärsdrag lyfter Hägglom fram det konkreta och det abstrakta tänkandet, där konkret upplevda fenomen kopplas samman med det mera abstrakta symbolspråket.

Nuñes och Bryant (1996) sammanfattar en teori om barns växande matematiska förståelse där de delar in utvecklingen i tre områden. Först och främst genereras barns matematiska kunskap under hela barndomen och förändras med fler tillägnade erfarenheter. Detta innebär att barn inte behöver lära sig matematik bit för bit, utan uppfattar i stället strukturer och mönster som gör att barn förstår matematiska begrepp och fenomen på ett visst sätt. I och med detta kan man finna att barn ofta har någon form av förståelse av olika matematiska begrepp och symboler redan i tidig ålder. Det andra området i Nuñes och Bryants teori innebär att barn lär sig om logiska invarianter (invarianten betyder till exempel att tio millimeter motsvarar en centimeter, vilket i sin tur relaterar på ett visst sätt till andra storheter såsom meter eller fot), barn lär sig om konventionella system som används och matematiska krav som ställs i olika situationer. Detta innebär att barn lär sig använda kulturella begrepp och symboler som stöd för tänkandet. Det tredje området omfattar matematik som en socialt definierad aktivitet, med betydelse för hur barn uppfattar sig själva och sin förmåga att tänka matematiskt.

Matematik handlar, enligt Gran (1998), i stor utsträckning om symboler av olika karaktär, till exempel siffror, geometriska figurer eller funktionstecken. Förståelsen av symbolers funktion spelar därmed en viktig roll för den kulturella matematiska förståelsen, inte minst i fråga om talsymbolerna. Barn som lär sig ramsräkna använder ofta fingrarna som hjälp för att hålla en viss mängd i minnet eller för att åskådliggöra en mängd. Handens fem fingrar uttrycker en mängd genom det kroppsliga språket som sedan kan överföras till symboler för samma mängd i skriftspråk: fyra fingrar motsvarar fyra ritade

bilar eller mer abstrakt, fyra streck. Övergången från handens fingrar till skrivtecknen är enkel men principiellt viktig eftersom idén med ett-till-ett-korrespondens, där enheter ur en mängd motsvarar enheter ur en annan mängd, är till god hjälp för att få insikt i räknandet (Johnsen Høines, 2000).

Piaget och Inhelder (1977) resonerar som så att barns tänkande i åldern 2–6 år karakteriseras av att barn inte är lika beroende av omedelbara sinnesintryck vilket tar sig uttryck i att barn kan skapa symboler och delta i låtsaslekar, eftersom de kan föreställa sig fenomen i medvetandet och återvända till ett tidigare skeende i minnet. Att förstå symbolernas funktion innebär att skilja ur betydelsen av ett fenomen och representera innebörden på något sätt, till exempel i form av en symbol. Symbolerna underlättar på så sätt struktureringen av omvärlden. Klart definierade symboler gör dessutom att kommunikationen med andra blir lättare, vilket i sin tur underlättar problemlösning i grupp. Att tänka symboliskt innebär att omvandla en del av den erfarna verkligheten, till exempel i lek eller genom andra uttrycksformer. Det symboliska tänkandet är, enligt Hwang och Nilsson (1996), till stor hjälp för barns problemlösning och lärande, eftersom symboler är generaliseringar av innebörder som kan presenteras på något annat sätt, till exempel i form av teckensymboler eller begrepp.

Omkring 15–18 månader gamla barn börjar enligt Stern (1991) föreställa sig föremål på ett sådant sätt att symbolisk lek blir möjlig. Barn kan föreställa sig själva som personer och sedan referera till sig själva som objekt. I och med detta kan barn även kommunicera om föremål och personer som inte är närvarande. För att denna förmåga skall utvecklas måste barn korrekt kunna representera händelser som andra utför, skapa en inre föreställning, ha fysisk kapacitet, samt förmåga att koda in i långtidsminnet för att sedan fritt kunna återge en hel situation. Stern menar att barn förvärvar dessa kapaciteter tidigt. Övergången markeras av att barn kan ha två versioner av verkligheten; den ursprungliga handlingen utförd av andra och sitt eget faktiska handlande, samt justeringar dem emellan för att handlingarna skall bli överensstämmande. Ett psykologiskt samband är också nödvändigt mellan modellen och barnet, för att barnet skall kunna föreställa sig hur det är att vara i modellens ställe. Att kunna representera sig själv som objekt är således en förutsättning för symbolisk lek.

Užgiris (1999) menar att den symboliska leken kan vara utforskande till sin karaktär, där barnet försöker komma underfund med något genom att upprepa en speciell händelse. Sökandet efter motsvarigheter och att göra symboliska modeller för fenomen som barnet inte ännu förstår så väl, verkar vara kännetecknen för ett mera moget tänkande. Užgiris menar att sådana handlingar är ovanliga hos småbarn. Lindahls (1996) studier visar dock att en del barn redan i ettårsåldern kan växla perspektiv i fråga om minnesbilder så att ett föremål symboliskt representerar ett annat. Barnet har då tillägnat sig tillräcklig förståelse av ett fenomen för att kvalitativt kunna abstrahera föremålets innebörd och således intuitivt reflektera över händelser och olika fenomen de stöter på i omvärlden.

Ahlberg (1994) anser att matematik är ett språk som gestaltas bland annat i matematiska symboler. Miller och Paredes (1996) säger att det finns åtminstone tre sätt på vilka matematiska symboler och symbolsystem inverkar på människans tänkande, tankeutveckling och matematiska förståelse. För det

första kan strukturen på symbolerna ha betydelse för med vilken lätthet barn tillägnar sig symbolsystemet. Tiobassystemet är ett gott exempel, i och med att barn tidigt lär sig känna igen siffror generellt, som att siffror inte är samma typ av symboler som bokstäver, och att siffror motsvarar ett antal, där flera siffror efter varandra dessutom betyder ett större antal, men också att övergången vid tio markerar en strukturell förändring i begreppen. För det andra kan symbolsystemets organisation ha betydelse för på vilket sätt vana användare utnyttjar dessa symboler för att lösa problem. Vuxna människor har ofta memorerat multiplikationstabellen och använder denna snabbt och effektivt för att lösa vardagliga problem. Kunskapen är då organiserad på ett sådant sätt hos människan att hon snabbt kan använda kunskapen i olika situationer. För det tredje kan symboler stimulera men också hämma utvecklingen av begreppslig förståelse inom de områden symbolerna representerar. Kulturellt inflytande såsom det talade och skrivna språket, liksom andra kulturella symboler (bland annat tiobassystemet där övergången tiotio skiljer sig från övergången tjugo–tjugoett) spelar här en stor roll. Genom att använda de matematiska symbolerna i meningsfulla sammanhang utvecklar barn också sin förståelse av innebörden av symbolerna.

Mix (2002) konstaterar utgående från en longitudinell studie av barns framväxande förståelse av talbegrepp, att tidig användning av talbegrepp i hög grad är kontextberoende. Sociala aktiviteter, till exempel där föremål delas ut åt olika personer, verkar ha en större betydelse för utvecklandet av förståelse av talbegreppen än traditionella konserveringsuppgifter, där idén är att matcha uppsättningar av föremål med varandra. Förmågan att skilja föremål från andra, alltså att individualisera objekt, har enligt Mix betydelse för insikten att föremål kan ses som enheter, som i sin tur kan bilda par med andra föremål. Denna insikt lägger grunden för bildandet av talbegrepp. Ursprunget till begreppsbyggandet hittas alltså hos spädbarnets erfarenhet och hanterande av föremål i omvärlden. Mix studie visar också att det inte är enbart hanterandet av föremål som utvecklar begreppsbyggandet, utan också samspelet med andra människor, till exempel så att en kopp delas ut åt mamma, en annan kopp åt pappa och en tredje kopp åt barnet själv. Likaså kan handlingar som att röra vid varje stol kring ett bord vara erfarenheter som bygger upp förståelsen för ett-till-ett-korrespondens och även talbegrepp. Skillnaden mellan traditionella konserveringsuppgifter och ett-till-ett-korrespondens av det sociala slaget är att utdelade föremål bildar tydliga par, medan två rader av föremål tycks vara svårare att överblicka eftersom de omfattar flera aspekter att ta hänsyn till, såsom täthet och radernas längd. Enligt Mix uppträder därför ett-till-ett-korrespondens tidigare hos småbarn i och med att fokus lättare bibehålls när ett par bildas åt gången och det är lättare att följa den logiska idén ”mamma har en kopp, pappa har en kopp, har jag en kopp?”

Enligt Fuson och Hall (1983) lär sig barn matematiska begrepp såsom talbegrepp, ordningstal och mätetal först som bundna till en kontext. Med fler erfarenheter generaliseras den innebörd ett ord har, och barnet förstår vilken innebörd som gäller i vilket sammanhang. Talbegreppen kan till exempel ha en kardinal innebörd (där det totala antalet av en mängd avses), de kan ingå i en sekvens (såsom räkneramsan där varje ord följer en viss ordning), talbegreppen kan fungera som mätetal (där de jämförs med generella överenskomna enheter), de kan indikera ordning (som ordningstal) eller ha

en kategoriserande innebörd som symboler utan egentlig numerär innebörd. I och med att barn möter denna mängd av varierande innebörder ges de, enligt Pramling Samuelsson och Asplund Carlsson (2003), en förutsättning att urskilja vad som är specifikt i de olika sammanhangen och vad som är konstant. För att skapa och förstå begrepp måste barn alltså uppleva denna variation och urskilja de kritiska dragen som framträder inte bara hos olika föremål som kan bilda mängder utan också hur mängder skiljer sig från varandra i fråga om kvantitet. Småbarn bildar numeriska begrepp utgående från en stor variation av ett-till-ett-erfarenheter i sociala och verbala sammanhang. Det visar sig också enligt Mix (2002) att barn begriper och använder begrepp först i specifika situationer för att småningom med mer erfarenhet generalisera och abstrahera begreppen att gälla också i andra och nya situationer.

Barn börjar ofta tidigt använda räkneord, även om räkneorden för småbarn ännu inte har något samband med tal eller antal. Småbarn uppfattar talen mera som en beteckning eller ett namn på något föremål. De flesta barn kan redan i två-treårsåldern någon räkneramsa, men först har ramsan ingen matematisk innebörd utan barn rabblar talen som en ordlek. Småningom lär sig barn allt längre och fullständigare räkneordssekvenser även om det kan finnas stora variationer i hur snabbt barn lär sig räkneorden som sekvens (Ahlberg, 1995). Sekvenser av räkneord används i många olika sammanhang. Syftet att använda en sekvens av ord, såsom räkneramsan, kan vara för att mäta tid, till exempel i kurragömmalekar. Talsekvensen erfars ofta hos yngre barn som en ramsa utan annan innebörd än ord som skall följa på varandra. Detta skiljer sig markant från att använda talbegrepp för att räkna, som innebär att den kardinala innebörden också tas i beaktande. Räkneorden relateras då till speciella objekt som skall räknas och räkneorden inbegriper samtidigt alla de objekt som blivit uppräknade dessförinnan. Ofta kopplas även en pekande handling till uppräknandet, vilket gör att fokuseringen på konkreta objekt, uppräknandet av räkneord och pekandet sker samtidigt och bildar en koppling i såväl tid som rum. Att enbart läsa upp en ramsa av ord i en speciell ordning säger därmed inte något om förståelsen av det numerära i talbegreppen, medan en hänvisning till föremål som räknas och pekande på ett föremål för varje räkneord visar på en större förståelse för den numerära innebörden (Fuson & Hall, 1983).

Ahlberg (2001) hävdar att språket spelar en avgörande roll för barns matematikinläring, dels i form av de matematiska begrepp som används i vardagen, dels i form av symboler som gör att människan kan kommunicera en matematisk innebörd. Svårigheter kan uppstå när symbolspråket inte kopplas samman med barnets eget språk och erfarenhetsvärld. Piaget (1977) menar, med hänvisning till studier gjorda av Sinclair, att barn som ännu inte förmår konservera antal använder begrepp som "stor" och "liten", "mycket" och "lite" för att beskriva och skilja ur likheter och skillnader mellan objekt. Däremot använder de barn som enligt Piagets teori befinner sig på operationell nivå begrepp som "större" och "mindre", där den uppfattade relationen till andra objekt således uttrycks mera tydligt.

Neuman (1989) beskriver hur barn använder fingrarna för att räkna och konstaterar att barn yngre än skolåldern gärna använder fingrarna för att gestalta omfång. Till exempel för att beskriva "mycket" eller "litet" visar barn

upp ett antal fingrar. Barn tycks göra detta redan innan räkneorden har någon numerisk innebörd och innan fingrarna har givna talnamn. De uppfattar ändå att antalet uppsträckta fingrar motsvarar en uppskattad mängd. Fingrarna fungerar som en konkret talbild där fem fingrar naturligt bildar en grupp som kan erfaras med flera sinnen. Neuman lyfter fram det faktum att många nybörjare i skolan inte är säkra på talbegreppens innebörd, vilket naturligtvis gör det svårt att utföra aritmetiska uppgifter. Att använda fingrarna har därför en konkret och utvecklande betydelse i och med att barn småningom upptäcker att fem fingrar alltid är "hela handen" och ett visst antal fingrar ser ut på ett visst sätt ("sju" motsvaras av en hel hand och två fingrar). Innebördsförståelsen för talbegrepp stöds därmed av fingerräkandet. Enligt Neuman kommer barn underfund med talens del- och helhetsrelation genom att använda fingrarna och pröva sig fram till olika strukturer och strategier.

3.2.5 Räkandets idé

Starkey och Gelman (1982) riktar kritik mot forskning om barns utveckling av numerär förståelse som fokuserar barns kunnande, alternativt avsaknad av kunnande. De menar att barns tankeutveckling sker samtidigt inom olika domäner för att småningom få en mera generell omfattning, till skillnad från tanken om att utvecklingen sker som abrupta språng från ett stadium av tänkande till ett annat.

Gelman och Gallistel (1978, se även Gallistel & Gelman, 1990) hävdar att för att barn skall förstå idén med räkneord och hur dessa kan användas för att räkna, måste barn ha förstått fem grundläggande principer. *Principen om ett-till-ett-korrespondens*, innebär att barn relaterar ett objekt ur en mängd till ett objekt ur en annan mängd, vilket inte kräver någon kunskap om räkneorden utan fungerar mera som en princip för att jämföra mängder. *Principen om stabil ordning* innebär att barn konsekvent använder samma sekvens av ord i räkneramsan där ordningsföljden inte förändras. *Kardinalprincipen* inbegriper att det sist uppräknade ordet i räkneramsan motsvarar den totala mängden objekt som skall räknas. *Abstraktionsprincipen* baserar sig på uppfattningen att vilket föremål som helst kan räknas oberoende av dess egenskaper, och den sista principen om *irrelevant ordning* innebär insikt i att objekt i en mängd kan räknas i vilken ordning som helst förutsatt att varje objekt räknas endast en gång. Den sista principen omfattar även att en grupp av objekt består av mindre kvantiteter som delar av en helhet och att delarna kan sättas samman på varierande sätt och fortfarande bilda samma helhet. Dessa fem principer är inte beroende av varandra eller på varandra följande, med undantag för principen om ett-till-ett korrespondens och principen om stabil ordning som är grundläggande för de tre övriga principerna. Nuñez och Bryant (1996) höjer ett varnande finger för att dra alltför snabba slutsatser om barns förmåga att räkna utgående från Gelmans och Gallistels principer. Nuñez och Bryant menar nämligen att det inte är självklart att barn förstår innebörden i att räkna trots att de följer principen om ett-till-ett-korrespondens. Att räkna föremål i en jämn rad visar sig vara lättare för barn än att räkna föremål som spritts ut ojämnt. Rytmen i räkandet eller rörelserna tycks leda barn i räkandet, vilket blir svårare när föremål eller händelser skall räknas mera sporadiskt.

Trots att Piaget (1952) hävdar att en utvecklad aritmetisk förståelse framträder relativt sent hos barn, menar Piaget att det finns klara samband mellan konserverandet av mängder och förståelse av ett-till-ett-korrespondens. Dessa lägger grunden till antalsuppfattningen. Småbarn börjar utföra ett-till-ett-korrespondens mellan mängder av olika objekt så fort de samtidigt kan tänka på olika kvaliteter hos objekten. I yngre åldrar förmår dock barn inte koordinera sina erfarenheter bortom perceptionen. Det reversibla tänkandet är på så sätt, enligt Piaget, avgörande för att barn skall upptäcka samband som sträcker sig utöver det direkt erfarna.

När ett litet barn skall räkna hur många äpplen det finns i en skål, kan svaret bli "ett, två, tre, fyra, fem, det är ett, två, tre, fyra, fem äpplen i skålen". Barnet kan ännu inte skilja på räkneord och antal utan använder räkneorden som beteckningar eller namn. Varje äpple tilldelas ett räkneord. Ett äldre barn kan däremot svara "ett, två, tre, fyra, fem, det är fem äpplen i skålen". Barnet uppfattar då att det sist nämnda räkneordet också anger det totala antalet i mängden. Detta betyder dock inte att barnet har en utvecklad förståelse av tal. För att verkligen förstå innebörden av ett tal måste barnet också uppfatta talets del-helhetsrelation, vilket innebär att talet måste ses som en helhet samtidigt som de delar helheten består av urskiljs. Detta innebär att till exempel talet fem uppfattas som en "femhet", det vill säga som helheten fem men också som fyra och ett eller två och tre (Ahlberg, 1995).

Enligt Nuñez och Bryant (1996) innebär förståelse av det numerära systemet dels att "fem" kommer före "sex" i räkneramsan, dels att "sex" motsvarar en större mängd än "fem" men också att "fem" är en möjlig del av helheten "sex", liksom att "sex" inte kan vara en del av "fem". Att läsa upp räkneramsan säger därmed inte särdeles mycket om själva förståelsen av de tal som ingår i räkneramsan. Piaget (1968) utgår från att alla talelement är av logisk natur och menar därför att barn först måste tillägna sig en konstansuppfattning av helheter, grundad på klassifikation eller seriation. De logiska elementen ger nämligen upphov till en syntes som motsvarar klassifikation och seriering på samma gång. Förutsättningen för att bilda ett tal, är att bortse från kvalitetsbestämningar och införa en ordningsfaktor (seriering) för att skapa skillnad mellan enheterna. Piagets beskrivning av aritmetisk förståelse utgår från ett relativt abstrakt perspektiv. Neuman (1989) beskriver å sin sida att aritmetik bygger på talförståelse och talförståelse bygger i sin tur på ordning. Ordningen kan vara en räkneramsa som utgår från att varje objekt benämns med ett räkneord. Räkneramsan kan på så sätt lägga grunden till aritmetisk förståelse i och med att räkneramsan innebär en ordnad serie av namn på objekt. Det sista ordet i ramsan betyder också mängden av de objekt som "räknats" vilket kan ses som tidig numerisk förståelse.

Att förstå idén med att räkna torde enligt Starkey och Gelman (1982) samt Vilette (2002) innebära att förstå det inbördes motsatsförhållande som råder mellan addition och subtraktion. Talbegreppen i sig kan ses som en additiv sammansättning av enheter, och ett-till-ett-korrespondens mellan två uppsättningar kan i sin tur tolkas som multiplikation. Piaget (1952) menar att barn redan vid 18 månaders ålder inser reversibiliteten av förflyttade föremål, men när de perceptuella intrycken inte längre är tillgängliga förlorar

barn möjligheten att uppfatta och jämföra förändringar hos konkreta mängder. Förståelse av numerisk reversibilitet uppträder enligt Piaget först i skolåldern när barn inte längre är beroende av de konkreta sinnesintrycken. Sätten att tänka och handla skiljer sig alltså i olika åldrar kvalitativt från varandra, men den grundläggande idén återfinns redan hos småbarn. Det verkar enligt Vilette (2002) som om småbarn visserligen kan uppfatta konkret kvantitativ ökning och minskning av ett färre antal objekt, men en mer generell aritmetisk förståelse framträder senare i barns tänkande. Även om barn i 2–3-årsåldern kan utföra additioner och subtraktioner med mindre tal har de inte tillägnat sig full förståelse av räkneoperationernas motsatta förhållande, det vill säga om två läggs till och två tas bort så är mängden lika stor som den ursprungligen var. Vilette påstår att detta har sin grund i att yngre barn tenderar att fokusera hur ett objekt relaterar till andra objekt och omgivningen, medan äldre barn fokuserar den numerära relationen mellan objekten. Enligt Piaget (1952) är det först vid denna generalisering av numerär innebörd som barn kan sägas förstå kvantiteter. Piaget håller det dock för möjligt att barn redan i ettårsåldern har en primitiv uppfattning om addition som tar sig uttryck i att barn räknar upp en följd av föremål som "en och en och en" eller "en, en till, en igen".

De principer som Gelman och Gallistel föreslår ligga till grund för att förstå meningen med räkneorden innebär, enligt Ahlberg (1995; 2001), en insikt i att föremål såväl som talbegrepp kan representera en mängd som kan räknas. Räkneorden bildar en talsekvens som är enhetlig, serierad, tvåriktad och kardinaliserad, vilket gör att termer i en additionsuppgift kan särskiljas och sättas samman på olika sätt så att det blir "bekvämt" för barnet att räkna. Till exempel att additionen $3 + 5$ ger samma summa som $5 + 3$, men den senare strukturen där man börjar från det större talet är eventuellt smidigare att tänka sig.

Zur och Gelman (2004) hävdar att treåringar överlag förstår idén med att räkna, det vill säga de relaterar det kardinala värdet av ett talbegrepp till en additions- eller subtraktionsaktivitet. När en mängd ökar så uppfattar barn också att numerositeten ökar och motsvarande minskning när enheter tas från en mängd. Detta blir synligt i uppgifter där barn uppmanas gissa hur många föremål som finns i en mängd och barnen ber att få se den konkreta mängden (som döljs i testsituationerna) för att räkna. Zur och Gelman menar därför att räkneramsan är mycket viktig att lära som ordföljd, för att kunna använda den i konkreta situationer och småningom förstå innebörden av begreppen i ramsan. Ginsburg (1996) finner det intressant att barn ibland räknar på talraden "tjugoåtta, tjugonio och tjugotio..." eftersom detta kan tolkas som att barnet försöker komma underfund med talsystemet och har redan upptäckt en viktig regelbundenhet. Barnet tänker alltså logiskt utifrån de kunskaper det har.

3.2.6 Att lösa matematikproblem

Enligt Adler (1996a; 1996b; 2001) är matematisk förmåga en specifik begåvning som kommer till användning i såväl vardag som vetenskap. Att lösa matematikproblem kräver förmåga att tänka i flera steg, att växla perspektiv, att hålla kvar problemets delar i minnet samt att använda olika strategier. Adler menar att tankeprocessen handlar om att hålla flera detaljer i minnet medan

man undersöker olika utvecklingsmöjligheter och alltså växlar mellan att fokusera delar och helhet i ett sammanhang. Adler betonar också betydelsen av att kunna planera aktiviteter för att tänka matematiskt. Detta kan ta sig uttryck som att tänka ut och att komma ihåg ett tillvägagångssätt för att genomföra en uppgift eller lösa ett problem. Att planera sina handlingar har även att göra med tidsuppfattning och bedömning av rimligheten i utfallet av handlingarna.

Småbarn visar tidigt sina avsikter i form av strategiskt handlande. Detta innebär att de medvetet förmår tillägna sig förståelse av sin omvärld. Genom att lösa problem som de stöter på i vardagen ökar även deras medvetenhet om sin omvärld (se Öhberg, 2004). Småbarn är skickliga problemlösare och erfar tidigt matematik som ett användbart redskap för att lösa problem. Lindahl (1996) presenterar resultat av en studie som visar att småbarn redan innan de kan uttrycka sig verbalt erfar olika matematiska aspekter i daghemsmiljön. I vardagliga aktiviteter erfar barnet avstånd geometriskt, det vill säga en-, två- och tredimensionellt till exempel genom avstånd mellan lekredskap och golv, djup, samt rumsliga dimensioner. Det fysikaliska fenomenet kraft erfars till exempel genom upplevelsen av den egna kroppens påverkan vid användning av redskap eller hur krafterns intensitet påverkar rörelser på lutande plan. Den egna aktiviteten ger erfarenheter som kan utnyttjas vid problemlösningssituationer och för att bättre förstå de matematiska delarna i något problem.

Problemlösningssprocessen

Tänkandet karakteriseras, enligt Waern och Lundh (1992), av olika mentala processer där problemlösning kan karakteriseras som en typ av tänkande. När omvärlden inte överensstämmer med människans uppfattning av den, uppstår ett problem. Med andra ord uppstår problem när människan inte har någon färdig modell eller färdighet för att nå fram till målet och hon blir tvungen att finna nya lösningar på problemet. Problemlösning förutsätter då att tänkandet är målinriktat och innefattar en medveten uppmärksamhet. Siegler och Jenkins (1989) menar att människan vanligtvis når sina mål utan att reflektera desto mer över processen. När människans invanda beteendemönster däremot inte gör det möjligt att nå målen måste rutinerna överges och alternativa vägar till målet sökas. Oftast hittar människan någon alternativ väg relativt snabbt som för henne vidare mot målet. Det händer dock att människan emellanåt är tvungen att frångå tidigare handlingsmönster och upptäckter för att konstruera nya strategier.

I problemlösning ingår flera aspekter som var för sig är viktiga men som tillsammans bildar den process som för tänkandet framåt. Haapasalo (1997) definierar problemlösning som en process bestående av att ta till sig problemsituationen och att se den som en helhet för att därefter agera på ett sätt som kan leda till en förändring och lösning av problemet. Haapasalo lägger dessutom till tolkningens roll i processen där individen tänker över handlingarnas utfall.

Adler (1996b) menar att barns logiska förmåga inbegriper förmågan att göra rimliga bedömningar som kommer till uttryck exempelvis när ett barn försöker lösa problem. För att göra bedömningar av rimligheten i ett resultat, krävs det att barnet har tillgång till de ursprungliga idéer som det hade när

det tog sig an uppgiften. Om det finns brister i den logiska förmågan behövs någon form av stöd att hålla kvar fokuseringen på problemets struktur och lämpliga strategier att pröva. Studier av småbarns lärande (se Lindahl, 1996; Öhberg, 2004) visar att barn redan i ettårsåldern gör uppskattningar av sin omvärld och använder sig av denna rimlighetsbedömning för att lösa problem. Det kan handla om att välja rätt redskap för att nå en eftertraktad leksak eller att bedöma när den egna förmågan inte räcker till utan en vuxen bör kallas till hjälp.

Mayer och Hegarty (1996) menar att när problemlösaren strävar efter att lösa ett problem, bör han eller hon först skapa sig en uppfattning av problemets delar, så att delar som anses relevanta för problemlösningen väljs ut samtidigt som irrelevanta delar utelämnas. När problemlösaren samtidigt fokuserar problemets olika delar och urskiljer hur delarna relaterar till varandra, skapar han eller hon sig en gestaltning eller "modell" av problemet. På så sätt får problemlösaren möjlighet att upptäcka och förstå hur problemets olika delar relaterar till varandra, vilket är nödvändigt för att planera ett lämpligt tillvägagångssätt.

Det står klart att barn tolkar problem som de stöter på utgående från deras bakgrund av tidigare erfarenheter. Ahlberg (1994) benämner detta den *yttre referensramen* som sträcker sig bortom problemets innehåll och bildar grunden för barnets hela förståelse och uppfattning av problemet. Tidigare erfarenheter gör att barnet bildar sig en uppfattning av problemet som helhet, vilket ger problemet en innebörd. Barnet möter också den *inre referensramen* i en problemlösningssituation, vilket innebär de innehållsliga delarna i problemet. Barnet fokuserar då de delar av problemet som framträder och erfår problemets olika delar i relation till varandra. På så sätt skapas en struktur i problemet med utgångspunkt i de företeelser och fenomen som erfars inom problemet. Referensramarna är avgörande för hur barn uppfattar, tolkar och handlar för att lösa problemet.

Neumans (1989) studie av barns varierande räknestrategier visar att även om barn kan vara skickliga på att addera från det största talet i en uppgift, så är strategin ingen garanti för att ett barn förstår talens hela innebörd och de aritmetiska principerna. Att konsekvent räkna från det största talet framåt på talraden leder ingen vart till exempel när uppgiften handlar om subtraktion. Waern och Lundh (1992) framhåller att en svårighet när problem uppstår i det vardagliga livet kan vara att bortse från det vanliga, invanda sättet att bearbeta information som finns om problemet. Denna svårighet brukar kallas funktionsfixering, i den meningen att människan blir fixerad vid ett visst bearbetningssätt. Så länge människan är fixerad vid det "gamla" tänkesättet är det svårt att se nya lösningar.

Strategiskt tänkande och handlande

Hemligheten bakom att tänka matematiskt är, enligt Nuñez och Bryant (1996), att knyta begrepp till tidigare erfarenheter och sådant barnet känner är meningsfullt. Det räcker alltså inte att lära sig vissa knep och tillvägagångssätt, det behövs också förståelse av samband mellan delarna i ett problem och på vilket sätt en strategi inverkar på problemet som helhet. För att över huvud taget kunna planera sitt agerande måste problemlösaren i viss mån förstå orsak och verkan. Detta innebär bland annat att upptäcka

och förstå skillnaden mellan psykisk och fysisk påverkan. Vid ungefär ett års ålder har barns tänkande enligt Gopnik, Meltzoff och Kuhl (1999) utvecklats så att de kan planera sitt agerande för att nå sina mål till exempel genom att använda fysiska objekt som redskap för att nå fram till något föremål.

Phillips och Soltis (1991) menar att relationen mellan problemlösningsprocessen och lärande kan karakteriseras som insikt och förståelse av innebörd. När människan känner att hon står inför ett genuint problem sätter tankeprocessen igång. Processen innebär att i medvetandet bolla problemet fram och tillbaka i strävan efter att finna en lämplig lösning. Samtidigt tas problemsituationen som helhet i beaktande i sökandet efter element som kan vara till hjälp, liksom tidigare tillägnade kunskaper och färdigheter för att bättre förstå situationen. Utgående från detta börjar människan göra upp planer eller hypoteser genom att i medvetandet manipulera de delar som ingår i problemet. Problemlösningsprocessen kräver ibland "inkubationstid", det vill säga problemlösaren kopplar bort problemet en stund och fokuserar något annat, för att "plötsligt" inse hur delarna relaterar till varandra och hur problemet kan lösas. Om handlingen leder till att problemet blir löst har människan också lärt sig något.

Lindahl (1996) hävdar att redan ett år gamla barn förmår handla strategiskt och göra val, vilket blir tydligt när de försöker lösa problem eller utföra en uppgift. För att lyckas lösa ett visst problem måste barn ha förstått innebörden och utifrån innebördsförståelsen handla strategiskt. Lindahl hävdar att småbarns bearbetning av problem i medvetandet kan pågå länge innan de kommer till "plötslig" insikt och verkar lära sig i stunden. När barn själva upplever en ny variant av lösning på problemet befinner de sig i slutskedet av en förändringsprocess i medvetandet, som innebär att de får utökade kunskaper och färdigheter. Barn drar sig därför ibland tillbaka under bearbetningsprocessen innan den nya insikten visar sig.

Siegler och Jenkins (1989) hävdar att kunskap om strategiers användbarhet bygger på tidigare erfarenheter av strategins användning, inte på kognitiv analys. Detta resonemang innebär att strategier i första hand konstrueras genom konkret tillämpning. Marton (1992) menar dock att människans totala erfarende samtidigt är närvarande i medvetandet, men vissa erfarenheter framträder mera än andra. Barn erfar därför alltid mer än vad som upplevs i stunden, eftersom de tidigare erfarenheter som inte direkt framträder "fyller i" det som inte sinnena ger. Medvetandet är på så sätt oändligt och sträcker sig utanför tid och rum, till exempel så att barn tänker sig en lösning på ett problem eller förväntar sig vissa händelser. Gränsen mellan tidigare erfarenheter och kognitiv analys är således inte alldeles tydlig. Willatts (1990) framhåller att yngre barns brister i användningen av strategier kan bero på deras tidigare erfarenheter. Misslyckade försök att lösa problem innebär därmed inte alltid att barn har "sämre" strategier att tillgå, utan misslyckanden beror snarare på olikheter när det gäller tidigare erfarenheter och kunskap. Nya strategier uppkommer således inte i ett vakuum, utan bygger på tidigare erfarenheter och tidigare använda strategier. Erfarenheter av hur saker och ting fungerar i omvärlden tycks vara speciellt betydelsefulla för hur småbarn försöker och lyckas lösa problem (Willatts, 1997).

Observationer av barn som löser olika uppgifter och problem ger, enligt Gelman och Gallistel (1978), möjlighet att upptäcka tidig förståelse av

begrepp, eftersom barns förståelse, avsikter och strategier då synliggörs. Gelman och Gallistel framhåller dock att det är kognitiva uppgifter som småbarn själva förstår innebörden av, till exempel barns självvalda aktiviteter, som kan visa hur barns tidigare tillägnade kunskaper kan komma till nytta i alltmer avancerade situationer. Genom egna erfarenheter får barn tidigt förståelse av mer komplicerade begrepp samt den grund som är nödvändig för fortsatt utveckling och lärande.

Ahlberg (1995) påstår att förförståelsen för ett problem gör att barnet från början har en vag uppfattning av problemet som helhet och av dess yttre struktur. Vid själva problemlösningen differentierar barnet problemets innehåll och tar fasta på de innehållsliga delarna. När barnet relaterar och integrerar delarna till en sammansatt helhet, gestaltar sig problemet för barnet som då förstår och uppfattar problemet på sitt individuella sätt. Barnets tankearbete synliggör inte bara hur det uppfattar problemet, utan även problemlösningsprocessen i sig. När barnets erfarenheter och kunskaper konfronteras med innehållet i problemet kommer den inre dynamiken i problemlösningsprocessen fram.

Piaget använder inte uttrycket strategi, men Willatts (1990) definition på strategi som en form av regelbundenhet i barns sätt att organisera sina försök att lösa problem, kan liknas vid Piagets (1962) sätt att tolka hur barn lär sig lösa problem genom att anpassa sina handlingar och systematiskt pröva sig fram. Försöken lyckas med tiden allt bättre, emedan barnet undviker att upprepa tidigare misslyckade försök samt tillägnar sig en ökad förmåga att generalisera och överföra beprövade metoder till nya situationer.

När beprövade strategier inte leder till målet kan det finnas behov av att konstruera nya strategier. Att upptäcka eller konstruera en ny strategi inbegriper, enligt Siegler och Jenkins (1989), tidsperioden fram till och första användningen av sättet att lösa problem. Att generalisera strategin innebär däremot att kunna använda samma strategi i olika situationer på ett effektivt sätt. Båda processerna innebär kvalitativa förändringar i tänkandet. Speciellt hos småbarn som ännu inte har lika utvecklad förmåga som vuxna att uppskatta hur en strategi kan tillämpas i olika situationer, är det nödvändigt att "upptäcka" samma strategi upprepade gånger för att skapa en mer helhetlig förståelse av strategin och kunna generalisera den.

Sett ur ett pedagogiskt perspektiv är kopplingen mellan problemlösning och lärande stark. Säljö (2000) drar slutsatsen att lärande både är en fråga om att ha information, färdighet samt förståelse och att kunna avgöra vilken information, färdighet eller förståelse som är relevant i vilket sammanhang. Under det andra levnadsåret börjar barn, enligt Willatts (1990), organisera sina försök att lösa problem så att misslyckade försök inte upprepas och försöken tenderar att gå från enklare till mer komplexa försök och metoder.

Harnishfeger och Bjorklund (1990) påstår att barn handlar strategiskt när deras medvetande är fokuserat på en specifik uppgift, redan innan de verbalt kan uttrycka sig. Enligt Willatts (1990) verkar det vara så att spädbarn redan från födelsen har vissa grundläggande strategier för att lösa problem. Willatts hävdar att det inte råder något tvivel om att spädbarn, innan de är sex månader gamla, har mål för sina aktiviteter och förmåga att rikta sitt handlande mot målet, vilket kan tolkas som att barnet handlar strategiskt.

Barn förmår också avgöra ifall målet uppnåtts eller ej, vilket visar sig i deras upprepade försök så länge målet ännu inte nåtts. Dessutom tycks barn ta tillvara erfarenheter från tidigare misslyckade försök för att justera handlingarna i nästa försök. Dessa tidiga "ursprungliga" strategier utvidgas i olika riktningar vartefter barnet utvecklas och får fler erfarenheter.

Enligt Öhberg (2004) förmår också barn i ettårsåldern att gå utanför "här-och-nu" i en situation för att lösa problem. Att vidga erfandet till att också inbegripa tidigare händelser, erfarenheter av föremåls egenskaper och förståelse av orsak och verkan gör det möjligt för småbarn att planera och utvärdera sina försök att lösa problem på ett förtjänstfullt sätt. Denna förmåga har följaktligen också betydelse för hur barn lyckas lösa matematiska problem. Till exempel behöver barn för att nå upp till en hylla göra en bedömning av hur högt han eller hon når själv och hur högt upp den åtråvärda leksaker ligger, hurudant redskap som behövs för att lösa problemet, eventuellt en stol, samt var en lämplig stol kan finnas. Barnet fokuserar då många direkt och indirekt erfarna företeelser och erfarenheter samtidigt i sitt medvetande och skiljer ur vad som är relevant att beakta i den aktuella situationen (jfr Marton, 1992). Klein (1994) betonar också nödvändigheten av att i samspelet mellan barn och vuxen gå utanför "här-och-nu" och koppla barnens erfanden till andra sammanhang. På detta sätt uppmärksammas barn på olika aspekter av omvärlden.

Enligt Ginsburg (1996) är förståelse av tal, antal och räknepprinciper en process som inleds tidigt i och med att barn samspelar med sin omgivning, både socialt med andra människor och genom att handskas med föremål av olika slag. Språkliga aktiviteter i problemlösningssituationer stimulerar begreppsbyggnad och gör att barn erfar olika aspekter av matematiska fenomen i vardagslivet. Barn uppfattar likheter och skillnader mellan föremål och kvantiteter som de jämför och kategoriserar utgående från individuella mönster. Också ökning och minskning är synliga fenomen som barn erfar på varierande sätt till exempel genom att dela frukt och lägga upp köttbullar på en tallrik. På detta sätt utvecklar barn ständigt sitt matematiska tänkande och sin förståelse i vardaglig problemlösning. Enligt Ahlberg (1994) har barns matematiska färdigheter och förståelse på detta sätt sina rötter i deras erfarenhetsvärld där kunskaperna växer fram i interaktion med omgivningen när barnet strävar efter att skapa mening och förstå vad som sker.

Fokusering i problemlösningssprocessen

Enligt Mayer och Hegarty (1996) finns det i stort sett två sätt att närma sig matematiska problem. Det ena sättet innebär att problemlösaren försöker sätta samman numeriska delar av problemet i en modell och utföra räknoperationen. I det andra sättet försöker problemlösaren förstå problemet som helhet för att sedan gå in på problemets olika delar och agerar för att lösa problemet. Den första strategin är mer ytlig och bygger på kvantitativt resonemang medan den andra strategin tyder på kvalitativt resonemang, det vill säga förståelse av relationen mellan problemets olika delar. Att lyckas lösa problem handlar därmed ofta om att urskilja relationer.

Haapasalo (1997) karakteriserar problemlösare som experter och noviser. Expertens sätt att lösa problem går ut på att koppla samman tidigare erfarenheter, kunskaper och strategier på varierande sätt, både allmänna

tillvägagångssätt och specifika för problemområdet. Experten ser nämligen problemet som helhet och agerar utifrån detta. Novisen däremot använder sig av situationsbundna strategier och har ofta svårigheter att upptäcka sambanden mellan problemets olika delar. I sina försök att lösa problem kan novisen fokusera på någon specifik del av problemet utan att förmå se helheten. Charlesworth (1996) menar att problem som uppkommer spontant i vardagen ofta innehåller fler än ett steg, det vill säga delproblem som bör lösas innan problemet är helt och hållet löst. Detta innebär att en skicklig problemlösare medvetet bildar sig en uppfattning om problemet som helhet och vad som egentligen frågas efter innan problemlösaren gör upp en strategi för att nå målet som han eller hon genomför och slutligen utvärderar. För att bli en skicklig problemlösare anser Charlesworth att det är viktigt att barn möter sådana verkliga problem där de är tvungna att tänka i flera steg och där problemet kan ha flera lösningar. Detta skiljer sig markant från de flesta problem barn möter i traditionella textböcker i skolmiljön. Charlesworth poängterar också betydelsen av att verbalt dela sina uppfattningar och förslag till problemlösning med jämnåriga.

Studier där barns uppfattningar av problemlösning av matematisk karaktär jämförs visar att en del barn främst är inriktade på att prestera ett korrekt svar på det problem de ställs inför. Ahlberg (1994) anser att detta är ett relativt ensidigt sätt att närma sig problem eftersom det inte gynnar en öppen och kreativ problemlösningssprocess. För att barn inte skall få en sådan ensidig uppfattning av problemlösning och matematik är det därför betydelsefullt att barn ges möjlighet att lösa matematikproblem i olika sammanhang och med varierande innehåll. Upplevelser med flera sinnen, såväl visuellt, auditivt som taktilt, kan ge en bredare grund att bygga förståelse på, eftersom barnet då kan tänka öppnare och är mer mottagligt för nya idéer. Småbarn upplever emellertid världen på ett fördomsfritt och naturligt sätt. När barn löser problem i det vardagliga livet har de, enligt Ahlberg (1995), ofta informella strategier som lämpar sig väl för ändamålet. Barnen i Ahlbergs studier räknar till exempel på fingrarna, mäter med hjälp av den egna kroppen och med föremål som de annars använder för andra syften i vardagen. De olika lösningsmodellerna är intuitiva och erfarenhetsbaserade och skiljer sig från den formella problemlösning som barnet senare möter i skolan.

Ahlberg (1992) visar att barn antingen har ett förgivettaget eller ett öppet förhållningssätt till uppgifter och problem med matematiska inslag. Ett förgivettaget förhållningssätt innebär att barnets mål med problemlösningen främst är att *ge* ett svar, vilket som helst. Barn med ett öppet och fördomsfritt förhållningssätt har däremot som huvudsakligt mål att *söka* svar. De senare barnen är mer inriktade på innehållet i problemet och ser på så sätt problemets djupstruktur. Tidigare lyckosamma erfarenheter och försök att lösa problem stärker barns självförtroende och målinriktning, vilket är avgörande för hur de senare ställer sig inför nya problem. I fråga om småbarn i ettårsåldern framhåller Lindahl och Pramling Samuelsson (2002) att det är upplevelserna av variation som gör att barn bättre förmår generalisera begrepp i nya situationer och uppgifter.

3.3 Ett problematiserande förhållningsätt till småbarn och matematik

Keranto (1997) menar att dagens samhälle karakteriseras av en så kallad expertkultur, där kraven blir allt djupare och mer specificerad kunskap. Den matematik som undervisas riskerar enligt Keranto att bli kulturdekontextualiserad, i och med att det kan vara svårt att koppla till en kontext som den lärande har erfarenhet av och själv finner meningsfull. Keranto menar dock att det är möjligt att stöda lärandet i matematik genom att stimulera till kritiskt tänkande och genom att koppla till vardagliga begrepp. På så sätt kan förståelsen bli djupare och mera meningsfull. Hannula (2005) visar i en longitudinell studie att barn som redan vid tre års ålder i högre grad tenderar att spontant fokusera på den numerära innebörden i olika uppgifter, också tidigare utvecklar förståelse av innebörden i talbegrepp och räkneramsa. Det visar sig också att när vuxna i den pedagogiska verksamheten hjälper barn att fokusera på den numerära innebörden och på så sätt medvetandegör barn på kvantitativa likheter och skillnader i en situation så ökar barnens spontana uppmärksamhet på den numerära aspekten, vilket i sin tur bidrar till fördjupad förståelse av till exempel talbegreppens kardinala innebörd (se även Mattinen, 2006).

Utmaningar och meningsfullt lärande är trots allt ingen ny tanke. Vygotskij (1978) lyfte redan på 1930-talet fram tankar om att miljön bör fungera som stöd för människans utveckling och lärande. Den miljö som barn möter bör erbjuda optimala förutsättningar i form av utmaningar och frågeställningar. Det som barn kan klara av och förstå med stöd av andra barn eller vuxna kallar Vygotskij "zone of proximal development" (den närmaste utvecklingszonen). Den grundläggande tanken är att vad barn i dag kan göra med hjälp av någon annan, kan de göra självständigt i morgon. Detta innebär att utmaningar något över ett barns kunskapsnivå anses befrämja lärandet. Undervisning där barns tänkande utmanas genom problemlösande aktiviteter skall på så sätt locka fram deras redan existerande erfarenheter. De tidigare tillägnade erfarenheterna bildar då en grund att utgå från i lärandeprocessen.

I Finland har forskning i pedagogik inom området matematik och matematikdidaktik, enligt Malinen (1997), fått starkare fotfäste först under 1980-talet, med stöd av den kognitiva psykologin som lagt grunden för en konstruktivistisk teori om lärande. Konstruktivistiskt inspirerad undervisning ger den lärande möjligheter att engagera sig i problem och utforskande aktiviteter som upplevs som meningsfulla för den enskilda individen. Problemlösning antas då utveckla den lärandes tänkande. Enligt Leino (1997) innebär en konstruktivistisk undervisning i matematik att undervisningen utgår från den lärandes erfarenheter och uppfattningar, som läraren problematiserar och konkretiserar. Matematik ses då som en process för att förstå vardagsnära ting och inte som ett teoretiskt objektivet ämne.

Bauersfeld (1998) hävdar att det sedan 1980-talet är två insikter som på ett djupgående sätt förändrat föreställningarna om inläring. Det radikala konstruktivistiska perspektivet lyfter fram att allt konstruerande av mening i omvärlden är individuellt, *samtidigt* som människans psykiska och intellektuella utveckling i grunden är beroende av socialt samspel. Under senare år

har även en fenomenografiskt inspirerad pedagogik (se Pramling Samuelsson & Asplund Carlsson, 2003) fått starkare fotfäste inom barnpedagogisk forskning och didaktik. Barns kvalitativt skilda uppfattningar anses utgående från detta synsätt berika lärandet i form av perspektivtagande och metakognition. Runesson (1999; 2005) hävdar att ett variationsteoretiskt perspektiv, grundat på en fenomenografisk forskningsansats, mycket väl kompletterar såväl konstruktivistiska som sociokulturella perspektiv på lärande, i och med dess fokus på lärandets objekt.

I daghems miljön förekommer det många situationer där barnet möter matematik. Olika tillfällen under dagen ger möjlighet att möta ett stort antal situationer som kan tolkas som matematiska erfarenheter och matematisk begreppsinsläring. För att matematik skall bli meningsfullt måste barn ha möjlighet att erfara och uppleva matematik i många olika sammanhang, eftersom det är variationen av erfarenheter som ger förutsättningarna för djupare förståelse (Doverborg & Pramling Samuelsson, 1999). Carlgren och Marton (2002) menar likaså att för att lärande skall ske bör det finnas en rik variationsgrund. Detta innebär att den lärande får möjlighet att samtidigt erfara flera aspekter av samma fenomen. En lärare som är medveten om olika aspekter av ett fenomen och förmår lyfta fram dem för den lärande, ger också större möjligheter för den lärande att utveckla en djupare och mera mångfasetterad förståelse av fenomenet i fråga. I synnerhet när det är fråga om naturvetenskap och matematik, som inbegriper system och redskap som är kulturellt betingade, finns det behov av att en lärare medvetandegör den lärande på olika aspekter av ett fenomen och även variationer av sätt att förstå fenomenet.

Doverborg och Pramling Samuelsson (1999) menar att pedagogers uppfattningar av vad matematik är för barn och även pedagogers uppfattningar av sin egen kompetens inom matematik har betydelse för vad och hur de arbetar med matematik. Genom att problematisera vardagliga aktiviteter, till exempel att dela ett äpple, kan barn få många möjligheter att möta den informella matematiken. Att samspela med en genuint intresserad och uppmärksam pedagog stärker barns lärande och utvecklande av grundläggande förståelse av matematiska fenomen och stöder barn i konstruerandet av lämpliga strategier för problemlösning. Meningen med matematik blir också en annan när barn möter matematik i för dem meningsfulla sammanhang.

Ahlberg (1994) menar att barns förhållningssätt till kunskap och lärande grundläggs i tidig ålder innan barn börjar få formell undervisning. Tidiga möten med matematik i olika sammanhang påverkar barns förhållningssätt och framtida inställning till matematik. Matematik och problemlösning i sådana sammanhang som barnet har erfarenhet av och som anknyter till deras erfarenhetsvärld bör därför uppmärksammas och uppmuntras i verksamheten med småbarn. Ahlberg anser som många andra pedagogiska forskare att matematiska aktiviteter bör sättas in i ett socialt sammanhang. När barn inser betydelsen av kunskap eller möjliga användningsområden för kunskapen blir den också meningsfull. Att lära sig något innebär då inte enbart att förbereda sig för skolan utan kunskapen har en innebörd som kan fungera som redskap i det vardagliga livet.

Charlesworth (1996) delar in barns erfärande i tre kategorier: naturalistiska, informella och strukturerade erfarenheter. Naturalistiska erfarenheter innebär att barn själva upptäcker sin omvärld där barnet är den som ställer upp mål för sina handlingar och tillvägagångssätt. Den vuxnas roll är då att tillrättalägga miljön med stimulerande material som inbjuder barn till att utforska och experimentera. Informellt erfärande innebär att en vuxen på något sätt involveras i erfärandet, till exempel genom att ta tillfället i akt och införa något nytt begrepp eller genom att utmana barns tänkande i en spontant uppkommen situation. Strukturerat erfärande innebär att den vuxna har på förhand planerade avsikter och anvisningar för en aktivitet. Enligt Charlesworth kan barn bygga upp begrepp om sin omvärld på något av dessa tre sätt, men poängterar att samma begrepp kan erfaras av barnet på alla sätten. Till exempel kan ett barn utforska klossar genom att dela upp dem i högar beroende på färg, form eller storlek, men barnets tänkande kan också utmanas genom att en vuxen sätter sig hos barnet och ber det berätta om klossarna de har framför sig. Ytterligare ett alternativ kan vara att den vuxna ha tänkt ut en aktivitet där klossarna symboliserar figurer eller bilar beroende på form. Det är här möjligt att dra paralleller till det som Hundeide (2006) kallar "den dolda barnuppfostran". Uttrycket innebär att vuxna omsorgspersoner såsom föräldrar och pedagoger fungerar som handledare eller vägvisare in i en kulturell gemenskap där vissa normer, förväntningar och viss innebördsförståelse råder. Den vuxnas uppmärksamhet på barns initiativtagande och förståelse har då betydelse för på vilket sätt barn får möjligheter att erfar begrepp och företeelser i omvärlden. Sommer (2005) menar att det också finns en viss risk i att se det kompetenta och aktiva barnet. Den vuxna bör nämligen inte bli överflödig, utan i stället medvetet skapa sådana situationer för lärande som karakteriseras av ömsesidighet. Den vuxna är alltid mer kompetent och kan fungera som språklig förebild och stöda barnets fokusering, men med hänsyn till barnets tidigare erfarenheter och kunnande.

Utgående från en studie med syfte att undersöka om och hur barns matematiska kunnande förbättras av medvetet skapade inlärningsmiljöer, konstaterar Ahlberg (1994) att de barn som blivit medvetandegjorda på matematiska fenomen och problem i vardagen har bättre förmåga att lösa verbala matematiska problem än barn som deltagit i traditionell undervisning. De barn som får möjlighet att arbeta med problemlösande aktiviteter där pedagogerna småningom inför matematiska aspekter i uppgifterna och uppmärksammar barnet på det egna och andras olika sätt att lösa problem, utvecklar också sin förmåga att lösa aritmetiska problem. Ahlberg menar att sättet att föra in matematik på ett naturligt sätt i det dagliga arbetet gör att barn bättre kan förstå matematikens funktion och innebörd. Ginsburgs (1996) studier visar också att barn förmår lösa matematiska problem i större utsträckning om de tillåts fundera över individuellt erfarna problem och uppmanas reflektera över sitt eget tänkande. Detta är intressant i studiet av barns förståelse av matematiska problem. Barn svarar eventuellt inte alltid på den fråga som vuxna ställer utan formar sin egen uppfattning av problemet. Att uttrycka sin strategi verbalt kan göra det möjligt för vuxna att förstå barnets tänkande men också för barnet att sakta ner och tänka igenom sitt förfaringsätt.

Ahlberg (1994) kritiserar skarpt så kallade före skolan-böcker som varit allmänt använda i många länder i syfte att förbereda förskolbarn på skolans matematikundervisning. Sådana böcker tränar relativt ensidigt vissa matematiska begrepp och kognitiva färdigheter utan att ta hänsyn till barns individuella sätt att erfara matematik i sin omvärld. Ahlberg och Hamberger (1995) menar att alltför stark styrning mot att använda räkneböcker där barn snabbt skall komma fram till ett rätt svar kan lägga grunden till ångslan för matematik som ofta följer barn genom skolgången upp i vuxen ålder. Får barn i stället möjlighet att upptäcka nyttan och nöjet med matematik och att det är möjligt att lära sig på olika sätt, förankras motivet att lära sig hos barnet självt, vilket torde främja deras förståelse av innebörden av olika matematiska aspekter.

Nuñes och Bryant (1996) hävdar, med hänvisning till flertalet studier av hur barn använder räkneord, att trots att barn förstår innebörden av räkneorden och förmår korrekt återge antal, så kan ändå brister finnas i barns förståelse av att räknandet kan användas som ett redskap för att jämföra mängder. Det är alltså en väsentlig skillnad mellan att räkna antal i en mängd och att inse logiken och värdet i att kunna jämföra mängder med hjälp av det räknade antalet. Däremot visar försök med instruerande vuxna att barn som får stöd i problemlösningssituationer och leds mot att använda räknandet som ett redskap för att jämföra mängder också tycks få en större insikt i användbarheten av räknandet.

Enligt Ikäheimo (1997) borde den pedagogiska verksamheten för barn i daghem ta hänsyn till barns spontana lek, deras tidigare erfarenheter och deras individuella sätt att erfara världen. Ikäheimo poängterar också att det i barns vardag finns mycket som berör matematik, som en pedagog kan utgå från i undervisningen. Detta ställer krav på pedagogen att han eller hon känner till matematiska begrepp och benämningar samt har kunskap om hur det matematiska tänkandet utvecklas hos barn. Ikäheimo konstaterar bland annat att alltför tidigt införande av och fokusering på siffersymboler ofta förorsakar brister i verklig förståelse av begreppens innebörd och användning, vilket i sin tur kan leda till inlärningssvårigheter.

Gelman och Gallistel (1978) påstår utgående från studier av olika inlärnings-situationer att matematiska insikter och matematisk förståelse inte kan utvecklas ur tomma intet. Innebörd och användningsmöjligheter hos begrepp eller principer måste ha en grund att bygga på. Kognitiva uppgifter som småbarn har en möjlighet att förstå innebörden av, kan visa hur deras kunskaper kommer till användning i allt mer avancerade situationer. Genom erfarenhet får barn således tidigt den grundläggande förståelse som är nödvändig för det fortsatta lärandet.

Ahlberg (1994; 1995) hävdar bestämt att barn behöver möta tal och räkning i många olika situationer och upplevas med alla sinnen för att utveckla förståelse både av matematikens innebörd och av dess funktion. När matematik på ett naturligt sätt införlivas i barns erfarenhetsvärld vidgas och fördjupas deras matematiska förståelse. Barn gör då nya erfarenheter som kan leda till att de inser att matematikens användningsområde inte är begränsat till specifika situationer. Med större erfarenhetsgrund kan barn använda sina matematiska kunskaper på ett mera flexibelt sätt. Malmer (1996) menar också att i synnerhet barn som har svårigheter med matematik behöver möta nya

moment inom matematiken med flera sinnen. Att lära sig matematik är en process som tar lång tid och förutsätter, enligt Ahlberg (1995), interaktion med både människor och ting i omvärlden. Att uttrycka sig i bild och form, att samtala och samspela med andra människor skapar tillfällen att reflektera och tänka över olika matematiska aspekter av omvärlden. Planerade och organiserade situationer där varierande aspekter av matematik lyfts fram och problematiseras ger barn möjligheter att lära och utveckla grundläggande färdigheter i matematik. I samspelet och reflektionen utvecklas förståelsen av matematik.

4 Metodologisk förankring

– att beskriva och tolka småbarns möten med matematik

Säljö (2000; 2005) hävdar att människan inte kan undgå att lära sig. Genom att interagera med omvärlden och människor i den får redan ett litet barn erfarenheter som det kommer att använda i framtida sammanhang. Lärandet kan föra människan i olika riktningar och miljön som barnet vistas i har således stor betydelse för vilka möjligheter ett barn erbjuds. Den livsmiljö som barn är delaktiga i sätter ramar för den kunskap som anses viktig i just den miljön och den kulturen, på samma sätt som tillgängliga redskap och strategier skapar möjligheter men också gränser för barns erfärande. Matematik är inget undantag. När ett barn växer upp i Finland finns det förväntningar på barnet att det tar till sig kunskap om matematik och förmår använda denna kunskap i olika sammanhang. Styrdokument för olika stadier av pedagogisk verksamhet med barn sätter upp ramarna för den miljö barnet vistas i och vilka förväntningar på kunnande som samhället har på barnen (Utbildningsstyrelsen, 2000; 2004; Stakes, 2005).

Många studier där syftet är att beskriva utveckling och lärande formulerar hypoteser utgående från tidigare kunskap inom området. Hypoteser prövas i experimentsituationer och barn kategoriseras ofta i "kunna eller inte kunna"-kategorier. Ett sådant deduktivt förfaringssätt ger enligt Starkey och Gelman (1982) inte alltid möjligheten för forskare att upptäcka nya perspektiv och andra sätt att förstå ett fenomen. En induktiv explorativ ansats ger i stället forskaren möjlighet att upptäcka sådana strategier och sätt att förstå ett fenomen som framträder till exempel i barns självvalda aktiviteter. I deduktiva studier, som ofta presenteras i kvantitativa termer, lyfts fenomenet ur sin kontext i strävan efter att förstå fenomenet så "rent" och avskalat som möjligt. En induktiv ansats har däremot ofta en mera kvalitativ karaktär och kan i högre grad ta i beaktande också kontext och socialt samspel. Forskningsansatsen och därmed också forskarens inställning till forskningsfenomenet får tydliga konsekvenser för de resultat och den tolkning som genereras ur forskningsprocessen. Som ett exempel på den betydelse valet av ansats, och därmed också forskarens förhållningssätt, har visat Langer, Gillette och Arriagas (2003) resultat från studier där vissa barn visar sig ha aritmetiska förväntningar, medan andra tycks sakna denna förmåga. Den skillnad i resultaten som framträder visar sig ha sin grund i sättet att utföra studierna. I studier där forskaren eller undersökningsledaren tillåts vara mera uppmärksam och följsam med barnens egna intentioner och riktade uppmärksamhet erhåller resultat där barn visar sig ha större förmåga att urskilja förändringar i antal.

4.1 Metodologiska vägval

Småbarns vardag är fylld av spontanitet, samspel med andra barn och vuxna, egna initiativ och växlande aktiviteter, vilket kan göra det svårt att fånga barns mångfasetterade erfارande med av vuxna på förhand gjorda standardmetoder. I synnerhet när forskningsintresset är att närma sig barns förståelse och deras eget perspektiv på saker och ting, ter sig en öppen och explorativ ansats mera lämplig. En sådan kvalitativ ansats låter sig bättre anpassas till den komplexa verksamhet som barn på daghem deltar och lär i (Munter & Siren-Tiusanen, 1999).

Den studie som genomförts och här presenteras kan tänkas ta åtminstone tre olika ansatser: fenomenologisk, fenomenografisk och videografisk. Valet av ansats hänger nära samman med studiens syfte och får stor betydelse för fokusering i datainsamling, analys och tolkning.

Syftet med studien är att synliggöra småbarns erfارande och lärande av matematik i daghemsmiljön. Fokus ligger på *vad* barn erfar av matematisk karaktär, *hur* detta erfارande gestaltar sig och *hur* barn använder sin förståelse för att bemästra sin omvärld. Forskaren försöker därmed beskriva och analysera småbarns möten med matematik, så som matematik framträder för barnen. I dessa möten bildar sig barn uppfattningar av olika aspekter av matematik och använder sin förståelse som redskap för att undersöka, och använda föremål samt för att förmedla sig om fenomen i omvärlden.

Småbarn som ännu inte verbalt kan uttrycka sin förståelse av olika fenomen ger dock uttryck för sin förståelse i sina handlingar (se bl.a. Piaget, 1982; Lindahl, 1996; Johansson, 1999; Öhberg, 2004). Att studera småbarns lärande utgående från detta antagande, kräver att forskaren försöker anta ett barns perspektiv och tolka världen så som barnet erfar den. Det förutsätter att forskaren har en icke-dualistisk syn på människan och hennes relation till omvärlden. En icke-dualistisk grundsyn innebär att människan lever i en värld där fenomen och företeelser kan uppfattas på varierande sätt och fenomenen erfars alltid färgade av den erfarendes tidigare erfarenheter. En sådan fenomenologiskt grundad syn på människans varande i världen kan ta sig uttryck som studiet av världen och fenomen i den så som de ter sig för människan. Ett fenomen får då sin innebörd och betydelse genom människans erfارande av detsamma (se Bengtsson, 1999; Johansson, 1999).

För att beskriva världen så som den ter sig för barnet bör det finnas en tydlig och klar föreställning om vad världen egentligen består av. Heidegger (1981, 170) menar att "eftersom tillvaron /.../ går upp i världen och således hoppar över själva fenomenet värld, träder i dettas ställe det som är för handen inom världen, alltså tingen". Detta är en av utgångspunkterna för en fenomenologisk ansats och kan förstås som att människan ständigt är involverad i världen. Att observera människans tillvaro i världen innebär då att studera hennes relation till tingen, eller fenomenen, det vill säga den innebörd ett fenomen har i denna värld. Innebörden eller väsensmeningen hos ett fenomen antas bestå av de uppfattningar och erfarenheter människor har av fenomenet i fråga (Kvale, 1997). Denna syn på människan och hennes varande i världen är grundläggande för hur erfarande och lärande förstås i den föreliggande studien av småbarns möten med matematik. Fokus för studien ligger däremot inte i huvudsak på fenomenet (som i en fenomenolo-

logisk studie kunde vara "matematik") utan fokus ligger på *erfandet och lärandet hos barnen*.

Enligt Marton och Booth (2000) är handlingar och erfande tätt sammanflätade, eftersom människan endast kan handla i relation till världen så som hon erfar den. Ett barns handlingar i mötet med ett föremål eller en företeelse, kan på så sätt ses som uttryck för på vilket sätt barnet förstår fenomenet. När forskarens intresse riktas mot att studera variationen av dessa uttryck, antas en fenomenografisk ansats. Forskningens fokus preciseras då till att studera och analysera sätten på vilka barn erfar och därmed förstår fenomen i sin omvärld.

En fenomenografisk ansats har vissa likheter med en fenomenologisk, till exempel antas det inom båda ansatserna att människan konstituerar sin verklighet utgående från den innebörd som hon ger fenomenen. Fenomenologi och fenomenografi står, enligt Marton (2002) och Marton och Booth (2000), på samma icke-dualistiska grund, det vill säga, det finns endast en värld, den av människan erfarna världen. Skillnaden mellan en fenomenologisk och en fenomenografisk ansats framträder främst i inriktningen av forskningsuppgiften. I en studie där den metodologiska ansatsen är fenomenografisk strävar nämligen forskaren efter att beskriva på vilka olika sätt ett fenomen kan erfaras. Fenomenografin har utvecklats också som teoretisk ansats i form av variationsteori (se Runesson, 1999), där fokus ligger på att beskriva kritiska aspekter av något fenomen som samtidigt bör fokuseras i medvetandet för att en människa skall erfa det på ett visst sätt (Pang, 2003). Fenomenografiska studier som beskriver olika sätt att uppfatta eller erfa fenomen på kollektiv nivå kan därför också synliggöra sådana kritiska aspekter som har betydelse för undervisning och lärande på individnivå.

Många utvecklingspsykologiska studier har gjorts för att uttolka barns förståelse och uppfattningar av olika fenomen i omvärlden. Ett välkänt exempel är Piagets teori om barns kognitiva utveckling, som grundar sig på sådana studier. I fenomenografiska studier lyfts också barns förståelse och uppfattningar fram, men Ahonen (1994) ser skillnaden främst i att i fenomenografiska studier fokuseras den innebörd ett fenomen har och variationen av kvalitativt skilda sätt att förstå fenomenet. Den ontologiska grunden är också en betydande skillnad där fenomenografiska studier strävar efter att tolka erfandena och uppfattningarna som rimliga och rationella sett ur den erfandes eget perspektiv, medan klassiska psykologiska studier i högre grad strävar efter att utvärdera rätt eller fel uppfattningar där utvecklingen generellt sett antas följa en viss form.

Hasselgren och Beach (1997, 197) menar att det finns en riktning inom fenomenografisk forskning där variationen av sätt att förstå tolkas ur empiriskt material av autentiska situationer. Detta tillvägagångssätt beskrivs som "naturalistic phenomenography", vilket innebär att forskaren inte själv är involverad men strävar efter att fånga en händelse i sitt sammanhang så naturlig som möjligt. Utgående från observerade samspel och kommunikation mellan människor analyseras den underliggande meningen i handlingar och utsagor. Den studie som här presenteras analyserar barns erfande i deras dagliga aktiviteter och naturliga sammanhang. Observatören deltar inte i aktiviteterna och strävar efter att störa så lite som möjligt. "Naturalistic

phenomenography” är således en lämplig beskrivning av denna studies uppbygg och genomförande.

I föreliggande studie grundar sig synen på barns lärande på den fenomenografiska variationsteorin. Variationsteorin fokuserar vad som är möjligt att lära sig i en situation där det förutsätts finnas vissa kritiska aspekter av ett fenomen som samtidigt bör urskiljas och fokuseras för att lärande ska ske. ”The strength of variation theory is that it can shed light on what it is possible to learn, in terms of what may be discerned. Furthermore, it can help identify critical conditions in the learning environment” (Runesson, 2005, 82). Runesson hävdar därmed att det variationsteoretiska perspektivet inte nödvändigtvis pekar på vad den lärande verkligen lär sig, utan gör det i stället möjligt för forskaren att studera vad som *kan* läras i det studerade sammanhanget, utgående från en analys av vilka aspekter som urskiljs i den aktuella situationen. I fråga om småbarns möten med matematik läggs därför i den föreliggande studien stor vikt vid de aspekter av matematik som skiljs ur och fokuseras i barnens samspel med omgivningen. Vad som urskiljs och fokuseras utgör de möjligheter till lärande som barnen erbjuds. Barnens meningsskapande analyseras och synliggör även sådana kritiska villkor som leder barnen framåt i lärandeprocessen.

Videofilm – videoobservation – videografi

Att videofilma innebär att registrera, att banda in och att dokumentera. Filming kan ske i olika syften men den grundläggande idén är alltid att fånga en händelse för att vid senare tillfälle kunna spela upp det som registrerats på band. Att filma en händelse behöver inte nödvändigtvis ha ett på förhand preciserat syfte, medan videoobservationer i forskningssyfte är en riktad handling där fokus valts innan inspelningen påbörjas. I och med att observatören på förhand har valt fokus, kan observatören ibland vara tvungen att välja bort vissa händelser som då lämnas utanför observationen. Att observera betyder därmed också att analysen påbörjas i registreringsögonblicket, eftersom vissa saker medvetet utelämnas.

Hundeide (2006) menar att en kort videoobservation inte ger tillräcklig vidd för att tolka innebörden av ett samspel, eftersom ett samspel mellan två människor bygger på tidigare samspel, tidigare händelser och förtroende, vilket en utomstående observatör inte alltid känner till. Om observatören däremot utgår från att människan är en meningsskapande och tolkande varelse, bör skeendena och handlingarna tolkas som rimliga sett ur den observerades perspektiv och med de individuella erfarenheterna som bakgrund. Ett barns erfarende och lärande observeras och tolkas därför bäst i barnets vardagliga liv.

De metodologiska vägval som beskrivits tidigare i kapitlet, kräver en datainsamlingsmetod som möjliggör noggrann analys av barns handlande. Videon blir därför ett oumbärligt verktyg för att fånga barns naturliga handlande visuellt och auditivt. Tekniken höjer även reliabiliteten avsevärt i och med att ett händelseförlopp kan återskapas flera gånger. Videoobservationer fångar mycket, men kan aldrig sägas fånga alla inverkande aspekter av en händelse. Saker och ting händer även utanför fokusområdet som kan ha betydelse för händelsens riktning och utfall, på samma sätt som lukt-, smak- och känselintryck inte kan registreras (Goode, 1992). Detta måste naturligtvis tas

i beaktande om forskningsansatsen förutsätter att allt erfارande, såväl tidigare som i den aktuella situationen, inverkar på människans handlande. Skriftliga anteckningar är därför betydelsefulla, liksom forskarens förståelse av situationen.

Videotekniken vidgar möjligheten att i forskningssyfte fånga människors naturliga handlande, vilket är eftersträvansvärt i undersökningar där människors förståelse och erfarande av omvärlden är i fokus. Ett videografiskt tillvägagångssätt för att samla in material innebär (se Lindahl, 2002) att med hjälp av audiovisuella rörliga bilder beskriva föremål eller människors handlingar i deras naturliga kontext. Videografin kan även ses som en metodologisk ansats där syftet är att beskriva och förstå mänskliga handlingar i deras naturliga sammanhang. Videografi innebär dokumentation men framförallt analys och tolkning av innebörden i det som sker i den observerade situationen. En videografisk ansats synes således lämpa sig väl för studier av barns möten med sin omvärld eftersom det ur en och samma videoepisod kan synliggöras flera betydelsefulla aspekter än vad ögat uppfattar i stunden. De beskrivningar som videoobservationerna mynnar ut i möjliggör därmed en djupare analys av den innebörd och mening som barnen tillskriver fenomenen i omvärlden.

Lindahl (2003a) lyfter också fram den pedagogiska potential som videografin erbjuder. Syftet är detsamma oberoende av om det gäller att ta videografin som ansats för forskning eller professionsutveckling, nämligen att synliggöra det förgivettagna och lyfta fram det unika likaväl som att visa på variation och komplexitet i varierande sammanhang. Lindahl (2003b) menar vidare att videografin lämpar sig som både observations- och tolkningsverktyg i och med möjligheten till återupprepade analyser och tolkningar. På detta sätt kan olika perspektiv lyftas fram som visar på komplexiteten i den studerade situationen.

Ansatzernas tillämpning i studiet av småbarns möten med matematik

En fenomenologisk syn ligger till grund för hela det tänkesätt om människan och hennes relation till omvärlden som genomsyrar studien. Människans förståelse av de fenomen hon möter i omvärlden är alltid beroende av hennes tidigare erfarenheter. Hur människan förstår ett fenomen antas på så sätt vara avgörande för hur hon handlar gentemot fenomenet. Detta gör det möjligt att tolka också småbarns handlande som uttryck för deras förståelse, trots att de inte alltid har ett så utvecklat verbalt språk. En fenomenologisk metodologisk ansats skulle föra med sig ett syfte där det är matematik som fenomen som är i fokus för analys och tolkning. Så är dock inte fallet i föreliggande studie. Fokus ligger i stället på barnens erfارande och lärande av matematik.

Metodologiskt sett har både den fenomenografiska och den videografiska ansatsen tagits i beaktande. Den fenomenografiska tolkningen av mänskligt lärande ser lärandeprocessen som en förändring i sättet att förstå något fenomen (Marton, 1992; Marton & Booth, 2000). Fokuseringen på barns varierande tillvägagångssätt, vilka aspekter som urskiljs i mötet med matematik samt hur detta tolkas som uttryck för barns varierande förståelse och möjligheter till lärande, har således en stark koppling till fenomenografin och variationsteorin. Den fenomenografiska variationsteorin utgör därmed tolk-

ningsramar för studiet av småbarns lärande. En betydelsefull utgångspunkt för tolkningen är synsättet att lärandet tar sig uttryck som förändrade sätt att handla (se även Lindahl, 1996).

Den videografiska ansatsen framträder i studien främst i forskarens urval och fokusering i analysen av datamaterialet. De videografiska episodbeskrivningarna lyfter fram komplexiteten i en situation, som är karakteristisk för lärandeprocessen. Lärande sker alltid i ett sammanhang, vilket inte kan förbises i tolkningarna. Videografin stöder på detta sätt analysen av barns erfärande och lärande.

4.2 Kvalitet i vetenskapliga studier

Kvaliteten i en kvalitativ vetenskaplig studie är beroende av två huvudsakliga faktorer: hur väl forskningsresultaten överensstämmer med deltagarnas uppfattningar, samt hur väl forskningsfrågorna besvaras (Ahonen, 1994). Forskaren bör alltså vara lojal mot sina deltagare i studien och sträva efter tolkningar som motsvarar deltagarnas eget perspektiv. Naturligtvis är det lättare att analysera och tolka äldre barn eftersom deras verbala utsagor ofta ger goda ledtrådar till deras förståelse. För att tolka yngre barns uttryck krävs en större lyhördhet och förmåga att leva sig in i barns erfarenhetsvärld.

Rubinstein Reich och Wesén (1986) påpekar att alla observationer tolkas utifrån referensramar såsom social och kulturell bakgrund. Om observatörens bakgrund är mycket olik barnens, tolkas kanske observationerna på ett annorlunda sätt än om observatören är väl förtrogen med miljön och barnens tidigare erfarenheter. Lippitz (1986) poängterar likaså betydelsen av kunskap om den värld som barn lever i, liksom forskarens självförståelse och egen praktiska erfarenhet. Ödman (1994) hävdar att det såväl i vardagen som i forskningen alltid görs tolkningar av fenomen i omvärlden. Ifall förståelsen av ett fenomen är god, kan tolkningen tyckas enkel och elementär. För forskaren är det dock speciellt viktigt att se betydelsen av förförståelsen och egna fördomar för den tolkning som görs. Visserligen kan forskaren försöka sätta parentes kring fördomarna men för att nå verklig förståelse måste forskaren acceptera det faktum att han eller hon medverkar som betydelseangivare. Tolkingar måste därför grundas på kunskap och tidigare erfarenheter av fenomenet, samt insikt om att det som tolkas kan ses ur flera synvinklar. På så sätt kan tolkningen också bli mer fördomsfri.

Larsson (2005) menar att kvalitativa studier vinner sin trovärdighet när tolkarens förförståelse görs synlig och på så sätt visar ur vilket perspektiv tolkningen görs. Den epistemologiska förankringen är således en viktig del i redovisningen av en studie. Den diskussion och problematisering av kunskapsfilosofiska teorier och tidigare forskning om småbarns lärande av matematik som i denna avhandling beskrivs i kapitel 2 och 3, utgör en sammanfattning av den förförståelse som studiet av småbarns erfärande tolkas mot.

För att kunna anta barnets perspektiv krävs kunskap om vad som är utvecklingsmässigt "naturliga" beteenden och förmågor i en viss ålder. Kunskap om barns utveckling är till god hjälp i analysarbetet av observationer, dels för att se vad som händer och dels för att tolka vad som sker (Preisler, 1990). Barn

utvecklas enligt Løkken och Søbstad (1995) genom såväl mognad som erfarenheter, vilket gör att kunskap om barns tidiga erfarenheter också är betydelsefull för att förstå barns sätt att handla. Förståelsen bygger dessutom på att se barnet i dess sociala sammanhang där det utvecklas i samspel med andra.

Lindahl (1996) förklarar att när syftet är att fånga en situation så oredigerad och äkta som möjligt, önskar hon som forskare att störa så lite som möjligt i själva datainsamlingsituationen. Hammersley och Atkinson (1995) menar ändå att det inte är möjligt att fånga en situation helt oredigerad. Fastän avsikten är att fånga den vardagliga verkligheten så orörd som möjligt, påverkar forskaren alltid med sin närvaro redan när han eller hon bestämmer vad som skall fokuseras och tolkas i en situation. Enligt Sandberg (1996) är det viktigt att forskaren är medveten om hur egna tolkningar och förväntningar påverkar objektiviteten genom hela forskningsprocessen. Sandberg påstår dock att medvetenheten och ett perspektiv på sin egen subjektivitet är en styrka snarare än ett hot mot tillförlitliga resultat.

Pramling Samuelsson och Lindahl (1999) påpekar att ett viktigt steg i analysen av videoobservationer är att uppfatta det perspektiv som forskaren utgår från, just som ett perspektiv och inte som en sanning. För att kunna byta perspektiv måste forskaren först bli medveten om sitt eget perspektiv. Det är viktigt att vara öppen för och uppmärksam på sina egna förväntningar, så att dessa inte färgar analysen och tolkningen för mycket. Egna erfarenheter fungerar alltid som en bas för tolkning. Därför bör den som tolkar vara kritisk i sitt eget tänkande för att inte riskera att tolka in sitt eget erfarenande på situationer och upplevelser.

När syftet är att försöka förstå hur barn erfar sin omvärld är det mest logiska att försöka leva sig in i och studera världen, så att säga genom barnets ögon. Johansson (2001) hävdar dock att vi omöjligt kan leva oss in i någon annans känslor, liv eller situation eftersom varje erfarenhet präglas av tidigare upplevelser, erfarenheter och kunskap. Heidegger (1981) menar att kännedom om andra människors varande i världen är ett måste för att det ska vara möjligt att leva sig in i och förstå andra människors erfarenheter och uppfattningar. Faran är dock att inlevelsen kan missleda och till och med blockera förståelsen av andra människors erfarenanden, eftersom forskarens egna erfarenheter då också inverkar på tolkningsprocessen. När det lilla barnet studeras slås man rätt snart av det faktum att barns motorik inte är lika utvecklad som vuxnas. Småbarn har därtill ännu inte tillägnat sig det verbala uttrycks sättet som ofta dominerar vuxnas uttryck. Därför är det inte heller alldeles lätt att genomföra forskning på småbarn. Den vanligaste formen för att komma åt människors tänkande, intervjun, utesluts snabbt i och med småbarns ännu inte utvecklade verbala förmåga och eventuellt också svårigheter att ta till sig och förstå det verbala språket. För att kunna genomföra en studie som den föreliggande, ter sig observation och tolkning av både handlingar och verbal kommunikation som det mest lämpliga tillvägagångssättet. Barnens varierande uttryck och samspel med sin omvärld förutsätts därmed alltid ha en mening och tolkas som uttryck för barnens förståelse.

Videotekniken ställer krav på observationsetik och identitetsskydd eftersom syftet med videoinspelning är att spela upp det observerade om och om igen

(Preisler, 1990; Lindahl, 2002). Personer som deltar i undersökningen måste därför vara informerade om forskningens syfte och användning av datamaterialet samt godkänna deltagandet. Detta innebär enligt Hirsjärvi, Remes och Sajavaara (1998) att deltagare i en undersökning måste vara medvetna om vad som kan komma att hända och bör också ha en möjlighet att förstå denna information. Utöver detta måste personer som deltar i undersökningen delta frivilligt. Sådana krav på etik i undersökningen innebär att forskaren bör bemöta varje individ på ett humant och respektfullt sätt. Kriterier om deltagande personers medvetenhet och frivillighet kan ställa till etiska problem speciellt när det gäller småbarn som inte själva kan ge sitt medgivande till deltagande. I barnens ställe bör då vårdnadshavare tillfrågas om barns deltagande i forskning. Forskningsetiken berör förutom ärlighet mot deltagare i en undersökning även noggrannhet i analysarbetet, förvaring av datamaterial samt tillförlitlighet i redovisningen av forskningsresultaten. Forsknings-etiska delegationen (2002) i Finland och Vetenskapsrådet (2007) i Sverige, ger liknande regler och riktlinjer för ett etiskt riktigt förfaringsätt i vetenskaplig forskning, vilka forskaren i föreliggande studie strävar efter att följa.

Hur ett datamaterial analyseras och sedan tolkas har avgörande betydelse för tillförlitligheten och giltigheten i de resultat som genereras ur materialet. Hasselgren och Beach (1997) menar att det har funnits brister i denna redogörelse av analysens gång i fenomenografiska studier. Visserligen strävar en fenomenografiskt inspirerad forskare efter att beskriva variationer av sätt att förstå något fenomen, men hur analysen går till bör också redogöras för. En fenomenografisk ansats stöder sig på en icke-dualistisk grundläggande syn på relationen mellan människa och omvärld. Fenomenen i omvärlden förstås därmed alltid utgående från någon individs perspektiv och speglas av individens erfarenheter och förståelse. Att beskriva olika sätt att förstå fenomen innebär således att fokusera den innebörd som framträder när individen fokuserar fenomenet i fråga. Innebörd och meningsskapande är alltså centrala termer i analyskedet.

Även Sandberg (1995) framhåller vikten av att diskutera reliabiliteten, det vill säga tillförlitligheten, i de resultat som framträder i kvalitativa studier. Den avgörande frågan är om andra forskare eller läsare av forskningens redovisade resultat kan lita på resultaten. Sandberg hävdar att resultat kan anses vara tillförlitliga om andra än forskaren själv kan identifiera de kategorier och begrepp i materialet som forskaren kommit fram till i analysen och i text beskrivit. I och med att det i fenomenografiska studier strävas efter att urskilja begrepps innebörd och förståelse på kollektiv nivå, uppstår dock lätt svårigheter för en medbedömare att uppfatta den helhet som olika aspekter av en innebörd utgör och som forskaren i analysarbetet upptäckt och som helhet tar i beaktande när kategoriseringen görs. Vidare menar Sandberg att den epistemologi som fenomenografin står för inte medger att medbedömares omdömen säger något om "sanningen" i tolkningar av datamaterial, eftersom kunskap alltid är individuell och erfarenhetsbaserad. En uppfattning eller ett sätt att förstå kan på så sätt inte sägas vara mera "sant" än något annat sätt att förstå samma fenomen. Naturligtvis bör en forskare vara konsekvent i såväl epistemologi som metodologi när vetenskaplig forskning bedrivs och diskuteras. Tillförlitlighet är trots detta nödvändigt att ta i beaktande, vilket den kvalitativa forskaren bäst gör genom att noggrant beskriva hur tolkningarna i analysprocessen tagit form samt hur dessa relaterar till

syfte och forskningsfrågor. Forskarens medvetenhet om sitt eget inflytande och perspektiv på tolkningen är en förutsättning för tillförlitligheten men även en styrka i analysarbetet.

Larsson (2005) hävdar att ett kriterium för god kvalitet i kvalitativa studier är det teorigenererande eller kunskapstillskott som en studie kan bidra med. Detta innebär att en kvalitativ studie bör synliggöra det förgivettagna eller skilja ur och visa på centrala drag i datamaterialet. Föreliggande avhandling torde ha möjlighet att vidga förståelsen av småbarns lärande, i och med beskrivningen och analysen av hur barns möten med matematik gestaltar sig i den dagliga verksamheten på daghem. Avsikten är således inte att falsifiera tidigare teorier utan snarare att fördjupa och öka medvetenheten om småbarns erfarenhet och möjligheter till lärande.

4.3 Studiens urval och genomförande

Studiens urval består av 23 barn på två småbarnsavdelningar i olika städer i Finland. Barnen är mellan 1 år, 1 månad och 3 år, 9 månader gamla. Förfaringssättet vid urvalet av deltagare kan närmast beskrivas som "bekvämlighetsurval" (Trost, 1994). Bekvämlighetsurval innebär att sådana deltagare väljs ut, som anses vara lämpliga för undersökningens syfte. I och med det icke-slumpmässiga urvalet kan en dylik undersökning inte analyseras kvantitativt, eftersom forskaren godtyckligt väljer undersökningsgrupp, men däremot kan studien vara värdefull för kvalitativ analys. Urvalsprocessen i föreliggande studie gick till så att daghem valdes ut ur telefonkatalogen och daghemmets föreståndare eller barnträdgårdslärare på småbarnsavdelningen ringdes upp för förfrågan om deltagande. Många daghem önskade inte delta av varierande orsaker, men de som valde att delta tog välvilligt emot forskaren och visade intresse för projektet.

De deltagande barnens föräldrar och personalen på daghemsavdelningarna har gett forskaren sitt skriftliga tillstånd att följa aktiviteterna på småbarnsavdelningarna och att med videokamera dokumentera barnens vardag. I redovisningen av studien används fingerade namn på både barn och vuxna.

Barnen på småbarnsavdelningarna observerades under hösten 2003. Barnens aktiviteter och samspel med andra barn och vuxna i daghemsmiljön har dokumenterats och analyserats med fokus på deras erfarenhet och lärande av matematik. Datainsamlingen är explorativ till sin karaktär och har i praktiken gått till så att när barnen visat sig rikta sin uppmärksamhet mot något har videokameran startats och händelsen har dokumenterats så länge barnen behåller sin fokusering på samma objekt eller aktivitet. Datainsamlingen innebär en ständig bedömning och tolkning av värdet av en given situation. Vartefter datainsamlingen framskrider ökar även observatörens känslighet och intuition för när något av intresse sker (se även Lindahl, 1996). Redan vid datainsamlingen görs således ett urval av sådana aktiviteter som kan tänkas ha ett matematiskt innehåll. Samtidigt sker också ett bortfall av situationer som inte dokumenteras och därmed inte ligger till grund för analysen. Urvalet är dock nödvändigt eftersom det samtidigt kan försiggå många varierande aktiviteter i en barngrupp. Att dokumentera och analysera alla aktiviteter som sker låter sig inte göras av en ensam forskare. Av

betydelse är dock att det alltid är barnens riktade medvetande som styr datainsamlingen.

Det datamaterial som samlats in och analyserats består av videografiska episoder. En episod karakteriseras, enligt Lindahl (1996, 79) "av den tid barnets medvetande är riktat mot ett och samma objekt eller har ett och samma intressefokus". Medvetandets riktadhet kan ta sig uttryck till exempel så att ett barn sätter sig för att lägga ett pussel eller tillsammans med ett annat barn eller en vuxen försöker utföra en uppgift eller komma fram till en gemensam förståelse av något fenomen. Förfaringssättet vid datainsamlingen kräver att forskaren är mycket uppmärksam och följer ett barns aktivitet från början till slut. Naturligtvis för detta även med sig att en del av det insamlade materialet inte beaktas i analysen, till exempel på grund av att barnet tidigt blir avbrutet i sin aktivitet eller att det matematiska innehållet är oklart. Trots detta är det i de flesta dokumenterade episoderna möjligt att finna ett matematiskt innehåll, det vill säga att barnen på varierande sätt urskiljer någon aspekt av matematik, vilket ytterligare övertygar forskaren om att matematik är en betydelsefull del av småbarns vardag. Där videotekniken inte fungerat ändamålsenligt (på grund av bristfällig belysning eller fullt videoband) har anteckningar gjorts för att stöda och möjliggöra en mera fullständig analys.

Det material som utgör studiens rådata består av 45 timmar videoinspelade episoder, där de kortaste episoderna är en halv minut långa och de längsta 20 minuter. Under en dag på småbarnsavdelningarna samlas i genomsnitt två timmar datamaterial in. Samma dag som videoobservationerna görs skrivs de ner och genomgår en första analys av innehållet. När datainsamlingen genomförts i sin helhet och materialet bedömts innehålla tillräckligt många episoder där barn erfar matematik, ses videoobservationerna igenom flera gånger innan materialet mera noggrant förs över till skriven text. Episodbeskrivningarna underlättar analys och tolkning men innebär också att vissa händelser och skeenden inte finns med i de slutliga beskrivningarna. En total beskrivning är inte heller eftersträvansvärd, eftersom syftet med studien preciseras till att synliggöra småbarns möten med matematik. I föreliggande avhandling redovisas och tolkas fler än 80 episoder i text. Den totala mängden rådata innehåller dock betydligt fler episoder. I en episod kan flera kvalitativt skilda aspekter framträda, vilket gör att samma episod kan analyseras ur olika perspektiv.

4.4 Analys och tolkning

Det videografiska tillvägagångssättet är outhärligt i tolkandet av småbarns erfarenhet och i synnerhet i sådana situationer där mångfalden av barns handlingar och andra uttryck är en central del och nödvändig att ta i beaktande. Komplexiteten i erfandet framträder i analysen, samtidigt som det blir möjligt att skilja ur och tolka barnens uttryckssätt och varierande förståelse. Att analysera småbarns erfarenhet och lärande på ett tillförlitligt sätt görs lämpligast med utgångspunkt i att varje handling förutsätts ha en mening, sett ur barnets perspektiv.

De kategorier som genereras ur det insamlade materialet visar vad barn erfar och på vilka varierande sätt barnen i studien erfar olika aspekter av matematik. Genom sitt handlande och samspel med andra barn och vuxna erfar barnen allt mer och fler aspekter av fenomenen. Detta erfalande sker kontinuerligt i samspel med omgivningen när barnen strävar efter att förstå och bemästra situationer. Sättet på vilket barnen handlar tolkas därmed som en gestaltning av hur barnen förstår ett fenomen. Lärandeögonblicket låter sig sällan fångas i observationerna, men det sätt på vilket barnen utforskar sin omvärld och gestaltar det erfarna, ger observatören en möjlighet att tolka barnens avsikter och förståelse i den observerade situationen.

I episoderna som fångats på videoband kan det samtidigt hända mycket under en kort tidsperiod. Den videografiska ansatsen ger forskaren en unik möjlighet att se hur barn tillsammans utvecklar en idé och en aktivitet. Detta är möjligt i och med att videoobservationerna kan spelas upp flera gånger och forskaren kan fokusera olika perspektiv eller olika företeelser för att bilda sig en uppfattning av vad som sker i situationen. Mångfalden av fokuseringsmöjligheter gör att forskaren kan få en djupare förståelse av företeelser som kanske ofta förekommer i den dagliga daghemsverksamheten men som sällan analyseras och tolkas desto mer.

Eftersom videoepisoderna är så informationsrika och mångfasetterade förekommer det ofta att flera aspekter och perspektiv kan lyftas fram ur samma material. I resultatredovisningen syns detta på så sätt att samma episod kan återfinnas i flera kategorier, men har då tolkats ur olika perspektiv.

I studien analyseras och tolkas lärandets objekt i form av den kulturellt förmedlade matematik som barnen möter i vardagen på daghemmen. Barnens förståelse uttrycks på varierande sätt och relationen till andra sätt att förstå synliggör olika aspekter av fenomenet som barnen kan urskilja. En fenomenografisk analys och tolkning visar att barnen erfar mötet med matematik på varierande sätt. I gemensamma aktiviteter har barnen möjlighet att upptäcka olika sätt att förstå fenomen i omvärlden och även betydelsen av att uttrycka sin egen förståelse för att också andra barn och vuxna skall förstå deras avsikter.

Analysarbetet och tolkningen följer ingen på förhand utformad analysmodell. Analysen av videomaterialet som leder till den kategorisering som presenteras i kapitel 5–7 har gått till så att episoder med ett matematiskt innehåll skrivs ut och kategoriseras först utgående från vad barnen skiljer ur och fokuserar i episoden. Avsiktighet och fokusering spelar därmed en avgörande roll. I kapitel 5 redovisas vad småbarn erfar av matematisk karaktär i daghemmets vardagliga miljö och aktiviteter. Den första analysen utmynnar i tre fokuseringskategorier: *matematiska begrepp, likheter och skillnader samt delar och helheter*. Den matematik som barnen möter uppfattas på varierande sätt, beroende på vilka aspekter som skiljs ur och fokuseras. Fokuseringskategorierna har därför noggrannare analyserats för att ytterligare skilja ur vilka aspekter som lyfts fram och fokuseras av barnen.

Samtidigt som fokuseringskategorierna tar form framträder också i barnens varierande tillvägagångssätt fyra kritiska villkor för lärande. De kritiska villkoren *samtidighet, variation, rimlighet* och *hållpunkt* framträder som betydelsefulla för barnens framväxande förståelse. Dessa kritiska villkor visar vad

som är karakteristiskt och verkar vara avgörande i barnens erfارande och lärande. Kapitel 6 utgör därmed en djupare analys och beskrivning av hur barnens erfارande och lärande av matematik gestaltar sig.

I analysarbetet framträder tre områden inom vilka barn visar sig använda sina färdigheter och sin förståelse av matematik. Barnen använder matematik för att upprätthålla *sociala spelregler*, för att göra en *beskrivning av världen* och som *redskap för problemlösning*. Dessa områden redovisas i kapitel 7 och utgör en beskrivning av hur småbarn uppfattar innebörden och användningsmöjligheterna av matematik.

Tolkningen av barns erfارande och lärande av matematik är en process som går mot en allt mer nyanserad beskrivning och förståelse. Under analysens och tolkningsprocessens gång tas alltid helheten i beaktande vilket gör att förståelsen hela tiden fördjupas. Denna process, i vilken forskaren växlar mellan sin förförståelse och ny förståelse, innebär en ständig omtolkning som förändrar förståelsen när nya aspekter lyfts fram och bidrar till kunskapsbildandet. Resonemanget för enligt Ödman (1994) med sig att en tolkning aldrig kan vara total, utan är alltid beroende av en viss förståelsehorisont, som i och med ny kunskap och andra perspektiv kan vidgas och tolkningarna ytterligare preciseras. Det avgörande kvalitetskriteriet i kvalitativa studier är följaktligen hur en tolkning kan sägas vara tillförlitlig och giltig när tolkningarna tycks vara subjektiva och föränderliga. Marton (1981) menar dock att fenomenografiska studier, där beskrivningar av variationer av sätt att förstå något fenomen presenteras i beskrivningskategorier, vinner sin trovärdighet i att samma innebörd kan återfinnas i varierande sammanhang. Variationen av sätt att förstå och handla är således inte bunden till individen utan abstraherad och generaliserad. I föreliggande studie torde tillförlitligheten säkras i och med att en läsare ges möjlighet att känna igen en beskrivning i olika sammanhang, därav de i text beskrivna episoderna som analysen bygger på och som exemplifierar tolkningen. Den empiriska förankringen är betydelsefull också för att visa giltigheten i de tolkningar som görs (Larsson, 2005). Därför beskrivs i redovisningen av studiens analys och tolkning flera episoder, dels för att exemplifiera den tolkning som görs och dels som belägg för tolkningens giltighet.

5 Vad småbarn erfar i mötet med matematik

Avsikten med att studera vad småbarn erfar av matematisk karaktär i dag-hemskontext är att skilja ur och beskriva på vilka olika sätt matematiken gestaltar sig för barnen och att tolka vilken matematisk innebörd fenomen som de möter i vardagen kan ha. Intentionen antyder en strävan att komma närmare barnens perspektiv och att försöka förstå hur matematiken ter sig för barnen. Att tolka barns förståelse och uppfattning av olika aspekter av matematik får betydande pedagogiska konsekvenser för arbetet med småbarn, eftersom de aspekter som lyfts fram och synliggörs för ett barn i en situation också karakteriserar möjliga sätt att förstå den matematiska innebörden.

I följande redovisning fokuseras *vad* barn erfar, vilket beskrivs som olika aspekter av matematik som barnen på småbarnsavdelningarna möter och förstår utifrån sina egna erfarenheter. Genom utforskande handlingar och kommunikation med andra kan barnen erfar flera aspekter av ett matematiskt fenomen. Detta erfalande sker kontinuerligt, när barn strävar efter att förstå och bemästra olika situationer. I studien framkommer att barnen på småbarnsavdelningarna möter aspekter av *matematiska begrepp, likheter och skillnader*, samt *delar och helheter*. Dessa omfattar det vardagliga matematiska innehåll som utvecklats i den miljö och kultur som barnen vistas i och som både vuxna och barn använder i det dagliga livet för att kommunicera med andra och för att lösa problem. I samspel med omvärlden framträder därmed sådana aspekter av matematik som barnen ges möjlighet att erfar på varierande sätt.

5.1 Matematiska begrepp

Barnen på småbarnsavdelningarna möter dagligen en mångfald matematiska begrepp. Begreppen stöder kommunikationen mellan människor och beskriver förståelsen av det generella och det specifika hos föremål och företeelser. Att förstå vad som avses med ett begrepp förutsätter att barnet ser begreppet i ett sammanhang och vilken betydelse det kan få i just den situationen. Begreppens innebörd förstås nämligen som beskrivningar av relationer mellan fenomen i omvärlden. Storleksbegrepp som "stor" och "liten" erfars alltid i förhållande till något föremål. På samma sätt är begrepp som "mycket" och "lite" också relationella. Barnens förståelse av innebörden i sådana matematiska begrepp växer fram i samspelet med omgivningen när de erfar de olika betydelser ett ord kan få i olika sammanhang och därmed fokuserar vissa aspekter framom andra.

Att förstå och bilda begrepp innebär att barnet inser att föremål eller företeelser samtidigt kan vara olika men ha någon gemensam nämnare som gör

att de bildar en grupp med gemensam benämning. Att ett barn har bildat begrepp kan synliggöras till exempel på följande sätt.

Linnea (1:10) sitter i en soffa och tittar på en tecknad film där en jaguar smyger genom djungeln. Linnea säger "kisse, prickig", hon tittar sedan ner på vällingflaskan som hon håller i handen, pekar på den tiger som är avbildad på flaskan och säger "kisse", innan hon vänder sig om i soffan, klappar försiktigt bondkatten som ligger på ryggstödet och säger ännu en gång "kisse".

Alla de "kissekatter" som Linnea så tydligt uppmärksammar är olika varandra och förekommer i skilda sammanhang. På något sätt är de dock lika i art och egenskap, en aspekt som Linnea uppenbarligen fokuserar hos fenomenet. Begrepp är i sig också överordnade och kan bilda hierarkier av begrepp, till exempel där katt faller under det övergripande begreppet "fyrfota djur". På samma sätt inbegriper talbegrepp och andra matematiska begrepp förståelsen att vissa kriterier av likhet måste uppfyllas medan vissa skillnader är acceptabla och det ändå rör sig om samma begrepp. Utmärkande för de matematiska begreppen är att de beskriver något jämförbart samband mellan föremål eller företeelser.

Barnen i studien upptäcker samband hos fenomen och företeelser och erfar i kommunikation med andra hur olika begrepp kan användas och vilken betydelse de får i olika sammanhang. Jämförelser görs mellan direkt observerbara objekt men också sådant som barnen erfarit tidigare i andra sammanhang. I analysen framträder fem aspekter, nämligen *dimensioner och proportioner*, *positioner*, *omfattning*, *månghet* samt *sekvens*, som är nödvändiga att urskilja för att förstå och använda ett begrepp på ett visst sätt. Episoderna lyfter fram barnens strävan att skapa mening och förstå begreppens innebörd och användningsmöjligheter genom att fokusera någon av dessa aspekter.

5.1.1 Dimensioner och proportioner

Att erfara dimensioner innebär att skilja ur den fysiska utsträckning ett föremål tar i rummet. Proportioner innebär vidare storleksförhållandet mellan olika objekt. Dessa aspekter av omvärlden beskrivs med begrepp som i hög grad är relationella, det vill säga beroende av vad som jämförs. Jämförelsen är central eftersom det är jämförandet som avgör vilka begrepp som kan lämpa sig för att beskriva objektet i fråga.

Begrepp där innebörden beskriver dimensioner och proportioner som barnen ofta kommer i kontakt med i vardagen på småbarnsavdelningarna är *stor*, *liten*, *lång* och *kort*. Begreppen lyfts ofta fram som motsatspar, där barnen nämner vad som till exempel uppfattas vara stort och vad som uppfattas vara litet i den aktuella situationen.

I följande episod diskuterar sig en vuxen och ett barn fram till ett gemensamt överenskommet begrepp genom att utgå från kroppen och reflektera över dimensioner och proportioner och innebörden i de begrepp som används. Problemet ligger i att hitta rätt ord för den kroppsdel som avses, men begreppen problematiseras och den gemensamma slutsatsen bygger på fokuseringen på dimensioner och proportioner hos de objekt som jämförs i sammanhanget.

Adam (3:1) är ensam kvar i tamburen med Gun (vuxen). Han sitter i hennes famn och får hjälp att klä på sig tröja och ytterkläder. Gun säger "ni har så långa ben, eller jag har så korta armar". Adam svarar "jag har också långa ben och så här stora händer" och sträcker ut armen så långt han når, "nej, jag har lilla händer och såna här'na... sån här'na stora" klappar sig på armen. Gun frågar "armar, då? Långa armar?" Adam svarar efter en stund "jo".

Adam verkar vara medveten om hur den vuxnas armar relaterar till hans kortare armar och försöker förmedla detta till den vuxna. Han letar efter rätt uttryck, "långa armar", och beskriver samtidigt hur han erfar relationen mellan stora och små kroppsdelar. Anton verkar uppfatta "långa" och "stora" som synonyma begrepp, lika som "korta" och "lilla" i den här situationen. Tillsammans med den vuxna kommer han fram till den innebörd han försöker förmedla, nämligen att han inte bara har långa ben utan också långa armar. Det väsentliga för att Adam i episoden ovan skall förstå och formulera begreppen är fokuseringen på kropparnas utsträckning i rummet. Jämförelsen av hur denna aspekt varierar mellan den vuxna och barnet och mellan olika kroppsdelar, är här en förutsättning för förståelse.

Föremål och företeelser som inte är direkt observerbara är viktiga erfarenheter och utgångspunkter för hur barnen tolkar det som sker i deras vardag. Tolkningarna är i sin tur avgörande för hur de agerar i olika situationer. De barn som verbalt kan uttrycka vad de associerar till visar att de är skickliga begreppsanvändare som snabbt skiljer ur den väsentliga aspekten och lyfter fram variationen. På detta sätt förmedlar barnen sina erfarenheter till andra och visar också hur de kopplar samman sina erfarenheter med det nya i situationen.

Julia (3:9) håller en brödsmla mellan pekfinger och tumme. Hon säger "se, vad liten smörgås" och mättar med andra handens pekfinger och tumme "så här liten". Maj (vuxen) formar en liten cirkel med pekfinger och tumme och säger "så liten".

Brödsmlan som Julia håller mellan sina fingrar uppfattas som liten i förhållande till den smörgås som hon fick en stund tidigare. Den vuxna bekräftar hennes uppfattning av begreppet "liten" genom att också visa med fingrarna som mått hur liten smulan är. Brödsmlans storlek, det vill säga såväl utsträckning i rummet som dess proportioner, är i fokus och aspekten gestaltas på varierande sätt med hjälp av fingrarna.

I den följande episoden reflekterar Sakari över hur samma form kan förekomma i olika sammanhang hos olika objekt, men också hur formens specifika innebörd varierar beroende på sammanhanget. Sakari visar sig göra detta genom att beskriva samma objekt, mandarinklyftor, med motsatta begrepp. Genom att visa hur aspekten varierar beroende på vad klyftan relateras till, synliggörs hur han förstår innebörden av begreppen.

Sakari (3:2) sitter vid bordet och äter en mandarin. Han säger "titta stor", visar upp en mandarinklyfta, "ser ut som en banan" och fortsätter ta loss klyftor som han strax äter upp, "ser ut som mycket banan". Sakari får ännu en mandarin och kommenterar mandarinklyftorna "titta liten, ser ut som liten banan". Martina (vuxen) instämmer.

Mandarinklyftorna är det objekt som Sakari reflekterar över i fråga om dimension och proportion till andra objekt. I och med att han relaterar klyftornas storlek till varandra och till andra tänkta objekt visar detta hur han förstår begreppen "stor" och "liten". Mandarinklyftan är enligt Sakari stor i förhållande till de övriga mandarinklyftorna, men klyftorna erfars däremot som små när Sakari relaterar dem till bananer. Han upptäcker att mandarinklyftorna har samma form som bananer, men i jämförelse med en banan är mandarinklyftan mycket mindre i storlek. Också Emma upptäcker i följande episod hur två leksaksfordon relaterar till varandra och använder begrepp som "större" och "mindre" för att visa hur hon erfår att den kritiska aspekten varierar.

Emma (2:6) håller i en leksaksbuss med båda händerna och springer stödjande på bussen. Hon springer förbi Elisa (2:7) som leker med ett tåg. Emma säger "minulla on isompi, tuo on pienempi" (finska för "jag har en större, den där är mindre") och pekar på Elisas tåg.

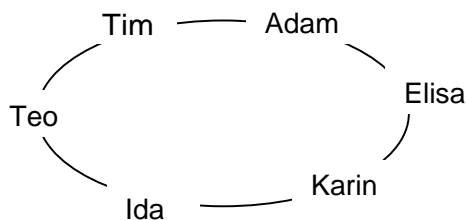
Emma pekar tydligt ut, både kroppsligt och verbalt, hur hon uppfattar storleksrelationen mellan föremålen. Begreppen som hon använder, översatt som "större" och "mindre", när hon pekar på de föremål hon jämför, visar hur hon erfår att det ena är större i relation till det andra. För att uppfatta att något är större eller mindre än något annat måste barnet fokusera dimensioner och proportioner, så som Emma ger uttryck för att hon gör.

Det centrala i erfandet av begrepp som beskriver dimensioner och proportioner är att fokusera den aspekt som utgörs av objektets utsträckning i rummet och förhållande till andra objekt. Fokuseringen möjliggör jämförelser med andra objekt och en bestämning av vilka begrepp som är lämpliga i sammanhanget. Begreppen beskriver till exempel något föremåls omfattning, höjd eller längd och får sin innebörd i relation till andra föremål. Jämförelsen med andra objekt gör att barnen skiljer ur olika sätt att förstå det de erfår och förmår i många fall kommunicera den innebörd de ger fenomenet.

5.1.2 Positioner

Lägesbegrepp beskriver föremåls eller personers positioner i ett rum. Sådana begrepp som barnen på småbarnsavdelningarna erfår är *uppe, nere, ute, inne, inuti, bredvid, mitt emot, under, i mitten, mellan, här och där*. Begreppen beskriver var en person eller ett föremål befinner sig i rummet och den kritiska aspekten är positionen i rummet och vilket perspektiv som tas. Även här är relationen till andra föremål eller personer viktig för att bestämma position och lämpligt beskrivande begrepp. Barnen möter begreppen till exempel som uppmaningar av vuxna att placera föremål på olika ställen, eller när barnen själva försöker beskriva hur de uppfattar sin omvärld. I fråga om lägesbegrepp blir det ofta konkret synligt att ett objekt kan beskrivas med flera begrepp som gäller samtidigt, men begreppens innebörd är beroende av vilket perspektiv som tas, det vill säga hur den kritiska aspekten varierar.

Sex barn sätter sig kring ett runt bord och diskuterar vem som sitter bredvid vem. I början konstaterar barnen att ett visst barn sitter bredvid ett annat barn. Mot slutet av diskussionen lyfts det fram att någon kan sitta bredvid flera personer samtidigt.



Figur 1. Barnens sittplatser runt bordet

Tim (3:5) säger "jag sitter bredvid Adam", pekar först på Adam som sitter på hans vänstra sida, sedan på Teo på hans högra sida och säger "du sitter bredvid mig".

Adam (3:5) säger "jag sitter bredvid Tim".

Tim tittar på Teo och säger "Ida sitter bredvid dig, Elisa sitter bredvid Karin".

Karin (3:6) säger "sitter bredvid Ida!"

Teo säger "och jag sitter bredvid Tim".

Ida (2:8) tittar först på Teo till vänster och sedan på Karin till höger medan hon säger "så du [Teo] bredvid mig och du [Karin] bredvid mig".

Karin konstaterar "här ryms inga fler stolar!"

Tim säger "Tim, jag, sitter bredvid Adam" och pekar på Adam till vänster, "hon", pekar på Elisa "sitter bredvid Karin OCH Adam, hon", pekar på Ida, "sitter bredvid Teo OCH Karin".

Teo säger "och jag sitter bredvid Tim och Ida".

Tim fortsätter "jag sitter bredvid Teo och Adam".

Det begrepp som barnen diskuterar är "bredvid". Det kritiska för förståelsen är att begrepps innebörden är beroende av vilket perspektiv som tas. Först tycks barnen utgå från sig själva och sin egen plats runt bordet. De kommer snabbt fram till vem som sitter bredvid de själva och fortsätter diskutera vem som sitter bredvid vem på andra sidan bordet. På daghemmen har barnen ofta sina bestämda sittplatser vid matborden. Barnen känner till var den egna platsen är och vill gärna att de andra barnen skall sitta på sina vanliga platser. I episoden vidgar barnen sitt erförande och tar i beaktande också andra barns positioner runt bordet. Barnen ser då bordsplaceringen också ur ett annat perspektiv än det egna. Begreppet "bredvid" får en betydelsefull innebörd i och med att det omfattar fler än en person och uppmanar till att vidga erförandet. Begreppet abstraheras och får en mera generell innebörd i och med att barnen kommer fram till att en och samma person kan sitta bredvid flera än en person på samma gång. Positioneringen är således betydelsefull för att förstå och kommunicera innebörden av lägesbegrepp.

I följande episod beskriver Teo hur han erfar att en figur kan röra sig från en position till en annan. Han tar då utgångspunkt i det "hus" han byggt av klossar och låter olika figurer röra sig i klossmiljön. Med figurernas hjälp konkretiseras erförandet och begrepps innebörden, där figurens olika positioner spelar en betydelsefull roll.

Teo (3:5) bygger med klossar. Han ber ett barn om en specifik kloss och sätter fast en dörr på en basplatta. Teo hittar en rund kloss med ansikte och sätter fast en lång stav under klossen. Han letar tills han finner en likadan stav och sätter stavarna som ben från huvudet. Sedan för han figuren genom dörren och säger till en vuxen "Stina, en dörr, fara ut och in genom den, den kan det. Han är uppe på dörren" och ställer figuren ovanpå dörren. Teo fortsätter bygga, han får en grisfigur av ett barn och för grisen genom dörren flera gånger.

Klossar och material att bygga med uppmuntrar barnen på daghemmen att göra jämförelser. Bygglek kan medvetandegöra barnen på de begrepp som lämpar sig för att beskriva vad som sker eller den avsikt barnen har i en aktivitet. Kritiskt för att förståelsen skall framträda på ett visst sätt är den erfarna relationen mellan olika objekts positioner i rummet.

Vera (2:9) plockar stora byggklossar ur en låda och sätter fast dem ovanpå varandra på golvet. Vera säger "ska bygga en STOR, ända upp i taket". Vera hämtar flera klossar och bygger tills stapeln är lika hög som hon "sådär, blir det högt upp i taket!" och sträcker upp sina händer mot taket. Martina (vuxen) instämmer "ända upp i taket". Vera säger igen "ända upp i taket" och fortsätter bygga på samma sätt. När hon inte längre når att trycka fast klossarna, hämtar hon en stol och placerar den intill stapeln, klättrar upp på stolen och trycker fast flera klossar. En vuxen kikar in i rummet och säger "är den högre än vad du är?" Vera svarar "ja", den vuxna fortsätter "så måste du ha stolen för att kunna bygga". Vera fortsätter bygga och får hjälp av Jonna (vuxen) när hon inte längre når att trycka fast fler klossar. Martina utbrister "åhå, vad högt, har du byggt själv, Vera?" Vera svarar "jo, och Jonna". Martina fortsätter "ända upp till äpplena där i trädet". Det hänger trädgrenar strax under taket med äpplen och andra dekorationer. Vera kliver upp på stolen och raserar stapeln. Vera bygger en ny stapel och tar stolen till hjälp för att nå. "Oj, vad högt, jättehögt, jo, det blir det" säger hon. Vera sätter sig på stolens ryggstöd med ryggen åt stapeln, sitter en lång stund, sätter sig ännu ner på stolen och tittar rakt fram. Martina frågar "vad funderar du, Vera?" Vera svarar inte utan hämtar fler klossar, stapeln rasar och hon säger "jag måste bygga på nytt, riktigt högt" och sträcker händerna upp över huvudet. Vera springer iväg en stund. När hon kommer tillbaka raserar hon stapeln, säger "äppel", drar stolen under äppeldekorationerna i taket, klättrar upp på stolen, klättrar ner igen, tittar uppåt, flyttar stolen, stiger upp på stolen igen och sträcker sin ena arm högt upp mot dekorationerna, sen sätter hon sig på stolen igen.

I episoden framgår det tydligt att Vera erfar begreppet "högt" på ett konkret men ändå nyanserat sätt. De vuxnas kommentarer och frågor om byggandet uppmuntrar Vera att beskriva och reflektera över hur högt hon byggt. Visserligen bygger hon ett högt torn av klossar sett ur hennes perspektiv, men begreppet "högt" relateras också till äppeldekorationerna som finns "högt upp", alldeles under taket. Med dekorationerna i fokus får Vera en punkt att rikta sitt byggande mot och erfar skillnaden mellan hur högt hon redan byggt och hur högt hon har för avsikt att bygga. Den hjälp hon får av en vuxen när hon inte längre når att trycka fast fler klossar ger också

möjligheter att skilja ur den varierande innebörden i begreppet "högt" i relation till henne själv och den vuxna som är längre och när högre än hon själv.

5.1.3 Omfattning

Mängdbegrepp handlar om sådana begrepp vars innebörd är att en helhet avgränsas och storheten uppskattas i jämförelse med någon annan mängd. Det exakta antalet, volymen eller ytan är inte direkt av intresse utan i stället fokuseras omfattningen som en helhet. Mängdbegreppen avser på så sätt den totala mängden. Eftersom mängdens uppbyggnad inte står i fokus är mängdbegreppens innebörd relationella och beroende av vad som jämförs. Typiska mängdbegrepp som barnen erfar är *mycket*, *lite*, *många*, *mera*, *några*, *alla* och *ingenting*.

För att beskriva en mängd med lämpligt begrepp måste barnet först uppfatta att flera objekt har någon gemensam egenskap som gör att de bildar en grupp som helhet. I följande episod erfar Anna att tre telefoner som är olika till utformningen ändå har någon gemensam egenskap. De bildar en helhet som enligt henne karakteriseras som "många". Begreppsanvändningen tyder på att hon urskiljer mängdens omfattning och finner den aspekten betydelsefull att framhålla.

Anna (2:4) är i dockvrån. Hon går runt och tar med sig tre telefoner som alla ser lite olika ut. Hon lägger telefonerna intill varandra på dockspisen och utropar "se vad många telefoner!"

Barnen på småbarnsavdelningarna diskuterar ofta innebörden av mängdbegrepp under måltidssituationerna. Det tycks inte alltid vara så lätt att nå en överenskommelse om innebörden i begreppen, speciellt om det så som i följande episod är eftersträvansvärt att ha "mycket" av något. En gemensam fokusering på mängdernas omfattning är nödvändig för att barnen skall komma fram till en gemensam förståelse. Fyra barn sitter runt matbordet och har fått var sitt glas med mjölk. Julia har dock endast fått hälften så mycket mjölk som de andra. Emma uppmärksammar att mängden mjölk i Julias glas skiljer sig från de andras, men har vissa svårigheter att få gehör för sin upptäckt.

Emma (2:6) pekar på Julias glas och säger "du har lite".

Karin (3:6) säger "jag har också mycket".

Tim (3:5) och Julia (3:9) säger samtidigt "jag har också mycket".

Emma pekar ännu en gång på Julias glas och konstaterar "du har lite".

Tim säger "jag har inte lite, jag har mycket".

Julia tittar på Emma och säger "du och Karin och Tim och jag har mycket".

Emma upptäcker att Julias glas innehåller mindre mängd mjölk än de andra tre barnens glas. Julia hävdar flera gånger att de alla har "mycket" mjölk. Att ha mycket mjölk värderas eventuellt högre i denna situation och Julia strävar efter rättvisa, vilket däremot inte för det matematiska erfandet framåt i just detta sammanhang. Emma har upptäckt en tydlig skillnad mellan mängderna i glasen, men lyckas inte medvetandegöra alla de andra barnen på skillnaderna i omfattning. Tim tycks dock uppfatta och dela Emmas fokusering på

mängdernas omfattning i och med att han också uppmärksammar hur mängderna varierar.

Begrepp som beskriver mängders omfattning kan användas i många olika sammanhang och barnen strävar efter att beskriva sin uppfattning med både verbala och kroppsliga uttryck. Barnen gestaltar mängder på varierande sätt och möter även andra barns gestaltningar som de försöker förstå innebörden av. Jämförelser och olika gestaltningssätt lyfter fram variationen av hur aspekten omfattning kan erfaras, vilket befäster begreppens innebörd och utvecklar nyanser i betydelsen. I följande episod beskriver och visar två barn den mängd flingor de vill ha till mellanmål. Flingorna tycks vara omtäckta och barnen strävar efter att få en stor mängd flingor på sina tallrikar. Den mängd som barnen önskar få gestaltar de därför på varierande sätt.

Adam (3:1) och Elisa (2:7) sitter vid matbordet och har just fått sina mattallrikar. Elisa säger "du har lite, jag har mycket" och pekar på Adams tallrik och sedan på sin egen tallrik. Adam måttar (ca 2 cm) med pekfinger och tumme och säger "så här lite". Adam ökar avståndet mellan fingrarna, "jag har så här mycket". Elisa cirklar med pekfingeret över tallriken med flingor, hon säger "titta här, jag har mycket, mycket, mycket". Adam svarar "sen vill jag ha mycket, jag vill ha mycket, så här mycket" och visar upp hela handen med fem fingrar. När Adam får sin andra portion säger han "jag fick mycket, Elisa!" Elisa svarar "jag ska också ha mycket, mycket mera, så mycket, så här mycket" och visar upp båda händerna, tio fingrar "jag har så här mycket". Adam härmar och sträcker sedan sin ena arm så högt han når. Adam sträcker upp armen en gång till och säger "så här mycket". Elisa får mera flingor, Adam säger "Elisa, du fick mycket".

Barnen i episoden jämför och beskriver först mängdernas omfattning med begreppen "lite" och "mycket". Begreppen är tydligen inte tillräckligt nyanserade för att visa på den skillnad och ökning i mängdernas omfattning som barnen avser och konkret visar på olika sätt, därför utvecklar de mängdbegreppen, såsom upprepning "mycket, mycket, mycket" och som "mycket mera". De mängdbegrepp som barnen använder verkar intressera dem och utmanar dem att experimentera och pröva hur begreppen kan varieras och användas med olika betydelser. Alla mängdbegrepp tycks dock inte locka till liknande utmaningar, eftersom mängdbegreppens karaktär är mera begränsande. I följande episod resonerar Anna kring begreppet "alla" som hon tydligen uppfattar som en tydligt avgränsad mängd. Också i denna episod är omfattning en aspekt som bör beaktas.

Jonna (vuxen) och Anna (2:4) hjälps åt att klä ytterkläderna på Anna. När det är dags för fingervantarna gnäller Anna när fingervanten inte passar. Jonna säger "ska du sticka i här, tummetott, slickepott, där var de alla, visst?" och hjälper Anna att få alla fingrarna rätt i vanten. Anna ropar "se!" och visar upp sin hand med vanten på. Jonna säger "se vad det gick bra" och hjälper Anna att få på andra vanten. Anna säger "nu är alla fingrarna" medan hon tittar på sina båda händer och säger "tummetott, slickepott, långeman, gullebrand". Jonna instämmer "ja, just det".

Anna erfar i episoden mycket konkret hur fingrarna tillsammans bildar en bestämd mängd som hon betecknar med begreppet "alla". Hon urskiljer då att mängden omfattar alla de tidigare nämnda delarna, i detta fall fingrarna. Anna är en flicka som uppmärksammat att mängder kan bestå av olika ting och verkar kunna variera på vitt skilda sätt. Att mängder och mängdbegrepp är betydelsefulla ger hon uttryck för också i följande episod.

Anna (2:4) går omkring på avdelningen och stannar vid en vuxen. Anna säger "jag har en ficka här jag". Den vuxna frågar "vad har du i fickan?". Anna känner med handen i fickan och säger glatt "ingenting!"

Begreppet "ingenting" innebär tydligen för Anna en avsaknad av objekt. Hon kan känna tyget som utgör insidan av byxfickan, men uppfattar fickan mera som en avgränsning av den helhet som kan inrymma en mängd. Jämförelsen är också i detta fall central, eftersom "ingenting" tydligt relateras till en tänkt mängd som kunde omfatta något eller några objekt.

Att uppfatta talbegreppens innebörd verkar inte vara alldeles lätt för barnen på småbarnsavdelningarna. De möter dock mängder av varierande slag och erfar att dessa på något sätt skiljer sig från varandra i fråga om omfattning. När talbegreppens innebörd inte är helt klar visar barnen ändå sin förståelse av innebörden genom att ta hjälp av andra begrepp och uttrycker skillnaden i mängder utgående från hur de uppfattar omfattningen av mängderna.

Anna (2:4) lägger ett pussel där bitarna är formade som fiskar i olika storlekar. På pusselbitarna finns varierande antal prickar med motsvarande antal prickar på pusselramens fördjupningar. Martina (vuxen) förklarar att det ska vara lika många prickar på fisken som på pusselramen. Anna lägger pusselbitarna i ramen och säger "ska se på alla prickar", Martina instämmer. Anna prövar några stora pusselbitar på de mindre fördjupningarna. Anna håller en pusselbit med tre prickar i handen och säger "några prick".

Anna tar ingen notis om fiskarnas storlek eller former utan fokuserar prickarna och jämför dessa, eftersom hon prövar också stora pusselbitar på små fördjupningar. Anna erfar då att antalet prickar har betydelse för aktivitetens utfall. Hon är inte så säker på antal men uppfattar att mängdernas omfattning varierar och syftet med aktiviteten är att jämföra och finna samma antal prickar. Antalsuppfattningen torde inte vara helt klar för Anna men hon erfar i stället prickarna som mängder, vars omfattning till exempel kan beskrivas som "några". Så som Anna använder begreppen gör hon samtidigt en uppskattning av mängden och i detta fall antalet prickar.

5.1.4 Månghet

Begrepp som bygger på aspekten månghet, skiljer sig från övriga matematiska begrepp i och med att innebörden inte på samma sätt bestäms av relationen till andra enskilda objekt i sammanhanget. Ett talbegrepp betecknar ett specifikt antal, vars delar har ett speciellt förhållande till varandra och till en helhet. Att förstå talbegreppens innebörd som beroende av månghet förutsätter att barnet uppfattar räkneramsan som en ordföljd vars ordning inte kan frångås, att föremål kan ändra spridning i rummet men ändå motsvara samma antal och att ett tal motsvarar en mängds alla ingående delar.

Barnen i studien möter begrepp som beskriver månghet i många vardagliga sammanhang. Anna i episoden nedan reflekterar över mängder, antal och talbegrepp när hon leker med leksaksbilar och andra barn vill delta. De förändringar som sker i aktiviteten uppmärksammar henne på variationen av månghet och vad detta innebär för en mängds utformning och det begrepp som bäst beskriver mångheten.

Anna (2:4) lyfter ner ett parkeringshus från en soffa i lekrummet. Hon sätter sig att ordna föremålen i huset och säger "här är ännu en... och så kommer det en till... och så stoppar jag dit i den stora bucklan". Anna snurrar på karusellen på parkeringshuset "det är så många här". Sakari tar en bil från parkeringshuset och Anna protesterar "nu hade jag den!" Emanuel kryper fram till Anna, hon räcker honom en av bilarna och frågar "vill Emanuel ha den?" Anna mumlar för sig själv, petar på bilarna i huset och säger "så har jag de där fyra".

Annas lek med bilarna och de två pojkarnas önskan att delta får henne att reflektera över det antal bilar hon har till förfogande. Hon fokuserar mångheten och konstaterar att hon har "så många". Efter att hon gett bort en bil har antalet bilar uppenbarligen förändrats och hon resonerar sig fram till ett talbegrepp, vilket innebär att mångheten hos bilmängden kan variera och beskrivas med olika talbegrepp. Anna uppmärksammar de enskilda delarna som tillsammans gör helheten och finner det tydligt nödvändigt att specificera bilarnas antal.

Talbegreppen är användbara på många sätt och barnen erfar att vuxna ofta räknar konkreta objekt i barnens vardag. Ibland kan tal få en mera symbolisk innebörd, vilket framkommer inte minst när någon fyller år och en tårta med ljus representerar antalet fyllda år. Aspekten månghet varierar då på så sätt att mångheten relateras till varierande sammanhang där den numerära innebörden hålls konstant.

Gun (vuxen) sitter med några barn och läser en bok där figuren Molly mus fyller tre år. Gun frågar "hur många ljus har hon på tårtan?" Julia (3:9) pekräknar "ett, två, tre". Gun säger "jo, tre ljus, Molly fyller tre år".

I episoden erfar barnen först hur begreppet "tre" används i ett konkret sammanhang när den vuxna frågar hur många ljus som finns på tårtan. Julia läser upp räkneramsan och pekar på ett ljus åt gången samtidigt som hon räknar. Den vuxna konstaterar att ljusen tillsammans bildar en helhet, vars månghet eller antal är tre. Hon vidgar därefter barnens erfande till ett mera abstrakt sammanhang i och med kopplingen till Mollys ålder.

Julia erfar tydligt att talbegrepp har något samband med delarna i en mängd. Hon prövar att använda talbegreppen och utforskar deras innebörd i samtal med en vuxen. Julia uppfattar att talbegreppen kan användas i olika sammanhang men får då något olika värde, även om den numerära innebörden kan vara konstant.

Julia (3:9) lägger ett pussel med aderton bitar, hon säger "femtio, tjugofem" medan hon sorterar bitarna. En vuxen som hjälper henne säger "tjugofem bitar". Julia svarar "jag sa bara, min pappa har femtio europengar, jättemycket!"

Julia uppfattar i episoden ovan att talbegreppen på något sätt relaterar till varandra och värderas olika. Den vuxna fokuserar i episoden den aktivitet som de tillsammans engagerar sig i, nämligen pusslet, medan Julia fokuserar en annan situation med numerär innebörd. I strävandet att beskriva vad hon tänker på framkommer även hennes förståelse av talet som diskuteras. Relationen mellan talelementen är antagligen inte alldeles klar för Julia, men hon prövar begreppen och värderar dem utgående från deras månghet, i det här fallet som "jättemycket".

Barnen i studien uppmanas ibland att räkna objekt som finns illustrerade i böcker. Uppmaningen leder ofta till att barnen pekar på ett objekt åt gången och läser räkneramsan samtidigt. Maj (vuxen) läser en saga för Elisa (2:7). På bilderna i boken finns bilar och andra föremål som förekommer i stadsmiljö.

Maj frågar "se, vad mycket bilar i staden, ser du hur många bilar? Kan du räkna du, Elisa?"

Elisa pekräknar "ett, två, tre"

Maj fortsätter pekräkna "fyra, fem, sex"

Elisa upprepar talen efter Maj, men protesterar "det här är inte fem" och pekar på en bil på bilden.

Maj räknar igen "en, två, tre, fyra, fem, sex bilar"

Elisa säger "det här är fem" och pekar på en annan bil än den som Maj pekat på som femte bil.

Maj fortsätter läsa "det är sex bilar... tusentals bilar"

Även om den vuxna i episoden ovan frågar efter "hur många" bilar som Elisa ser, är det osäkert om Elisa uppfattar talbegreppens månghet som kritisk aspekt. Elisa erfar i stället att Maj ger bilarna på bilden andra talnamn än vad hon själv ger bilarna. För henne motsvarar varje räknad bil ett visst talnamn och hon uppfattar inte talbegreppens antalsinnebörd och kardinalitet. Mångheten i talbegreppen är av stor betydelse för att kommunicera tal och för att använda de olika räknesätten. I episoden ovan fokuserar inte den vuxna och barnet samma aspekter och kommer därmed inte heller fram till en gemensam förståelse av fenomenet i fråga.

5.1.5 Sekvens

Begrepp som beskriver sekvenser bygger på förståelse av att objekt eller händelser kan ha en inbördes relation som gör att objekten ordnas eller händelserna sker i en viss följd. I synnerhet för småbarn tycks det vara viktigt att konkretisera och strukturera direkt observerbara objekt eller en följd av händelser eller handlingar. En konkretiserad sekvens gör det erfarna mer hanterbart och möjligt att förstå, där verbala begrepp spelar en viktig roll för att kommunicera förståelse av innebörd. Vanligt förekommande begrepp som barnen möter och använder på småbarnsavdelningarna är *före*, *efter*, *först*, *sedan*, *i dag*, *i morgon*, *nu* och *snart*. Begreppen beskriver innebörden i någon sekvens, vilket är viktigt att ta i beaktande för det matematiska tänkandet i och med att de uttrycker en bestämd ordning där händelser eller objekt är beroende av andra och skillnaden även kan vara mätbar.

I barnens aktiviteter finns det ibland behov av att strukturera och organisera handlingar. Barnen använder då till exempel som i nedanstående episod en

följd av ord som bildar en ramsa där varje del har en viss relation till efterföljande del. Nedräkning och närmandet av en startpunkt för en aktivitet är i exemplet sådana delar som följer på varandra, och med hjälp av begreppet "nu" görs händelseförloppet gripbart och förstäligt för de barn som deltar i aktiviteten.

Julia (3:9), Emma (2:6) och en äldre flicka springer ikapp. Julia räknar ner genom att säga "en, två, tjugo, sjutton, nitton, NU!" När Julia avslutar nedräkningen med att säga "nu" springer flickorna iväg samtidigt.

Flickorna är införstådda med att talen kan användas för att bestämma när något skall ske. Julia som leder leken och nedräkningen har ännu inte till fullo insett innebörden i räknerramsans ordning, utan bestämmer startpunkten för aktiviteten genom att avslutningsvis säga "nu". På så sätt har barnen gemensamt kommit överens om vilken innebörd begreppen har i just detta sammanhang, vilket gör att samspelet fungerar och leken kan genomföras. Julia och de två andra flickorna uppfattar innebörden så att händelsesekvensen bildar en tydlig ordning med ett markerat slut som samtidigt innebär startpunkten för följande aktivitet.

Varje handling har en mening och ett mål, sett ur barnets perspektiv. I följande episod planerar Erik sin aktivitet genom att verbalt uttrycka vad han har för avsikt att göra. Med hjälp av begrepp som beskriver sekvensen av handlingar strukturerar han sina handlingar och följer också den ordning han beskrivit.

Erik (2:1) sitter vid ett bord med klossar i olika färger och former framför sig. Han säger "nu tar jag gula först, sen tar jag andra gula" och lägger ihop klossarna i samma ordning. Erik fortsätter "så, sen tar jag röda" och lägger till den röda klossen, säger sedan "och tar jag den" när han tar ännu en röd kloss. Erik säger "och den" när han slutligen tar en gul kloss och sätter den på plats.

Erik ger tydligt uttryck för den sekvens av handlingar som han planerar att göra. "Först" och "sedan" markerar tydligt ordningen som han också följer i aktiviteten. Erik uppmärksammar också delarnas egenskaper i och med att han först väljer en gul del och uttryckligen väljer den "andra" gula som efterföljande del. Detta förstärker också fokuseringen och beskrivningen av sekvensen, det vill säga att det finns en föregående och en efterföljande del och delarna har på så sätt ett tydligt och strukturerat samband.

I följande episod blir det tydligt att Tim förväntar sig att en händelse skall ske upprepade gånger. Utgående från det sätt på vilket han använder begreppen "nu" och "snart", kan det tolkas att han avser en kortare tidsrymd som han nyss erfarit och nu förväntar sig samma händelse ännu en gång. Sekvensen är också här betydelsefull att urskilja eftersom varje moment i händelsen följer efter ett tidigare moment.

Barnen tittar ut genom fönstret. På gården mittemot ser de en lyftkran. Tim (3:5) säger "nu går den ner, snart kommer den upp, snart". Tim drar sin stol närmare fönstret, klättrar upp och tittar ännu en stund på lyftkranens arbete.

I ovanstående episod synliggörs hur sammanhanget avgör om en tidsrymd erfars som lång eller kort. Också när det är frågan om att något sker eller

placeras före något annat så är detta alltid relaterat till andra delar av en helhet där varje del är beroende av närmast föregående och närmast efterföljande. Begreppen stöder barnen att urskilja innebörden av en sekvens.

5.2 Likheter och skillnader

Att erfara likheter och skillnader är grundläggande för allt lärande. När en skillnad uppenbaras är detta en jämförelse mot tidigare erfarenheter som utvecklar förståelsen av det erfarna fenomenet. I synnerhet för det matematiska tänkandet är det av betydelse att urskilja fenomenens likheter och skillnader, att fokusera vilken egenskap det är som skiljer fenomenen åt samt hur skillnaden kan beskrivas. Matematik kan ses som ett sätt att beskriva mätbara relationer mellan objekt i omvärlden, vilket kan handla om större och mindre klossar, mer eller mindre mjölk i glaset eller skillnaden mellan två och tre föremål. Ofta är det visuella likheter och skillnader som lyfts fram i vardagen, men också erfarenheten med andra sinnen och upptäckten av andra kvalitativa likheter och skillnader bör ses som grundläggande för barns upptäckande av relationer mellan egenskaper hos föremål och företeelser.

5.2.1 Visuella likheter och skillnader

Visuella likheter och skillnader är sådana egenskaper hos objekt som kan urskiljas med synsinnets. Det vanligaste är att barnen i studien uppmärksammar former och färger, men också likheter och skillnader i storlek är sådana aspekter som synligt kan variera och utmärka objektens egenskaper och särart i jämförelse med andra objekt.

Form

När barnen visuellt erfar hur saker och ting liknar varandra eller skiljer sig åt tar de ofta fasta på formen hos föremål. Geometriska former återfinns överallt i barnens omgivning. Formen på ett föremål erfars bäst när det är möjligt att direkt jämföra, till exempel kloss mot kloss, eller kloss mot hål. När barnet har tillägnat sig mer erfarenheter och även en mera omfattande förståelse av vad som karakteriserar vissa visuella former, kan de som Sakari i följande episod upptäcka likheter hos objekt som inte erfars direkt i den aktuella situationen. Sakari har erfarenhet av olika frukter och fokuserar vid detta tillfälle på formen hos frukterna.

Sakari (3:2) sitter vid bordet med Martina (vuxen) och äter mandarin. Han säger "titta stor", visar upp en mandarinklyfta, "ser ut som en banan" och fortsätter ta loss klyftor som han strax äter upp "ser ut som mycket banan". Sakari får en till mandarin och kommenterar mandarinklyftorna "titta liten, ser ut som liten banan". Martina instämmer.

Sakari visar att han skiljer ut vad som är lika, men också vad som är olika hos mandariner och bananer. Formen på den banan som han föreställer sig och mandarinklyftorna som han har framför sig är knappast exakt densamma, förutom att storleken också varierar. Mandarinklyftan är betydligt mindre än de bananer han har erfarenhet av, men Sakari tycks fokusera den böjda formen hos mandarinklyftan och associerar till den böjda formen hos

en banan. Den visuella likheten är tydlig, eftersom han bortser från andra aspekter som skiljer föremålen åt. I studien framgår det tydligt att barnen förmår skilja ur vissa egenskaper och ignorera andra. Till exempel när formen jämförs hos olika föremål samtidigt som färg eller andra egenskaper tycks spela mindre roll. Barnen förmår till exempel i sorteringsaktiviteter välja utgående från vissa visuella likheter och skillnader och bortse från andra.

Ida (2:8) sitter vid ett bord med en magnetavla framför sig. I en låda intill finns figurer i olika geometriska former i varierande färger. Ida väljer ut en typ av geometriska figurer åt gången och sätter dem på rad med jämna mellanrum på tavlan. Färgerna på figurerna varierar men Ida väljer ut trianglar, små cirklar, stavar och sedan kvadrater. Ida sitter en lång stund vid aktiviteten och ordnar likadana geometriska figurer på rad.

Episoden visar hur Ida länge sitter och väljer ut specifika former bland en stor mängd olikformade figurer. Hon är fokuserad och väljer enbart ut likadana former åt gången, som hon grupperar på en tavla. I och med att hon gör flera grupper av likadana former kan slutsatsen dras att hon fokuserar på form men bortser från färg i denna aktivitet.

Också barn i ettårsåldern visar tydligt att de erfar likheter och skillnader i fråga om visuella egenskaper som form. Till exempel när de bygger med klossar och väljer ut klossar i en viss form bland många andra i olika längd och bredd, synliggörs vilket fokus barnen har.

Nora (1:6) bygger med legoklossar. Ur en stor låda väljer hon ut klossar som är kvadratformade men i olika färger. Klossarna trycker hon fast i varandra så de bildar ett torn. Tornet bryts av, Nora bygger ihop det igen och drar isär delarna en efter en innan hon fortsätter med andra aktiviteter.

På liknande sätt som Ida och Nora söker Teo i följande episod efter likadana delar för att fullfölja sin avsikt. De delar som Teo letar efter är dock likadana både till färg och till form, men han har också en strävan att bygga samman delarna till likadana helheter.

Teo (3:5) bygger med klossar. Han hittar en kloss som föreställer ett huvud med ansikte och sätter fast en lång stav under huvudklossen. Han letar tills han finner en likadan stav och sätter stavarna som ben från huvudet. Sedan för han figuren genom en dörr och säger till en vuxen "Stina, en dörr, fara ut och in genom den, den kan det. Han är uppe på dörren" och ställer figuren ovanpå dörren. Teo fortsätter bygga. Han tar två likadana stavar från bordet och sätter dem som ben från ett huvud igen. Teo leker med figuren och en gris i huset som han har byggt. Teo får syn på ännu ett likadant huvud och säger "vill ha mera såna". Ett barn har en likadan kloss och Teo hämtar den och säger "en sån här till".

Teo verkar ha en klar bild av vilket slags del han behöver för att bygga en speciell figur. Han utgår från "huvuddelen" och söker efter lämpliga delar som kan fungera som ben. Figuren erfars som en helhet sammansatt av specifika delar som han tydligt skiljer ur och letar efter. När han väl hittar delar som passar som ben väljer han enbart sådana för att fortsätta bygga

likadana figurer. Detta innebär att Teo har en föreställning om vilka delar den färdiga figuren består av där formen är den centrala aspekten.

Att finna likadana former hos olika typer av objekt är dock inte alltid så lätt. Erik i episoden nedan söker efter det hål som har samma form som den kloss han försöker få igenom hålet. Klossen är tredimensionell vilket ytterligare tycks försvåra situationen.

Erik (2:1) försöker få en tringelformad kloss genom hålen i en figurlåda. Han byter mot en fyrklöver och hittar rätt hål, tar sedan en hexagon och provar den mot det runda hålet, vrider och vänder klossen, vänder sedan på hela lådan och hittar rätt hål för hexagonen.

Erik erfar i episoden ovan att formerna hos klossarna såväl som hos hålen skiljer sig åt från varandra. De visuella likheterna och skillnaderna blir tydliga för honom i och med att han inte alltid lyckas få klossarna genom hålen. Det tycks vara svårt för Erik att upptäcka vad klossarna och hålen har gemensamt, det vill säga den kritiska aspekten form. Svårigheten i denna aktivitet kan ligga i föremålens olika arter där formen i klossens fall utgör omfånget medan hålet formas av den omkringliggande ytan.

När barnen upptäcker en visuell likhet, kan de finna det intressant att uppmärksamma även andra barn på detta. Barnens erfarenheter synliggörs på så sätt och en gemensam förståelse av fenomenet byggs upp. Detta blir tydligt i följande episod där Erik kommer in i det rum där Elisa står och väntar på mellanmålet.

Elisa (2:7) frågar Erik "vad har du där i ärmen?" Erik (2:1) tittar på sin randiga tröjas ärmar och säger "såna här'na". Elisa pekar på Karins tröja som också är randig, och utbrister "ni har randiga!"

Eriks och Karins tröjor är olika till färgerna men båda är randiga. Elisa upptäcker denna aspekt och uppmärksammar de andra barnen på likheten. Genom att peka på tröjorna och verbalt uttrycka vad de har gemensamt delar hon med sig av sin upptäckt till de andra barnen som då uppmärksammas på den visuella likheten men också på skillnaden.

Att erfara likheter och skillnader gällande former kan vara mångfasetterat, vilket innebär att barnen ibland bör se till flera aspekter samtidigt. I den följande episoden skiljer barnen ur formen hos pusselbitar, men de uppmärksammar ändå hur aspekten form kan variera, vilket i denna episod kan vara viktigt att ta hänsyn till för att lyckas lägga pusslet.

Karin (3:6) och Adam (3:1) lägger pussel tillsammans. Bilden på pusslet föreställer Muminfamiljen och vissa pusselbitar är formade som hjärtan eller stjärnor. Karin väljer ut pusselbitar vars mönster passar ihop. Adam däremot, tittar på ramen till pusslet, där formen på pusselbitarna antyds på ramens botten. Karin säger "där är dens huvud", Adam svarar "den är där, på stjärnan" och pekar på ramen där formen av en stjärna antyds.

Karin och Adam erfar att samma pusselbit kan beskrivas på olika sätt. Pusselbiten visar en bild av Mumintrollets huvud samtidigt som pusselbitens yttre form bildar formen av en stjärna. Tillsammans lyfter de fram denna aspekt och visar hur de urskiljer att den varierar, vilket tycks göra det lättare att hitta rätt pusselbit till rätt plats. Gemensamma aktiviteter där barnens

förståelse uttrycks på varierande sätt ger ökade möjligheter att erfara samma fenomen ur olika perspektiv. Formen hos föremål är en sådan aspekt som barn tidigt skiljer ur och förmår fokusera, men som kan erfaras på många varierande sätt, inte bara som tvådimensionella likheter och skillnader utan även som tredimensionella och i relation till andra egenskaper.

Färg

Förutom form är färg en tydlig visuellt urskiljbar aspekt hos objekt i omgivningen som barnen i studien tenderar att uppmärksamma. Ofta tar sig detta uttryck som att barnen skiljer ur likadana färger och grupperar dessa.

Emma (2:6) plockar ringar på en stång. Ringarna är olika stora men det finns två av varje färg. Bottnen till stången är röd och Emma sätter först på en röd ring, därefter två gröna, två gula och två blå. Emma hämtar en röd ring från ett bord och frågar efter något. En vuxen säger "där, Julia har två, jo, du får ta den ena". Emma hämtar den röda toppen till stången.

Emma bryr sig i detta exempel inte om storleken på ringarna, utan det är färgen som intresserar henne. Detta blir synligt i och med att hon konsekvent plockar två ringar av samma färg på stången. Även om det inte alltid är möjligt att konkret gruppera föremål av liknande färger för att synliggöra likheter och skillnader, så urskiljer barnen färgerna hos liknande objekt. Julia uttrycker till exempel tydligt att hon upptäckt likheter i fråga om färg hos Emmas och Karins tröjor.

Julia (3:9) pekar på Karins och Emmas tröjor och säger "ni har två vita skjortor".

Också de yngsta barnen erfar likheter och skillnader vad gäller färg hos objekt de stöter på i omvärlden. Även om barnen inte alltid sorterar eller uppmärksammar likheterna och skillnaderna verbalt är det tydligt att barnen stannar upp och lägger märke till två föremål som är lika till färgen.

Jonah (1:1) gräver i en låda med leksaker. Han tar upp en grön bil med ena handen och en annan grön bil med andra handen. Jonah håller bilarna intill varandra, tittar på dem en stund, lägger ner dem igen och kryper sedan iväg.

Det verkar som om barnen i studien i högre grad fokuserar formen hos föremål framför färgen. Barnen associerar bland annat till andra föremål med liknande form, men en liknande urskiljning kan inte uttolkas i fråga om färger, det vill säga att barnen skulle uppmärksamma samma färg hos föremål som i flera avseenden är olika varandra. När barnen fokuserar färgen hos föremål handlar det oftast om samma typ av föremål där färgen är det som tydligast skiljer föremålen åt.

Emma (2:6) sitter på golvet och bygger med 'noppers' (byggklossar som går att fästa i varandra). På golvet ligger noppers utspridda i olika former och färger. Emma väljer ut gröna delar och fäster dem i varandra. Efter en stund väljer hon andra färger och börjar bygga olikfärgade runda bitar på varandra. Julia (3:9) sätter sig på golvet och bygger ihop runda bitar, en röd, en gul och en grön. Hon tar isär bitarna

och bygger ihop igen. Adam springer i vägen för henne och Julia ropar "Adam! Jag måste se vad det är för färger!" Julia fortsätter bygga.

Emma visar sig välja ut delar i en viss färg när hon bygger. Julia däremot väljer att bygga en figur av delar i olika färger. Hon visar sig ändå vara fokuserad på färgerna, eftersom hon verbalt uttrycker sin önskan att kunna se färgerna på de delar hon väljer. Hon har på så sätt tänkt sig ett mönster av olika färger och grupperar färgerna på ett medvetet sätt.

Storlek

Att erfara likheter och skillnader i storlek innebär att barnen uppfattar att det finns en relation mellan olika föremål i fråga om deras utsträckning i rummet och storleksförhållande. Ofta erfars detta i direkt observerbar jämförelse med andra föremål, i och med att föremålets likheter och skillnader då blir lättare att urskilja och jämföra. Föremål som är mycket olika till utseendet kan dock vara svårare att jämföra och bedöma storleken på, eftersom det då är flera aspekter som varierar inom samma fenomen. Barnen i studien visar sig dock undersöka och experimentera med objekt i omvärlden så att de bli varse vilka egenskaper som karakteriserar ett intressant fenomen. Genom att undersöka förhållandet mellan föremål på varierande sätt tycks barnen så som i följande episod sträva efter att urskilja storleksrelationen.

Adrian (1:8) håller en kopp i sin ena hand och ett decilitermått i sin andra hand. Han låtsasdricker ur dem båda, sätter koppen på ett bord och håller måttet framför munnen. Adrian lägger en legokloss i måttet och låter klossen falla ur måttet ner i en låda. Adrian tar en större kloss från golvet och trycker ner den i måttet. Han går sedan omkring i rummet och släpper slutligen klossen och måttet på golvet. Han tar upp måttet ännu en gång, dricker ur det och viftar omkring sig med måttet.

Adrian erfar hur klossar av olika storlek antingen passar eller inte passar i måttet som han håller i handen. Den första klossen passar utan problem ner i måttet, men den andra klossen måste han trycka ner för att få den att passa. Adrian erfar i den situationen att klossarna har vissa likheter men även skillnader och i detta fall skiljer de sig åtminstone åt i fråga om aspekten storlek.

Emanuel i följande episod prövar sig fram på olika sittplatser och erfar att den bänk han till sist sitter på är stor nog för två barn, eftersom han flyttar sig längre åt sidan och bereder plats för Anna.

Emanuel (2:3) sätter sig på en liten barnstol, går vidare till fönstret där han försöker sätta sig i fönsternischen och går sedan tillbaka till de små stolarna. Emanuel går till dockvrån och sätter sig på en bänk. Anna säger "jag vill sitta här... jag kommer inte in" och Emanuel makar sig åt sidan och klappar på den nu lediga bänkplatsen.

Emanuel har, som episoden visar, erfarenheter av flera olika sittplatser. För att kunna sitta på ett visst ställe behöver det finnas tillräckligt stort utrymme, vilket Emanuel tydligt uppfattar i och med att han bereder plats åt Anna när hon tycker att det inte finns plats nog för henne. Båda barnen fokuserar utrymmet på bänken men även det tänkta utrymme som de anser behövs för att Anna ska kunna sitta bredvid Emanuel.

Barnen på småbarnsavdelningarna kan också erfara mer abstrakta relationer och ger uttryck för dessa i mötet med omvärlden. Julia erfar i följande episod att den brödsmla hon håller mellan fingrarna är liten i förhållande till den smörgås hon började äta på en stund tidigare.

Julia (3:9) håller en brödsmla mellan pekfinger och tumme. Hon säger "se, vad liten smörgås" och måttar med andra handens pekfinger och tumme "så här liten". Maj (vuxen) formar en liten cirkel med pekfinger och tumme och säger "så liten".

Att urskilja kritiska aspekter hos fenomen sker alltid i ett sammanhang och innebär i ovanstående episod en uppskattning där relationen till andra objekt i sammanhanget och tidigare erfarna objekt är avgörande. Julias brödsmla erfars som liten i förhållande till den ursprungliga smörgåsen, men kunde kanske erfaras som stor i förhållande till de brödsmlor som finns på bordet. Den kritiska aspekten är storleken hos smörgåsen och brödsmlan. Julia fokuserar denna aspekt och urskiljer likheter och skillnader som har betydelse för hur hon uppfattar relationen mellan objekten.

I följande episod uttrycker Vera tydligt hur storleksförhållandet uppfattas i och med det sammanhang som hon skapar i sin lek. Vera bygger ett torn av legoklossar. Hon tycks föreställa sig tornet som ett högt torn och gör det tydligt för sig själv och andra genom att placera en liten docka högst uppe på tornet. Utgående från den lilla dockans perspektiv är tornet högt och Vera illustrerar detta i sin lek, där hon uppmanar dockan att hålla i sig för att inte falla.

Vera (2:9) har byggt ett torn av legoklossar. Hon tar loss några klossar och trycker fast dem igen. Tornet rasar och Vera bygger upp det igen. När tornet är i brösthöjd med Vera sätter hon en liten stol från ett dockhus överst. Martina (vuxen) frågar "vem ska sitta på stolen?" Vera söker bland klossarna på golvet och tar upp en liten docka. Martina säger "jag tror inte den riktigt kan sitta, försök med den gubben" och pekar på en annan figur på golvet. Vera tar den andra figuren och sätter den att sitta i stolen, hon ropar "håll i dig bara, håll i dig!" Martina säger "sätt den att sitta, på stjärten, böj benen". Vera ropar "faller tornet, faller tornet". Martina frågar "tror du det? Om du bygger något högre så kan det nog falla". Vera raserar tornet och bygger upp det igen, hon säger högt "håll i dig hårt, hårt". Vera drar ner tornet av misstag och fortsätter sedan med andra aktiviteter.

Tornet uppfattas knappast som högt i förhållande till Vera, men när tornet relateras till en liten docka blir höjden svindlande. Den kontext som erfarenheten sätts in i är avgörande för hur storleksförhållandet varierar och därmed också uppfattas. I nästa episod erfar Vera hur storlek och i synnerhet höjd kan relateras till henne själv. Att bygga med stora klossar verkar fascinera barnen eftersom det snabbt blir stora konstruktioner som de kan sitta på eller bygga lika höga som de själva är. Vera vill bygga det högsta tornet, ända upp i taket och får många erfarenheter av hur högt det är upp till taket och hur aspekten storlek kan variera.

Vera (2:9) plockar stora legoklossar ur en låda och sätter fast dem på varandra på golvet. Vera säger "ska bygga en STOR, ända upp i taket". Nora (1:6) försöker trycka fast en kvadratisk kloss, Vera säger "nej,

Nora!" och tar bort Noras kloss, "det ska vara sådär" och sätter fast en avlång kloss. Vera hämtar flera avlånga klossar och bygger tills stapeln är lika hög som hon. Hon säger "sådär, blir det högt upp i taket!" och sträcker upp sina händer mot taket. Martina (vuxen) säger "ända upp i taket" och Vera svarar ännu en gång "ända upp i taket". Vera fortsätter bygga. När hon inte längre når att trycka fast fler klossar, hämtar hon en stol och placerar den intill stapeln, klättrar upp på stolen och trycker fast några klossar. En vuxen kikar in i rummet och säger "är den högre än vad du är?" Vera instämmer och den vuxna fortsätter "så måste du ha stolen för att kunna bygga". Vera fortsätter bygga och får hjälp av Jonna (vuxen) när hon inte längre når att trycka fast fler klossar. Martina utropar "åhå, vad högt, har du byggt själv, Vera?" Vera svarar "jo, och Jonna". Martina fortsätter säga "ända upp till äpplena där i trädet". Strax under taket hänger trädgrenar med äpplen och andra dekorationer. Vera kliver upp på stolen och raserar stapeln. Vera bygger en ny stapel och tar stolen till hjälp för att nå och säger "oj, vad högt, jättehögt, jo, det blir det". Vera sätter sig på stolens ryggstöd med ryggen åt stapeln, sitter en lång stund, sätter sig ännu ner på stolen och tittar rakt fram. Martina frågar "vad funderar du Vera?" Vera svarar inte utan hämtar fler klossar, stapeln rasar. Hon säger "jag måste bygga på nytt, riktigt högt" och sträcker upp händerna över huvudet. Vera springer iväg en stund. När hon kommer tillbaka raserar hon stapeln, säger "äppel", drar stolen under äppeldekorationerna i taket, klättrar upp på stolen, klättrar ner igen, tittar uppåt, flyttar stolen, stiger upp på stolen igen och sträcker sin arm högt upp mot dekorationerna, sedan sätter hon sig på stolen.

Veras byggande med stora klossar ger uppenbarligen många erfarenheter som hon reflekterar över i byggandet och även efteråt. Den kritiska aspekten är storleken som urskiljs i den variation som hon erfar när konstruktionen relateras till henne själv och omgivningen. Hon har vissa hållpunkter att relatera storleken på byggkonstruktionen till: sig själv, att hon måste stiga upp på en stol för att bygga högre och att konstruktionen når ända upp till taket där äpplena hänger.

I följande episod erfar Teo hur vissa längder tillsammans är lika långa som en ensam längd. Den aspekt som Teo undersöker och urskiljer är här utsträckning i rummet, det vill säga storleken på bitarna. Likheter och skillnader i storlek urskiljs tydligt i materialet och han erfar flera gånger hur fenomenet gestaltar sig på liknande sätt när han börjar lägga ut stavar och kvadrater från andra hållet och upprepar mönstret.

Teo (3:5) lägger ut fem stavar i olika färger efter varandra, kant i kant, i en lång rad. Han placerar en kvadrat strax ovanför den yttersta stavens ände och lägger sedan ytterligare en kvadrat intill den tidigare kvadraten. Båda kvadraterna är tillsammans lika långa som en stav. Teo fortsätter lägga två kvadrater ovanför nästa stav. Teo gör en ny rad av stavarna och börjar lägga kvadrater från andra hållet ovanför stavarna, fyra kvadrater efter varandra, lika långa som två stavar efter varandra.

Teo erfar i episoden ovan förhållandet ett till två, det vill säga att det går två kvadrater på en stav. I och med föremålens exakta former kan relationen urskiljas visuellt på ett mycket tydligt och konkret sätt. I matematiskt hän-

seende är denna erfarenhet mycket betydelsefull eftersom talsystemet bygger på att flera delar tillsammans kan motsvara en större helhet. Detta samband återfinns oberoende hur delarna sätts samman eftersom storleksrelationen förblir konstant.

Emanuel erfar i följande episod hur byggklossar varierar i storlek och han tycks finna ett sätt att använda olikheterna på ett för honom tillfredsställande sätt.

Barnen plockar ut stora byggklossar på golvet ur en stor låda. Emanuel (2:3) börjar bygga med avlånga klossar som är två knappar breda och fyra knappar långa. Han trycker fast flera likadana avlånga klossar på varandra. Emanuel börjar sedan sätta fast kvadratiska klossar, två knappar breda och två knappar långa. Han sätter två klossar intill varandra så att de bildar en fortsättning på stapeln med avlånga klossar. Emanuel tar en kloss som är tre knappar lång och sätter den på stapeln, men tar genast bort den igen och fortsätter trycka fast kvadratiska klossar. Emanuel tar loss alla kvadratiska klossar och sätter ihop dem på varandra till en hög smal stapel. Han placerar den smala stapeln mitt på den breda basen av avlånga klossar så att det blir två lediga knappar på var sida.

Emanuel urskiljer uppenbarligen de visuella likheterna och skillnaderna hos klossarna när han sätter fast dem ovanpå varandra till en stapel. Det verkar som om Emanuel är fokuserad på att bygga symmetriskt och urskiljer på så sätt förhållandet mellan klossarna i varierande storlekar. Den kloss som är tre knappar lång väljs snabbt bort, eventuellt för att den inte passar in i det mönster som Emanuel tänker sig att bygga. Hans avsiktliga byggande visar sig också i fortsättningen när han fortsätter bygga med kvadratiska klossar som är två klossar långa. Han urskiljer hur två kvadratiska klossar intill varandra motsvarar storleken på en avlång kloss och uppmärksammar därmed likheterna och skillnaderna i storlek och använder sin förståelse i byggandet.

Mängd

Att en mängd kan vara lika stor trots att delarnas spridning varierar är nödvändig förståelse som grund för numeriska och aritmetiska färdigheter. Förutsättningen är att barnet urskiljer mängder och antal av olika slag i olika sammanhang, samt får möjlighet att jämföra mängder och antal på varierande sätt.

Numeriska likheter och skillnader har att göra med att barnen uppfattar en mängd eller ett antal som en helhet bestående av delar. När mängder och antal jämförs kan den numeriska likheten eller skillnaden te sig på olika sätt. Att jämföra mängder innebär i vardagliga sammanhang att uppskatta ett ungefärligt värde av till exempel mängden flingor på tallriken, medan jämförelse av antal ter sig mera exakt och ofta mer överskådligt i och med den exakthet som talbegreppen för med sig.

Småbarn jämför och uppskattar små mängder i många olika sammanhang i vardagen, till exempel när de kommunicerar med andra barn om leksaker. Adam i episoden nedan visar sig i viss mån förstå för hur mindre mängder är sammansatta och han försöker visa detta för Elisa som inte på samma sätt

fokuserar den numerära aspekten och därmed inte ännu har samma begreppsliga förståelse som Adam. I kommunikationen fokuseras dock de visuella likheterna och skillnaderna av mängdaspekten.

Elisa (2:7) tar med sig tre olika kattfigurer till ett bord. Hon säger "här är två kissekatter". Adam (3:1) svarar "nej, det är inte så där, det är så här många" och visar tre fingrar. Han säger "en, två, tre" samtidigt som han sträcker upp ett, två och tre fingrar igen. Adam frågar "får jag ha den här kissekatten?" och pekar på ena figuren "jag vill ha en, tack". Elisa samlar ihop figurerna och ger en åt Adam.

Adam upptäcker att Elisa använder begreppet "två" på ett sätt som inte stämmer överens med hans egen uppfattning av hur många figurer det är som Elisa visar honom. Han försöker förmedla detta till Elisa genom att visa samma antal fingrar som antalet kattfigurer. Adam fokuserar därmed mängden mera i detalj och med en annan innebörd än Elisa.

Leksaksdjur och klossar är relativt lätta föremål att urskilja likheter och skillnader i mängd hos. När föremålen blir många till antalet och kanske hellre ses som en mera diffus mängd, kan jämförelsen bli svårare och kräver mer nyanserat urskiljande. Ett exempel på detta kan ses när Adam och Elisa jämför hur mycket flingor de har på sina tallrikar vid mellanmålet. Innebörden av mängderna skiljs ur som likheter och skillnader i fråga om mängden flingor, avståndet mellan tumme och pekfinger samt att fler visade fingrar indikerar en större mängd.

Adam (3:1) och Elisa (2:7) sitter vid matbordet, de har precis fått sina mattallrikar.

Elisa säger "du har lite, jag har mycket" och pekar på Adams och sedan sin egen tallrik.

Adam måttar (ca 2 cm) med pekfinger och tumme och säger "så här lite". Adam ökar avståndet mellan fingrarna, "jag har så här mycket"

Elisa säger "titta här, jag har mycket, mycket, mycket" och cirklar med pekfingeret över tallriken med flingor.

Adam säger "sen vill jag ha mycket, jag vill ha mycket, så här mycket" och visar upp hela handen med fem fingrar uppsträckta.

När Adam får sin andra portion säger han "jag fick mycket, Elisa!"

Elisa svarar "jag ska också ha mycket, mycket mera, så mycket, så här mycket" och visar upp båda händerna med tio fingrar uppsträckta, "jag har så här mycket".

Adam härmar och sträcker sedan sin ena arm så högt han når. Adam sträcker upp armen en gång till och säger "så här mycket". Elisa får mera flingor, Adam säger "Elisa, du fick mycket."

Adam och Elisa får i denna episod möjlighet att skilja ur de nyanser i innebörd som "mycket" och "litet" kan ha. Genom att lyfta fram och gestalta meningen så som barnen själva uppfattar den synliggörs och fokuseras likheterna och skillnaderna i uppfattningen av den numerära aspekten, det vill säga mängderna.

5.2.2 Auditiva likheter och skillnader

De visuella fenomen som barn möter är ofta tydliga och lätta att urskilja, men även andra sinnligt erfarna likheter och skillnader har betydelse för barns

lärande och upptäckande av olika aspekter av omvärlden. Auditivt erfarna aspekter av fenomen kan handla om ljud i olika styrka och ljud av olika karaktär.

Karaktär

Objekt som barnen hanterar på olika sätt för med sig att barnen också erfår sin omgivning auditivt. Ljud kan vara mycket olika till sin karaktär, vilket också erfars och urskiljs av barnen på varierande sätt. De yngsta barnen utforskar karaktären hos ljud till exempel genom att slå klossar mot varandra eller genom att klappa en sked i bordet, på tallriken och på glaset. I följande episod upptäcker Kevin hur ljud kan ändra karaktär beroende på hur han hanterar ett visst föremål.

Kevin (1:5) är i dockvrån. Han håller en plastkopp i sin hand, klappar koppen mot leksaksspisen så ett knackande ljud hörs. Han sätter sig på en soffa, låtsasdricker ur koppen och går iväg till en annan soffa. Kevin håller koppen mot munnen och säger "uuuh", han håller sedan sin andra hand över munnen och säger "uuuh" igen.

I episoden är det uppenbart att den auditiva likheten och skillnaden som uppstår när objekt och ljudande varierar intresserar Kevin. Karaktären är olika beroende på vad Kevin prövar och hur han går tillväga. Trots att han formulerar samma vokala uttryck gestaltar det sig på mycket olika sätt, beroende på om han håller en kopp eller sin hand framför munnen. Koppen har han därtill erfart att kan producera helt andra ljud när den klappas mot andra föremål i omvärlden.

Ett annat sätt att urskilja karaktären hos de ljud som föremål kan skapa, kan vara att köra en leksaksbil över olika ytor, varvid det uppstår likheter och skillnader i ljudets karaktär. Likheterna och skillnaderna är beroende på sambandet mellan rörelsen och materialen. I följande episod erfår Julia hur liknande handlingar med liknande föremål formar ljud av olika karaktär. Jämförelsen gör att hon urskiljer hur de auditiva erfarenheterna varierar. Ljuden som produceras är av olika karaktär. Vissa föremål ger ifrån sig väsende ljud och andra piper gällt, även om föremålen hanteras på likadant sätt.

Julia (3:9) har lagt fram fyra gummidjur (pip-djur) på bordet. Hon klämmer på en orange figur och hämtar en docka från rummet intill. Julia lägger dockan på bordet och klämmer på den orangefärgade figuren ovanför dockan så att en luftpust fläktar dockans hår. Ett svagt väsende hörs när Julia klämmer på figuren. Julia ställer den orangefärgade figuren på bordet och tar en röd kanin som ligger på bordet. Hon klämmer på kaninen som med ett svagt väsende pustar luft över dockan. Julia klämmer snabbt flera gånger och sedan långsamt ett par gånger, hon tittar på kaninen och ställer den sedan bredvid den orangefärgade figuren. Julia tar en blå björn och klämmer på den ovanför dockan på samma sätt. Den blå björnen piper gällt när Julia klämmer på den. Julia klämmer flera gånger och lägger den sedan tillbaka på bordet. Nu tar Julia en Kalle Anka-figur och klämmer den på samma sätt som de tidigare figurerna. Kalle Anka-figuren ger inget ljud ifrån sig. Hon lägger Kalle Anka-figuren tillbaka på bordet och går därifrån.

Julia erfar konkret hur samma handling genererar auditiva variationer. Att upprepa samma procedur med olika föremål är ett ypperligt sätt att utforska sin omvärld och olika aspekter av fenomenen i den. På detta sätt kan Julia skilja ur variationer i ljudkaraktär.

Musik är en form av fenomen där auditiv intensitet och karaktär tydligt erfars och skiljs ur av barnen, eftersom musik ofta lockar till rörelse i takt med musiken. I episoden nedan erfar barnen sådan musik där taktarten varierar. Det första stycket är snabbare och uppmuntrar barnen att hoppa och röra sig med snabba rörelser. Följande stycke är långsammare och lugnare, vilket de vuxna gör barnen uppmärksamma på.

Barnen lyssnar på en cd med Mumin-musik. Ett par barn dansar hand i hand, andra hoppar, skuttar och svänger med armarna. När låten är slut säger Gun (vuxen) "lyssna nu", barnen stannar upp och väntar. Gun säger "det här kan man ta riktigt lugnt" när nästa lugna låt börjar. Julia (3:9) snurrar runt på ett ben, de andra står och väntar. Emma (2:6) och Adam (3:1) börjar hoppa jämfota. Elisa (2:7) svänger med armarna och säger åt Erik "kom och dansa" medan hon sträcker ut armarna mot honom. Erik (2:1) hoppar jämfota mot Elisa, Maj (vuxen) säger "sakta, dansa sakta". Julia och Hanna dansar på golvet, de andra barnen går därifrån.

Barnen blir uppmärksammade på att musikstyckena skiljer sig från varandra på något sätt. Detta konkretiseras i och med att barnen uppmanas att "ta lugnt" och dansa "sakta" till ett långsammare tempo. Skillnaderna som erfars auditivt relateras till olika typer av rörelser och konkretiseras på så sätt den erfarna skillnaden. Även om alla barn inte i sina rörelser följer den takt som musiken anger, har de vuxna uppmärksammat dem på att rörelsernas intensitet kan ha ett samband med hurdana rörelser barnen utför.

Styrka

En annan aspekt av auditiva likheter och skillnader är nyanser i ljudstyrka. I följande episod experimenterar Julia med sin egen röst där röstvolymen medvetet varierar. Skillnaden i ljudstyrkan erfars såväl via hörseln som via känslan av att producera ljudnyanserna.

Julia (3:9) sitter vid bordet och lägger pussel. Hon börjar sjunga "här kommer pippi långstrump, tjolahejtjolahoppsansa". Nanna upprepar strofen och sjunger stötvis starkt och svagt "HÄR kommer pippi LÅNGstrump, TJOLAhejtjolahoppsansa".

Episoden ovan visar hur Julia prövar sin röststyrka genom att sjunga varierat starkt och svagt. I studien uppmärksammar barnen sällan denna aspekt av auditiva likheter och skillnader, även om möjligheterna kunde finnas i och med att barn och vuxna varje dag använder sina röster och omedvetet varierar röststyrkan.

Innebörd

Det förekommer flera sagor på daghemmen där djurlåten kopplas samman med djurarter. Barnen återger snabbt vilket djur som till exempel säger "mu" eller "mjau", vilket innebär att de auditiva likheterna och skillnaderna som barnen uppfattar i uttrycken har en specifik innebörd som relateras till en viss

typ av djur. En annan form av auditiv skillnad kan erfaras i ord som liknar varandra till formen, men ändå har en skillnad inte minst i innebörd.

Barnen sitter och äter mandarin vid bordet. Karin (3:6) tar loss en klyfta åt gången och äter upp den innan hon tar loss nästa klyfta. Karin säger "kärna" när hon plockar en kärna ur en mandarinklyfta. Emma (2:6) protesterar och pekar på julstjärnan som hänger i fönstret.

Emma uppmärksammar innebörden i vad Karin säger och protesterar när hon upplever att Karins mening inte överensstämmer med den mening hon själv tillskriver ordet "kärna" eller "stjärna". Att urskilja likheter och skillnader innebär alltså inte enbart att lyssna och tolka vad som sägs utan även att tolka vilken innebörd ett ord kan ha, I detta fall blev barnen uppmärksammade på att samma uttryck kan uppfattas på olika sätt och relaterades till vitt skilda ting.

5.2.3 Taktila likheter och skillnader

Taktila erfarenheten inbegriper känselintryck, till exempel av olika material och struktur. Också sådana erfarenheter är viktiga för barnen för att upptäcka likheter och skillnader i omvärlden samt hur saker och ting relaterar till varandra. Struktur kan erfaras och urskiljas på många sätt av barnen genom taktila erfarenheter, även om erfarenheten inte så ofta uppmärksammas och varierar.

Taktila erfarenheter torde ske i de flesta utforskande sammanhang men verkar inte medvetet uppmärksammas så ofta. Elisa har dock hittat en taktil bok där bilderna i boken har inslag av tyger och material som känns olika.

Elisa (2:7) sitter på golvet med en hög böcker framför sig. Hon tar en bok där sidorna har bilder med textilytor. Elisa bläddrar i boken, känner mellan sidorna bakom bilderna, för handen över en bild och bläddrar vidare. Elisa för igen handen bakom bilderna och kikar in i det mellanrum som skapas av två sidor. Elisa känner ännu en gång med ena handen på baksidan av en bild med pälsimitation och känner sedan med båda händerna på framsidan av ett annat bilduppslag. Elisa bläddrar vidare i boken och känner på en bild och en tygbit som illustrerar en klänning.

Boken som Elisa undersöker är utformad för att stimulera det taktila sinnet. Elisa verkar fascineras inte enbart av de ytor som är tänkta att känna på, utan också baksidorna av materialen, till exempel pälsimitationen, som har en annorlunda avigsida. Småbarn tar dock även själva initiativet till att undersöka taktila likheter och skillnader. I följande episod erfar Nora olika strukturer hos material med hjälp av leksaksbilar. Det taktila erfarenheten av strukturer är det centrala, även om hon använder ett redskap, leksaksbilen, för att undersöka fenomenet.

Nora (1:6) plockar upp en bil från golvet. Hon kör bilen över golvet, fram och tillbaka, tar en annan bil och gör likadant och kör sedan samtidigt på golvet med bilarna i var sin hand. Nora går till tamburen med bilarna och kör dem på bänken, klappar bilarna mot varandra och kör den ena bilen längs med dörrkarmen, på golvet och på dörren innan hon tappar bilen på golvet. Nora går till en mjuk trafikmatta på golvet, sätter sig ner och kör en annan bil fram och tillbaka över mattan. Nora stiger upp och

går till tamburen med bilen, när hon kommer tillbaka kör hon bilen på bordet fram och tillbaka och låter den sedan stå.

Med bilens hjälp erfar Nora att olika material känns olika att köra med leksaksbilen på. I synnerhet skillnaden mellan hårt och mjukt material torde göra Nora uppmärksam på de likheter och skillnader som kan urskiljas i aktiviteten. Att Nora också erfar detta kan tolkas i att hon prövar att köra bilen på olika ytor flera gånger.

5.2.4 Andra kvalitativa likheter och skillnader

Förutom sådana aspekter som kan urskiljas som visuella, auditiva eller taktila likheter och skillnader, erfar barn på småbarnsavdelningarna också variationer beträffande andra aspekter av fenomenen i omvärlden. Alla erfarenheter där likheter och skillnader kan urskiljas är betydelsefulla för barnets framväxande förståelse för hur föremål eller företeelser relaterar till varandra. Kvalitativa likheter och skillnader innebär att bedömningen är mycket individuell, såsom i fråga om smakupplevelser eller upprepandet av rörelser.

Meningsskapande och strävan att förmedla en mening framträder i de yngre barnens aktiviteter och samspel med andra barn. Trots att småbarn inte nödvändigtvis kommunicerar verbalt kan de uttrycka en gemensam mening i handling. Det är då betydelsefullt för barnen att uppfatta både den andras handling och avsikt, vilket kan ta sig uttryck som imitation och initiativ till lek. Episoden nedan visar hur två ettåriga barn härmar varandras rörelser och på så sätt urskiljer likheter och skillnader i rörelsemönster och även mening.

Otto (1:6) sätter sig i soffan med en bok. Sara (1:9) sätter sig bredvid med en egen bok. Otto pruttar med munnen åt Sara. Sara pruttar tillbaka. Otto och Sara pruttar åt varandra turvis några gånger. Otto pekar sedan i Sara bok, Sara bläddrar och biter i sin bok, Otto biter också i sin bok. Otto slänger sig åt sidan så han ligger på soffan, Sara slänger sig åt andra sidan och de upprepar leken turvis flera gånger.

Episoden visar tydligt hur småbarn förmår tolka andra barns handlingar och avsikter, vilket tar sig uttryck som en lek där barnen imiterar varandra turvis och initierar nya handlingar. Samförståndet bygger på att barnen förmår uppfatta vad och hur den andra gör och själv utföra en liknande handling.

Kvalitativa egenskaper som barn erfar dagligen kan vara smak. Även om erfandet sker varje dag är det inte alltid en aspekt som uppmärksammas. Smak är något som kan erfaras mycket olika, både som olika smakintryck och som högst personliga bedömningar om något smakar gott eller illa.

Vera (2:9), Alma (3:0) och Anna (2:4) äter fruktsallad med Martina (vuxen). Barnen petar med sina skedar i fruktsalladen. Alma frågar "vad är det där?" Martina svarar "päron" och Vera säger "nam". Alma fiskar upp en bit mandarin på skeden och frågar Martina "vad är det där". Martina svarar "mandarin", Anna smakar på en bit mandarin, spottar ut den på skeden igen och säger "jag tycker inte om den". Barnen fortsätter äta. Vera håller en vindruva på skeden och frågar "vad är det där, vad är det där" och Martina svarar "vindruva". Vera ropar "nam, jag hittade den!" Efter en stund frågar Vera igen "vad är det här då" och Martina svarar "persika". Vera smakar på några bitar persika och konstaterar "nam, nam". Anna frågar "vad är det här" och pekar med

skeden på en bit mandarin. Martina svarar "mandarin" och Anna säger "det äter inte jag".

Anna uttrycker mycket tydligt att hon inte vill äta mandarinbiten eftersom hon inte tycker om den smaken. Vera däremot uttrycker att hon tycker om både vindruva och persika genom att säga "nam". Barnen urskiljer i episoden med den vuxnas hjälp vilka frukter det är frågan om och blir medvetna om hur de smakar. Barnen bedömer sedan utifrån erfandet av hur frukterna smakar huruvida de anser att frukterna smakar gott eller ej. En utvecklad diskussion om smaker kunde ytterligare lyfta fram variationen där något barn kanske tycker om en viss frukt som något annat barn inte tycker lika mycket om. På så sätt skulle likheter och skillnader i uppfattningar, liksom hur smaker kan variera, bli än mer synliga och vidga barnens förståelse av fenomenet smak.

5.3 Delar och helheter

När barn urskiljer delar av någon helhet innebär detta att barnens medvetande riktas mot delarnas relationer till varandra och till helheten samt hur flera delar tillsammans kan bilda en helhet, som i sin tur kan återgå till sina ursprungliga beståndsdelar. Medvetenheten om detta förhållande mellan delar och helhet innebär att mängder kan jämföras för att skilja ur vilka numerära likheter och skillnader som karakteriserar dem. Denna förståelse skapar möjligheter att generalisera och abstrahera mängder i form av begrepp eller symboler. Hur delar och helhet relaterar till varandra är därmed en grundläggande del av matematiken. För att använda talbegrepp i kommunikation med andra och räkneprinciper i syfte att lösa matematiska problem är det nödvändigt att barn förstår hur en mängds omfång är beroende av sina ingående delar och vad som sker med helheten när delarna manipuleras på olika sätt. Betydelsen av del-helhetsrelationen framträder inte minst i räkneramsan som kan ha en numerär innebörd där ett talbegrepp motsvarar en total mängd objekt och begreppen har en mycket specifik relation till föregående och efterföljande ord i räkneramsan.

Den viktiga förståelsen av relationen mellan delar och helhet grundläggs i barnens tidiga möten med omvärlden. Förståelsen växer fram i interaktion med ting och människor och framträder på varierande sätt redan innan barnen tillägnat sig de verbala begrepp som vanligen används i en kulturellt överenskommen betydelse. I barnens handlingar och i samspelet med andra barn och vuxna ses barnen i föreliggande studie urskilja aspekter av matematik i form av *avgränsade delar*, *konstant mängd*, *mängdökning*, *mängdminskning*, *mängddelning*, *parbildning* samt *ordningsföljd*. Tillsammans lägger dessa aspekter grunden till förståelse av den matematiska relationen mellan delar och helhet.

5.3.1 Avgränsade delar

Barnen i studien uppmärksammar dagligen hur saker och ting kan grupperas och bilda mängder. Detta kan konkret ta sig uttryck så att föremål med någon gemensam egenskap bildar en grupp. För att urskilja en mängd som ett bestämt antal föremål, det vill säga att urskilja mångheten, bör barnet först och främst urskilja delarna som avgränsade från varandra.

också innan barnen tillägnat sig verbala sätt att uttrycka de avgränsade delarna erfar de denna betydelsefulla aspekt av matematiken. Följande två episoder visar hur barn erfar samma grundläggande aspekt men på olika abstraktionsnivåer.

Nora (1:6) går längs klädhyllan. På krokar hänger vinteroveraller och ovanpå hyllan ligger mössor och vantar i åtskilda fack. Nora går längs med hyllan och känner med handen på varje vinteroverall hon går förbi.

Julia (3:9) bläddrar i en bok och berättar vad som händer på bilderna. På en sida finns sju figurer som hon pekar på en efter en och säger samtidigt "ett, två, tre, fyra, sex, sju, åtta".

På samma sätt som Nora markerar varje enskilt föremål av samma typ, markerar Julia varje figur på en bild. Barnen avgränsar tydligt delarna i en mängd. Nora gör det genom att ta på varje enskild overall, och i och med att hon endast känner på overaller och inga andra klädesplagg eller föremål så torde hon se overallerna som en helhet. Att hon sedan känner på varenda overall som ingår i denna helhet tyder på att hon uppfattar att delarna har betydelse för den totala mängden. Julia uppfattar tydligen också figurerna på bilden i boken som en mängd eller helhet, där hon tydligt avgränsar varje del genom att peka på varje figur endast en gång och samtidigt ge varje figur på bilden ett eget namn.

För att uppfatta en helhet som mängd är det betydelsefullt att barnen samtidigt urskiljer delarna och helheten samt uppfattar att det finns en relation mellan dem. Denna relation synliggörs i avgränsandet av de enskilda delarna. I följande episod framgår det tydligt hur Vera först bildar en bestämd helhet i och med att hon noggrant väljer ut de föremål som skall ingå i helheten. När hon valt ut delarna och grupperat dem verkar hon ännu rikta sitt medvetande mot de enskilda delarna och markerar dem som skilda enheter.

Vera (2:9) tar upp två hästfigurer från golvet. Hon går omkring och håller dem fötter mot fötter. Vera släpper den ena hästen i en tom korg, tar upp en giraffigur från golvet och tar tillbaka hästen från korgen. Vera håller nu tre djurfigurer i händerna, tappar den ena men tar upp den igen. Vera håller alla djurfigurer i en hand och vandrar omkring en stund. Vera ger bort en av hästarna till ett annat barn, tappar ett av djuren, plockar upp det igen och går till ett bord. Vera ställer nu giraffen och hästen på bordet. Hon tar giraffen och går till dockvrån, lämnar giraffen och kommer tillbaka till bordet med ytterligare två hästar i stället. Vera ställer de tre hästarna i en rad bredvid varandra på bordet. Hon pekar på varje häst och säger "den, eller den, eller den... joo, eller dig" pekar ännu på den sista och första hästen igen innan hon går iväg.

Vera verkar ha en avsikt att göra en grupp av djur som har något gemensamt drag, i detta fall hästar. Girafferna tycks inte ha de kvalifikationer hon söker för sin grupp. När hon är nöjd med gruppens deltagare avgränsar hon delarna genom att peka på varje hästfigur och säga "den" vid varje pekning. Att gruppera och att skilja ur delarna i helheten är av stor betydelse för att uppfatta månghet, vilket inte alltid är så självklart för barnen på småbarns-avdelningarna. I följande episod upptäcker Nicolas hur hans hand består av delar, det vill säga fingrarna, som tillsammans bildar en helhet, handen.

Martina (vuxen) hjälper barnen att rita konturerna av sina händer på papper. Vera (2:9) lägger sin hand på ett papper och Martina ritat runt omkring handen. Martina hjälper sedan Anna (2:4) som säger "jag vill också ha en hand". Martina ritat runt Annas hand. Anna sätter sin hand på pappret igen och ritat den här gången själv runt och säger "titta, jag har ritat min hand". Martina säger "ja, där har du ritat din hand, vad fint". Nicolas (3:1) sitter också vid bordet, han säger "sormet" (finska för "fingrar"), Martina frågar "ska jag rita runt dina händer också" och sätter sig bredvid honom "ska vi laga med grönt? Sätt hela handen på". Martina börjar rita runt Nicolas hand och säger "tummen, pekfinger, långfinger". Nicolas börjar dra bort sin hand och Martina säger "ännu ett finger, så där, nu får du rita själv". Nicolas vänder på pappret och börjar rita runt sin högra hand, flera gånger. Martina säger "mm, runt så där, alla fingrar".

Barnen ger uttryck för att de uppfattar den figur som ritas på pappret som en "hand" eller "fingrar". Barnen urskiljer och fokuserar dock antingen delarna eller helheten, vilket blir synligt också i deras handlingar. Nicolas fokuserar på fingrarna och ser med stöd av den vuxna hur varje finger får sin motsvarighet på pappret. Anna fokuserar i sin tur handen som helhet. Eventuellt kan denna skillnad i fokus föra med sig att Nicolas, som fokuserar de enskilda delarna, inte väntar tills alla fingrar ritats runt, medan Anna som uttrycker att hon ritat sin "hand" erfar handen som en helhet och ritat runt hela handen från början. Nicolas får ytterligare stöd i att uppfatta delarna som en helhet av den vuxna som uppmuntrar honom att rita runt "alla fingrar". Det kritiska i den ovan beskrivna situationen är fokuseringen på de avgörande delarna *och* helheten samtidigt.

5.3.2 Konstanta mängder

En konstant mängd förändras inte trots att formen eller ingående delars placering förändras. Att erfar en mängd som konstant är därmed en viktig aspekt för att förstå hur ett tal motsvarar en bestämd mängd, även om delarna i mängden omplaceras. Om inget sätts till eller tas ifrån måste mängden vara konstant. Det svåra kan vara att urskilja vad i fenomenet som bibehålls och vad som förändras, eftersom något uppenbarligen sker när objekt ändrar form eller tätheten hos en mängd objekt varierar.

Barnen i studien erfar hur mängder formas och omformas i varierande sammanhang. Erfarenheterna är viktiga för att barnen skall uppfatta mängder som bestående av ett konstant antal delar. Julia uppmärksammar detta i följande episod, nämligen att mängden är konstant trots att hon manipulerar delarnas placering på bordet.

Barnen ges blandade russin och nötter ur en skål. Julia (3:9) har en hög med russin och nötter framför sig på bordet, hon skuffar ihop högen med händerna "titta, alla ihop! En riktigt stor" och visar upp ett russin som hon sedan stoppar i munnen.

Julia tycks erfar att hon kan ändra på spridningen av sina russin och nötter utan att mängden förändras i och med att hon benämner mängden som "alla ihop". Den verbala utsagan kan tolkas som att hon erfar att mängden "alla"

från början är utspridd men när hon för ihop dem är det fortfarande samma antal även om delarna ligger närmare varandra.

Ett annat erfalande av samma art som ovan är att ett föremål har samma dimensioner från stund till stund, såvida föremålet inte förändrats till sin karaktär. Detta erfalande är grundläggande för att förstå enheter och deras funktion som mätinstrument. Idén med mätinstrument som baserar sig på enheter är att de till exempel har en konstant längd oberoende av sammanhanget, vilket gör det möjligt att mäta och jämföra föremål eller företeelser i vitt skilda sammanhang. Teo uppmärksammar uppenbarligen att längden hos några stavar och kvadrater är konstant i och med att han bildar samma mönster flera gånger, vilket ger honom många erfarenheter och möjligheter att upptäcka betydelsefulla samband mellan delarna.

Teo (3:5) lägger ut fem stavar i olika färger efter varandra, kant i kant i en lång rad. Han placerar en kvadrat strax ovanför den yttersta stavens ände, lägger sedan en till kvadrat intill den tidigare kvadraten. Båda kvadraterna är tillsammans lika långa som en stav. Teo fortsätter lägga två kvadrater intill de tidigare ovanför nästa stav. Teo gör en ny rad av stavarna och börjar lägga kvadrater från andra hållet ovanför stavarna, fyra kvadrater efter varandra, lika långa som två stavar efter varandra.

I och med att Teo upprepar mönstret blir det uppenbart att han kommit underfund med något intressant och har möjlighet att urskilja betydande aspekter av fenomenet. De två kvadraterna är lika långa som en stav, trots att han bygger mönstret på olika ställen och börjar bygga från olika håll. Längderna är alltså konstanta och vidgar Teos möjligheter att använda erfandet som ett redskap för att jämföra och mäta saker och ting, liksom för att förstå hur två delar som tillsammans bildar en helhet kan ha lika stor omfattning som en enda del, i detta fall i fråga om längd. Något svårare kan det vara att urskilja att den yttre formen på en mängd förändras men att den totala mängden fortfarande är lika stor eftersom inget lagts till eller tagits ifrån. Barnen får dock möjlighet att erfara detta konkret, till exempel när de arbetar med modeller och formar degklumpar med händerna eller med verktyg.

Vera (2:9) ber att få en tallrik. Hon skär en modeller-korv i bitar och placerar bitarna på tallriken. Vissa bitar som hon skurit loss rullar hon mot bordet och formar dem på så sätt runda. Hon fortsätter att skära korven i bitar, tar handen full med småbitar och lägger dem i en hög på tallriken. Slutligen gör hon ett armband genom att rulla en lång bit modeller och sätter den runt handleden. Vera säger "en till mask, en stor mask". Martina (vuxen) säger "du får laga den själv större, rulla med handen". Vera rullar med handen över modellen och utropar, "nu blir den större!"

Vera formar modellen på olika sätt genom att bearbeta den med händerna. De bitar hon skurit loss rullar hon med handen mot bordet så att de blir runda som bollar. Ingen modell sätts till eller tas ifrån modellerbitarna men formen förändras. Ett annat erfalande av samma karaktär är när Vera formar till en lång smal bit modeller så att den når runt hennes arm som ett armband. Inte heller här sätter hon till eller tar ifrån någon modell utan formar om den ursprungliga mängden så att den blir smalare men också längre. Det svåra för barnet att begripa i det sammanhanget kan vara

begreppen "större" och "längre". Modelleran blir på ett sätt större i fråga om att längden ökar och den vuxna särskiljer inte heller begreppen på ett tydligt sätt. Det konkreta erfandet är dock viktigt i detta fall i och med att mängden varken ökar eller minskar men helheten formas om på varierande sätt.

5.3.3 Mängdökning

Barnen i studien erfar i många varierande sammanhang hur mängder kan öka i antal och i omfång. Barnen urskiljer då att något förts till den ursprungliga mängden som gör att en förändring i helheten skett. Ofta är det lättare för småbarn att uppfatta en ökning i antal där föremål är konkreta och tydligt avgränsade. Detta synliggörs i följande episod där Ida väljer ut vissa former med stor noggrannhet. De former hon skiljer ur, grupperar hon prydligt och lägger till en del åt gången, innan hon fortsätter med en annan form och ökar antalet del för del. Den konkreta rörelsen och det visuella erfandet bekräftar mängdökningen.

Ida (2:8) sitter och sorterar geometriska figurer så att hon väljer ut en viss form och ordnar dessa i en rad med jämna mellanrum. Färgen på figurerna varierar, men formen är densamma. När Ida plockar ut rätvinkliga trianglar, väljer hon att ordna dem på rad så att trianglarnas rätvinkliga spets är vända åt samma håll. Efter en stund har hon placerat åtta trianglar på rad och vänder då varannan triangel 180 grader och för ihop trianglarnas långsidor så att fyra kvadrater bildas. Ida fortsätter sedan att plocka ut andra geometriska figurer som hon ordnar i rader av likadana former.

Ida erfar mängdökning i och med att hon väljer ut specifika delar och grupperar dem. De tillförda delarna ökar mängdens omfång tills hon är nöjd och fortsätter gruppera geometriska former på liknande sätt men väljer en annan form och placerar dem på ett annat ställe. Ida utvecklar sin aktivitet och upptäcker ytterligare en form av mängdökning när hon upptäcker att två trianglar kan föras samman och bilda nya helheter. Klossar och figurer som sätts ihop på varierande sätt ger goda möjligheter att upptäcka del-helhetsrelationer. I följande episod bygger Tim med samma material som Ida, och han erfar mycket konkret hur omfånget ökar allt eftersom han lägger till fler bitar.

Tim (3:5) sätter sig vid bordet med de geometriska figurerna och börjar bygga. När han lagt ut en bit ändrar han inte placeringen utan fyller på med bitar till en symmetrisk helhet av kvadrater och stavar. Han går ifrån sitt verk en stund och när han kommer tillbaka plockar han undan figurerna.

Tim fokuserar liksom Ida de enskilda delarna i och med att de båda väljer ut delarna med stor noggrannhet. Tim tycks också ha i åtanke den helhet som bildas, eftersom han bygger symmetriskt och på så sätt tydligt erfar delarnas relation till helheten. I detta fall är ökningen också det centrala eftersom han ökar på antalet delar och omfånget på den helhet han bygger blir hela tiden större utan att han förändrar delarnas placering. Båda barnen erfar hur de ökar den totala mängden vartefter de sätter till och för samman delar.

Ökning erfars lättare när delar konkret kan länkas samman och synligt bilda en helhet. Att trä klossar på en tråd kan vara en sådan aktivitet som gör det möjligt för barnen att urskilja mängdökning.

Vera (2:9) bygger ett torn av cylindrar i olika färger. Hon trär dem sedan en efter en på en tråd och låter dem falla av tråden tillbaka i klosslådan.

Veras erfarenhet av att delarna tillsammans bildar en större helhet tar sin utgångspunkt i att hon skiljer ur de avgränsade delarna, cylindrarna. Genom att stapla dem på varandra och sedan trär dem på ett snöre blir erfarenheten mycket konkret och gripbar. För varje del som läggs till blir helheten större, det vill säga tornet av klossar blir synligt högre. Att cylindrarna dessutom länkas samman i och med snöret som de träs på, befäster också att delarna tillsammans bildar en växande helhet.

I många skapande aktiviteter framträder mängdökning på ett mycket konkret sätt för barnen. Geometriska figurer behåller sin karaktär och kan lätt skiljas ur som skilda delar i en helhet, varvid en ökning av den totala mängden är tämligen lätt att upptäcka. Barnen erfår också mängdökning hos andra material, såsom modeller, som är mera formbara och föränderliga till sin karaktär.

Sakari (3:2) bygger med modeller och rullar en degbit med handen mot bordet. Han säger "se, jag laga som liten boll". Sakari formar flera runda klot av modellen och trycker fast kloten i varandra. Han säger "titta, jag laga som snögubbe".

För att erfara mängdökning bör barnet upptäcka att något läggs till den ursprungliga mängden. Sakari gör först en "boll". När han sätter fast flera bollar på varandra upptäcker han att delarna får en annan innebörd i och med att han bildar en ny helhet, och uttrycker detta som att han gjort en "snögubbe". Sakari ger alltså i denna episod uttryck för sin uppfattning av att när en del sätts till en tidigare så förändras helheten och den får en annan innebörd.

I följande episod konkretiseras mängdökning också genom att en vuxen räknar upp namnen på de djur som hör till en familj, samt räknar med hjälp av talbegrepp en del av de övriga djuren. Delarna i den totala helheten har på så sätt olika innebörd, men ett barn verkar ändå uppfatta den generella ökningen som gör att en viss mängd uppnås.

Stina (vuxen) läser en bok om Kalle kanin med Teo (3:5) och Tim (3:5). Stina frågar "vem tror ni att har såna här spår?" Teo svarar "det här är kanin", och pekar på bilden. Stina säger "haren eller kaninen, jo". Stina läser vidare och berättar om Kalle kanins familj, "där är pappa och mamma och Kalle kanin och så har han en, två, tre, fyra, fem stycken syskon". Tim utropar "det blev nio!"

I episoden erfår pojkarna att den totala mängden ökar när fler djur räknas upp och läggs till helheten som kan benämnas som "Kalle kanins familj". Tim drar slutsatsen att det blir nio djur tillsammans. Det är svårt att avgöra huruvida barnen i denna situation uppfattar talens aritmetiska innebörd, men att talen har en numerär innebörd där ett tal senare i räkneramsan motsvarar en större mängd torde vara klart. Det som är betydelsefullt att skilja ur är att ju

fler familjemedlemmar som räknas upp, desto större är familjen i och med att varje enskild del påverkar helheten.

I följande episod blir delarnas relation till helheten mycket konkret och synlig. Den totala mängden är uppdelad i tre delar och kan varken ökas eller minskas. Anna strävar dock efter att fylla denna helhet och måste då finna motsvarande antal delar.

Anna (2:4) och Martina sitter på golvet och bygger med legoklossar. Anna har en legokloss med tre knoppar. På den ena knoppen sitter en blomma. Anna frågar "var finns det flera blommor?" och pekar på de två tomma knopparna. Martina hittar en blomma "här hittade jag en till" och Anna trycker fast blomman intill den första. Anna frågar "var är en till?" men Anna och Martina hittar inga fler blommor.

Anna urskiljer tydligt den helhet som eftersträvas och hon uppfattar även antalet delar som helheten består av. I kommunikationen med den vuxna blir det klart att Anna förstår att mängden skall bestå av tre avgränsade delar och hon strävar efter att finna dessa delar. Även om mängden är liten och delarna få så har hon insett ett viktigt samband mellan delar och helhet, det vill säga att fler delar bildar en större mängd och i detta fall skulle ytterligare en del ha bildat den helhet som "frågades" efter.

5.3.4 Mängdminskning

I fråga om mängdminskning är det betydelsefullt att barnen uppmärksammar hur en helhet minskar när delar tas bort. Minskning erfars som att en ursprunglig mängd förlorar delar, vilket för med sig att den totala mängden förändras och blir mindre i omfång eller i antal. Också de yngsta barnen på daghemmen kan urskilja hur delar kan tas från en helhet och kvar blir en mindre helhet. Klossbygge är ett ypperligt exempel på detta.

Nora (1:6) bygger med legoklossar. Hon väljer ut klossar som är kvadratformade men i olika färger. Klossarna trycker hon fast i varandra så de bildar ett torn. Tornet bryts av, Nora bygger ihop det igen och drar isär de enskilda delarna innan hon fortsätter med andra aktiviteter.

Barnen erfar hur en mängd minskar när de först sorterar och grupperar delar till en helhet, och sedan tar bort delar från helheten och konkret erfar hur helheten blir mindre ju fler delar som tas bort. Nora i episoden ovan erfar förändringen som sker när tornet blir lägre för varje kloss som tas bort. Anna i följande episod uttrycker också verbalt att hon urskiljer en förändring i mängden. För både Anna och Nora tycks det vara av betydelse att de själva först satt samman en helhet av delar, för att de skall urskilja och fokusera minskningen i mängderna.

Anna (2:4) lyfter ner ett parkeringshus från soffan i lekrummet och sätter sig att ordna föremålen i huset "här är ännu en... och så kommer det en till... och så stoppar jag dit i den stora bucklan". Anna snurrar på karusellen på parkeringshuset "det är så många här". Sakari tar en bil från parkeringshuset och Anna protesterar "nu hade jag den!" Emanuel kryper fram till Anna, Anna räcker honom en bil och frågar "vill Emanuel ha den?" Anna mumlar och petar på bilarna i huset "så har jag dom där fyra".

Att Emanuel får en bil påverkar uppenbarligen den totala mängden, enligt Anna, eftersom hon kommenterar mängden bilar efter att hon gett bort en bil. Ida, i följande episod, uttrycker inte sitt erfارande lika tydligt men hennes handlande kan tolkas som att hon urskiljer de avgränsade delarna och deras specifika relation till helheten. Också Ida bygger först upp en helhet innan hon riktar sitt medvetande och sina handlingar mot att minska mängderna, del för del.

Ida (2:8) sitter vid ett bord med en magnetavla framför sig. I en låda intill finns figurer i olika geometriska former i varierande färger. Ida väljer ut en typ av geometriska figurer åt gången och sätter dem på rad med jämna mellanrum på tavlan. Ida väljer först ut trianglar, sedan små cirklar, stavar och slutligen kvadrater. Ida sitter en lång stund vid aktiviteten och ordnar figurer på rad enligt geometrisk form. Ida stiger upp och tittar på magnetavlan. En vuxen frågar "börjar du bli färdig nu?" Ida nickar och plockar en grupp av geometriska figurer åt gången tillbaka i lådan. Hon tar handen full med kvadrater, säger "se, vad många", håller dem i lådan och fortsätter med en grupp av former åt gången tills alla delar är bortplockade från magnetavlan.

Ida är mycket fokuserad när hon under en lång stund sorterar former och bygger helheter på magnetavlan. Hon har själv grupperat de geometriska figurerna och på så sätt avgränsat de delar och den helhet hon arbetar med. Detta tycks vara väsentligt för att erfara hur mängden sedan minskar när hon börjar plocka tillbaka figurerna i lådan. Hon plockar nämligen inte en figur åt gången utan gruppvis, vilket kan tyda på att hon ser grupperna som avgränsade delar, vilka bildar den totala helheten och mängden. Ida erfår därmed att en grupp av geometriskt likadana figurer består av enskilda delar men som tillsammans bildar en större helhet, som i sin tur får innebörden "del" i den större helheten.

5.3.5 Mängddelning

Att dela en mängd innebär att dela upp helheten i dess beståndsdelar så att delarna i sig kan bilda nya mindre helheter. Till skillnad från att minska mängder så antas delarna ur den delade helheten inte försvinna på något sätt utan de får en ny innebörd som mindre helheter. Detta blir tydligt i episoden nedan där Adam delar ut muggar åt namngivna personer, en aktivitet som är vanligt förekommande bland såväl ettåringar som två- och treåringar.

Adam (3:1) staplar fyra muggar på varandra på bordet, stapeln rasar, Adam knuffar ner muggarna från bordet. "Gun får post" säger Adam. Adam plockar upp tre av muggarna från golvet och lägger dem inuti varandra. Han placerar dem på bordet, vänder muggarna upp och ner och staplar dem på varandra igen. Adam tar isär muggarna och upprepar staplandet ytterligare ett par gånger innan han ger "post" åt Gun och säger "muminmammans, mumintrollets och muminpappas". Sedan ger Adam post åt ett annat barn.

Adam staplar först muggarna till en helhet. Han för samman delarna och tar sedan isär dem igen. Han ger nu varje del åt en namngiven person eller figur, muminmamman, mumintrollet och muminpappan och urskiljer på så

sätt hur mängden delas upp i avgränsade delar. Delarna är fortfarande betydelsefulla eftersom de ges åt namngivna figurer, en mugg åt varje figur.

Idén att dela upp en mängd i mindre delar återfinns i många olika aktiviteter. Också Emanuel erfar hur pinnar kan föras ihop och bilda en mängd som sedan delas upp i mindre delar igen. Hans erfarenhet av delning karakteriseras av att han finner en ny innebörd för delarna, i detta fall pinnarna, i och med att de sätts fast i var sitt hål.

Emanuel (2:3) hittar ett bräde, pinnar att slå ner i hål i brädet och en hammare. Han hamrar på pinnarna i brädet en stund, tar loss pinnarna med handen och sätter dem i hålen igen. Han tar alla fem pinnarna i sin hand och trycker sedan fast dem en efter en i hålen.

Att dela upp och föra samman föremål i grupper är en aktivitet som barn på småbarnsavdelningen ofta engagerar sig i. Det kan vara till synes spontana aktiviteter som att flytta saker från en korg till en annan, eller att ingå i en gemensam lek. I följande episod erfar två flickor hur dockor kan separeras från varandra och föras samman till större helheter för att sedan delas upp igen som enskilda delar.

Hanna (2:10) och Elisa (2:7) leker vid dockhuset. Hanna ställer två docksängar intill varandra och lägger en docka i varje säng. Elisa kör fram två bilar som har var sin chaufförsdocka. Elisa tar Hannas dockor från sängarna och sätter en docka i varje bil. Det sitter nu två dockor i varje bil. Hanna tar tillbaka en av sina dockor och Elisa parkerar den ena bilen. Hanna tar tillbaka också den andra dockan och lägger båda dockorna i en dubbelsäng. Intill dubbelsängen står två enkelsängar, Hanna flyttar över den ena dockan från dubbelsängen till enkelsängen och går sedan ifrån leken.

Två dockor kan samtidigt få plats i en säng eller en bil, men dockorna kan också skiljas åt från varandra, byta platser och bilda delar i andra mängder, såsom tillsammans med andra dockor. Flickorna erfar att en helhet kan delas upp på olika sätt, bilda nya helheter i andra konstellationer, men ändå föras samman till den ursprungliga helheten igen. Flickorna erfar också i denna episod förhållandet två till ett, i och med att två dockor sätts i var sin bil och två dockor i en dubbelsäng. De helheter som bildas av de två dockorna erfars mycket konkret i och med den avgränsning som leksaksbilen, med plats för två dockor, eller dubbelsängen utgör. Den väsentliga aspekten att urskilja i fråga om mängddelning är att delar i en helhet kan se ut på olika sätt, sättas samman på varierande sätt och har en tydlig innebörd både som enskilda delar och som delar av en större helhet.

5.3.6 Parbildning

Att föra samman objekt från olika mängder till par eller nya helheter, är en betydelsefull aspekt av det matematiska tänkandet. Att föra samman objekt innebär att barnet erfar delarna i mängderna som skilda från varandra och därmed möjliga att föra samman och bilda en annan helhet. Delarna får då till exempel i parbildandet en ny innebörd som del av en ny helhet. Parbildning, där objekt förs samman ett-till-ett, kan användas av barnen för att jämföra mängder och för att dela upp en mängd så att delarna motsvarar ett visst antal, även om talbegreppen inte till fullo behärskas av barnen.

Denna färdighet och förståelse ställer inga krav på aritmetisk kunskap eller annan förståelse av tal och siffror, men förutsätter att föremål ses som avgränsade objekt. Nora som är ett år gammal urskiljer intuitivt denna idé i en enkel men representativ aktivitet. Hon för tydligt samman delar från en mängd med delar från en annan mängd.

Nora (1:6) plockar bland små djurfigurer i en korg. Hon väljer ut två giraffer ur korgen, håller giraffernas fötter mot varandra och går iväg med en giraff i var hand.

Noras giraffer råkar passa mycket väl ihop för att jämföra fötterna ett-till-ett. Erfarandet är tydligt, Nora skiljer ur varje fot på girafferna och för samman dem fot-mot-fot. Fötterna från de olika mängderna går jämnt ut, vilket gör att Nora har möjlighet att upptäcka en betydelsefull likhet hos girafferna.

Att bilda par kan ske på varierande sätt och förekommer också i många olika sammanhang. I följande episod uttrycker Karin hur hon uppfattar att två personer delar såväl "saft" som koppar jämnt. Hon delar en kula och en kopp till "dig" och till "mig", en del av varje sort åt varje person.

Karin (3:6) håller en kopp i var hand. Det finns en kula i varje kopp. Karin skakar kopparna, ger en kopp åt Emma och säger "tässä on mehua sinulle ja minulle" (finska för "här är saft till dig och till mig").

Att bilda par och dela ut jämnt antal föremål till personer är vanliga aktiviteter på småbarnsavdelningarna. Karin delar upp föremålen på så sätt att två personer får var sin kopp och var sin kula. Hon bildar då nya par av de föremål och de personer som beaktas i situationen. I följande episod erfar Anna konkret vilken nytta hon har av att jämföra antalet prickar på pusselbitarna ett-till-ett med prickarna på pusselramen.

Anna (2:4) lägger ett pussel med bitar formade som fiskar med olika antal prickar. Hon pekar på en plats i ramen och säger "bara en prick och så bara två". Anna försöker få ner en bit som inte vill passa och prövar sig fram. Martina (vuxen) förklarar "nej, du måste titta på prickarna, här är tre, då måste du se hur många prickar det är där". Anna plockar bort alla pusselbitar från pusselramen. Martina frågar "var ska den vara?" Anna pekar och säger "där". Martina pekar på prickarna på fisken och säger "där är en, två, tre, var ska den vara?" Anna pekar på en plats på ramen. Martina räknar "där är en, två, tre" medan hon pekar på platsen på ramen. Anna pekar på samma ställe och säger "där ska den vara". Anna håller upp en annan fisk mot Martina. Martina säger "där är en, två". Anna sätter ner biten på dess ställe och lägger resten av bitarna på sina platser. Anna säger "här var bara en prick" och pekar på sista tomma platsen på ramen, Martina instämmer "där var bara en prick".

I episoden blir det viktigt att skilja ur prick mot prick för att komma fram till om antalet är detsamma eller om det blir någon prick över på något ställe. Den vuxna fungerar som stöd i räknandet när Anna inte är säker på räkneproceduren. Det är ändå Anna som avgör om pusselbiten och platsen på ramen motsvarar varandra. I och med att hon lyckas lägga de flesta av pusselbitarna på sina rätta platser har hon antagligen insett idén med att jämföra prickarna, så som den vuxna har handlett henne i början.

I en och samma aktivitet kan det finnas många varierande erfarenanden av samma fenomen. Emmas och Julias sorterande av kulor och kuber visar i följande episod tydligt hur de erfar kulorna och kuberna som mängder att föra samman till nya helheter på varierande sätt. I stället för att kategorisera helt och hållet enligt färg eller form väljer flickorna att föra samman en kub med en kula. Det blir dessutom mycket spännande att se om paren går jämnt ut, eftersom de ursprungliga mängderna är så stora att det är svårt att uppskatta deras antal.

Emma (2:6) radar upp sex klossar (kuber) på rad; två gula efter varandra, två gröna efter varandra och två blå. Hon prövar att sätta en stor gul kula på sitt pekfinger och lägger sedan kulan bredvid de gula kuberna. Oscar (1:8) petar på kulan och försöker få den att stå stilla på bordet men rör om i raden. Julia (3:9) placerar en svart cylinder i änden av kubraden och fortsätter sedan att rada kulor efter varandra. Kulorna rullar iväg och flickorna hämtar dem. De lägger nu kulorna ovanpå kuberna, en kula på en kub. Julia lägger en parallell rad med kuber och kulor, Emma hjälper till. Flickorna skrattar och skriker när kulorna rullar iväg. På bordet finns två kulor och en kub, förutom det som flickorna byggt. Gun (vuxen) säger "där är två kulor kvar". Emma utbrister "voi ei, mahtuuko enää kolme? Mahtuu!" (finska för "äh, nej, har det ännu rum två till? Det ryms!") när kuben sätts ovanpå cylindern. Kuben faller av cylindern. Julia placerar kuben i raden av de andra kuberna och lägger de två sista kulorna på den ännu lediga kuben och cylindern. Allt rasar men Julia lägger delarna på samma sätt igen, en kula på varje kub. När det är bara cylindern kvar utan par frågar Gun "nu är det en kvar, vart ska du sätta den?" Emma ropar "där!" och pekar på cylindern. Julia sätter den sista kulan på cylindern och säger sedan "det är 'rappuset' och där är tak, där far man in". Julia pekar med fingret på varje kula och säger "där, där, där..." vid varje pekning, hon fångar sista kulan på pekfingret och sätter ner den igen.

I denna episod förekommer parbildning på många varierande sätt. Flickorna bildar först grupper enligt färg, men övergår till att föra samman par av en kula och en kub intill varandra i två rader. Flickorna skiljer dessutom ur den uppskattade mängden som skall rymmas i konstruktionen, vilket gör att parbildningen har ett syfte som därtill underlättar uppskattningen av mängderna. Det framträder ytterligare en form av parbildning när Julia avslutningsvis pekar en gång på varje kub- och kulpar och säger "där" vid varje pekning. På så sätt avgränsar hon tydligt paren som delar av en större helhet. Med tanke på att tillägna sig idén med att räkna och talbegreppens numerära innebörd så är dylika erfarenanden av stor betydelse. I sorteringen av kuber och kulor urskiljer barnen paren som enheter, där varje del har likadana beståndsdelar och avgränsas från varandra, både visuellt, med stöd av att peka på paren och med verbala uttryck.

5.3.7 Ordningsföljd

Att erfa ordningsföljd innebär att urskilja och fokusera relationen mellan föremål eller företeelser. Ordningsföljd kan urskiljas i fråga om konkreta serier av föremål, men lika väl i fråga om tid, där ordningsföljden har att göra med händelser som äger rum före och efter varandra.

Att ordna föremål eller företeelser i en följd, som en serie, är en konkretisering av samma idé som också räkneramsan bygger på. I den mest grundläggande formen är ordningsföljden bunden till handlingsplaner, rutiner och dagsprogram. I de aktiviteter som barnen deltar planerar de sina handlingar och ger ibland också verbala uttryck för detta. Också genom rutiner som utformats av andra än barnen själva, erfar barnen hur vissa skeenden föregår andra och skapar en struktur i vardagen. Likaså ger regler där man skall utföra något innan man gör nästa steg erfarenheter av ordningsföljd.

Räkneramsan förknippas ofta med ordningsföljd och matematiskt tänkande. Att använda talbegrepp i syfte att gestalta mängder är ett rätt så avancerat tänkande, där begreppens stabila ordningsföljd också har en numerär innebörd, det vill säga talen bildar en serie där ett tal tidigare i räkneramsan motsvarar ett färre antal än tal senare i ramsan. Få barn i undersökningen visar sig ha denna förståelse, men vägen mot förståelse av denna betydelsefulla idé blir synlig i barnens varierande handlande när de strävar efter att uppfatta relationen mellan delar i serier och ordningen i den dagliga verksamheten.

Att sträva efter att göra upp en följd av objekt innebär att barnet har en viss uppfattning av objektens inbördes förhållande till varandra. Barnet har alltså en idé om varför en viss figur placeras före en annan figur. Detta förfarande skiljer sig från att sortera och gruppera objekt i och med att relationen mellan objekten också avgör sättet att ordna dem. På småbarnsavdelningarna i studien är serieringsaktiviteter sällsynta. Adam visar dock verbalt att han har en idé om hur föremål kan ordnas i en speciell ordning där han fokuserar storleksrelationen mellan föremålen.

Elisa (2:7) lägger olika stora ringar på en stav. Hon tar bort ringarna, byter ut dem mot andra ringar och lägger ringarna på olika sätt under en lång stund. Adam (3:1) tittar på och säger sedan "nej, nej, nej, du måste ta stora".

Adam verkar ha en föreställning om hur ringarna kan ordnas i en serie som börjar från en större ring. Han får dock inte möjlighet att visa detta konkret i situationen, men hans verbala utsaga säger något om hans idé och att han urskiljer ringarnas storlek som en aspekt att sortera enligt. I följande episod skiljer också Kevin ur hur muggar i olika storlekar relaterar till varandra och han tycks ha för avsikt att ordna dem från den minsta till den största och bildar på så sätt en serie.

Adrian (1:8) och Kevin (1:5) står i dockvrån. På bordet finns tre olika stora muggar och ett fat. Kevin placerar den stora muggen på fatet och mellanmuggen inuti. Mellanmuggens öra tar emot så att den blir att hänga halvt inuti den stora muggen. Kevin lyfter bort båda muggarna. Han lägger den största muggen ovanpå den minsta, han byter ut stora muggen mot mellanmuggen och den största muggen överst. Muggarna faller omkull. Kevin placerar den stora muggen ännu en gång ovanpå mellanmuggen som står på fatet och skjuter ifrån sig fatet med muggarna. Adrian tar den stora muggen. Kevin ställer fatet på golvet, lägger mellanmuggen på fatet och minsta muggen ovanpå.

I episoden synliggörs det hur Kevin utforskar muggarna och uppenbarligen upptäcker att de skiljer sig åt på något sätt. Han urskiljer detta genom att

sortera muggarna och på så sätt jämföra deras egenskaper, i detta fall storleken. Det intressanta i episoden är att Kevin ordnar muggarna i en serie, från den minsta till den största och urskiljer på så sätt en ordningsföljd av föremål där det inbördes förhållandet mellan föremålen är avgörande för hur de placeras. Att göra sådana serier ger viktiga erfarenheter av serier där ordningen är central.

I studien framträder sådana erfarenheter av ordningsföljd där barnen reflekterar kring händelser och i vilken ordning något sker. Till exempel följs det på det ena daghemmet i studien en sådan ordning att när det serveras gröt får barnen börja äta efter att de blivit serverade mjölk eller saftsoppa till gröten. Barnen är generellt medvetna om denna ordning och Erik är mån om att följa de regler som ställts upp.

Erik (2:1) sitter vid bordet tillsammans med flera andra barn. De blir serverade gröt och något barn börjar smaka på sin portion. Erik säger förmanande "man får mjölk, då får man äta sen, man får mjölk."

Erik erfar i den ovan beskrivna situationen att något barn bryter den ordningsföljd av händelser som han förväntar sig. Det blir därmed uppenbart att Erik är medveten om vad som förväntas hända före och efter i den specifika situationen. Ordningsföljden är därmed en betydelsefull aspekt i sammanhanget. Barnen strukturerar också själva sina aktiviteter och bestämmer i vilken ordning och när något ska ske. I följande episod "räknar" ett barn fram till att de ska börja springa. Det viktiga är antagligen att göra klart för alla när de får börja springa och att ingen börjar springa för tidigt. För att detta skall vara möjligt bör barnen uppfatta samma innebörd och ordningsföljd i aktiviteten.

Julia (3:9), Emma (2:6) och en äldre flicka springer ikapp. Julia räknar ner genom att säga "en, två, tjugo, sjutton, nitton, NU!" När Julia avslutar nedräkningen med att säga "nu" springer flickorna iväg samtidigt.

Flickorna är införstådda med att talen kan användas som ett redskap för att bestämma när något skall ske. Julia som leder nedräkningen följer inte den traditionella ordningen i räkneramsan, utan bestämmer startpunkten för springtävlingen genom att säga "nu". Julia och de två andra flickorna erfar dock att aktiviteten följer en viss ordning där ramsan och uttrycket "nu" föregår starten.

På daghemmen sjunger man ibland sånger och ramsor med speciella rörelsemönster. Barnen lär sig snabbt hur rörelserna skall utföras och i vilken ordning rörelserna kommer i sången eller ramsan. En populär ramsa med rörelser är "det kom ett bud". Ramsan läses växelvis mellan en ledare och övriga sångare och rörelserna börjar från att en hand dunkar (en hammare), båda händerna dunkar (två hammare), båda händerna och en fot dunkar (tre hammare) och fortsätter med fler kroppsdelar så långt ledaren väljer.

Teo (3:5) leder ramsan och börjar dunka taktfast med knytnäven på bordet. Han säger "den ena". De andra barnen börjar dunka en hand på bordet och säger rytmiskt "en hammare slår bitar och en hammare slår bitar". Några barn börjar också slå med andra handen på bordet. Adam säger (3:1) "stampa!" men Teo protesterar och säger "nej, inte ännu, två hammare". Teo stannar upp och börjar om från början.

Teo har en klar uppfattning av hur ramsan skall läsas och vilka rörelser som skall göras i vilken ordning. Han störs dock av de andra barnen som skyndar på ramsan och vill komma framåt. Teo protesterar när ett steg i ordningen riskerar att hoppas över, eftersom han tydligen strävar efter att hålla den inlärd ordningen. Ordningsföljden är avgörande också för den successiva ökningen av antalet "hammare".

5.4 Sammanfattning av vad småbarn erfar i mötet med matematik

Barn förväntas tillägna sig förståelse av och på ett lämpligt sätt kunna använda sådana begrepp som beskriver mätbara egenskaper hos objekt i omvärlden. I mötet med omgivningen, andra barn och vuxna framträder olika sätt att förstå och använda begreppen, vilket gör att barnen har möjlighet att bli medvetna om olika sätt att förstå samma begrepp men också att i samspel med andra utveckla och formulera sin individuella förståelse. För att detta skall vara möjligt är det nödvändigt att barnen fokuserar samma fenomen men också samma aspekt inom fenomenet, som kan variera.

Begrepp som beskriver dimensioner och proportioner, positioner, omfattning eller sekvenser har gemensamt att deras innebörd alltid är beroende av relationen till något annat föremål eller en annan mängd. Jämförelsen är det centrala eftersom till exempel en mandarinklyfta uppenbarligen kan anses vara både "stor" och "liten" beroende på vad den relateras till. På samma sätt är begreppet "mycket" relativt och beroende på vad som jämförs. Begreppen bör därmed jämföras med något för att specificera innebörden. Undantag utgörs däremot av begreppen "ingenting" och "alla" som precis avgränsar den totala omfattningen, eller avsaknaden av delar, som avses. Begrepp som beskriver månghet skiljer sig dock från andra matematiska begrepp eftersom de syftar på kvantitativa relationer mellan mängder. I mötet med mängder och föremål av varierande storlek kan barnen skilja ur vad som karakteriserar det erfarna och på så sätt också förstå fenomenen på mer differentierade sätt.

Barnen i studien kommunicerar ofta om visuella likheter och skillnader som de upptäcker i mötet med omvärlden. Tillsammans med andra är barnen tvungna att på varierande sätt gestalta sin förståelse av det erfarna, vilket skapar många möjligheter att skilja ur nya aspekter av ett fenomen som kan fördjupa förståelsen. Också de yngre barnen som ännu inte uttrycker sin förståelse verbalt, strävar efter att skapa situationer som gör det möjligt att urskilja variationer hos ett fenomen. I studien framkommer det att förutom visuella likheter och skillnader, erfar barnen också auditiva, taktila och andra kvalitativa likheter och skillnader.

Matematiska principer och system bygger på förståelse av att delar i en mängd har en viss relation till andra delar och till helheten. Förståelsen växer fram i samspel med andra barn och vuxna där olika sätt att förstå denna relation kommuniceras och problematiseras. De aspekter som träder fram i analysen av småbarns möten med matematik är *avgränsade delar, konstant mängd, mängdökning, mängdminskning, mängddelning, parbildning* och

ordningsföljd. Tillsammans lägger dessa aspekter grunden för förståelsen av den matematiska relationen mellan delar och helhet.

Det är uppenbart att barnen för att erfara ökning, minskning eller delning av mängder måste uppfatta enskilda delar som avgränsade från varandra, samtidigt som delarna bildar en grupp och en bestämd mängd. Genom att sortera, gruppera och manipulera olika material får barnen möjligheter att upptäcka detta samband som finns mellan delarna och den totala helheten. Utan denna förståelse har ökning och minskning ingen numerisk innebörd. Likaså bör barnet uppfatta mängden som konstant, oberoende av till exempel spridning eller placering i rummet, för att förstå hur ett omfång ökar eller minskar.

Att erfara delning ger många betydelsefulla möjligheter att uppfatta hur en mängd består av avgränsade delar som kan sättas samman på varierande sätt och antingen återskapa den ursprungliga helheten eller skapa nya helheter. Ytterligare ett sätt att erfara del-helhetsrelationen är att para ihop delar från olika mängder så att delarna bildar nya par, där delar paras ihop ett och ett. Att bilda par av delar från olika mängder har en direkt koppling till barnets förståelse av räkneramsan och den innebörd räkneorden har. Det handlar om att para ihop föremål med något så abstrakt som ord, till exempel räkneord. När "ett" uttalas avses det ena föremålet i mängden, när "två" uttalas avses ett annat *och* det tidigare uppräknade.

Att urskilja ordningsföljd och bilda serier kräver att barnet först skiljer ur likheter och skillnader mellan föremål och företeelser. På så sätt kan barnet forma en grupp av föremål med någon gemensam egenskap. Att sedan ytterligare skilja ur hur delarna sinsemellan skiljer sig åt och bedöma vilka delar som ligger nära varandra och vilka som ligger långt ifrån varandra i serien är en rätt så avancerad uppgift. Att erfara ordningsföljd i fråga om händelser tycks däremot vara lättare i och med att barnen själva upplever vad som sker före och efter i tid och även rent kroppsligt i sorteringsaktiviteter.

6 Kritiska villkor för småbarns lärande av matematik

Småbarns handlingar tolkas i föreliggande studie som uttryck för deras förståelse. En förändring i sättet att förstå något fenomen karakteriserar lärande och förändringar i sättet att handla gentemot fenomenen i omvärlden innebär därmed att lärande skett. För att lärande skall ske är det således något i mötet med omvärlden som föranleder barnets förändrade handlingar och förändrade förståelse. Vad detta är som leder till sådana förändringar kan kallas kritiska villkor för lärande. I den redovisning som följer nedan lyfts sådana kritiska villkor för lärande fram, som är betydelsefulla för att barn skall utveckla sin förståelse av den matematik de möter i vardagen.

Lärande är en komplex process som inte bör förstås som separata delar. När det är frågan om kvalitativa beskrivningar av människans erfarenhet av omvärlden kan man gott tänka sig det välbekanta uttrycket "helheten säger mer än summan av delarna". De kritiska villkoren *samtidighet*, *variation*, *rimlighet* och *hållpunkt* som presenteras i detta kapitel, lyfts fram för att skilja ur och beskriva komplexiteten. Villkoren bör förstås som interagerande delar av den fortgående process som kallas lärande. Följande episodbeskrivning ges som exempel för att belysa denna komplexitet där de kritiska villkoren var för sig och tillsammans bidrar till det totala erfandet och lärandet.

Emma (2:6) ställer sex kuber i en rad på bordet; två gula, två gröna och två blå efter varandra. Hon sätter en gul kula på sitt pekfinger och lägger sedan kulan bredvid de gula kuberna. Julia (3:9) placerar en svart cylinder i änden av kubraden och fortsätter sedan att ställa kulor på rad efter varandra. Kulorna rullar iväg på bordet och flickorna hämtar dem. De lägger nu kulorna ovanpå kuberna, en kula på var kub. Julia lägger sedan en parallell rad med kuber och kulor på samma sätt. Emma hjälper till. Flickorna skrattar högt när kulorna rullar iväg. Bygget består nu av två parallella rader av klossar med en cylinder som extra kloss utanför raderna. Det ligger kulor på alla kuber utom på cylindern. På bordet finns ännu två kulor och en kub som ännu inte placerats i bygget. Gun (vuxen) säger "där är två kulor kvar". Emma ropar "voi ei, mahtuuko enää kolme? Mahtuu!" (finska för "åh nej, ryms det ännu tre? Det ryms!") när Julia sätter kuben ovanpå cylindern. Kuben faller av cylindern. Julia placerar kuben i raden av de andra kuberna och lägger de två sista kulorna på den sista lediga kuben och cylindern. Allt rasar men Julia lägger delarna på samma sätt igen, en kula på varje kub. När det är bara cylindern som står kvar utan par frågar Gun "nu är det en kvar, vart ska du sätta den?" Emma säger "där!", pekar på cylindern och Julia sätter den sista kulan på cylindern. Julia säger "det är 'rappuset' (finska för "trappor") och där är tak, där far man in". Julia pekar med fingret på varje kula och säger "där, där, där..." vid varje pekning, fångar sista kulan på pekfingret och sätter ner den igen.

Samtidigheten är tydlig i och med att barnen hanterar kulorna och kuberna dels som separata delar, dels som grupper av likadana färger eller former och därtill som par bildade av klossar med olika form. Episoden innehåller en mångfald möjligheter att urskilja hur delarna i helheten samtidigt kan ha olika innebörd.

I episoden framträder också *variationen* som ett betydelsefullt villkor. Barnen varierar sitt byggande genom att först skilja kuber och kulor åt i separata rader, sedan para ihop kulor och kuber, ett-till-ett. Klossarna kan alltså sättas samman på olika sätt och bilda olika helheter. Klossarna som barnen arbetar med har dock en kloss, cylindern, som skiljer sig från de övriga. Barnen skiljer ur denna annorlunda kloss och ger den en särskild plats lite utanför, tills en kula blir över och inte passar in i det tidigare mönstret. Barnen förmår då vidga sitt erförande och beakta sådana aspekter att sista kulan paras ihop med den udda cylindern. Barnen ser alltså möjligheterna att variera sitt handlande och fokusera varierande aspekter hos kulorna och klossarna så att alla klossar får en given plats.

Det ena barnets verbala uttryck visar klart att barnet avgör *rimligheten* i den aktivitet de utför. Frågan är om klossarnas antal går jämnt ut med det bygge de konstruerar. Barnet gör en uppskattning av hur många klossar det är kvar och hur många platser som skall fyllas.

Hållpunkter tycks vara viktiga för barnen för att konkretisera, fokusera och förstå det de erfar. Barnen ger uttryck för detta i sina lekar, handlingar och även verbala beskrivningar av erföranden. I episoden strukturerar barnen kuber i två likadana rader intill varandra där varje kub får en kula som par. Strukturen på konstruktionen fungerar som hållpunkt till exempel för att uppskatta hur många kulor och kuber som har rum inom ramen för det som barnen bygger.

I kapitlet beskrivs de kritiska villkor för lärande av matematik som framträder i de observerade barnens handlingar och verbala uttryck. Den tolkade innebörden beskrivs i kategorier där avsikten med en form av gestaltning är riktgivande. I dessa gestaltningar framträder de villkor som gör det möjligt för barnen att urskilja och fokusera kritiska aspekter av något matematiskt fenomen, som de eventuellt inte tidigare varit medvetna om eller kunnat fokusera samtidigt.

6.1 Samtidighet

Samtidighet är ett kritiskt villkor för lärande i och med att barnet medvetet bör fokusera flera aspekter av ett fenomen samtidigt för att beakta och förstå komplexiteten hos fenomenet. Ett begrepp kan till exempel ha olika innebörd beroende på den kontext begreppet används i, vilket barnen i studien upptäcker i många vardagliga situationer. Samtidighetens betydelse träder också fram i aktiviteter där barnet behöver fokusera delar och helhet samtidigt för att utföra en uppgift.

6.1.1 Att urskilja det gemensamma och specifika

Att urskilja det gemensamma och specifika hos föremål och företeelser i omvärlden är grundläggande för allt lärande. Om människan inte har denna förmåga känner hon inte igen saker från olika kontexter och kan inte heller bilda begrepp. Också i fråga om att förstå matematik är det av betydelse att skilja ur gemensamma drag hos objekt och vad som skiljer objekt från varandra.

För att förstå och bilda begrepp bör också småbarn samtidigt erfara hur någon aspekt av ett fenomen varierar och någon annan hålls konstant. Barnen upptäcker detta till exempel i fråga om föremål där formen är densamma men storleken varierar.

Sakari (3:2) försöker trä kulor på ett snöre. Han visar upp en kula som är mindre än de andra och säger "titta en liten boll".

Sakari visar i denna episod att han bemästrar begreppet "boll" i och med att han skiljer ur en speciell boll och relaterar den till de övriga. Han inser att "boll" är det övergripande begreppet men att det finns variationer, det vill säga både större och mindre bollar. Formen är det gemensamma men proportionen till de andra bollarna är det som varierar i just detta fall. Det är av betydelse att Sakari uppmärksammar dessa aspekter samtidigt för att urskilja huruvida den lilla bollen hör hemma bland de större eller om den bildar en skild grupp av mindre bollar. Upptäckten av sambandet kan bidra till förståelse av hur en serie kan bildas av bollar från mindre till större eller tvärtom. I studien framträder även episoder där ett år gamla barn sorterar koppar i storleksordning (se sid. 114), vilket innebär att barnet samtidigt urskiljer delarna som ingående i en helhet av koppar, tre till antalet och att dessa tre på något sätt skiljer sig från varandra. Skillnaden avgör ordningen, men det är samtidigtheten i fokuseringen som är av betydelse för att jämförelse, bedömning och seriering skall kunna göras.

Att samtidigt fokusera gemensamma och specifika egenskaper hos föremål kan leda till att barnen upptäcker nya aspekter hos föremålet som hjälper dem att lösa ett problem. Episoden nedan visar hur två barn fokuserar olika aspekter av samma fenomen. Barnen erfar hur de talar om samma sak men med fokus på olika aspekter.

Karin (3:6) och Adam (3:1) lägger pussel tillsammans. Bilden på pusslet föreställer Muminfamiljen och vissa pusselbitar är formade som hjärtan eller stjärnor. Karin väljer ut pusselbitar där mönstren passar ihop. Adam däremot, tittar på ramen till pusslet, där formen på pusselbitarna antyds på ramens botten. Karin säger "där är dens huvud", Adam säger "den är där, på stjärnan" och pekar på ramen där formen av en stjärna antyds.

Karin och Adam erfar att samma pusselbit kan beskrivas på olika sätt. Pusselbiten visar en bild av Mumintrollets huvud samtidigt som pusselbiten har formen av en stjärna. Genom att samtidigt förmå fokusera det gemensamma och specifika i situationen lyckas barnen tillsammans skilja ur sådana aspekter som stöder problemlösningen och gör att de kan lägga pusslet.

För att förstå och kunna använda räkneord bör barn inse att det är den numerära aspekten som är det gemensamma oberoende av vilka objekt som

räknas och i vilket sammanhang de förekommer. Barnen i studien erfar ofta räkneord som vuxna använder till exempel för att räkna antalet barn, för att säga hur mycket klockan är, eller vid sagoläsning där barnen ofta ombeds räkna figurer eller föremål på bilderna. Ett vanligt exempel på hur antal kan gestaltas är födelsedagstårter med samma antal ljus som det antal år någon fyller. Det räkneord som används har då samma numerära innebörd samtidigt som det syftar på olika saker; ljusen är tre stycken och åldern tre år.

Gun (vuxen) sitter med några barn och läser en bok där huvudpersonen Molly fyller tre år. Gun frågar "hur många ljus har hon på tårtan?" Julia pekräknar "ett, två, tre". Gun säger "jo, tre ljus, Molly fyller tre år".

Den vuxna uppmärksammar barnen på sambandet mellan att huvudpersonen i boken fyller tre år och att det finns tre ljus på tårtan. Antalet är detsamma även om mängderna som avses består av olika objekt. Begreppet "tre" och de tre ljusen kan samtidigt ha olika innebörd, som tre objekt eller som symbol för ett visst antal år, vilket barnen får möjlighet att erfar i och med den vuxnas förklaringar.

Att skilja ur vad som är gemensamt och vad som är specifikt i en situation får betydelse också när det är frågan om lägesbegrepp, till exempel placering runt ett bord. I följande episod sätter sig sex barn kring ett runt bord och diskuterar vem som sitter bredvid vem. I början konstaterar barnen att ett barn sitter bredvid ett annat. Mot slutet av diskussionen framträder det att ett barn samtidigt kan sitta bredvid flera personer, som i sin tur sitter bredvid andra personer, beroende på vems perspektiv som tas.

Tim (3:5) säger "jag sitter bredvid Adam", pekar på Adam och säger "du sitter bredvid mig" och pekar på Teo.

Teo (3:5) säger "jag sitter bredvid Tim".

Tim fortsätter "Ida sitter bredvid dig" medan han tittar på Teo, "Elisa sitter bredvid Karin".

Karin (3:6) säger "sitter bredvid Ida".

Teo upprepar "och jag sitter bredvid Tim".

Ida (2:8) tittar först på Teo till vänster och sedan på Karin till höger och säger "så du [Teo] bredvid mig och du [Karin] bredvid mig".

Karin konstaterar "här ryms inga fler stolar!"

Tim säger "Tim, jag, sitter bredvid Adam" och pekar på Adam till vänster, "hon", pekar på Elisa, "sitter bredvid Karin OCH Adam, hon", pekar på Ida, "sitter bredvid Teo OCH Karin".

Teo säger "och jag sitter bredvid Tim och Ida".

Tim fortsätter ännu med att säga "jag sitter bredvid Teo och Adam".

Barnen i episoden ovan diskuterar sig fram till gemensam förståelse av att ett barn sitter bredvid två personer, samtidigt som barnet intill sitter bredvid ett annat barn. Ett perspektivskifte sker när de tar utgångspunkt i ett annat barns plats och beskriver placeringarna utgående från den nya utgångspunkten. Erfarandet blir tydligt för barnen när de upptäcker att samma lägesbegrepp samtidigt kan gälla för dem själva och något annat barn.

6.1.2 Att bilda mönster

Att bilda mönster handlar i grunden om att foga samman delar till en större helhet. Det som är utmärkande med att bilda mönster är att barnet har en idé

om hur delar kan sättas samman och idén återkommer flera gånger. Mönstret karakteriseras av att det kan förväntas finnas vissa delar på bestämda platser. Delarna i mönstret får en innebörd just som speciella delar av en större helhet där mönsterbildandet förutsätter att barnet samtidigt fokuserar delarna var för sig och hur de relaterar till varandra och till helheten.

Ida i exemplet nedan upptäcker hur delar kan föras samman på ett speciellt sätt och bilda nya helheter. Hon fokuserar de enskilda delarna och upptäcker till synes plötsligt hur delar kan föras samman för att bilda nya former. De nya formerna upprepas därefter flera gånger.

Ida (2:8) sitter och sorterar geometriska figurer. Hon väljer ut en viss form och ordnar dessa i en rad med jämna mellanrum. Färgen på figurerna varierar, men formen är densamma. När Ida plockar ut rätvinkliga trianglar, ordnar hon dem på rad så att trianglarnas rätvinkliga spets är vända åt samma håll. Efter en stund har hon placerat åtta trianglar på rad och vänder då varannan triangel 180 grader och för ihop trianglarnas långsidor så att fyra kvadrater bildas. Ida fortsätter sedan att plocka ut andra geometriska figurer som hon ordnar i rader av likadana former.

Ida skiljer först ur olika geometriska former och grupperar dem. Trianglarna tycks utmana Ida att ändra sättet att sortera, som först är väldigt strukturerat. Hon vänder varannan figur och för ihop dem två och två, vilket gör att nya former bildas. På detta sätt erfar Ida att delar kan föras samman för att bilda helheter och nya figurer. Likadana delar som hanteras på likadant sätt bildar likadana mönster. Delarna urskiljs samtidigt som separata delar och som delar som tillsammans bildar en helhet. Att bilda mönster innebär att barnet för samman delar på ett strukturerat sätt. Mönsterbildandet innebär vidare att varje ingående del är viktig, eftersom delen så tydligt har avgörande betydelse för helhetens utseende. Varje ny figur förändrar den totala helheten och barnen erfar samtidigt delarnas och helhetens förhållande till varandra.

Upprepning är central i mönsterbildandet, alltså att kunna förutse följande del och på så sätt bygga upp en helhet där delarna har en speciell relation till varandra. Att bilda mönster innebär att barnet erfar en sådan relation mellan delarna och till helheten, vilket i vissa fall är synligt när barnet ordnar delar som en serie.

Ida (2:8) sorterar figurer på en magnetavla. I lådan framför henne finns geometriska figurer i olika former och färger. Hon placerar ut likadana former med jämna mellanrum och ordnar figurerna omsorgsfullt i grupper. Ida placerar en tre centimeter lång stav mitt på tavlans nedre kant och en centimeter lång stav till vänster. Hon plockar en stund med olika figurer innan hon tar en av de minsta figurerna ur lådan, en knopp, och sätter den till vänster om de två tidigare. Ida plockar bland figurerna en stund igen och placerar en rund figur längst till vänster. Hon fortsätter plocka olika figurer på magnetavlan, tar en av de längre stavarna ur lådan och sätter den längst till höger och efter en stund sätter hon ytterligare en mellanlång stav mellan den längre och den tidigare lagda mellanlånga. Ida plockar ännu en stund bland figurerna i lådan och sätter slutligen en lång stav längst till höger. På Idas tavla finns nu längs den nedre kanten en rund figur längst till vänster, efter den runda

figuren följer en knapp och två stycken centimeterlånga stavar som följs av tre stycken tre centimeter långa stavar.

Ida sitter en lång stund engagerad i denna aktivitet och är mycket omsorgsfull i sitt sätt att sortera de geometriska figurerna. Hon är fokuserad på formerna, inte färgerna, hos figurerna och grupperar dem tydligt enligt form. Vid första anblicken ter sig den serie som Ida gör spontan och oreflektad, men även om det tar lång tid att göra serien så är slutresultatet en tydlig serie där punkter går över till längre stavar. För att göra en sådan serie bör Ida ta i beaktande de relationer delarna har till varandra och till helheten samtidigt, vilket visar sig i att varje ny del som hon lägger relateras till helheten och får sin bestämda plats i serien. En ny del urskiljs således samtidigt som kortare och längre än andra delar i den existerande serien. Att förstå innebörden av serier av olika slag är betydelsefullt som grund för att uppfatta talens egenskaper och förhållande till varandra. Barnen fokuserar då samtidigt de enskilda delarna och deras betydelse för helheten.

6.1.3 Att markera delar

Att markera delar är ett sätt att gestalta hur en mängd avgränsas som enskilda delar *och* som en helhet, samtidigt. För att uppfatta delarna i en mängd som separata delar som tillsammans har betydelse för och bildar en helhet, markerar barnen delarna på olika sätt. Markeringen innebär en konkret avgränsning och specificering av vilka delar som skall ingå i en helhet. Urskiljandet blir tydligt i och med den avgränsning barnen gör, såsom att till exempel välja ut en viss typ av figurer och bilda en grupp av dessa som sedan markeras.

I följande episod bildar Vera en mängd som hon samtidigt urskiljer bestå av enskilda delar. Delarna är betydelsefulla och tycks väljas med omsorg. Vera väljer ut tre figurer som ser något olika ut, men representerar hästar. En giraff uppfyller tydligen inte det kriterium hon ställt för gruppen av djurfigurer. När hon verkar nöjd med gruppen markerar hon figurerna genom att peka på varje enskild häst flera gånger.

Vera (2:9) tar två hästfigurer från golvet. Hon går omkring och håller dem fötter mot fötter. Vera släpper den ena hästen i en tom korg, tar upp en girafffigur från golvet och tar tillbaka hästen från korgen. Vera håller nu tre djurfigurer i händerna och vandrar omkring en stund. Vera ger en av hästarna åt en annan flicka och går sedan till ett bord. Vera ställer giraffen och hästen på bordet. Hon går till dockvrån, lämnar giraffen, och kommer tillbaka till bordet med ytterligare två hästar. Vera ställer de tre hästarna i en rad på bordet. Hon pekar på hästarna och säger "den, eller den, eller den... joo, eller dig" och pekar ännu på den sista och första hästen igen innan hon går iväg.

I episoden där Vera grupperar hästar blir det tydligt att hon väljer ut och bildar en grupp av figurer med gemensamma egenskaper. Dessa figurer bildar en grupp för sig, som inte vilken figur som helst kan ingå i. Hon markerar sedan de i gruppen ingående delarna både i ord och i handling när hon pekar på figurerna. Samtidigheten utgör ett tydligt kritiskt villkor för detta erfalande eftersom delarna samtidigt ses som åtskilda och ingående i en specifik helhet. Att avgränsa och markera delar innebär på så sätt att barnet

erfar delarna i en helhet som separata delar. Barnen kan till exempel urskilja en helhet som består av ett visst antal föremål, men samtidigt fokusera att det fattas ett visst antal delar.

Anna (2:4) och Martina (vuxen) sitter på golvet och bygger lego. Anna har en legokloss med tre knoppar. På den ena knoppen sitter en blomma fast. Anna frågar "var finns det flera blommor?" och pekar i tur och ordning på de två tomma knopparna. Martina hittar en blomma, hon säger "här hittade jag en till" och Anna trycker fast blomman intill den första. Anna frågar "var är en till?" Anna och Martina hittar inga fler blommor.

Anna verkar vara medveten om att det behövs ytterligare två blommor för att fylla den helhet hon tänker sig. Hon konkretiserar sin idé genom att peka på de knoppar som ännu inte har blommor och markerar också verbalt att det ännu fattas en blomma efter att de hittat en till och satt fast den intill den ursprungliga. Genom att markera delarna så tydligt synliggörs det också hur Anna erfar att delarna bildar en mängd av ett precist antal delar.

Att markera delar är ett sätt att skilja ur vilka delar som skall ingå i en beräkning. Barnen gör detta till exempel genom att pekräkna. Att pekräkna innebär att rabbla upp räkneramsan samtidigt som de föremål som skall "räknas" pekas på i takt med räkneorden. I nedanstående exempel är Julia inte helt säker på talföljden, men hon avgränsar tydligt de delar som bildar mängden genom att pekräkna.

Julia (3:9) bläddrar i en bok och berättar vad som händer på bilderna. På en sida finns sju figurer som hon pekar på en efter en och säger samtidigt "ett, två, tre, fyra, sex, sju, åtta".

Julia pekar endast en gång på varje figur och säger endast ett räkneord vid varje pekande. Rytmen och formen blir därmed tydlig och konkret, även om räkneramsan inte är stabil. Samtidigheten är också i denna episod ett kritiskt villkor i och med att hon pekar på en figur samtidigt som hon säger ett räkneord åt gången. Två skilda handlingar binds samman i och med att de utförs samtidigt och får då på grund av samtidigheten en speciell innebörd. De yngre barnen på småbarnsavdelningarna tycks också sträva efter att konkret markera mängder av liknande föremål och erfar då hur delar kan skiljas från varandra samtidigt som de bildar en helhet.

Nora (1:6) går längs klädhyllan och känner en gång med handen på varje vinteroverall hon går förbi.

Nora markerar varje overall och urskiljer dem på så sätt som separata delar, men i och med att hon endast känner på vinteroverallerna tycks dessa utgöra en mängd, en helhet, av liknande delar. Att avgränsa och markera delar i en mängd sker inte enbart på barnens initiativ utan också på initiativ av vuxna. Fingerramsor är ett gott exempel på detta där fingrarna ges namn och avgränsas samtidigt som de tillsammans bildar en helhet.

Jonna (vuxen) och Anna (2:4) hjälps åt att klä på Anna. Först klär de på en socka och en sko. Anna frågar "var är min mössa"? Hon har redan sin mössa på huvudet och Jonna svarar "på huvudet!" Anna och Jonna skrattar tillsammans och klär på Anna hennes andra socka och andra sko. När de kommer till fingervantarna gnäller Anna när fingervanten

inte passar. Jonna säger "ska du sticka i här... tummetott, slickepott, där var de alla, visst?" och hjälper Anna att få alla fingrarna rätt i vanten. Anna ropar "se!" och visar upp sin hand med vanten på. Jonna säger "se vad det gick bra!" och hjälper Anna att få på andra vanten. Anna säger "nu är alla fingrarna" medan hon tittar på sina båda händer och säger "tummetott, slickepott, långeman, gullebrand". Jonna instämmer "ja, just det".

Anna erfar tydligt hur fingrarna ges separata namn och markeras ytterligare när fingervanten träs på, ett finger åt gången. När alla delarna avgränsats och markerats konstaterar Anna att "alla" ihop bildas av de enskilda delarna. Handen är en helhet som samtidigt består av tydligt avgränsade delar. Barnens tidiga erfarenheter av hur delar och helheter samtidigt relaterar till varandra är avgörande för att förstå räkneprinciper och för att kunna använda räkneord och räknesätten på ett effektivt sätt. I samspel med andra barn och vuxna uppmärksammas barnen på den mening som kan tillföras olika fenomen och vara gällande samtidigt, vilket gör att ett fenomen får en djupare innebörd när flera perspektiv tas i beaktande samtidigt.

6.2 Variation

För att vidga sin förståelse av ett fenomen bör barn erfara fenomenet i olika sammanhang, sett ur olika perspektiv och ges tillfälle att urskilja hur ett fenomen kan variera i sammanhanget. I och med variationen har barn möjlighet att skilja ur vad föremål eller företeelser har gemensamt och vad som skiljer dem åt och vilka aspekter som karakteriserar ett visst fenomen. I studien tolkas lärande som ett förändrat sätt att förstå omvärlden, vilket gör variation till ett mycket betydelsefullt villkor för lärande. För att upptäcka samband och skilja ur nyanser i innebörd måste någon aspekt av ett fenomen erfaras som konstant samtidigt som andra aspekter av fenomenet varierar. På detta sätt bildar barnen till exempel begrepp och utvecklar sin förståelse av likheter och skillnader samt del- och helhetsrelationer.

6.2.1 Att sätta ramar för innebörden

Begreppsbyggnad bygger på att ett ord som beskriver ett fenomen har samma övergripande innebörd i varierande sammanhang. Begrepp kan också ha olika innebörd beroende på vad som skall beskrivas och i vilken situation fenomenet förekommer. Barnen i studien diskuterar ofta tillsammans med andra barn om begrepp och deras innebörd. Genom att lyfta fram något konstant och jämföra detta mot det som varierar i situationen formulerar barnen en gemensam förståelse av ett begrepps innebörd i ett specifikt sammanhang.

Barnen i studien visar ofta konkret vilken betydelse de ger mängd- och storleksbegrepp. Genom variationen av sätt att uttrycka innebörden av ett begrepp formar barnen tillsammans en innebördsförståelse av begreppet i det specifika sammanhanget.

Barnen sitter vid ett bord och äter flingor till mellanmål.

Elisa (2:7) säger "du har lite, jag har mycket" och pekar på Adams och sedan på sin egen tallrik.

Adam (3:1) mättar ett par centimeter mellan pekfinger och tumme och säger "så här lite", han ökar avståndet mellan fingrarna och säger "jag har så här mycket".

Elisa svarar "titta här, jag har mycket, mycket, mycket" och cirklar med pekfingret över tallriken med flingor.

Adam säger "sen vill jag ha mycket, jag vill ha mycket så här mycket", medan han visar upp alla fingrar på sin ena hand.

När Adam får mera flingor säger han "jag fick mycket, Elisa!"

Elisa säger "jag ska också ha mycket, mycket mera, så mycket, så här mycket" och visar upp alla tio fingrar.

Julia (3:9) sträcker upp sina händer i luften och visar tio fingrar "jag har så här mycket".

Adam och Teo (3:5) visar också alla sina tio fingrar.

Adam sträcker sin ena arm så högt han når "så här mycket".

Elisa får mera flingor och Adam säger "Elisa, du fick mycket".

Barnen i episoden ovan skapar själva möjligheter att urskilja innebörden i de begrepp som de använder för att beskriva mängden flingor de önskar få. Genom att variera sätten att gestalta "mycket flingor" blir innebörden allt tydligare och barnen finner ytterligare behov av att nyansera sina uttryck. På detta sätt utvecklas gestaltningarna också verbalt, bland annat genom upprepning av "mycket" samt omformuleringar såsom "mycket mera". Variationen gör på så sätt begrepps innebörden tydligare.

Julia och Erik bläddrar i nedanstående exempel i en bok där två hästar drar en kärra i olika miljöer. Erik är den som uppmärksammar hästarna när de dyker upp i de olika miljöerna och Julia bekräftar erfandet.

Erik (2:1) utbrister "oj, hästar!"

Julia (3:9) instämmer "jo, det är två hästar"

Erik bläddrar vidare och säger "där är de!", han bläddrar några sidor framåt och konstaterar "där är också två".

Erik uppmärksammar hästparet som likadana objekt som dyker upp i varierande sammanhang, vilket Erik tydligt ger uttryck för verbalt. Det är i detta exempel miljöerna som varierar medan hästparet är det konstanta. Erik uppmärksammar att hästarna är flera till antalet, vilket Julia även bekräftar genom att säga "två hästar". Erik verkar uppfatta uttrycket som ett begrepp för att beskriva de båda hästarna som dyker upp i olika sammanhang och får på så sätt betydelsefulla erfarenheter av talbegreppet "två", såsom att "två" inte är kontextbundet.

Talbegrepp är speciella på så sätt att deras numeriska innebörd inte är beroende av egenskaper hos det som räknas eller av sammanhanget. Att erfara variation av talbegrepp är därmed ytterst viktigt för att utveckla förståelse av den generella innebörden av talbegreppen och den delhelhetsrelation som begreppen förutsätter förståelse av. I följande episod erfar Emma med hjälp av en vuxen hur talbegrepp kan variera och vad som är det konstanta.

Emma (2:6) sitter vid matbordet efter morgonmålet. På bordet finns tallrikar och bestick. Emma säger "Siellä on kaksi" (finska för "där är två") och pekar på två tallrikar som är staplade på varandra. Stina (vuxen) pekar på en annan stapel med två tallrikar och säger "och där

är också två, och där är två knäckebröd". Stina pekar på en tallrik med två bitar knäckebröd och sedan på två skedar ovanpå ena stapeln med tallriker och säger "och där är också två".

Emma beskriver i episoden ovan det hon erfar, nämligen två tallriker. Stina tar fasta på det talbegrepp som Emma använder och visar på variationen av antalet två som kan ses på bordet. Emma har i detta fall möjlighet att urskilja hur begreppet "två" innebär att antalet är konstant men beskriver många olika saker. Endast genom variation kan den numerära innebörden av talbegreppen framträda.

6.2.2 Att dela och sammanföra

En viktig strategi för att komma underfund med hur delar förhåller sig till varandra och till helheten, är att på olika sätt arbeta med delar och konkret bilda helheter av dem. Detta görs genom att barnen delar upp mängder, för samman delarna igen och bildar större helheter. Barnen erfar då hur delar kan sättas samman på varierande sätt och bilda olika helheter.

I episoden nedan leker Hanna och Elisa med dockor som de flyttar mellan olika ställen. En vanlig docklek gör det möjligt för flickorna att erfar hur delar kan föras samman på varierande sätt och då bilda olika helheter. Ramarna för en helhet avgränsas tydligt i och med att dockorna flyttas mellan leksaksbilar och docksängar. Leken är ett sätt för barnen att konkret utforska relationen mellan delar och helhet där variationen skapar möjligheter att upptäcka samband.

Hanna (2:10) och Elisa (2:7) leker vid dockhuset. Hanna ställer två sängar intill varandra och lägger en docka i varje säng. Elisa kör fram två bilar som har var sin docka som chaufför. Elisa tar Hannas dockor ur sängarna och sätter en docka i var bil. Det sitter nu två dockor i varje bil. Hanna tar tillbaka en av sina dockor. Hanna tar tillbaka också den andra dockan och lägger båda dockorna i en dubbelsäng. Intill sängen står de två enkelsängarna, Hanna flyttar över den ena dockan från dubbelsängen till enkelsängen och går sedan ifrån leken.

Episoden visar hur delar som ingår i en helhet, i detta fall de båda dockorna, kan delas upp och föras samman igen på varierande sätt. Helheten blir konkret synlig i och med den avgränsning som bilarna och sängarna utgör. Bilarna och sängen har plats för två dockor medan enkelsängarna endast har plats för en docka var. Småbarn verkar ofta vara engagerade i sådana aktiviteter där de delar upp och för samman delar på varierande sätt. Följande episod visar också hur varierat del-helhetsrelationen kan erfaras med några muggar.

Adam (3:1) staplar fyra muggar på varandra på bordet, stapeln rasar, Adam knuffar ner muggarna från bordet. "Gun får post" säger Adam. Adam plockar upp tre av muggarna från golvet och lägger dem inuti varandra. Han placerar dem på bordet, vänder muggarna upp-och-ner och staplar dem på varandra igen. Adam tar isär muggarna och upprepar staplandet ytterligare ett par gånger innan han ger "post" åt Gun och säger "muminmammans, mumintrollets och muminpappas". Sedan ger Adam "post" åt ett annat barn.

Adam experimenterar med delar och helhet genom att först föra samman delar till en stapel. Han bildar då en helhet, som han sedan tar isär och för samman till en ny helhet i och med att han sätter kopporna inuti varandra. Han upprepar dessa aktiviteter flera gånger men utvidgar handlingen till att ge varje del till en namngiven person, Gun, eller till fantasifigurer som mumminmaman, mumintrollet och muminpappan. I och med variationen av sätt att dela upp och föra samman delar till olika helheter, blir delarna mer avgränsade och relationen till en helhet mer gripbar för Adam.

Att föra samman delar och att dela upp mängder är betydande erfarenheter för att förstå hur en mängd är konstant trots att delarna sprids ut eller byter plats. Barnen erfar detta till exempel genom att arbeta med en del åt gången och sedan samla ihop delarna till en mängd, dela upp dem en och en och sedan igen samla ihop mängden. Genom att variera sättet att dela upp och föra samman delar bekräftas erfandet av delarnas relation till helheten.

6.2.3 Att variera inom mängden

Att variera inom en mängd innebär att barnen redan avgränsat en helhet och dess delar. Delarna arbetas med på olika sätt och barnen får möjlighet att urskilja att omfånget visserligen påverkas när spridningen blir större eller mindre, men att den totala mängden och antalet delar förblir konstant. Relationen mellan delarna och helheten erfars på så sätt allt tydligare för barnen.

Teos byggande med geometriska figurer är ett exempel på hur barn kan upptäcka en generell idé i och med variationen i utförande. Han gör ett mönster som han verkar tycka är intressant, eftersom han upprepar mönstret flera gånger men på något varierande sätt. Slutresultatet är däremot detsamma och bekräftar den bakomliggande idé som han kan ha upptäckt.

Teo (3:5) lägger ut fem stavar efter varandra, ända efter ända, i en lång rad. Han placerar en kvadrat strax ovanför den yttersta stavens ända, lägger sedan en till kvadrat intill den tidigare kvadraten. Kvadraterna är tillsammans lika lång som en stav. Teo fortsätter lägga två kvadrater efter de tidigare kvadraterna ovanför stavarna. Teo gör en ny rad av stavarna och börjar lägga kvadrater från andra hållet ovanför stavarna, fyra kvadrater efter varandra, lika långa som två stavar efter varandra.

Genom att bygga ihop en likadan helhet flera gånger har Teo möjlighet att urskilja hur delarna bildar en likadan helhet, trots att delarnas placering på bordet varierar eller mönstret börjar byggas upp från ett annat håll. Detta är en viktig upptäckt eftersom det bidrar till förståelsen för konstanta mängder, det vill säga att en mängd består av ett antal delar och att spridningen på mängden inte har någon betydelse för antalet. Detta kan i sin tur ses som en form av abstrakt tänkande som har stor betydelse för att förstå och använda tal och räknepprinciper. Variationen är central i och med att Teo upptäcker något intressant och medvetet varierar förutsättningarna för erfandet.

Att relatera delar ur en mängd till delar ur en annan mängd och erfar att delarna hör ihop på något sätt, till exempel att de bildar par eller motsvarar varandra på något sätt, är också grundläggande för att förstå och använda tal och räknepprinciper. Att bilda par av delar från olika mängder innebär att urskilja delarna som separata enheter, vilka kan föras samman och då bilda nya helheter. Julias och Emmas klossbyggande där de för samman kulor

och kuber är ett gott exempel på detta (se sid. 119). Även mycket unga barn utforskar parbildande på liknande sätt, genom att föra samman föremål från olika mängder och erfar då hur delar från olika mängder kan paras ihop, till exempel att sätta två djurfigurers fötter fot-mot-fot (se sid. 112). Barnen i studien utforskar också relationen mellan delar och helhet genom att föra samman delar som inte nödvändigtvis har samma yttre egenskaper, men ändå uppfattas kunna höra ihop. Att relatera delar från mängder av helt olika slag ger ett erfalande av abstraktion som också är nödvändigt för att förstå talbegreppen och räkneprinciperna. Vera parar i nedanstående exempel ihop sin ena hand med en sko och sin andra hand med andra skon. Senare parar hon också ihop sina fötter med samma skor.

Vera (2:9) sitter i tamburen bland de andra barnen som klär på sig för att gå ut på gården. Vera har sina skor på händerna, hon sjunger "små grodorna" och skuttar fram på alla fyra. Hon stiger upp från golvet, stiger i skorna och går iväg.

Vera urskiljer mängderna två händer, två fötter och två skor på varierande sätt i och med att hon parar ihop samma antal delar från olika mängder. I och med variationen finns det möjlighet att upptäcka den numerära relationen som mängderna har, det vill säga att det finns lika många, två, av varje sort. När föremål eller andra fenomen skiljs ur och relateras till varandra på detta sätt, är det också möjligt att jämföra de ursprungliga mängdernas storlek, även utan att använda talbegrepp. Variationen är nyckeln till att upptäcka den numerära innebörden.

6.3 Rimlighet

Det kritiska villkoret rimlighet innebär att barnen gör uppskattningar och värderar vad som är rimligt i en viss situation. Det kan vara frågan om att bestämma lämplig begrepps innebörd, att bedöma storleken på ett utrymme eller att uppskatta en mängds omfattning. Genom att relatera till sina tidigare erfarenheter resonerar sig barnen fram till vad som är rimligt i den aktuella situationen, vilket tar sig uttryck i deras handlingar, verbala uttryck och kroppsliga gestaltningar. Rimlighet är ett kritiskt villkor för lärande av matematik, eftersom matematik till stor del handlar om att på olika sätt bedöma och beskriva relationer mellan föremål och företeelser i omvärlden.

6.3.1 Att relatera till kroppen

Den egna kroppen är ett utmärkt redskap för småbarn att använda som referens i erfandet av omvärlden. Barnens erfarenheter av hur långt de når eller hur stora händer de har kan fungera som utgångspunkt för att utföra rimliga handlingar eller använda lämpliga begrepp i olika situationer.

I episoden nedan diskuterar en vuxen och ett barn kroppsdelar och deras storlek. Diskussionen rör sig kring vilka kroppsdelar som är långa eller korta, stora eller små. Barnets egen uppfattning av sin egen kropp är här betydelsefull för vilka begrepp som barnet anser vara beskrivande.

Adam (3:1) sitter i Gns (vuxen) famn och får hjälp att klä på sig tröja och ytterkläder.

Gun säger "ni har så långa ben, eller jag har så korta armar".
Adam säger "jag har också långa ben och så här stora händer" och sträcker ut armen så långt han når, han säger sedan "nej, jag har lilla händer och såna här'na, sån här'na stora" och klappar sig på armen.
Gun frågar "armar, då, långa armar?"
Adam svarar "jo".
Gun fortsätter fråga "eller menar du muskler?"
Adam svarar "nej".
Gun säger "armar".
Adam instämmer och säger "jo".

Adam diskuterar med den vuxnas hjälp vilka begrepp som är rimliga i förhållande till kroppen och dess proportioner. Han har en uppfattning av sin egen kropps relation till omvärlden och denna uppfattning ligger till grund för vilka begrepp som används i just denna situation.

Barnen i studien bedömer ständigt rummet de befinner sig i och gör bedömningar huruvida de kan utföra en handling eller ej. Att utgå från den egna kroppen verkar vara ett väl fungerande sätt att uppskatta utrymme. I följande episod prövar Emanuel olika stolar och sittplatser på småbarnsavdelningen. Sittplatserna är varierande, vissa är lätta att sätta sig på, vissa är smala och på andra platser ryms flera barn att sitta. Hur sittplatserna skiljer sig åt erfars genom att Emanuel konkret prövar de olika platserna. På så sätt utgår han från den egna kroppen och den upplevelse det ger honom att sitta på de olika platserna, vilket kan bidra med erfarenheter han behöver för att göra en rimlig uppskattning av hur mycket utrymme det behövs för att också ett annat barn ska ha rum att sitta på samma bänk.

Emanuel (2:3) sätter sig på en liten stol, går genast vidare till fönstret där han försöker sätta sig i fönsternischen men halkar ner. Han vänder sig om och klättrar upp i nischen, sätter sig och går sedan strax tillbaka till de små stolarna. Emanuel går till dockvrån och sätter sig på en bänk. Anna säger "jag vill sitta här... jag kommer inte in" och Emanuel makar sig lite åt sidan och klappar på den nu lediga bänkplatsen bredvid honom.

I episoden är det rummet och bedömningen av plats och utrymme som är i fokus. Genom att utgå från sin egen kropp och utsträckning i rummet kan Emanuel urskilja också hur mycket plats ett annat barn kan tänkas behöva. Anna gör honom uppmärksam på problemet och får honom att göra en rimlig bedömning av utrymmet, vilket blir tydligt i och med att han bereder plats åt Anna bredvid honom.

I studien framkommer att de yngsta barnen i många olika sammanhang gör bedömningar av sin omvärld och vad som är rimliga aktiviteter utgående från deras egen förmåga genom att relatera till den egna kroppen. Att småbarn stiger upp på lådor eller stolar är ett sätt att nå högre, där relationen till den egna kroppen är en utgångspunkt. De små barnens erfarende karakteriseras då av en bedömning av rimligheten i vad de själva klarar av, när de behöver någon form av hjälp och vilken slags hjälp som är lämplig. De äldre barnen i studien relaterar också sitt erfarende till den egna kroppen för att genomföra aktiviteter, men ger också uttryck för sina erfarenanden i kommunikation med andra.

Vera (2:9) bygger en stapel av stora avlånga klossar. Hon bygger tills stapeln är lika hög som hon är och säger "sådär, blir det högt upp i taket!" samtidigt som hon sträcker sina händer mot taket. Martina (vuxen) säger "ända upp i taket". Vera säger "ända upp i taket" och fortsätter bygga. När hon inte längre når att trycka fast fler klossar, hämtar hon en stol och ställer den intill stapeln, klättrar upp på stolen och trycker fast fler klossar. En vuxen tittar in i rummet och frågar "är den högre än vad du är?" Vera svarar "ja", den vuxna säger "så måste du ha stolen för att kunna bygga". Vera fortsätter bygga och får hjälp av Jonna (vuxen) när hon inte längre når att trycka fast fler klossar. Martina säger "åhå, vad högt, har du byggt själv, Vera?" Vera svarar "jo, och Jonna".

I episoden relaterar Vera byggandet till sin egen kropp. I och med att klossarna är så stora att konstruktionen snabbt blir hög, behövs hjälp av något slag för att fortsätta bygga. Vera finner snabbt en lösning på problemet när hon inte längre når att sätta fast fler klossar och erfar då vad som är ett rimligt hjälpmedel för just den aktiviteten, i detta fall en stol. Att stiga upp på en stol förlänger kroppen och gör det möjligt att bygga vidare, men när Vera därefter byggt så högt att hon inte längre når själv får hon hjälp av en vuxen som når högre. Vera är dock hela tiden medveten om hur byggandet, stapeln av klossar och hennes egen kropp är relaterade till varandra, vilket blir tydligt när hon säger att det visserligen är hon som byggt en så hög stapel, men Jonna har också hjälpt till. Rimligheten framkommer i de bedömningar Vera gör; när hon hämtar en stol för att bygga vidare och när hon uttrycker att en vuxen varit nödvändig hjälp i byggandet.

6.3.2 Att beskriva mängder med räkneord

Barnen i studien kommer i olika sammanhang i kontakt med räkneord, tal-symboler och räkneramsan. De har erfarenheter av att räkneord ofta används för att beskriva ett antal föremål. Även om barnen inte har en djupare förståelse av räkneordens numeriska innebörd så har många småbarn en föreställning om att räkneord som kommer senare i räkneramsan beskriver en större mängd. Barnen bedömer då rimligheten i talbegreppen och gör en uppskattning av hur stor den mängd är som de försöker beskriva.

I följande episod markerar Elisa tydligt att det är två kattfigurer som hon leker med, inte en katt, som en vuxen föreslår. Hon urskiljer den betydelsefulla skillnaden i antalsinnebörd mellan "katten" och "två katter".

Elisa (2:7) står vid ett bord och plockar djurfigurer i en bondgård. Elisa pratar för sig själv och leker med några figurer. Maj (vuxen) frågar "vem säger du 'hej' åt?" Elisa visar upp en katt. Maj frågar "kissekatten?" Elisa svarar "det är TVÅ kissekatter" och visar upp också en annan katt. Sedan fortsätter hon leka, djuren hälsar på varandra och byter platser.

Elisa visar tydligt att hon uppfattar en numerär innebörd i ordet "två". Hon betonar räkneordet och visar upp en katt som den vuxna inte tidigare sett och fokuserar följaktligen två stycken katter. Bedömningen av rimlighet synliggörs i att Elisa finner behov av att förtydliga för den vuxna att det är fler än en katt som behövs för att hälsningsproceduren, som leken uppenbarligen går ut på, skall kunna fullföljas.

Anna visar i sina verbala uttryck i följande episod hur hon tänker sig att flera enskilda delar tillsammans bildar en större helhet. Hon delar med sig av sina leksaksbilar och funderar sedan igen på antalet bilar hon har kvar. Något har uppenbarligen hänt med den totala mängden efter att hon gett bort en del. Anna tycks fundera över vad som hänt och gör också en uppskattning av hur många bilar som finns i parkeringshuset, i och med att hon använder olika räkneord för att beskriva antalet.

Anna (2:4) sätter sig på golvet vid ett parkeringshus. Hon sorterar bilar och säger "här är ännu en... och så kommer det en till... och så stoppar jag dit i den stora bucklan". Anna snurrar på karusellen på parkeringshuset "det är så många här". Sakari tar en bil från parkeringshuset och Anna protesterar "nu hade jag den!" Emanuel kryper fram till Anna, Anna räcker honom en bil och frågar "vill Emanuel ha den?" Anna mumlar för sig själv, petar på bilarna i huset och säger "så har jag dom där fyra".

Anna lägger till en bil åt gången och ger bort en bil till ett annat barn. Hon konstaterar att hon har ett visst antal bilar kvar, även om hon kanske inte urskiljer det exakta antalet, men nog att mängden förändrats i och med ökningen och minskningen. Anna ger uttryck för att hon har viss insikt i vad denna numerära förändring innebär, vilket visar sig i sättet att använda räkneord och uppskatta mängder.

I följande episod synliggörs hur Anna jämför antalet prickar och uppskattar likheter och skillnader i antalet, samt erfar hur räkneorden i räkneramsan motsvaras av fler eller färre prickar.

Anna (2:4) plockar bort pusselbitar ur en pusselram, där varje pusselbit och dess plats i ramen har motsvarande antal prickar. Anna pekar på en plats i ramen och säger "bara en prick och så bara två". Anna försöker få ner en bit som inte passar. Martina (vuxen) förklarar "nej, du måste titta på prickarna, här är tre, då måste du se hur många prickar det är där". Anna lägger snabbt resten av pusslet, och plockar sedan bort alla bitar ur ramen igen. Anna tittar på pusselbitarna och Martina frågar "var ska den vara?" Anna pekar på en plats i ramen och säger "där". Martina pekar på prickarna på pusselbiten och säger "där är en, två, tre, var ska den vara?" Anna pekar på en plats på ramen och Martina räknar "där är en, två, tre" medan hon pekar på samma plats. Anna säger "där ska den vara". Anna håller upp en annan pusselbit mot Martina som säger "där är en, två". Anna sätter ner biten på sitt ställe och lägger resten av bitarna på plats. Anna säger "här var bara en prick" och pekar på sista tomma platsen på ramen, Martina instämmer "där var bara en prick".

I episoden jämför Anna med Martinas hjälp antalet prickar på pusselbiten med antalet prickar i pusselramen. Anna är medveten om att antalet prickar ger ledtrådar om var på pusslet en viss bit ska sättas. Den vuxna stöder henne i uppgiften genom att uppmärksamma Anna på prickarnas antal och syftet med prickarna. Här jämför Anna ett-till-ett, prick-mot-prick och löser uppgiften. Rimligheten framträder i jämförelsen av prickar och att det ska vara lika många prickar på fiskarna som på pusselramen. Anna gör också bedömningar av mängderna med hjälp av räkneorden, till exempel tycks hon anse att en och två prickar är små mängder.

6.3.3 Att gestalta matematiska begrepp

Att gestalta matematiska begrepp med den egna kroppen eller med hjälp av olika föremål innebär att barnen konkretiserar begreppen så att innebörden blir synlig och möjlig att urskilja för dem själva, men också för andra barn och vuxna. Detta betyder i sin tur att barnen kan frångå det direkt observerbara och koppla samman det begrepp de tänker på med en kroppslig gestaltning, eller gestaltning med andra föremål där innebörden och idén är densamma.

Att jämföra föremål eller figurer ett-till-ett och att bilda par är en grundläggande aspekt av förståelsen av mängders del-helhetsrelationer. Att delar kan jämföras numerärt, ett-till-ett, är därmed en förutsättning för insikten att konkreta föremål kan motsvara delar i en mera abstrakt mängd, såsom ett finger mot ett år. Barnen inser då att olika objekt kan få samma innebörd och symbolisera andra föremål, som en tidig förståelse för innebörden av räkneord.

Tim (3:5) sitter bredvid Adam (3:1), de gör 'glasögon' med händerna, plötsligt frågar Adam "är du så här" samtidigt som han visar upp tre fingrar.

I den daghemsmiljö som barnen deltar i är det vanligt att gestalta ålder genom att visa upp fingrarna, tre fingrar när barnet är tre år gammalt och fyra fingrar när barnet fyllt fyra år. Adam verkar fundera över hur många fingrar Tim skulle visa om man frågar honom hur gammal han är och frågar om Tim är motsvarande tre fingrar gammal. Adam urskiljer att det finns en relation mellan antalet fingrar och hur gammal någon påstår sig vara. Antalet fingrar har alltså en motsvarighet i antalet år, även om det av episoden inte helt framgår hur Adam förstår denna relation. Han tycks dock göra en rimlig uppskattning av att Tim kan tänkas vara lika gammal som han själv.

I följande exempel gestaltar barnen mängder på varierande sätt, med verbala uttryck, genom att visa ett mått mellan fingrarna, ringa in mängden, visa alla fingrar på en hand, visa båda händerna med utsträckta fingrar och genom att sträcka en arm så högt upp barnet når. Barnen gestaltar på dessa varierande sätt mängden och olika beskrivande begrepp.

Barnen sitter vid ett bord och äter flingor till mellanmål.

Elisa (2:7) säger "du har lite, jag har mycket" och pekar först på Adams och sedan på sin egen tallrik.

Adam (3:1) måttar ett par centimeter mellan pekfinger och tumme och säger "så här lite" ökar avståndet mellan fingrarna "jag har så här mycket"

Elisa säger "titta här, jag har mycket, mycket, mycket" och cirklar med pekfingret över tallriken med flingor.

Adam säger "sen vill jag ha mycket, jag vill ha mycket så här mycket", medan han visar upp alla fingrar på sin ena hand.

När Adam får mera flingor säger han "jag fick mycket, Elisa!"

Elisa svarar "jag ska också ha mycket, mycket mera, så mycket så här mycket" och visar upp alla tio fingrar.

Julia (3:9) sträcker upp sina händer i luften och visar tio fingrar medan hon säger "jag har så här mycket".

Adam och Teo (3:5) visar också alla sina tio fingrar.

Adam sträcker sin ena arm så högt han når, upprepar handuppsträckningen "så här mycket".

Elisa får mera flingor och Adam säger "Elisa, du fick mycket".

Barnen gestaltar i episoden ovan på många olika sätt hur de uppfattar begreppen "lite", "mycket" och "mycket mera". Gestaltningarna visar också hur barnen urskiljer skillnaderna i begreppen. Genom att öka antalet fingrar som visas och genom att sträcka upp händerna i luften visar barnen skillnaden från det tidigare gestaltade. På liknande sätt resonerar Julia och Teo också kring begreppet "lite".

Vid frukosten sitter Teo (3:5), Julia (3:9) och Maj (vuxen) och pratar om vägen till daghemmet.

Teo säger "då var det halt".

Julia säger "inte var det något halt".

Teo svarar "men lite, på gatan".

Maj konstaterar "ja, kanske på några ställen, men det är lite".

Julia frågar "så lite" och måttar med tumme och pekfinger "så här lite".

Teo säger "pikulite" (finlandssvenskt uttryck för "ytterst lite") och visar med tumme och pekfinger strax framför ögonen och kisar.

Teo och Julia har först olika uppfattningar av huruvida det var halt på vägen till daghemmet eller ej. Julia går med på att det kunde ha varit lite halt och gestaltar "lite" med hjälp av fingrarna. Teo ger uttryck för något ännu mindre genom att hålla fingermåttet nära ögonen samtidigt som han kisar och säger "pikulite". Med hjälp av de kroppsliga gestaltningarna uppskattar barnen i de två ovan nämnda episoderna rimligheten i de begrepp som används för att beskriva det de erfarit.

Genom att gestalta begrepp på olika sätt visar barnen vilken betydelse de avser i en situation och kan på så sätt förmedla sin förståelse till andra barn och vuxna. På detta sätt erfar barnen också att begreppen kan uppfattas på något olika sätt och får därmed fler erfarenheter av begreppens användningsmöjligheter. Med ökande erfarenhet blir barnen skickligare att använda och visa rimliga begrepp, vilket är av stor betydelse för problemlösning och färdigheten att uppskatta rum, tid, mängd och antal.

6.4 Hållpunkt

Hållpunkt är ett kritiskt villkor för barns erfarenhet och lärande av fenomen i omgivningen eftersom hållpunkterna stöder barnens fokusering av ett fenomenets olika aspekter. En hållpunkt är det som skiljs ur och fokuseras och kan vara ett konkret föremål som nya föremål jämförs mot, men också tidigare erfarenheter kan vara en hållpunkt som barnen uttryckligen relaterar sina nya erfarenheter till. Också barnens sätt att skapa struktur och ordning i sin omvärld är betydelsefulla som hållpunkter för att barnen skall ha något att befästa sina erfarenheter till. Barnens framväxande förståelse synliggörs i situationer där barnen tar fasta på något konkret och använder det konkretiserade erfarna som en utgångspunkt för att utforska nya fenomen eller för att ta nya perspektiv och således urskilja andra aspekter av något fenomen i omvärlden.

6.4.1 Att relatera till en konkret referenspunkt

När barnen har för avsikt att undersöka och förstå ett föremåls egenskaper eller en företeelse i omvärlden, är ett ofta väl beprövat och fungerande sätt att utgå från en referenspunkt och jämföra det intressanta fenomenet med något redan tidigare känt. Referenspunkten är alltså något konstant som inte förändras medan det som jämförs mot referenspunkten kan variera. Barnen erfar ofta likheter genom att på detta sätt relatera till något konstant som då fungerar som hållpunkt i erfandet.

För de yngsta barnen är kroppen måhända det bästa redskapet för jämförelse eftersom den egna kroppen och dess proportioner torde vara välbekanta för barnen redan i tidig ålder. I de yngre barnens utforskande är det en utmaning att utforska på vilket sätt omvärlden förhåller sig till barnet och de prövar gärna detta genom att jämföra med den egna kroppen. I föreliggande studie ses barnen ofta relatera till en konkret referenspunkt när de undersöker likheter och skillnader i storleksrelationer. Jonah i episoden nedan utgår från den egna kroppen när han undersöker den stora lådan med klossar på golvet.

Jonah (1:1) plockar legoklossar ur en stor låda och visar upp klossarna för de andra barnen. Han plockar fler klossar ur lådan, rör omkring med handen och kryper sedan in i lådan. Martina (vuxen) frågar "varför ska du alltid in i lådan? Var är du nu?" Sara (1:9) ställer sig vid lådan, protesterar och skakar kanterna. Martina frågar Sara "var sitter han?" Jonah kryper ur lådan, rör om med händerna bland legoklossarna i lådan och kryper in i den igen, sedan ur lådan och i lådan flera gånger innan han kryper bort från lådan.

Genom att krypa i och ur den stora lådan erfar Jonah konkret hur stor lådan är i förhållande till honom själv. Den vuxna förstärker erfandet när hon säger att han sitter i lådan. De äldre barnen på småbarnsavdelningen, som har mera erfarenheter av omvärlden och föremålen i den, använder med fördel en konkret referenspunkt i ett tydligt syfte, såsom att hitta likheter. I synnerhet när barnen lägger pussel utgår de gärna från en pusselbit och söker bland de ännu inte lagda bitarna efter en bit som hör ihop med den utvalda referensbiten.

Julia (3:9) lägger ett pussel med ett trettiotal bitar i en ram. Hon lägger en hörnbit i ramen, passar in en annan hörnbit och ytterligare en tredje hörnbit. Julia prövar sig sedan fram genom att välja en bit åt gången och försöka passa in dem på en viss plats tills rätt bit passar. Då fortsätter Julia att pröva en bit åt gången på en ny plats tills också den platsen har fått rätt bit. Julia fortsätter på detta sätt tills pusslet är klart och väljer därefter ett annat pussel som hon lägger med samma strategi.

Strategin som Julia använder fungerar, men är relativt arbetskrävande. Däremot verkar det vara ett uppskattat och väl fungerande sätt för henne att lösa problemet. Hon håller den utvalda platsen i pusslet i fokus och prövar pusselbitar mot den tills hon hittar den bit som passar. Samtidigt håller hon i minnet vilka bitar som redan prövats och vilka som ännu är oprövade. Hållpunkten är i detta fall den plats och den form på pusselramen som skall fyllas av en specifik pusselbit.

Att relatera till en konkret referenspunkt fungerar väl när barnen utforskar pusselbitar och kommer underfund med hur bitarna relaterar till varandra. Men också när barnen uppmärksammar likheter och skillnader i omvärlden mera spontant är det något specifikt konstant som de relaterar till. Olika föremål kan ha vissa likheter men skilja sig från varandra i fråga om andra egenskaper. Föremål kan därför relateras till varandra på varierande sätt och detta erfar barnen tidigt genom att relatera föremålen till varandra och på så sätt upptäcka vad som skiljer dem åt och vilka likheter det finns. Adrian gör detta tydligt i följande episod där han prövar större och mindre klossar i ett mått. Måttet fungerar som en konkret referenspunkt som klossarna prövas mot. Hållpunkten är också här det konstanta som han relaterar det nya till.

Adrian (1:8) håller en kopp i ena handen och ett decilitermått i andra handen. Han låtsasdricker turvis ur dem båda, lägger koppen på ett bord och håller måttet framför munnen. Adrian lägger en legokloss i måttet och låter klossen falla ur måttet ner i en låda. Adrian tar en större kloss från golvet och trycker ner den i måttet, går sedan omkring och släpper slutligen klossen och måttet på golvet. Han tar upp måttet ännu en gång, dricker ur det och viftar omkring sig med måttet.

Adrian skiljer ur hur klossarna relaterar till varandra genom att ta koppen som hållpunkt. I och med att han prövar olika klossar i samma kopp har han möjlighet att upptäcka hur de varierar i storlek. Att utforska storleksrelationer på detta sätt är betydelsefullt för att förstå hur föremål relaterar till varandra och vidare kan sorteras enligt sina olika egenskaper, där storlek kan vara en sådan aspekt.

I följande episod erfar Vera på ett mycket konkret sätt begreppet "högt". Hon utgår från sig själv och upptäcker att hon behöver en stol för att nå högre och fullfölja avsikten att bygga ett högt torn av klossar. Vera gestaltar sin avsikt genom att visa med lyfta händer hur högt hon tänker bygga, vilket är en konkret gestaltning av hur högt torn hon faktiskt kan bygga med de klossar som finns tillgängliga.

Vera (2:9) plockar stora byggklossar ur en låda och sätter fast dem på varandra på golvet. Vera säger "ska bygga en STOR, ända upp i taket". Nora (1:6) försöker trycka fast en mindre kloss, Vera säger "nej, Nora!" och tar bort Noras kloss, "det ska vara sådär" och sätter fast en större kloss i stället. Vera hämtar flera stora klossar och bygger tills stapeln är lika hög som hon "sådär, blir det högt upp i taket!" och sträcker upp sina händer mot taket. Martina (vuxen) säger "ända upp i taket" och Vera svarar "ända upp i taket". Vera fortsätter bygga. När hon inte längre når att trycka fast fler klossar, hämtar hon en stol och placerar den intill stapeln, klättrar upp på stolen och trycker fast några klossar ovanpå varandra. En vuxen tittar in i rummet och frågar "är den högre än vad du är?" Vera svarar "ja", den vuxna fortsätter "så måste du ha stolen för att kunna bygga". Vera fortsätter bygga och får hjälp av Jonna (vuxen) när hon inte längre når att trycka fast fler klossar. Martina säger "åhå, vad högt, har du byggt själv, Vera?" Vera svarar "jo, och Jonna". Martina fortsätter "ända upp till äpplena där i trädet". Det hänger trädgrenar strax under taket med äpplen och andra dekorationer. Vera kliver upp på stolen och raserar stapeln. Vera bygger en ny stapel och tar stolen till hjälp för att nå, hon utbrister "oj, vad högt, jättehögt, jo, det

blir det". Vera sätter sig på stolens ryggstöd med ryggen åt stapeln, sitter en lång stund, sätter sig ännu ner på stolen och tittar rakt fram. Martina frågar "vad funderar du Vera?" Vera svarar inte utan hämtar fler klossar, stapeln rasar och hon säger "jag måste bygga på nytt, riktigt högt". Hon sträcker händerna upp över huvudet och springer sedan iväg en stund. När hon kommer tillbaka raserar hon stapeln, säger "äppel", drar stolen under äppeldekorationerna i taket, klättrar upp på stolen, klättrar ner igen, tittar uppåt, flyttar stolen, stiger upp på stolen igen och sträcker sin arm högt upp mot dekorationerna, sedan sätter hon sig på stolen.

Vera tar i denna episod flera hållpunkter vartefter byggandet framskrider. Hennes byggande med stora klossar ger uppenbarligen många erfarenheter som hon reflekterar över i byggandet, och även efteråt. I episoden blir det synligt hur hon relaterar byggandet av tornet både till sig själv och till sin omgivning, bland annat när hon säger att hon vill bygga ett torn som når ända upp till taket där äppeldekorationerna hänger. De hållpunkter som hon relaterar sin förståelse av höjden på byggkonstruktionen till är sin uppfattning av hur högt hon når, en stol gör att hon når och kan bygga högre samt att konstruktionen kan nå ända upp till taket där äppelna hänger. Hållpunkterna gör erfandet mera konkret och gripbart, vilket gör att hon också har möjlighet att urskilja olika aspekter av fenomenet och på så sätt fördjupa sin förståelse.

I lekaktiviteter framträder även småbarns förmåga att skifta perspektiv, vilket vidgar möjligheterna att erfara matematiska begrepp på varierande sätt. I synnerhet när det är fråga om att förstå och använda begrepp så är det viktigt att klargöra i relation till vad något uppfattas som högt, lågt, många, mycket eller lite. Vera tar i följande episod en legofigurs perspektiv, varvid det torn hon byggt upplevs som mycket högt. Hållpunkten är då legofiguren och dess perspektiv, till vilket omgivningen relateras och tornet erfars som "högt".

Vera (2:9) har byggt ett torn av legoklossar. Hon lägger en liten ask överst och tornet rasar ihop. Vera bygger upp tornet igen och går runt det. Hon drar ner tornet med tröjärmen. Vera tar loss klossar och trycker fast dem igen. När tornet är i brösthöjd med Vera sätter hon en liten legostol överst. Martina (vuxen) frågar "vem ska sitta på stolen?" Vera söker bland klossarna på golvet och tar upp en liten docka. Martina säger "jag tror inte den riktigt kan sitta, försök med den gubben" och pekar på en annan figur på golvet. Vera tar den andra figuren och sätter den i stolen "håll i dig bara, håll i dig!" ropar hon åt figuren. Martina säger "sätt den att sitta, på stjärten, böj benen". Vera ropar "faller tornet... faller tornet" Martina frågar "tror du det? Om du bygger något högre så kan det nog falla." Vera raserar tornet, bygger upp det igen och ropar "håll i dig hårt, hårt", Vera drar ner tornet av misstag och fortsätter sedan med andra aktiviteter.

Att erfara och använda matematiska begrepp görs med fördel genom att gestalta avsikten med kroppsliga uttryck eller genom att åskådliggöra innebörden ur ett speciellt perspektiv. När barnen gestaltar begreppen synliggörs också hur de uppfattar begreppens innebörd i den situationen. Vera urskiljer till exempel begreppet "högt" på varierande sätt när hon tar

olika perspektiv och gestaltar begreppet i olika situationer, "högt" utgående från sig själv och sin egen upplevelse av att bygga ett torn som når upp till taket och "högt" utgående från en liten leksaksfigur som sitter på toppen av ett torn som når Vera till magen. I och med dessa olika konkreta hållpunkter att relatera erfarenheterna till, som konkretiseras i de referenspunkter som hon utgår från, visar Vera hur hon förstår begreppets övergripande innebörd men också dess olika nyanser.

6.4.2 Att relatera till tidigare erfarna fenomen

Barnen i studien ger i många fall uttryck för att de relaterar sina erfarenheter till tidigare erfarenheter. De tidigare erfarna fenomenen fungerar då som hållpunkt för att fokusera det nya mot det tidigare kända och urskilja hur fenomenet skall förstås i just den aktuella situationen. Detta har betydelse för barnens förmåga att göra bedömningar och uppskatta till exempel vilket begrepp som bäst beskriver storleken på ett föremål. Att ta hållpunkt i tidigare erfarna fenomen är också viktigt för att hålla kvar fokuseringen på delar och helhet samt för att upptäcka samband till exempel i problemlösningssituationer.

Erik i exemplet nedan beskriver den bild som pusslet skall föreställa och han känner igen olika kroppsdelar av figurer på pusselbitarna. Han har alltså en uppfattning av hur helheten skall se ut och strävar efter att lägga ihop delarna till denna helhet. Det svåra tycks vara att skilja ur hur delarna relaterar till varandra och få dem att bilda det mönster han föreställer sig. Med en vuxen som stöd lyckas Erik hitta sådana hållpunkter i tidigare välbekanta fenomen, såsom en brandbil och brandmän, vilket hjälper honom att fokusera delarnas relation till helheten.

Erik (2:1) sitter med ett pussel som föreställer en brandbil och brandmän. Han börjar plocka bitarna i pusselramen. Stina (vuxen) frågar "kan gubbarna stå med fötterna i taket?" och hjälper Erik att vända pusselbitarna. Stina uppmärksammar Erik på pusselbitarnas mönster och säger att fel satta bitar "kommer lite utanför kanten". Erik kämpar med bitarna som han inte riktigt får att passa och ber Stina om hjälp. Erik ler stort när pusselbitarna slutligen passar.

Erik vet hur slutresultatet skall se ut men han har vissa svårigheter att relatera delarna till varandra och till helheten. Stina hjälper Erik genom att ge stöd för minnet och koppla till sådant som Erik redan känner till. Erik lyckas tydligen då få grepp om hur delarna bör sitta för att bilda den eftertraktade helheten.

Tre år gamla Julia i följande episod har rätt stor erfarenhet av likheter och skillnader mellan objekt av olika slag i omvärlden. I episoden relaterar hon den smula bröd hon har kvar till den smörgås hon från början hade. Julia förmår alltså att relatera till föremål som inte är direkt närvarande i situationen och bedöma likheter och skillnader mellan det observerbara och det imaginära.

Julia (3:9) har ätit nästan en hel smörgås som mellanmål. Hon håller den sista brödsmulan mellan pekfinger och tumme och säger "se, vad liten smörgås", hon måttar med andra handens pekfinger och tumme och säger "så här liten".

Brödsmulan som Julia håller mellan sina fingrar uppfattas som liten i förhållande till den smörgås hon fick en stund tidigare. Hon tänker sig den smörgås hon fick i början och relaterar smulan till den.

Att bygga en konstruktion utifrån en tänkt modell förutsätter att barnet fokuserar modellen i sitt medvetande samtidigt som barnet lägger ihop del efter del så att modellen efterliknas. Barnet tar då utgångspunkt i det tidigare erfarna, som då fungerar som modell. Samtidigt är de konkreta delarna viktiga att urskilja och se hur de kan föras samman för att forma en konstruktion som liknar modellen. Teo tycks ha en klar idé om vad han har för avsikt att bygga och håller fokuseringen medan han bygger med geometriska figurer.

Teo (3:5) sitter vid ett bord och lägger mönster med geometriska figurer. Han lägger en kvadrat i mitten och långa stavar ut från kvadratens sidor och säger "sol". Teo byter ut kvadraten i mitten mot en annan kvadrat. Teo lämnar solen och lägger fem stavar i olika färger efter varandra i en lång rad och placerar fyra kvadrater intill. Nu säger Teo "domkyrka", och visar "där går man in". Därefter bygger Teo nio kvadrater intill varandra (3x3) och lägger stavar ut från sidorna och säger "solen".

Teo har en klar idé om vad han bygger. Detta blir synligt i och med att han återkommer till det ursprungliga mönstret och benämner det också på samma sätt. "Solen" har utvecklats något när han bygger den andra gången, men den ursprungliga idén är densamma. "Domkyrkan" verkar också vara något som Teo har erfarenhet av och konkretiserar i byggandet, i och med att han beskriver var man går in i kyrkan. Idén om vad han skall bygga är den hållpunkt som stöder fokuseringen och byggandet.

6.4.3 Att kategorisera

Att kategorisera innebär att välja någon egenskap hos föremål eller företeelser och gruppera flera objekt enligt det kriterium som valts ut. Kategorisering innebär att barnen samtidigt förmår fokusera vissa aspekter av ett fenomen och välja att ignorera andra. Den egenskap som barnen väljer att fokusera fungerar som hållpunkt i aktiviteten.

I sin mest enkla form handlar kategorisering om att urskilja likheter och skillnader samt att lyfta fram det gemensamma. Detta förekommer till exempel när ett barn upptäcker liknande mönster eller färger på klädesplagg och uppmärksammar likheter verbalt (se sid. 91, 92). Även om barnen inte alltid uttrycker verbalt hur de tänker sig att vissa kategorier skiljs ur, så blir det tydligt i deras handlande hur de väljer att gruppera och kategorisera samt vilken aspekt som avgör fokuseringen.

Emma (2:6) plockar ringar på en stång. Ringarna är olika stora men det finns två ringar av varje färg. Bottnen till stången är röd och Emma sätter på en röd ring, därefter två gröna, två gula och två blå. Emma hämtar en röd ring från ett bord och frågar efter något. En vuxen säger "där, Julia har två, jo, du får ta den ena". Emma hämtar den röda toppen till stången.

Emma bryr sig i detta exempel inte om storleken på ringarna, utan det är färgen som intresserar henne. Detta blir synligt i och med att hon konsekvent plockar två ringar av samma färg efter varandra på stången. Den hållpunkt

som hon behöver för att utföra kategoriseringen är färgen hos ringarna. Färgen skiljs ur och är avgörande för hanteringen av föremålen. Färg är en egenskap som småbarn gärna tycks vilja gruppera enligt, men form är också en vanlig utgångspunkt i kategoriserandet. Att kategorisera utgående från form innebär att barnen skiljer ur formen hos föremål som det centrala. Samtidigt spelar färg eller andra egenskaper mindre roll, vilket blir synligt till exempel i olika sorteringsaktiviteter.

Ida (2:8) sitter vid ett bord med en magnetavla framför sig. I en låda intill finns figurer i olika geometriska former i varierande färger. Ida väljer ut en typ av geometriska figurer åt gången och sätter dem på rad med jämna mellanrum på tavlan. Färgerna på figurerna varierar men Ida väljer först ut trianglar, sedan små cirklar, stavar och slutligen kvadrater. Ida sitter en lång stund vid aktiviteten och ordnar figurer på rad enligt geometrisk form.

Att kategorisera innebär för Ida att hon skiljer ur likheter och skillnader i formen på figurerna och grupperar varje form omsorgsfullt. Formen är i detta fall hållpunkt för erfandet.

6.4.4 Att strukturera händelser

Tid är ett svårgripbart men viktigt fenomen för barnen på småbarnsavdelningarna. För att få grepp om fenomenet tid visar sig barnen i studien sträva efter att strukturera dagen enligt händelser. Ofta handlar det om händelser som sker varje dag enligt ett återkommande mönster, vilket gör att barnen förväntar sig att en speciell aktivitet sker efter en annan. Förväntningarna på dagens händelser utgör hållpunkter för barnen som då kan skapa sig en uppfattning av tid.

Efter middagsvilan sitter Anna (2:4) på golvet och leker med småbilar. Anna frågar Ruth (vuxen) om Lotta redan har åkt hem. Sakari (3:2) säger "Lotta farit hem, sedan far Sakari hem". Anna säger "de andra barnen sover" och Ruth instämmer "ja, de andra barnen sover".

Anna försöker i episoden strukturera dagens händelser för att bilda sig en uppfattning av vad som hänt och vad som skall hända. Sakari reflekterar också över händelserna och konstaterar att han snart får gå hem också, eftersom Lotta redan gått hem. Det faktum att Lotta slutat för dagen fungerar som hållpunkt för honom och gör att han lättare urskiljer dagordningen.

På ett av daghemmen följs en sådan ordning att när det serveras gröt får barnen börja äta efter att de blivit serverade mjölk eller saftsoppa till gröten. Barnen är generellt medvetna om denna ordning och Erik är mån om att följa de regler som ställts upp.

Erik (2:1) sitter vid bordet tillsammans med flera andra barn. De blir serverade gröt och något barn börjar smaka på sin portion. Erik förmanar "man får mjölk, då får man äta sen, man får mjölk".

Regler ställs upp för att bringa ordning i olika situationer och barnen lär sig snabbt vad man får göra och inte på daghemmet. I detta fall är det fråga om att invänta mjölk på gröten innan man börjar äta, vilket Erik beskriver som händelser som följer på varandra. Hållpunkten är alltså den struktur av händelser som utgörs av att få mjölk på gröten innan barnen får börja äta.

Många aktiviteter i daghemmen går ut på att utföra handlingar enligt förutbestämda mönster. Sångstunder med rörelselekar är aktiviteter där barnen snabbt uppfattar ordningsföljden och lär sig hur rörelserna skall utföras och i vilken ordning rörelserna skall ske. En populär rörelseramsa som förekommer på daghemmens småbarnsavdelningar läses växelvis mellan en ledare och kör. Rörelserna startar från att en hand dunkar (en hammare), sedan dunkar båda händerna (två hammare), följt av båda händerna och en fot (tre hammare) och ramsan fortsätter med allt fler kroppsdelar som "dunkar" så långt ledaren väljer.

Teo (3:5) leder ramsan och börjar dunka taktfast med knytnäven på bordet. Han säger "den ena".

De andra barnen härmar rörelsen och säger unisont "en hammare slår bitar och en hammare slår bitar", barnen börjar också slå med andra handen på bordet.

Adam (3:1) säger plötsligt "stampa!"

Teo protesterar, "nej, inte ännu, två hammare", han stannar upp och börjar om från början.

Teo har en klar bild av hur ramsan skall läsas och vilka rörelser som skall göras i vilken ordning. Strukturen på ramsan och rörelserna är hans hållpunkt i aktiviteten. Han störs dock av de andra barnen som skyndar på ramsan och vill komma framåt. Teo protesterar när ett steg riskeras att hoppas över, eftersom han tydligen strävar efter att hålla den lärda ordningen och successivt öka antalet hammare. Hållpunkten, i detta fall strukturen, är viktig för att aktiviteten skall kunna slutföras, vilket framträder i Teos strävan att hålla kvar fokus på strukturen i rörelseramsan.

Räkneramsan används av barnen i många olika sammanhang och i varierande syften. I följande episod används räkneorden som en ramsa för att bestämma när en aktivitet ska starta. Ordningsföljden i räkneramsan följs inte och räkneordens innebörd verkar inte spela någon större roll för barnen. Detta är ändå ett sätt att strukturera aktiviteten med hjälp av räkneorden, så att alla börjar springa samtidigt, och fungerar således som en hållpunkt för aktiviteten.

Julia (3:9), Emma (2:6) och en äldre flicka springer ikapp. Julia räknar ner genom att säga "en, två, tjugo, sjutton, nitton, NU!" När Julia avslutar nedräkningen med att säga "nu", springer flickorna iväg samtidigt. Efter en stund kommer flickorna tillbaka till startpunkten och upprepar proceduren flera gånger.

Flickorna är införstådda med att räkneorden kan användas som ett redskap för att bestämma när något skall ske. Julia som leder nedräkningen tar inte i beaktande betydelsen av ordningsföljden i räkneramsan, utan bestämmer startpunkten för tävlingen genom att säga "nu". Julia och de två andra flickorna erfar att räkneorden har ett samband med nedräkningen men det viktiga i aktiviteten är den gemensamma innebörd nedräkningsproceduren har som de alla är överens om, vilket således fungerar som en hållpunkt för deras gemensamma handling.

6.5 Sammanfattning av kritiska villkor för småbarns lärande av matematik

De kritiska villkor för lärande som framträder i tolkningen av innebörden i småbarns handlingar är *samtidighet*, *variation*, *rimlighet* och *hållpunkt*. Samtidigheten innebär att barnet urskiljer hur ett fenomen kan ha olika innebörd samtidigt, beroende på ur vilket perspektiv fenomenet ses och vilka aspekter som fokuseras, men där de olika perspektiven och aspekterna samtidigt bör tas i beaktande för att förstå ett fenomen på ett visst sätt. Att erfara hur ett fenomen kan variera är också ett betydelsefullt villkor. Variationen innebär dels att det finns flera sätt att förstå samma fenomen beroende på vilka aspekter som fokuseras, dels att ett fenomen kan förekomma i olika sammanhang. Vad som karakteriserar fenomenet är det som hålls konstant och gör att barnet känner igen fenomenet på ett mera övergripande plan. Rimlighet är ett villkor för lärande, vilket i fråga om matematik är betydelsefullt, eftersom barnet då gör bedömningar och uppskattar vad som kan tänkas vara ett logiskt svar eller en lämplig lösning på ett problem som det stöter på. Barn uppskattar rimligheten i det de erfar av omgivningen, till exempel vilka begrepp som lämpar sig att använda i olika situationer eller när de gör jämförelser mellan olika egenskaper hos objekt. I studien framkommer det också att barnen relaterar till någon hållpunkt i erfandet, där hållpunkten är något bekant som de kan relatera den nya erfarenheten till och på så sätt förstå det erfarna vilket i sin tur har betydelse för hur barnet handlar i en viss situation.

7 Hur småbarn tillämpar sin förståelse av matematik

De erfarenheter och den förståelse som barn har av matematiska fenomen kommer till uttryck i deras handlande och kommunikation med andra i omvärlden. Matematik är ett sådant fenomen som barn i många vardagliga sammanhang kommer i kontakt med och som de skapar sig förståelse av utgående från sina individuella erfarenheter. Matematisk kunskap förs således inte över direkt till barnen, utan barnen uppfattar alltid ett matematiskt fenomen i ett sammanhang och relaterat till tidigare erfarenheter. De tidigare erfarenheterna får betydelse för hur barnet förstår fenomenet och hur barnet använder sin förståelse som ett redskap i sammanhanget. Ur ett pedagogiskt perspektiv kan det därför vara av intresse att synliggöra på vilka sätt barns matematiska färdigheter och förståelse kommer till användning i deras vardagliga aktiviteter. I barns lekar och samspel med andra människor och ting i omvärlden framträder den innebörd och de användningsområden som barnen urskiljer hos fenomenet matematik. Innebörd och användningsområden kan inte särskiljas eftersom matematiken till sin karaktär är ett redskap att använda i olika problemlösande och kommunikativa sammanhang.

I den studie som presenteras här framträder tre områden inom vilka småbarn använder sig av matematik som ett redskap för att bemästra omvärlden. Matematik tillämpas av småbarn för att upprätthålla *sociala spelregler*, för att *beskriva världen*, samt som *redskap för problemlösning*.

7.1 Sociala spelregler

Matematik är ett redskap som utvecklats under lång tid i människans historia. Olika aspekter av matematik lyfts fram och kommer till användning i sociala sammanhang där människor strävar efter att samspela och kommunicera med varandra. Småbarn strävar likaså efter att samspela med andra barn och vuxna. Att dela lika och sträva efter rättvisa är sammanhang där barnen behöver ett redskap för att till exempel mäta delar av en mängd så att varje delmängd kan fördelas åt ett visst antal barn så att varje barn känner sig tillfredsställt. Att uppskatta andra människors färdigheter och förmågor är likaså ett sätt att tänka matematiskt, vilket barn i tidig ålder visar sig vara uppmärksamma och skickliga på. Ytterligare ett område där matematiskt tänkande är till hjälp i barnets vardag är sådana överenskommelser som skapar struktur och därmed möjlighet att förstå och förutsäga händelser och handlingar, vilket barnen upplever som betydelsefullt.

Jämn fördelning

Att dela lika är en aspekt av den sociala samvaron som upplevs betydelsefull av barn i småbarnsåldern. Också de yngsta barnen i ettårsåldern tar

initiativ till att dela ut till exempel en haklapp åt varje barn som sitter runt ett bord. I sådana aktiviteter är det matematiska tänkandet tydligt framträdande i och med att barnen delar ut ett objekt till en person och således parar ihop objekt ur olika mängder för att bilda nya par. I följande episod stöder sig Karin på sin uppfattning av vad det innebär att dela mängder när hon delar ut "saft" till sig själv och ett annat barn, en del av varje sort till varje person.

Karin (3:6) håller en kopp i var hand. I kopparna finns kulor, en kula i varje kopp. Karin skakar kopparna, ger en kopp åt Emma och säger "tässä on mehua sinulle ja minulle" (finska för "här är saft till dig och till mig").

Karin delar tydligt upp jämna mängder till sig själv och Emma. Även om delarna är olika för hon samman delarna till nya helheter och föreställer sig att hon ger en mugg med saft till sin kompis och behåller en motsvarande mugg med saft själv.

Matematiska begrepp som "mycket" och "lite" innebär alltid en jämförelse av mängder. Det som ur ett perspektiv uppfattas som mycket, erfars eventuellt som lite ur ett annat perspektiv. I följande episod sitter fyra barn runt matbordet. De har alla fått var sitt glas med mjölk. Julia har dock endast fått hälften så mycket mjölk som de andra, vilket Emma uppmärksammar och försöker förmedla till de andra barnen.

Emma (2:6) pekar på Julias glas och säger "du har lite".

Karin (3:6) säger "jag har också mycket".

Tim (3:5) och Julia (3:9) säger samtidigt "jag har också mycket".

Emma pekar igen på Julias glas och säger ännu en gång "du har lite".

Tim säger "jag har inte lite, jag har mycket".

Julia tittar på Emma och säger "du och Karin och Tim och jag har mycket".

Emma upptäcker att Julias glas innehåller mindre mängd mjölk än de andra tre barnens glas. Julia hävdar att de alla har "mycket" mjölk trots att Emma upprepar sitt påstående flera gånger och pekar på Julias mjölkglas. Att ha mycket mjölk värderas uppenbarligen högt i denna situation och Julia tycks sträva efter rättvisa. Att fokusera rättvisa och önsknings för dock inte det matematiska erfandet framåt i just denna situation. Emma har upptäckt en tydlig skillnad mellan mängden i glaset, men lyckas inte medvetandegöra alla de andra barnen på detta faktum. Tim tycks däremot uppfatta Emmas idé och konstaterar att han *inte* har lite i sitt glas, vilket överensstämmer med Emmas påstående att det är Julia som har mindre mängd i sitt glas. Jämförelsen och uppskattningen av mängderna är möjlig i och med att glaset är likadana, mjölken likadan och barnen är intresserade av att ha lika mycket mjölk i glaset. Mängderna varierar dock och detta fångar Emmas och Tims uppmärksamhet.

Beaktande av andras egenskaper

Det matematiska tänkandet framkommer också i omtanken om andra och andras förmågor och egenskaper. Barnen tar då i beaktande både sina egna egenskaper och en annan persons egenskaper. Uppenbarligen gör barnen bedömningar av vad den andra kan tänkas förmå och uppskattar dessutom

den inverkan en händelse eller ett sammanhang kan ha på den andra personens handlande.

Emanuel (2:3) sätter sig på en liten stol, han går genast vidare till fönstret där han försöker sätta sig i fönsternischen men halkar ner. Han vänder sig om och klättrar upp i nischen, sätter sig och går sedan strax tillbaka till de små stolarna. Emanuel går till dockvrån och sätter sig på en bänk. Anna ställer sig intill bänken och säger "jag vill sitta här... jag kommer inte in" och Emanuel makar sig åt sidan och klappar på den nu lediga bänkplatsen bredvid honom.

Emanuel tycks gärna vilja vara Anna till lags och gör en bedömning av hur mycket plats Anna kan tänkas behöva och hur långt han själv bör flytta sig för att Anna skall kunna sitta bredvid honom. Det matematiska tänkandet har därmed ett socialt syfte och förmågan att bedöma utrymme är betydelsefull för småbarns sociala samvaro. Detta blir uppenbart också i följande episod där Tim och Teo båda vill sitta i den vuxnas famn men de reflekterar också över att två pojkar i famnen kan vara tungt för den vuxna.

Tim (3:5) sitter i Guns famn. Teo (3:5) kommer fram till dem och vill också sitta i Guns famn. När Teo och Tim sitter på varsitt knä i Guns famn säger Teo "du måste ha två i famnen, är det tungt?" Tim konstaterar "mamma brukar ha en i famnen".

Teo uppmärksammar tydligen att två barn väger mera än ett barn, vilket innebär att när både han och Tim samtidigt sitter i Guns famn så kan det bli tungt för henne. Teo uppskattar därmed möjligheterna att sitta i den vuxnas famn utgående från vad som anses rimligt i sammanhanget. Tim blir uppenbarligen också uppmärksam på detta i och med att han konstaterar att hans mamma bara brukar ha ett barn i famnen åt gången. Det sociala sammanhanget utmanar pojkarnas matematiska tänkande och de urskiljer hur två pojkar tillsammans blir "tungt", sett ur Guns perspektiv.

Överenskommelser

På daghemmen finns många regler och rutiner som barnen snabbt blir medvetna om och strävar efter att följa. På ett av daghemmen följs en sådan ordning att när det serveras gröt får barnen börja äta efter att de blivit serverade mjölk eller saftsoppa till gröten. Barnen är generellt medvetna om denna ordning och Erik är mån om att följa de överenskommelser som gjorts.

Erik (2:1) sitter vid bordet tillsammans med flera andra barn. De blir serverade gröt och något barn börjar smaka på sin portion. Erik förmanar, "man får mjölk, då får man äta sen, man får mjölk".

Regler görs upp för att bringa ordning i olika situationer och barnen lär sig snabbt vad man får göra och inte får göra på daghemmet. I detta fall är det fråga om att invänta mjölk på gröten innan man börjar äta, vilket Erik tydligt beskriver som händelser som följer på varandra. Ordningsföljden är betydelsefull för barnen som strävar efter att följa rutinerna. I denna strävan är barnen också tvungna att använda sig av begrepp vars innebörd strukturerar upp händelserna, i detta fall "först" och "sen", som tydligt gör upp den följd av handlingar som ska ske.

Räkneramsan används av barnen i många olika sammanhang och även i varierande syften. I följande episod används räkneorden som en ramsa för att bestämma när en aktivitet ska starta. Ordningen i ramsan följer inte den traditionella och räkneordens matematiska innebörd verkar inte spela någon större roll för barnen. Detta är ändå ett sätt att strukturera aktiviteten genom en gemensam överenskommelse, så att alla börjar springa samtidigt.

Julia (3:9), Emma (2:6) och en äldre flicka springer ikapp. Julia räknar ner genom att säga "en, två, tjugo, sjutton, nitton, NU!". När Julia avslutar nedräkningen med att säga 'nu', springer flickorna iväg samtidigt.

För att flickorna skall kunna genomföra aktiviteten och samspela på ett funktionellt sätt behöver de ett redskap som hjälper dem att strukturera upp aktiviteten. Flickorna är införstådda med att talen kan användas som ett redskap för att bestämma när något skall ske. Julia som leder nedräkningen tar inte i beaktande den betydelse som räkneordens ordning i räkneramsan kan ha, utan bestämmer startpunkten för tävlingen genom att säga "nu". Barnen delar i detta fall innebördsförståelsen, det vill säga att ramsan som helhet motsvarar en nedräkning av tid fram till startpunkten när barnen springer iväg samtidigt. Överenskommelsen är nödvändig för att aktiviteten skall fungera och har ett tydligt matematiskt inslag i form av strukturen. På detta sätt framträder matematik och ett matematiskt tänkande tydligt i barnens sociala aktiviteter på daghemmen.

7.2 Beskrivning av världen

Matematik används av barn på småbarnsavdelningarna i syfte att försöka beskriva fenomen i omvärlden så som de erfar dem. I synnerhet för att kommunicera sin förståelse med andra är det av stor betydelse att skilja ur egenskaper, likheter, skillnader och relationer hos fenomenen i omvärlden. I studien framträder många episoder där barnen på olika sätt gestaltar matematiska fenomen för att uttrycka sin förståelse av omvärlden för andra barn och vuxna. Sådana tillfällen där barnen använder sin förståelse av olika aspekter av matematik handlar ofta om att beskriva begrepps innebörd, att bedöma mängders omfattning samt att jämföra och beskriva relationer mellan objekt där större hänsyn tas till nyanser och jämförelse av specifika egenskaper hos objekten.

Begrepps innebörd

I bildandet av begrepp erfar barnen likheter och skillnader där vissa egenskaper fokuseras medan andra endast finns i medvetandets "bakgrund". Följande episod visar hur ett barn bemästrar ett begrepp där utseendet hos föremålen varierar men föremålen uppfattas ändå vara av samma art och ha samma egenskaper.

Anna (2:4) är i dockvrån. Hon går runt och samlar ihop tre telefoner som alla ser lite olika ut. Hon lägger telefonerna intill varandra på dockspisen och utropar "se vad många telefoner!"

Telefonerna är alla avlånga till formen och har knappar att trycka på. Ändå ser de olika ut, men Anna uppfattar att de har något gemensamt och att de därmed hör till samma kategori av föremål och kan benämnas med det

gemensamma begreppet "telefon". Det matematiska tänkandet utgörs av den abstraktion som Anna gör av föremålets egenskaper i och med att hon för samman dem som hörande till samma grupp av föremål. Idén med begrepp är att de generaliserar en innebörd för att gälla flera objekt, vilket Anna också uttrycker att hon erfar genom uttrycket "många telefoner". Talbegrepp är sådana begrepp vars gemensamma drag är den numerära innebörden av mängder som jämförs. Barnen möter talbegrepp i många sammanhang och använder själva begreppen men ofta med varierande innebörd. I kommunikationen med en vuxen visar barnet i följande episod hur hon använder sig av talbegrepp för att beskriva vad hon urskiljer och fokuserar i situationen.

Maj (vuxen) och Elisa (2:7) sitter och tittar i en bilderbok. Maj läser och frågar "se, vad mycket bilar i staden, ser du hur många bilar? Kan du räkna du, Elisa?" Elisa pekar på några bilar på bilden och säger i takt med pekandet "ett, två, tre". Maj fortsätter pekräkna "fyra, fem, sex". Elisa säger också "fyra, fem, sex" efter Maj, men protesterar sedan "det här är inte fem" och pekar på en bil på bilden. Maj räknar en gång till "en, två, tre, fyra, fem, sex bilar". Elisa säger "det här är fem" och pekar på en annan bil än den som Maj pekat på som femte bil.

Elisa använder talbegreppen på ett annorlunda sätt än den vuxna. De har inte samma förståelse av innebörden och Elisa försöker beskriva vilken bil som enligt henne fått namnet "fem". Talbegreppens innebörd är för Elisa namn på objekt, där den numerära innebörden inte tas i beaktande. I följande episod visar Adam däremot tydligt hur han förstår att talbegrepp motsvarar en viss mängds alla ingående delar, samt hur varje räkneord relaterar till ett visst objekt och alla uppräknade delar.

Elisa (2:7) tar med sig tre olika kattfigurer till ett bord. Hon säger "här är två kissekatter". Adam (3:1) svarar "nej, det är inte så där, det är så här många" och visar tre fingrar. Han säger "en, två, tre" samtidigt som han sträcker upp ett, två och tre fingrar igen.

Via språket och de matematiska begrepp som används kan barnen förmedla sina uppfattningar, förväntningar och önskningar till andra. De matematiska begreppen är deskriptiva och hjälper barnet att peka ut och nyansera sina erfarenheter. I kommunikation med andra barn och vuxna kan barnen så småningom komma fram till en förståelse av talbegreppen som också motsvarar den kulturella innebörden, vilket utökar möjligheterna att använda talbegrepp i kommunikation med andra.

Bedömning av mängders omfattning

För att meddela någon annan om hur det förhåller sig med en mängd som inte är synlig för tillfället, har symboler, talbegrepp och räkneramsan formulerats. Barn har också behov av att meddela sig om mängder, men de har inte alltid lämpliga begrepp att tillgå eller förståelse av räkneramsans kardinalitet för att uttrycka sig så som barnet eventuellt inser att det förväntas. Ändå kan också småbarn inse hur flertalet enskilda delar tillsammans bildar den mängd som avses och har därmed den grundläggande idén klar för sig. Teo i nedanstående episod försöker beskriva hur många barn som finns kvar i tamburen, trots att han inte uttrycker sig med vedertagna talbegrepp om den totala mängden. Han är dock medveten om hur delarna förhåller sig till

helheten och uttrycker detta genom att tydligt avgränsa och markera de enskilda delarna. Insikten i den matematiska strukturen gör att han lyckas förmedla de uppgifter som efterfrågas.

Teo (3:5) väntar på att det ska bli färre barn i tamburen så att han får gå och klä på sig, han säger åt Gun (vuxen) "inte alla på en gång". Gun uppmanar Teo att se om där ännu är barn i tamburen. Teo går iväg och när han återkommer säger han "där är en och en och en... (upprepar 'en' tretton gånger) där". Gun säger "det var ganska många det". Teo säger "jo" och Gun fortsätter "eller var där bara en?" Teo säger "Tim och Elisa och Adam och Hanna och så det var så där många".

Teo försöker berätta hur många barn som ännu är kvar i tamburen. Han känner sina kompisars namn men vet att Gun är ute efter antalet barn som finns där. Teo uppfattar tydligen inte det exakta antalet, men vet att varje barn är "en" och följaktligen är där ganska många barn, vilket han visar både genom att räkna upp "en och en och en..." samt genom att nämna personerna vid namn, när Gun tycks vara osäker på om Teo endast menade en person eller flera. Många enheter bildar alltså den helhet som efterfrågas och Teo lyckas på sitt eget sätt beskriva hur han erfar situationen i tamburen.

Barnen använder sig också av matematiska begrepp för att beskriva sina önsknings. I följande episod beskriver och visar två barn den mängd flingor de vill ha till mellanmål. Flingorna tycks vara omtyckta och barnen strävar efter att få en stor mängd flingor på sina tallrikar. Hur stor mängd de önskar få visar barnen därför på varierande sätt.

Adam (3:1) och Elisa (2:7) sitter vid matbordet, de har precis fått sina mattallrikar. Elisa konstaterar "du har lite, jag har mycket" och pekar på Adams tallrik och sedan på sin egen tallrik. Adam mättar ett par centimeter mellan pekfinger och tumme och säger "så här lite". Adam ökar avståndet mellan fingrarna, "jag har så här mycket". Elisa säger "titta här, jag har mycket, mycket, mycket" och cirklar med pekfinger över tallriken med flingor. Adam säger "sen vill jag ha mycket, jag vill ha mycket, så här mycket" och visar upp hela handen med fem fingrar uppsträckta. När Adam får sin andra portion säger han "jag fick mycket, Elisa!" Elisa svarar "jag ska också ha mycket, mycket mera, så mycket, så här mycket" och visar upp båda händerna med tio fingrar uppsträckta, "jag har så här mycket". Adam visar också tio fingrar och sträcker sedan sin ena arm så högt han når. Adam sträcker upp armen en gång till och säger "så här mycket". Elisa får mera flingor, Adam säger "Elisa, du fick mycket".

Barnen i episoden jämför och beskriver först mängderna med begreppen "lite" och "mycket". Begreppen är tydligen inte tillräckligt nyanserade för att visa på den skillnad och ökning i mängd som barnen avser och konkret visar på olika sätt, därför utvecklar de mängdbegreppen som upprepning "mycket, mycket, mycket" och som "mycket mera". De mängdbegrepp som barnen använder verkar intressera dem och utmanar dem att experimentera och pröva hur begreppen kan användas i olika betydelser. Sätten att gestalta och variera uttrycken motsvaras av de verbala uttrycken som beskriver att det är mera flingor som barnen vill ha, alltså en ökning. En ökning i gestalt-

ningarnas utformning får uppenbarligen betydelsen ökning i den mängd som gestaltningarna avser.

Kropp och omvärld

I studien framkommer att de yngsta barnen ofta gör bedömningar av sin omvärld och vad de förmår göra genom att relatera till den egna kroppen. Att småbarn stiger upp på större föremål är ett sätt att nå högre, där relationen till den egna kroppen är en utgångspunkt. De små barnens erfarende karakteriseras då av en bedömning av vad de själva klarar av, hur högt de når, när de behöver någon form av hjälp och vilken slags hjälp som är lämplig vid olika tillfällen. De äldre barnen i studien relaterar också sitt erfarende till den egna kroppen för att genomföra aktiviteter, men ger därtill uttryck för sina erfarenanden i kommunikation med andra. Det matematiska erfandet inbegriper då att jämföra och uppskatta relationen mellan objekt i omvärlden.

Vera (2:9) bygger en stapel av stora avlånga klossar. Hon bygger tills stapeln är lika hög som hon är. Hon säger "sådär, blir det högt upp i taket!" och sträcker upp sina händer mot taket. Martina (vuxen) säger "ända upp i taket". Vera instämmer "ända upp i taket" och fortsätter bygga. När hon inte längre når att trycka fast fler klossar, hämtar hon en stol och ställer den intill stapeln, klättrar upp på stolen och trycker fast fler klossar. En vuxen tittar in i rummet och frågar "är den högre än vad du är?" Vera svarar "ja", den vuxna säger "så måste du ha stolen för att kunna bygga". Vera fortsätter bygga och får hjälp av Jonna (vuxen) när hon inte längre når att trycka fast fler klossar. Martina utbrister "åhå, vad högt, har du byggt själv, Vera?" Vera svarar "jo, och Jonna".

I episoden relaterar Vera byggandet till sin egen kropp och till olika objekt i rummet. I och med att klossarna är så stora att konstruktionen snabbt blir hög, behövs hjälp av något slag för att fortsätta bygga. Vera finner snabbt en lösning på problemet när hon inte längre når att sätta fast fler klossar och erfar då vad som är rimligt hjälpmedel för just den aktiviteten. Att stiga upp på en stol förlänger kroppen och gör det möjligt att bygga vidare, men när Vera därefter byggt så högt att hon inte längre når själv får hon hjälp av en vuxen som når ännu högre. Vera är dock hela tiden medveten om hur byggandet, stapeln av klossar och hennes egen kropp är relaterade till varandra, vilket blir tydligt när hon säger att det visserligen är hon som byggt en så hög stapel, men Jonna har också hjälpt till. Veras matematiska tänkande framträder i de bedömningar hon gör; att kliva upp på en stol gör att hon når högre och för att ytterligare bygga högre måste hon få hjälp av någon annan person som når ännu högre. Begreppet "högt" får sin innebörd i Veras byggande när hon har ett mål att bygga mot och byggandet framskrider samtidigt som hon relaterar höjden till sin upplevelse. De vuxna bekräftar erfandet genom att beskriva de hållpunkter som befäster erfandet.

När det är frågan om rumsliga begrepp, kan det uppkomma svårigheter i fråga om hur begreppen skall förstås. Barnen i studien beskriver och förklarar placeringen runt ett bord utgående från olika perspektiv och lyfter på så sätt fram komplexiteten i begreppets innebörd. För att förstå hur ett annat barn resonerar måste begrepps innebörden vidgas, vilket barnen gör genom

att beskriva hur de uppfattar relationerna mellan olika sittplatser. Perspektivtagandet är av stor betydelse här och barnen upplever hur betydelsefullt det är att urskilja de olika perspektiven.

Tim (3:5) säger "jag sitter bredvid Adam (pekar först på Adam som sitter på hans vänstra sida, sedan på Teo på hans högra sida), du sitter bredvid mig".

Adam (3:5) säger "jag sitter bredvid Tim".

Tim säger "Ida sitter bredvid dig" och tittar på Teo innan han fortsätter "Elisa sitter bredvid Karin".

Karin (3:6) utbrister "sitter bredvid Ida!"

Teo säger "och jag sitter bredvid Tim".

Ida (2:8) konstaterar "så du", tittar på Teo till vänster "bredvid mig och du", tittar på Karin till höger, "bredvid mig".

Tim säger "Tim, jag, sitter bredvid Adam" och pekar på Adam till vänster om honom, "hon", pekar på Elisa, "sitter bredvid Karin OCH Adam, hon", pekar sedan på Ida och säger "sitter bredvid Teo OCH Karin".

Teo fyller i "och jag sitter bredvid Tim och Ida".

Tim säger "jag sitter bredvid Teo och Adam".

Barnen i episoden ovan diskuterar sig fram till en gemensam förståelse av att ett barn kan sitta bredvid två personer, samtidigt som barnet intill sitter bredvid ett annat barn. Ett perspektivskifte sker när barnen tar utgångspunkt i ett annat barns plats och beskriver placeringarna utgående från den nya utgångspunkten. Erfarandet blir tydligt för barnen när de upptäcker att de själva eller något annat barn kan uppfylla flera rumsbegrepp samtidigt. Barnen upptäcker att de bör reda ut för sig själva och för andra hur begreppet "bredvid" skall förstås och lyckas tillsammans beskriva hur begreppet kan förstås i just den situationen.

7.3 Redskap för problemlösning

Matematik är ett redskap som utvecklats i syfte att göra det vardagliga livet mera strukturerat och kommunicerbart. Småbarn erfar också i daghemsmiljön att matematik kan användas för att lösa problem av olika slag. Ofta handlar det om att beskriva och framföra något till en annan person så att den personen förstår barnets avsikt. I individuell problemlösning har det matematiska tänkandet ofta en mera strukturerande karaktär där barnet strävar efter att upptäcka samband i problemlösningssituationen för att kunna välja lämplig strategi.

Att skapa struktur

När matematik används som ett redskap för problemlösning får matematik ofta en strukturskapande mening. Att strukturera och organisera handlingar eller händelser där ordningsföljden är central hjälper barn att uppskatta till exempel tid. Också i syfte att bestämma tidpunkt för en handling är det till god hjälp att ha ett gemensamt överenskommet redskap, såsom räknearmsan (se sid. 142). Räknandet kan ha ett tydligt syfte som problemlösande redskap i och med den struktur som barnens ramsräknande skapar. Den

strukturerande aspekten av matematik används i många fall där problemet innebär att göra något i en viss ordning. Med hjälp av en ramsa eller begrepp vars innebörd bestämmer skeenden, stöds barnen i sina handlingar och kan genomföra en aktivitet enligt sina avsikter. Erik i följande episod planerar sin aktivitet genom att verbalt uttrycka vad han har för avsikt att göra. Han verkar ha en idé om vilka bitar som bör läggas före andra och använder begreppen för att synliggöra ordningen.

Erik (2:1) sitter och bygger med klossar. Han säger "nu tar jag gula först, sen tar jag andra gula". Erik bygger ihop klossarna och säger "så, sen tar jag röda" och lägger till den röda klossen och säger sedan "och tar jag den". Erik tar ytterligare en röd kloss, säger "och den" och tar ännu en gul kloss.

Erik har tydligen en klar bild av i vilken ordning klossarna skall sättas samman och ger även uttryck för den ordning som han tänker sig. Att på detta sätt skapa en bild av det mönster han vill bygga och sedan konkretisera idén i byggandet är en form av matematik som känns igen i många byggaktiviteter.

Barnen i studien har varierande strategier för att bygga med olika föremål, inte minst för att lägga pussel där helheten och den färdiga bilden ofta är bekant, men när det gäller hur delarna skall fogas samman krävs det att barnet skapar en struktur för att urskilja sambandet mellan delarna. Barnen behöver ett redskap och en strategi för att överblicka problemets delar, vilket gör att strukturskapande handlingar är ett sätt att försöka lösa problemet på ett effektivt sätt.

Julia (3:9) lägger ett pussel med ett trettiotal bitar i en ram. Hon lägger en hörnbit i ramen, passar in en annan hörnbit och ytterligare en tredje hörnbit. Julia provar sig sedan fram genom att välja en bit åt gången och försöka passa in dem på en viss plats tills rätt bit passar. Då fortsätter Julia att pröva en bit åt gången på en ny plats tills också den platsen har fått rätt bit. Julia fortsätter på detta sätt tills pusslet är klart och väljer därefter ett annat pussel som hon lägger på samma sätt.

Julia har uppenbarligen upptäckt ett fungerande sätt att lägga pussel. Hon väljer först ut hörnbitar och lägger dem genast på sina rätta platser. Hörnbitarna skiljer sig i formen från övriga bitar i och med att de har två raka sidor som lätt passas in i pusslets ram. Därefter väljer Julia ut en plats på pusselramen och utgår från denna i sitt letande efter en pusselbit som passar ihop med den specifika platsen och angränsande pusselbitar. Genom att jämföra en bit åt gången mot samma utgångspunkt har Julia möjlighet att urskilja hur formen på pusselbitarna gör att vissa passar ihop medan andra inte gör det. Hon är systematisk i sitt provande och problemet kan lösas.

I vardagen kan det uppkomma problem där olika sätt att förstå och beskriva fenomen i omvärlden kräver en noggrannare analys och beskrivning för att barnen skall omfatta samma innebörd.

Elisa (2:7) tar med sig tre olika kattfigurer till ett bord. Hon säger "här är två kissekatter". Adam (3:1) protesterar och säger "nej, det är inte så där, det är så här många" och visar tre fingrar. Han säger "en, två, tre" samtidigt som han sträcker upp ett, två och tre fingrar igen.

Adam upplever att Elsas sätt att förstå det numerära i situationen inte överensstämmer med hans sätt att förstå antalet kattfigurer. För att lösa problemet som uppstår när de uppenbarligen har olika förståelse av innebörden i begreppen försöker Adam konkret visa hur han uppfattar talbegreppen. Genom att strukturera räkneorden ett-till-ett med att visa upp ett finger till för varje räkneord, konkretiserar han den innebörd han ger talbegreppen "två" och "tre". Adam synliggör den matematiska strukturen i räkneramsan genom att återskapa strukturen när han visar fler fingrar för varje uppräknat räkneord.

Att urskilja logiska samband

Att urskilja logiska samband i en problemsituation innebär att upptäcka hur delar av problemet relaterar till varandra. I problemlösningsprocessen är detta ett avgörande steg eftersom problemets ingående delar och deras relationer till varandra bör förstås för att en lämplig strategi skall kunna utformas så att problemet kan lösas. Betydelsen av detta synliggörs i följande episod där Erik försöker få en kloss av en speciell form genom hål i olika former. Att hitta rätt hål kräver att han förmår urskilja likheter och skillnader i klossen och de hål som finns att pröva klossen mot.

Erik (2:1) försöker få en triangelformad kloss genom hålen i en figurlåda. Han byter mot en fyrklöver och hittar rätt hål, tar sedan en hexagon och prövar den mot det runda hålet, vrider och vänder klossen, vänder sedan på hela lådan och sätter klossen i rätt hål för hexagonen.

Erik håller figurlådan så att han först inte ser den sida där klossens motsvarande hål finns. Han prövar klossen mot olika hål men upptäcker snabbt att strategin inte var lyckosam. När Erik vänder på lådan upptäcker han däremot att det finns fler möjliga hål och släpper klossen genom motsvarande hål ner i lådan. Det logiska sambandet som utgörs av formen på klossen och motsvarande form som hål i lådan förtydligas i och med att han prövar mot andra hål innan han eventuellt anser det vara nödvändigt att finna fler alternativ, det vill säga hålen på andra sidan lådan, där han upptäcker likheten i form och löser problemet.

I följande episod har Anna upptäckt ett samband som gör att hon lyckas lösa sitt problem och lägga klart sitt pussel. Strategin går ut på att jämföra likheter och skillnader i antalet prickar, vilket gör att andra egenskaper hos pusselbitarna inte tas i beaktande i detta fall utan ses som irrelevanta, även om de också kunde vara en utgångspunkt för en strategi.

Anna (2:4) plockar bort pusselbitar ur en pusselram, där varje pusselbit och dess plats i ramen har motsvarande antal prickar. Anna pekar på en plats i ramen och säger "bara en prick och så bara två". Anna försöker få ner en bit som inte vill passa och prövar sig fram. Martina (vuxen) förklarar "nej, du måste titta på prickarna, här är tre, då måste du se hur många prickar det är där". Anna lägger sedan snabbt resten av pusslet, och plockar sedan bort alla bitar ur ramen igen. Anna tittar på pusselbitarna och Martina frågar "var ska den vara?" Anna pekar på en plats i ramen och säger "där". Martina pekar på prickarna på pusselbiten och säger "där är en, två, tre, var ska den vara?" Anna pekar på en plats på ramen och Martina räknar "där är en, två, tre" medan hon

pekar på samma plats. Anna säger "där ska den vara". Anna håller upp en annan pusselbit mot Martina som säger "där är en, två". Anna sätter ner biten på sitt ställe och lägger resten av bitarna på plats. Anna säger "här var bara en prick" och pekar på sista tomma platsen på ramen, Martina instämmer "där var bara en prick".

Pussel är ett tydligt exempel på problemlösning där det ofta är formen, såsom sambandet mellan pusselbit och pusselram, eller pusselbit mot pusselbit som fokuseras. I episoden ovan fokuseras däremot likheterna på pusselbitarnas bilder och motsvarande bild på pusselramen, där en vuxen ytterligare förstärker fokuseringen på den numerära likheten på bilderna. Sambandet mellan antalet prickar är väsentligt att urskilja för att Anna skall lyckas lösa problemet.

Att upptäcka numerära samband kan stöda småbarns förståelse av skeenden i deras omvärld. Förändringar i mängder uppfattas tidigt av barn, men verbal förmåga och möjlighet att ge namn på förändringen tycks stöda barnet i erfandet och problemlösningssprocessen.

Anna (2:4) sätter sig på golvet vid ett parkeringshus. Hon sorterar bilar och säger "här är ännu en... och så kommer det en till... och så stoppar jag dit i den stora bucklan". Anna snurrar på karusellen på parkeringshuset "det är så många här". Sakari tar en bil från parkeringshuset och Anna protesterar "nu hade jag den!" Emanuel kryper fram till Anna, Anna räcker honom en bil och frågar "vill Emanuel ha den?" Anna mumlar för sig själv och petar på bilarna i huset "så har jag dom där fyra".

Anna strävar efter att ha kontroll över bilarna i parkeringshuset. Hon är noggrann med att inga bilar tas bort utan att hon själv har för avsikt att minska den totala mängden. Problemet som uppstår är att något händer när en del tas från helheten. Hur denna förändring skall förstås gestaltas av Anna i hennes konstaterande att hon har ett visst antal. Även om talbegreppet inte motsvarar det totala antalet så visar uttrycket att hon reflekterar över den numerära förändringen och det matematiska tänkandet och resonerandet stöder hennes erfande.

I många fall är miljön på daghem utformad på så sätt att barnen inte själva når upp till eftertraktade föremål. Småbarn upptäcker tidigt att de med hjälp av andra föremål når högre, till exempel genom att hämta en stol och klättra upp på den så förlängs kroppen avsevärt och många föremål som tidigare var onåbara finns därefter inom räckhåll. Barnen tar i sådan problemlösning stöd i sin förståelse av hur de själva relaterar till omgivningen i fråga om storlek eller längd. Förmågan att uppskatta vilket slags föremål som kan vara användbart för att lösa problemet med att nå högre är i hög grad matematisk till sin karaktär, vilket visar att barn redan i tidig ålder använder sin matematiska förståelse i vardagliga sammanhang.

8 Diskussion

Varje forskare och pedagog är barn av sin egen tid. I såväl empirisk forskning som praktisk pedagogisk verksamhet är de tänkesätt, pedagogiska strömningar och barnsyn som diskuteras direkt eller indirekt beroende av någon teoretisk bakgrund och tolkningsram. Medvetenhet om detta förhållande innebär att forskaren eller pedagogen lever och lär i en föränderlig värld, där dagens sanningar utvecklas och förstås i ljuset av ny kunskap imorgon. Även om en avhandling sällan omkullkastar tidigare accepterade teorier kan den bidra till att förstå ett fenomen ur ett nytt perspektiv eller kasta ljus på företeelser som tidigare inte uppmärksammats och problematiserats tillräckligt. I synnerhet när det är fråga om forskning om småbarns lärande tycks det finnas ett stort behov av att synliggöra olika aspekter av barns verksamhet, där barn uppfattas som kompetenta och aktiva deltagare.

Lindahls studier av småbarns lärande som gett upphov till avhandlingen *Inläring och erfارande* (1996) utgör en betydelsefull utgångspunkt för pedagogisk småbarnsforskning. Under 1900-talets senare hälft har spädbarnsstudier och tolkningar av barns kunnande och tänkande utgående från kliniska intervjuer (jfr Piaget) visserligen fått starkare fotfäste, men i och med Lindahls forskning fokuseras i ännu högre grad barns eget perspektiv och möjligheter till lärande, snarare än deras ännu bristande förmågor. I och med att fokus vänts mot barnens sätt att se på omvärlden och att forskaren försöker förstå världen så som den ter sig för barnen, dyker allt fler studier om småbarns erfärande upp inom pedagogisk forskning (se till exempel Johansson, 1999; Løkken, 2000; Öhberg, 2004). Föreliggande avhandling är ett bidrag till att vidga den kunskap som i dag finns om småbarns erfärande och lärande.

Den avhandling och studie som här presenteras och diskuteras tar utgångspunkt i fenomenografin. Variationsteorin, som en utveckling av den fenomenografiska ansatsen, utgör tolkningsram för hur lärande och möjligheter till lärande kan tolkas och förstås (Runesson, 1999; 2005). Många konstruktivistiska teorier och forskning som stöder sig på konstruktivismen kan bidra med värdefull förståelse av hur barn tillägnar sig kunskap och skapar mening, men ofta tycks barnet bli mycket ensamt i sitt erfärande och lärande i sådana studier. Den värld som barn deltar och skapar mening i begränsas nämligen av de människor och den miljö som barnet möter. Wittgenstein (1978, 344) säger mycket träffande "meaning resides in social patterns of use, which are themselves irrevocably woven into other aspects of social life". Innebörden av ett fenomen framträder alltså enligt Wittgenstein i sitt sociala sammanhang och i användning. För det lilla barnet som strävar efter att förstå den värld som det möter, är de sociala sammanhangen av mycket stor betydelse. Barn skapar mening genom sina handlingar i samspelet med andra människor eller med ting som är skapade av människan, vilket gör att tingen också har en kulturell innebörd. Matematik är ett ypperligt exempel på detta. Varje barn föds med möjlighet att lära sig och förstå de matematiska

principer som utvecklats under lång tid. Barn möter matematik som samhället format och gett mening, till exempel i form av symboler och principer som redskap att använda i vardaglig problemlösning. I barns möten med matematik skapar de sin egen förståelse och uppfattning av innebörden och användningsmöjligheterna. I mötet med andra människor blir barnen varse andra tolkningar av och innebörden hos något matematiskt fenomen, som gör att barnens egen förståelse av fenomenet förändras. Processen innebär att barnen blir allt mera medvetna om olika perspektiv och olika sätt att förstå fenomenet vilket leder till att barnen också upptäcker olika användningsmöjligheter. Miljön och människorna har därmed en betydelsefull roll i detta möte, eftersom mötena och sammanhangen avgör vad barn har möjlighet att erfara, urskilja och lära sig.

8.1 Småbarns möten med matematik

Det finns en hel del forskning om barns kunskaper i matematik och intresset för hur barn lär sig matematik syns inte minst i den mängd spädbarnsstudier där syftet är att analysera vilken förståelse småbarn har och hur förståelsen utvecklas. Det finns likaså många studier som tar fasta på barns "number sense" alltså hur barn uppfattar mängder och även mängder i relation till räkneorden. Att kulturen har betydelse för hur förståelsen växer fram är i dag en aspekt som forskare i allt högre grad tar hänsyn till och diskuterar. De resultat som presenteras i denna studie är ett bidrag till den kunskap som redan finns om barns erfارande och lärande av matematik. Fokus läggs dock inte på barnens kunskapsmängd vid en viss ålder, utan barnens möten med matematik speglar dels de möjligheter som barn har att tillägna sig förståelse av matematik och dels hur förståelsen gestaltar sig och vilka kritiska villkor som leder barnet vidare i lärandeprocessen. I det följande diskuteras resultaten mot den tidigare forskning som finns inom området.

Matematiska begrepp

När det är frågan om begreppsbyggnad och att förstå meningen i ett begrepp i ett visst sammanhang, blir det uppenbart hur viktigt det är för barn att möta andras uppfattningar av samma begrepp. Barn kommunicerar sin egen uppfattade innebörd på olika sätt och resonerar tillsammans med andra fram en gemensamt överenskommen innebörd (von Glasersfeld, 2001). I samspelet med andra framträder den kollektiva förståelsen, samtidigt som barnen urskiljer andra sätt att förstå och tolka ett begrepp. Barnen i denna studie jämför och beskriver till exempel mängder med begrepp som "lite" och "mycket" (se sid. 84). I samspelet med andra barn upptäcker de dock att dessa motsatsbegrepp inte alltid är tillräckligt nyanserade för att effektivt beskriva vad de avser. Det intressanta är att barn tillsammans med andra utvecklar begreppen och innebörden, till exempel som upprepning "mycket, mycket, mycket" och som "mycket mera". En förutsättning för att denna gemensamma förståelse skall uppkomma är att barn delar fokus i sammanhanget. När så inte sker, till exempel när ett barn fokuserar rättvisa framom likheter och skillnader i mängd (se sid. 83), begränsas möjligheterna att formulera en gemensam förståelse av begreppens innebörd. Runesson (2005) framhåller också betydelsen av gemensam fokusering på samma

aspekt av ett fenomen för att barn skall kunna förstå fenomenet på ett visst sätt. Ett barn kan ha upptäckt en tydlig skillnad mellan mängderna i glasen, men lyckas inte medvetandegöra andra barn på innebörden i begreppen, även om de alla diskuterar mängden. Trots att situationen kunde vara ypperlig för att dela fokus och upptäcka likheter och skillnader så har ett barn en annan aspekt av fenomenet i fokus som gör att hon inte förstår begreppets innebörd på samma sätt som de andra barnen.

Att lyckas medvetandegöra en samspelepartner på den egna fokuseringen är som ovan nämndes en förutsättning för att komma fram till en gemensam förståelse av ett fenomen. Samtidigt är det denna process där barn och vuxna blir medvetna om den andras annorlunda sätt att tänka som är karakteristisk för lärandet. Att se ett fenomen ur ett nytt perspektiv vidgar förståelsen av fenomenet i fråga eftersom tidigare inte urskilda aspekter då lyfts fram och fokuseras samtidigt (Marton, 1992). Naturligtvis är det på samma sätt i fråga om att förstå innebörden av matematiska principer. Detta blir tydligt när småbarn använder räkneord på ett sätt som kvalitativt skiljer sig från en vuxens sätt att använda samma räkneord. Det är till exempel vanligt att småbarn skapar en sådan mening i räkneorden att varje föremål tilldelas ett eget räkneord som namn. Om någon annan då benämner samma föremål med ett annat räkneord protesterar barnet mot detta eftersom den andra då bryter den mening som barnet gett föremålet (se sid. 87). För barnet i exemplet motsvarar varje räknad bil ett visst räkneord och barnet delar inte den vuxnas uppfattning som inbegriper talens antalsinnebörd (jfr Gelman & Gallistels fem principer för att förstå idén med räkneorden, 1978). Att dela fokus och lyfta fram olika uppfattningar är därmed mycket betydelsefullt för att barn skall upptäcka det samband och den innebörd som räkneorden generellt brukar ha.

Utgående från ett variationsteoretiskt sätt att tolka en lärandesituation har de vuxna som arbetar med barn en mycket viktig roll i och med att det är andra människor och den omgivande miljön som skapar barnens möjligheter att lära. Ett exempel på detta är begreppet "bred" som i denna studie inte används av barnen för att beskriva ett föremåls utsträckning i rummet. Denna avsaknad är dock inte ett förvånande resultat eftersom de vuxna som arbetar med barnen inte heller använder begreppet i sin kommunikation med dem. I stället används begrepp som "lång" eller "stor" där beskrivningen "bred" skulle kunna vara ytterligare en variation av dimensionsbegreppen som kunde öka barnens möjligheter till lärande.

Barnen i den studie som här diskuteras tycks uppfatta att det är betydelsefullt att göra likheter men i synnerhet skillnader tydliga, till exempel genom att nyansera begreppen så att de tydligt beskriver ett visst samband. Piaget (1977) menar, med hänvisning till studier gjorda av Sinclair, att barn som ännu inte förmår konservera antal använder begrepp som "stor" och "liten", "mycket" och "lite" för att beskriva och skilja ur likheter och skillnader mellan föremål. De barn som enligt Piagets teori befinner sig på operationell nivå (barn i skolåldern) använder däremot begrepp som "större" och "mindre". Detta motsägs bestämt i denna studie som visar hur ett två år gammalt barn upptäcker storlekssambandet mellan två leksaksbilar och spontant uttrycker sig med begreppen "större" och "mindre" (översatt från finska), vilket tydligt

avser den precisering av innebörd som Piaget menar inte är möjlig hos så unga barn (se sid. 80).

Likheter och skillnader

Redan Fröbel insåg att likheter och skillnader är viktiga aspekter att uppmärksamma och bli medveten om för att bättre förstå sin omvärld. Att urskilja likheter och skillnader är grundläggande för allt lärande, i och med att det är betydelsefullt att urskilja egenskaper och samband hos föremål och företeelser. Därför är det också i studiet av barns möten med matematik viktigt att ta i beaktande vad och hur barn erfar likheter och skillnader i daghemsmiljön. Ahlberg (1994) poängterar betydelsen av erfarenhet med olika sinnen, vilket stöder relevansen av att studera barns erfarenheter av likheter och skillnader genom olika sinnesintryck. Spädbarnsforskningen visar också att barn förmår överföra innebörden av erfarna fenomen mellan olika sinnesmodaliteter (se Starkey, Spelke & Gelman, 1990; Stern, 1991). Att uppfatta innebörd och känna igen samma innebörd via andra sinnen får betydande följder för det matematiska tänkandet. Att uppfatta innebörden hos ett fenomen är en form av abstraktion i och med att motsvarande innebörd känns igen hos andra föremål, samtidigt som andra egenskaper inte tas i beaktande.

I synnerhet för det matematiska tänkandet är det av betydelse att skilja ur fenomen som är lika och olika, samt att medvetandegöra vilken egenskap det är som skiljer fenomenen från varandra. Fenomenen i omvärlden har alltid någon relation till varandra och får en mening utgående från barnens sätt att tolka sambandet. Denna relation formuleras på olika sätt och är i många fall kulturbunden (jfr inuiternas många begrepp för olika kvaliteter av snö).

En förutsättning för att göra serier är att upptäcka samband mellan objekt, som utgör grunden för ordningsföljden. Serier kan göras utgående från vilka egenskaper som helst, men idén är densamma och mycket viktig att tillägna sig förståelse av. Det må sedan gälla att rangordna favoritfrukter, öka intensiteten i rörelser från att tassa tyst som en mus till att stampa som ett troll, eller att ställa sig i längdordning från det kortaste till det längsta barnet. Att på varierande sätt urskilja hur saker och ting relaterar till varandra är därför en förutsättning för att upptäcka idén med serier. På så sätt är det betydelsefullt att småbarn får möjlighet att erfara omvärlden med alla sina sinnen, samt att de uppmärksammas på de likheter och skillnader som framträder. Endast genom uppmärksamheten och fokuseringen har barn möjlighet att upptäcka sådana samband. Bruner (1996) hävdar i likhet med detta resonemang, att det är nödvändigt att få tidiga erfarenheter av varierande slag, eftersom dessa lägger grunden till framtida lärande. Därför är det viktigt att lyfta fram de yngsta barnens erfarenheter av sådana fenomen som kan lägga grunden för matematisk förståelse. Likheter och skillnader är sådana grundläggande aspekter för att upptäcka samband.

I studien framgår det tydligt att barn i tidig ålder målmedvetet förmår skilja ur vissa egenskaper och ignorera andra. Till exempel kan formen hos föremål vara det centrala, samtidigt som färg eller andra egenskaper spelar mindre roll. Barnen förmår till exempel i sorteringsaktiviteter välja ut vissa visuella likheter och skillnader och bortse från andra. Detta är exempel på en ut-

gångspunkt för klassificering och seriering, vilket enligt Piaget (1952; 1977) är en av de avgörande aspekterna i utvecklingen av antalsförståelse.

Även om barn tidigt urskiljer såväl kvalitativa som kvantitativa likheter och skillnader på ett intuitivt sätt, finns det begränsningar för barnens förmåga. Att se likheterna mellan en kloss i en viss geometrisk form och ett hål i motsvarande form tycks innebära en utmaning för barnet i episoden på sid. 91. I sina försök att få klossen genom de olika hålen blir barnet uppmärksam på att klossarna och hålen bör ha någon gemensam egenskap. Utmaningen innebär att urskilja denna likhet som barnet uppenbarligen inser att finns mellan dem. Svårigheterna i aktiviteten kan ligga i föremålets olika arter där formen i klossens fall utgör omfånget medan hålet formas av den omkringliggande ytan. Det handlar då om att urskilja figur och bakgrund.

Barnen i studien kommunicerar ofta om visuella likheter och skillnader som de upptäcker i mötet med omvärlden. Tillsammans med andra är barnen tvungna att på varierande sätt gestalta sin förståelse av det erfarna, vilket skapar många möjligheter att skilja ur nya aspekter av ett fenomen som kan fördjupa förståelsen. Också de yngre barnen som ännu inte uttrycker sin förståelse verbalt, strävar efter att skapa situationer som gör det möjligt att urskilja variationer hos ett fenomen. Öhberg (2004) visar i en tidigare studie att barn i ettårsåldern tar egna initiativ och tillrättalägger miljön för sitt eget lärande. Barn tar då i beaktande den kontext som sätter ramar för erfandet i syfte att utforska och förstå ett fenomen bättre, vilket även föreliggande studie ger stöd för.

Delar och helheter

Förutom likheter och skillnader är det också av betydelse att barn på varierande sätt urskiljer sambandet mellan delarna i en helhet. Med tanke på matematisk förståelse och att använda sig av räknepprinciper på ett effektivt sätt är det viktigt att förstå hur olika sammansättningar av delar bildar mängder.

Barns meningsskapande av matematik har till stor del att göra med deras fokusering och möjligheter att upptäcka och urskilja samband mellan delar och helhet. Detta kan ta sig uttryck så som när Nicolas uttryckligen fokuserar på fingrarna och med stöd av den vuxna ser hur varje finger får sin motsvarighet på pappret (se sid. 105). Anna som uttrycker att hon ritar sin "hand" urskiljer å andra sidan handen som en helhet och ritar runt hela handen från början. Eventuellt kan denna skillnad i fokusering föra med sig att Nicolas, med fokus på de enskilda delarna, inte väntar tills alla fingrar ritats runt. Nicolas får dock stöd i att urskilja delarna som en helhet av den vuxna som uppmuntrar honom att rita runt "alla fingrar". Redan Werner (1948) påpekade att barn först ser världen som en odifferentierad helhet för att så småningom börja urskilja delarna i en helhet. Det är enligt Markman (1979) inte tillräckligt att fokusera de enskilda delarna som skall räknas, utan helheten måste tas i beaktande, vilket studiens resultat styrker. Relationen mellan det generella och det specifika bör alltså uppfattas samtidigt för att del-helhetsrelationen skall kunna urskiljas och förstås. Denna fokusering på helheten stöder även barns framväxande förståelse av kardinaliteten i räkneorden, det vill säga att spridning i rummet eller varierande kvalitativa egenskaper inte inverkar på den numerära innebörden.

För att urskilja delarnas relation till helheten bör delarna först uppfattas som skilda från varandra, det vill säga som avgränsade delar. I studien framkommer det tydligt att barnen gör denna urskiljning på varierande sätt och på olika abstraktionsnivåer. Barnens initiativtagande och val visar deras tolkning av en situation, till exempel där ett år gamla Nora (se sid. 104) går längs klädskroarna och känner en gång på varje vinteroverall. Den idé som hon ger uttryck för är att overallerna bildar en helhet som består av avgränsade delar som hon känner på en och bara en gång och inte på några andra kläder. Idén återkommer i ett äldre barns pekräkning där barnet pekar en gång på varje figur på en sida i en bok och säger ett räkneord för varje pekning. Båda barnen avgränsar delar i en helhet och skapar på så sätt en betydelsefull mening hos delarna. Detta är även ett tydligt exempel på spiralprincipen som Bruner (1996) beskriver. Samma idé återkommer på olika abstraktionsnivåer, vilket innebär att de tidiga erfarenheterna och den intuitiva förståelsen har betydelse för den framväxande förståelsen.

Barnens förståelse utmanas ofta i samspelet med andra barn och vuxna i daghemsverksamheten. Teo ger ett gott exempel på hur han förstår att varje barn bildar en avgränsad del av en helhet som han inte förmår uppskatta och beskriva med ett vedertaget begrepp. Han väljer i stället att räkna upp del efter del och löser på så sätt sitt problem och svarar på den fråga som den vuxna ställt (se sid. 103). Enligt Piagets (1952) sätt att tolka matematisk tankeutveckling är detta exempel på en primitiv uppfattning av addition. Mängdökning och mängdminskning förutsätter en viss förståelse för att något händer med en mängds omfång eller månghet om något läggs till eller tas ifrån. Forskning om spädbarns intuitiva förståelse föreslår att barn tidigt har aritmetiska förväntningar på att en mängd förändras kvantitativt när något sätts till eller tas ifrån (Wynn, 1998; McCrink & Wynn, 2004). Också i denna studie där barnen är upp emot tre år gamla visar det sig att de tycks reflektera över mängder och gör bedömningar av vad som sker när de manipulerar med delar i en mängd. Även om räkneorden inte har en numerär innebörd så uttrycker barnen att de urskiljer en kvantitativ förändring (se sid. 109). Relationen mellan delar och helhet är den aspekt som fokuseras och problematiseras i barnens strävan att förstå mängdökning och -minskning. Piaget (1952) menar att barn redan vid 18 månaders ålder inser reversibiliteten av förflyttade föremål, men när de perceptuella intrycken inte längre är tillgängliga förlorar barnen möjligheten att uppfatta och jämföra mängder. Förståelse av numerisk reversibilitet uppträder enligt Piaget först i skolåldern när barn inte längre är beroende av konkreta sinnesintryck. Så som redovisas i föreliggande studie resonerar småbarn visserligen om talbegreppens innebörd samt antalsökning och -minskning, men alltid kopplat till konkret erfarna sammanhang.

Neuman (1989) lyfter fram det faktum att många nybörjare i skolan inte är säkra på talbegreppens innebörd, vilket kan skapa svårigheter när barn möter aritmetiska uppgifter. Att förstå innebörden av talbegrepp stöds dock av att använda fingrarna som hjälp i räknandet. Enligt Neuman kommer barn underfund med talens del-helhetsrelation genom att pröva sig fram till olika strukturer och strategier, vilket kan ta sig uttryck som att fem fingrar motsvarar en hel hand och sju då måste innebära en hel hand och två fingrar till. Det är alltså av betydelse att barn förmår uppfatta mångheten hos mängder där den numerära innebörden således är framträdande. Det framkommer

tydligt i föreliggande studie att småbarn på eget initiativ eller i samspel med andra uppmärksammar mängders del- och helhetsrelation och strävar efter att skapa mening i det erfarna fenomenet, till exempel genom att jämföra antalet prickar på pusselbitar och uppskatta dem som "några" eller som "bara en" (se sid. 112).

En av Piagets (1952; 1977) viktigaste utgångspunkter i teorin om utvecklingen av antalsförståelse är konserverandet av mängder. Att konservera mängder innebär att uppfatta att en mängd är densamma om ingen del sätts till eller tas bort. Många av Piagets studier visar att barn först i skolåldern inser denna relation. Ett typiskt exempel på detta är när ett barn plockar ett antal föremål, för ihop dem eller sprider ut dem och konstaterar att de är lika många som den ursprungliga mängden. Ofta görs test av denna förståelse i form av ett-till-ett-korrespondens där en rad av föremål hålls konstant och en identisk rad sprids ut inför barnet. Problem uppstår när barnet skall relatera varje del till en annan eftersom detta kanske inte är relevant sett ur barnets perspektiv. Studier gjorda av Gelman (1982) visar nämligen att barn i tre-årsåldern har förmåga att konservera mängder, även om de inte lyckas utföra Piagets konserveringstest. Gelman hävdar att förmågan att konservera mängder grundar sig på ett-till-ett korrespondens, på så sätt att barn omedvetet relaterar ett-till-ett för att jämföra och bestämma mängder. Tre år gamla Julia (se sid. 105) i denna studie tycks dock erfara att hon kan ändra på spridningen av en mängd russin och nötter utan att den totala mängden förändras i och med att hon benämner mängden som "alla ihop". Den verbala utsagan kan tolkas som att hon erfar att mängden "alla" från början är utspridd men när hon för ihop dem är det fortfarande samma helhet "alla", även om delarna ligger närmare varandra. Julia fokuserar då helheten framom delarna, vilket verkar vara avgörande för denna förståelse. Julia har i detta exempel ingen möjlighet att jämföra mängden ett-till-ett, men tycks ändå behålla sin fokusering på helheten och mängdens omfattning. Något svårare kan det vara att urskilja att den yttre formen på en mängd förändras men att den totala mängden fortfarande är lika stor eftersom inget lagts till eller tagits ifrån. Barnen erfar dock detta konkret till exempel när de arbetar med modeller och formar degklumpar med händerna eller med verktyg. Idén som ligger till grund för konserverandet av antal kan komma till uttryck också när barn känner igen mönster och kan sätta samman ett mönster av olika delar. Barnet urskiljer då hur delar av samma slag kan bilda likadana mönster, oberoende om delarna börjar sättas till från ett annat håll eller i annan ordning. Samma delar bildar samma helhet (se sid. 106).

Piaget (1952) och Vilette (2002) hävdar att även om småbarn kan uppfatta konkret kvantitativ ökning och minskning av små mängder, framträder inte en fullständig förståelse av räkneprinciperna förrän barnet förstår räkneoperationernas motsatta förhållande, det vill säga om två läggs till och två tas bort så är mängden lika stor som den ursprungligen var. Barnen i föreliggande studie visar sig dock intuitivt reflektera över detta motsatta förhållande och resonerar även verbalt om förändringen (se sid. 109).

Att dela en mängd innebär att dela upp helheten i dess beståndsdelar så att delarna i sig kan bilda nya mindre helheter, vilket är en förutsättning för att förstå att $3 + 2 = 5$ men också $4 + 1 = 5$ liksom $1 + 2 + 2 = 5$. På så sätt är det nödvändigt att urskilja hur delarna i en mängd är avgränsade från

varandra samtidigt som de bildar en helhet. Att erfara delning ger många betydelsefulla erfarenheter av hur en mängd består av avgränsade delar som kan sättas samman på varierande sätt och antingen återskapa den ursprungliga helheten eller skapa nya helheter. Ytterligare en djupare förståelse för del-helhetsrelationen är därtill att para ihop delar från olika mängder så att delarna bildar nya par.

Att bilda par och föra samman delar ur olika mängder kan ta sig uttryck till exempel som ett-till-ett-korrespondens. Att på detta sätt bilda par ger erfarenheter av hur olika mängder relaterar till varandra där fokus ligger såväl på delar relaterade till delar, som på delar relaterade till helheten. Zur och Gelman (2004) menar att detta hopparande är betydelsefullt för att utveckla förståelse av antal, mängder och att räkna, men kan också ses som en implicit strategi för att uppskatta mängder, i synnerhet som delar ur olika mängder inte alltid bildar jämna par. Att uppskatta mängder och antal är i sin tur av stor betydelse för att förstå och använda matematisk kunskap i olika sammanhang.

Ordningsföljd är en aspekt av matematik där idén är att varje del har ett visst förhållande till föregående och efterföljande del, vilket gör att delarna i en helhet har sina bestämda platser och är beroende av varje annan del. Piaget (1968) menar att det är nödvändigt att inse den numerära relationen mellan delarna i en serie, för att kunna förstå talbegreppen. Hos de yngre barnen i daghemmen undersöks dock denna idé i konkreta sammanhang där andra icke-numerära kvaliteter ligger till grund för ordningen i serien, men icke desto mindre betydelsefulla för att barnen skall tillägna sig förståelse av den grundläggande idén. I denna studie synliggörs till exempel hur ett barn i ettårsåldern först tar sig an uppgiften att utforska hur delarna relaterar till varandra för att sedan ordna föremålen i en tydlig serie, från den minsta till den största (se sid. 114). Ordningsföljd erfars dock inte enbart i form av konkreta föremål. Barnen i studien tycks ha behov av att strukturera upp sin dag enligt händelser. De fokuserar också då hur delarna relaterar till varandra till exempel så att en händelse ska följa en annan och händelserna är beroende av varandra för att bilda en begriplig helhet. När barnen leker en rörelselek där en hand taktfast börjar dunka, och sedan följer andra handen med i dunkandet, därefter ett ben och slutligen det andra benet så att fyra "hammare" dunkar samtidigt, visar sig barnen sträva efter att följa en speciell ordning av rörelser. Den lek som barnen utför innehåller även en matematisk aspekt i och med att det förs till ett och endast ett moment åt gången och denna ordning är mycket betydelsefull för lekledaren (se sid. 115).

Det är uppenbart att barn möter en mångfald av matematik i sina vardagliga aktiviteter i daghemmen. Såväl barnen i ettårsåldern som de barn som hunnit bli tre år gamla erfars matematiska begrepp, både verbala och ickeverbala, likheter och skillnader samt delar och helheter. Resultaten av studiet av vad barn erfars av matematisk karaktär torde belysa dessa aspekter som är grundläggande för barns framväxande förståelse av matematik, så som matematik förstås och används i det samhälle som barnen växer upp och deltar i. Ur ett pedagogiskt perspektiv är det av intresse att lyfta fram hur barnen i mötet med andra barn och ting i omvärlden skapar denna mening och förståelse.

8.2 Kritiska villkor för lärande

I barns handlingar och verbala uttryck gestaltas deras förståelse av omvärlden. Småbarn har i flertalet studier konstaterats vara avsiktliga och meningssträvande individer som tolkar och agerar utgående från sina tidigare erfarenheter (se Lindahl, 1996; Johansson, 1999; Løkken, 2000; Öhberg, 2004). Genom att tolka hur barn förstår sin omvärld framträder även de villkor som är nödvändiga för att lärande skall ske.

Carlgren och Marton (2002) samt Runesson (1999) framhåller att variation och samtidighet men även urskiljning är en förutsättning för lärande. I föreliggande studie lyfts också variation och samtidighet fram som kritiska villkor för lärande av matematik, men även rimlighet och hållpunkt. Den urskiljning som Runesson liksom Carlgren och Marton nämner är naturligtvis också betydelsefull för lärande av matematik, men kräver en djupare analys för att småbarns lärande av matematik skall förstås. Den studie som här genomförts, analyserats och diskuterats lyfter därmed fram barnens möjligheter till lärande och problematiserar ytterligare den urskiljande akten. Hur barnen urskiljer varierande aspekter av något fenomen diskuteras i termer som rimlighet och hållpunkter. Barnen urskiljer likheter och skillnader i omvärlden men för att den matematiska förståelsen skall framträda bör barnen ytterligare fokusera rimligheten i bedömningar och relatera det erfarna till vissa hållpunkter, eftersom matematik i grunden är ett jämförande och beskrivande redskap.

Reversibilitet innebär att tänka sig en händelsesekvens omvänt, vilket Piaget (1968; 1972; 1977) hävdar framträder först i skolåldern. Vidare menar Piaget att förrän det reversibla tänkandet utvecklas kan barn inte heller tänka sig underordnade kategorier eller klassificeringar där ett objekt kan klassificeras olika beroende på vilken egenskap som tas i beaktande. Ett exempel på reversibilitet är att ett föremål A konstateras finnas till vänster om B, men kan då inte samtidigt vara till höger om föremål C. De resultat som redovisas i denna studie visar å andra sidan att barn i två- och treårsåldern mycket skickligt resonerar sig fram till denna reversibilitet (se sid. 122). Barnen diskuterar en lång stund och kommer tillsammans fram till slutsatsen att det är möjligt att *samtidigt* sitta bredvid flera personer som i sin tur sitter bredvid andra personer. Piaget (1972) menar också att samma idé om reversibilitet innebär att ett föremål samtidigt kan vara mindre än och större än andra föremål. Piagets kritiska förhållande till barns reversibla tänkande kan dock ifrågasättas i och med att ett barn redan i ettårsåldern bildar en serie av tre föremål från det minsta till det största (se sid. 114). För att göra en sådan serie utforskar nämligen barnet först storleksrelationerna hos föremålen och gör uppenbarligen en uppskattning av hur föremålen relaterar till varandra. Hur barnet förstår föremålen och deras relation till varandra kan uttolkas i det sätt som barnet hanterar och ordnar föremålen. En storleksserie förutsätter att delarnas förhållande till varandra och till helheten urskiljs samtidigt, om än på ett intuitivt sätt.

Att använda talbegreppen som kardinaltal bygger enligt Markman (1979) på förståelsen av helheten som en samling delar. Det är inte tillräckligt att fokusera de enskilda delarna som skall räknas, utan helheten måste också tas i beaktande. Relationen mellan det individuella och det kollektiva bör

alltså uppfattas samtidigt. Detta stöder det kritiska villkoret *samtidighet* som Carlgren och Marton (2002), Runesson (1999) och den här presenterade studien lyfter fram. Piaget (1952) menar dock att småbarn har svårigheter att samtidigt relatera delar till helheten, vilket gör det svårt att erfara logiska förhållanden och numerära relationer. Piaget ger som exempel att när barn uppmanas välja ut den längsta stickan av ett flertal, så tenderar barn att välja vilken längre sticka som helst, och ser därmed enligt Piagets tolkning inte till helheten där alla stickors egenskaper borde tas i beaktande. Det kritiska villkor som saknas kunde vara *samtidigheten*, det vill säga att barnet samtidigt fokuserar delar och helhet. När barnen i föreliggande studie hantlar konkreta material med tydligt avgränsade delar och helhet förmår till exempel en tvååring samtidigt fokusera både antalet delar som saknas, vad som sker när ytterligare en del hittas och hela tiden relatera delarna till helheten (se sid. 125). Detta tyder på att småbarn i viss mån förmår fokusera delar och helhet samtidigt, åtminstone när det är fråga om ett färre antal delar.

Så som *variation* tolkas som ett kritiskt villkor för småbarns lärande innefattar detta den variation som barnen erfar i sin omgivning och ofta själv organiserar för att skapa mening. Variationen av mening blir synlig inte minst i barnens diskussioner om innebörden i begrepp (se sid. 127). I och med variationen blir innebörden tydlig och nyanser i förståelsen framträder. Också i barnens individuella aktiviteter där de själva varierar såväl de egna handlingarna som förutsättningarna för erfandet är variationen betydelsefull för att upptäcka relationer mellan delar och helhet. Detta visar sig bland annat i sådana aktiviteter där torn byggs på varierande sätt, delas upp och byggs samman igen (se sid. 128). Att småbarn avsiktligt varierar erfandet har också i tidigare forskning (Öhberg, 2004) konstaterats vara en fungerande strategi för småbarns lärande. Denna studie bekräftar ytterligare betydelsen av variation som ett villkor för lärande också i fråga om matematik.

Rimlighet är ett villkor för lärande, vilket i fråga om matematik är betydelsefullt, eftersom barn då gör bedömningar och uppskattar vad som kan tänkas vara ett logiskt svar eller en lämplig lösning på problem som de stöter på. Att uppskatta rum, mängder och att intuitivt bedöma antal är en framväxande färdighet som blir mera precis med tiden. Lipton och Spelke (2003) jämför sex månader gamla barn med nio månader gamla barn och konstaterar att de äldre barnen diskriminerar åtta enheter från tolv enheter, i jämförelse med de yngre barnen som skiljer ur åtta från sexton enheter. Numerär diskriminering ökar alltså i precision redan innan det verbala språket och symboliskt räknande utvecklas. Också i föreliggande studie gör barnen uppskattningar av numerära förhållanden. Detta blir synligt inte minst i sätten som de använder olika begrepp och beskriver hur de uppfattar någon mängd. Att göra en rimlighetsbedömning är i hög grad ett kritiskt villkor för lärande av matematik eftersom bedömningen innebär en nödvändig jämförelse av vilken innebörd ett fenomen har i en specifik situation.

Studier gjorda av Gelman (1982) visar att barn i treårsåldern har förmåga att konservera mängder. Gelman hävdar vidare att förmågan att konservera mängder grundar sig på ett-till-ett-korrespondens, på så sätt att barn omedvetet relaterar ett-till-ett för att jämföra och bestämma mängder. Detta

framkommer till exempel när barn får möjlighet att räkna antalet i en mängd, jämföra med en annan mängd ett-till-ett och sedan bedöma huruvida mängderna är konstanta eller ej. Till och med tre år gamla barn kan i Gelmans studie ge övertygande förklaringar till varför de anser att antalet i en mängd är oförändrat eller ej. Det kritiska tycks vara just möjligheten att inledningsvis jämföra mängder ett-till-ett som på så sätt medvetandegör barnen på en strategi som stöder barnen i deras tänkande. Utgående från de resultat som redovisas i föreliggande studie kan Gelmans tolkning understödjas, eftersom barn i ett-till-ett-korresponderande aktiviteter med nödvändighet tar *hållpunkter* i jämförandet och har då något konkret att utgå från. I den studie som här presenteras ses barnen till exempel sortera klossar ett-till-ett och använder detta förfaringssätt som strategi för att uppskatta det antal klossar som ännu bör få rum (se sid. 119). Den konkreta struktur som ett-till-ett-korrespondensen bildar är en nödvändig hållpunkt för urskiljandet och lärandet.

Att urskilja vad som varierar och vad som är konstant hos ett fenomen är grundläggande för allt lärande (se Runesson & Marton, 2002). Vad det är som erfars konstant och varierande av barnen är intressant att ytterligare lyfta fram och problematisera för att bättre förstå hur småbarns förståelse växer fram i mötet med omgivningen. Hållpunkter är således generellt av stor betydelse för lärandeprocessen. De hållpunkter som presenteras som kritiska villkor för lärande är barnens individuella och erfarenhetsbaserade hållpunkter, som de tar fasta och stöder sig på i sitt fortsatta utforskande och lärande. Dessa skiljer sig från så kallade kritiska aspekter av fenomen (jfr Marton & Booth, 2000). Kritiska aspekter innebär att det kan finnas ett ändligt antal sätt att erfara och förstå ett fenomen, vilket gör att förståelsen av fenomenet kan delas av människor, förutsatt att samma aspekter urskiljs och fokuseras samtidigt. I fråga om hållpunkter som kritiskt villkor för lärande är dessa mer bundna till barnens individuella erfarenheter, det vill säga barnens tidigare erfarenheter och förståelse av vad som sker i ett visst sammanhang.

Hållpunkter ses som ett villkor för lärande, i och med att barnet alltid relaterar nya erfarenheter till tidigare erfarenheter och förståelse. Hållpunkterna, som framträder i barns möten med omvärlden, tolkas som en förutsättning för att barn skall förstå ett fenomen, men i studien ger hållpunkterna också belägg för att lärande *är* beroende av tidigare erfarenheter och förståelse av sammanhanget, eftersom barn tydligt gör sådana kopplingar och relaterar olika fenomen till varandra.

Piagets inflytande på matematikundervisning och förväntningar på barns matematiska förmågor har varit och är ännu i dag på många håll betydande. Den teori som Piaget utformade (se t.ex. Piaget 1952) visar på den komplexitet ett logiskt matematiskt tänkande innebär. Konsekvenserna av stadie-teorin blir dock att barn inte undervisas eller utmanas förrän de anses ha nått en viss mognad, ofta kopplad till barnets ålder. Den studie som här presenteras visar däremot att barn i mycket tidigare ålder än Piagets experimentella studier visat förmår tänka logiskt, begreppsligt och operationellt samt ta perspektiv och uttrycka en förståelse av matematiska fenomen som Piaget ansåg att barn besitter först i skolåldern.

8.3 Att tillämpa sina färdigheter

Matematik är ett redskap som under lång tid utvecklats i syfte att underlätta det dagliga sociala livet. Symboler och räknesätt är förståelse och färdigheter som barn förväntas tillägna sig under sin uppväxt och även kunna använda i vardagen. Småbarn uppfattar snabbt att matematiska begrepp och symboler kan vara till god hjälp i samspelet och kommunikationen med andra, men också det logiskt matematiska och strukturerade tänkandet har sina fördelar i daglig problemlösning. Mankiewicz (2001) påstår att matematiskt tänkande i första hand handlar om föreställningar om tid och rum, om tal och om att upptäcka samband. I föreliggande studie framträder barnens strävan att kommunicera sin förståelse av samband i fråga om tid, rum och tal samt hur dessa föreställningar kan gestaltas så att också andra barn och vuxna kan ta del av deras sätt att förstå.

Wittgenstein (1978) menar att innebörden av matematiska begrepp framträder i sitt sammanhang och i användning. Ernest (1998) bygger vidare på detta antagande och vill göra gällande att matematisk kunskap omfattar både kunskap om användningsmöjligheter, kunskap grundad på logisk slutledning, tyst kunskap och faktakunskap. Enligt Ernest innebär förståelse och skapande av mening i ord och begrepp en delad förståelse för hur begrepp skall tolkas, vilket är beroende av hur och med vem människan kommunicerar och interagerar samt vilken social praktik hon tar del av. Att tänka logiskt är således också beroende av en delad livsvärld och de värderingar som där råder. Detta blir tydligt i föreliggande studie där barnen använder sig av sin matematiska kunskap i sociala sammanhang. Beroende på de värderingar som barnen upplever att det råder i en speciell situation görs olika bedömningar och hänsyn tas till olika aspekter. Barnen har därmed tidigt en central roll i det kollektiva meningsskapandet och utvecklandet av begreppsinbörder.

I studien framträder barnens förståelse av olika aspekter av matematik inte minst i problemlösningssituationer. För att lösa ett problem bör problemets ingående delar tas i beaktande och relateras till varandra för att barnen skall upptäcka samband och finna en lämplig strategi. Att uppfatta strukturer och relationen mellan delar och helhet är sådana aspekter av matematik som tydligt urskiljs i barnens problemlösande aktiviteter. Också tidigare forskning visar att barn använder sin bedömningsförmåga till exempel för att uppskatta höjd, längd och storleksrelationer (se Lindahl, 1996; Öhberg, 2004). Matematik är därmed ett redskap som barnen använder i olika syften, såväl sociala och beskrivande som problemlösande, långt innan de deltar i någon formell undervisning.

8.4 Metoddiskussion

Att tolka barns förståelse utgående från deras samspel med människor och ting i omgivningen ställer krav på forskarens lojalitet mot och lyhördhet för de barn som deltar i studien. Forskaren bör alltid sträva efter att göra tillförlitliga tolkningar som den observerade personen kan känna igen sig i. Naturligtvis är det då lättare att analysera och tolka äldre barn vars verbala uttryck ofta ger goda ledtrådar till hur de förstår något fenomen. När det är fråga om att

tolka yngre barns uttryck krävs en ännu större lyhördhet och förmåga att leva sig in i barns erfarenhetsvärld. Det svåra är att tolka barnens förståelse så att inte forskarens förutfattade meningar styr tolkningarna. I synnerhet i fråga om hur barn erfar ett kulturellt fenomen som matematik, vilket forskaren själv har erfarenheter av och förstår på ett visst kulturbundet sätt. Forskarens goda kunskaper om barns levnadsvillkor i den aktuella miljön är därmed till stor fördel, samtidigt som det är barnens olika sätt att förstå detta fenomen som hela tiden utgör ramarna för datainsamling och analys.

Förutom förförståelsen har den metodologiska ansatsen stor betydelse för analys och tolkning av insamlat datamaterial. Många tidigare studier om barns matematiska tänkande utgår från vad barn förstår och inte förstår. Att ett barn pekar och räknar högt "ett, två, fyra, åtta" kan då tolkas som att barnet ännu inte tillägnat sig fullständig förståelse av principen bakom räkneramsan och räkneordens stabila ordning, vilket enligt Gelman och Gallistel (1978) är en mycket betydelsefull insikt för att förstå och använda tal. Den studie som presenteras här följer dock inte någon färdigt uppgjord analysmodell, utan syftet är i stället att lyfta fram vad det är som barn erfar till exempel i en sådan situation där barnen pekräknar och säger talnamn i en icke-traditionell ordning. En explorativ ansats tolkar då möjligen barnets räknande så att barnet ger en grupp av föremål egna talnamn, vilket i sin tur förutsätter att barnet ser föremålen som avgränsade delar som ändå har något gemensamt eftersom de hör till den grupp eller helhet som tilldelats speciella namn. Tolkningen lyfter då inte fram eventuella brister hos barnet, utan fokuserar på den framväxande förståelse som barnet verkligen har och ger uttryck för. Naturligtvis är då också tidigare forskning och teorier om barns utveckling viktiga eftersom det ger forskaren en ram och förförståelse för vad som kan förväntas av småbarn.

Eftersom videoepisoder är mångfasetterade och informationsrika förekommer det ofta att flera perspektiv kan lyftas fram ur samma episod. I resultatredovisningen syns detta i och med att samma episod återfinns i flera kategorier, men har då analyserats ur olika perspektiv. Detta är dock i högre grad en styrka än en svaghet hos datamaterialet, eftersom det också visar hur rika vardagliga aktiviteter är på matematiskt innehåll. Det videografiska tillvägagångssättet borgar även för reliabiliteten i analys och tolkning av datamaterialet, i och med att videoepisoderna har setts igenom många gånger innan de renskrivits och kategoriserats. De flesta av episodbeskrivningarna har därtill kontrollerats av forskaren mot det ursprungliga datamaterialet när analysen befunnit sig i sitt slutskede för att trygga såväl validitet som reliabilitet.

Validiteten torde i kvalitativa studier säkras genom noggrann beskrivning av vilka tolkningsramar som gäller för det studerade fenomenet, vilket forskaren strävat efter att klargöra i denna avhandling.

8.5 Pedagogiska implikationer

Pedagoger är synnerligen viktiga för barns möjligheter till lärande. Både vuxna och andra barn i ett barns omgivning skapar förutsättningar för vilka aspekter som skiljs ur och fokuseras i en lärandesituation. Kommunikationen

spelar på så sätt också en betydelsefull roll i och med att det är i kommunikation med andra som olika sätt att förstå ett fenomen framträder. Pedagogens uppgift är att erbjuda barn möjligheter att upptäcka varierande aspekter av ett fenomen och att ge barnen tillfällen att möta matematik i många olika sammanhang och sett ur många olika perspektiv. På detta sätt möjliggörs lärande, visserligen som en individuell utveckling, men alltid relaterat till de ramar som omgivningen sätter.

Den pedagog som önskar skapa tillfällen för barn att erfara matematik bör med nödvändighet försöka ta barnets perspektiv och tolka hur barn kan förstå det som de erfår i ett visst sammanhang. Ofta skiljer sig nämligen den vuxnas och barnets sätt att förstå. Den vuxna kan dock sträva efter att få barnet att uttrycka sin förståelse och på så sätt blir en delad fokusering möjlig. Att urskilja barns förståelse och uppfattning av olika aspekter av matematik får betydande pedagogiska konsekvenser för arbetet med småbarn, eftersom de aspekter som lyfts fram och synliggörs i en situation också karakteriserar möjliga sätt att förstå fenomenet. Ett exempel på detta är avsaknaden av begreppet "bred" som beskrivning av föremål i omvärlden. Varken vuxna eller barn använder detta begrepp i föreliggande studie och barnen får på så sätt inte heller möjlighet att använda och skapa mening i begreppet.

Matematik är ett mångfasetterat fenomen med många delaspekter som samtidigt påverkar den framväxande förståelsen. Det är därför inte enbart ramsräknande och talbegrepp som bör uppmuntras i den tidiga matematikfostran. Barnens medvetande behöver också fokuseras på likheter och skillnader, samt på relationen mellan delar och helheter. Idén med räkneorden får då en starkare anknytning till den grundläggande idén som ligger bakom räknandet.

De resultat som lyfts fram i denna studie torde belysa betydelsen av att vuxna i samspelet med barn medvetandegör barnen på grupperade helheter. Visserligen är det viktigt att urskilja delar men samtidigt bör dessa delar relateras till den helhet som de utgör delar av. Tidigare forskning och resultat från föreliggande studie visar att barn tillägnar sig en djupare förståelse för det erfarna fenomenet när det är helheten som fokuseras, vilket i sin tur har betydelse för att förstå hur talbegrepp omfattar en mängds totala antal där varje del bygger upp helheten. Att synliggöra det ännu omedvetna för barnet poängteras redan av Gelman (1982), som i en studie lyfter fram att barn visar sig klara uppgifter bättre när de underliggande strategierna görs explicita. Förståelsen framträder innan barnen tillägnat sig de verbala begreppen, vilket blir synligt i deras handlingar och samspel med andra barn och vuxna. Därför behöver också de yngsta barnen på småbarnsavdelningarna utmanas att upptäcka relationer mellan fenomen i omvärlden.

Ett konkret förslag till de pedagoger som arbetar med småbarn är att hitta hållpunkterna för barnens erfارande och lärande. Vad barn tar fasta på i sin strävan att förstå och skapa mening fungerar som en språngbräda för att utforska omvärlden och att lära sig något. På samma sätt är uppmärksamheten på innebörden i begrepp, likheter och skillnader, delar och helhet, sådana aspekter som kan urskiljas och problematiseras på varierande abstraktionsnivåer. Erfarenheterna av samma idé i varierande sammanhang

är betydelsefulla såväl för en ettåring som för en treåring. I den episod (se sid. 127–128) där Emma beskriver att hon ser två tallrikar, tar pedagogen Stina fasta på det talbegrepp som Emma använder och visar på variationen av antalet två som kan ses på bordet. Emma har i detta fall möjlighet att erfara hur begreppet ”två” innebär att det är antalet som hålls konstant medan begreppet kan användas för att beskriva saker av olika slag. Det specifika är antalet, vilket pedagogen utvecklar på ett naturligt och skickligt sätt.

En studie av detta slag som analyserar vad barn har möjlighet att erfara torde få betydande pedagogiska implikationer. Undervisning på småbarns-avdelningar handlar om att medvetandegöra barn på deras erfalande och att utmana deras tänkande om olika fenomen i omvärlden. Den pedagog som strävar efter att arbeta på detta sätt bör således själv vara medveten om vilka möjligheter som ges barnen, vilken roll pedagogen själv har som meningsskapare och även som deltagare i ett gemensamt meningsskapande där inlevelse och förståelse för andras perspektiv är en ömsesidig nödvändighet.

I mina besök på daghemsavdelningarna när jag observerat verksamheten med hjälp av videokamera, har jag gång på gång slagits med häpnad över hur ofta tillfällen ges att fokusera och utmana det matematiska tänkandet hos barnen. Under loppet av tio minuter i en tambur har jag fångat tre episoder av matematiska erfanden som har haft stor betydelse för analysen av datamaterialet. Hur många möjligheter kan det då inte finnas under en hel dag av möten och samspel mellan barn, vuxna och matematik på en småbarnsavdelning?

8.6 Fortsatt forskning

Det övergripande syftet med denna studie och avhandling är att synliggöra småbarns möten med matematik i daghemsmiljön. Detta förverkligas genom att skapa detta dokument där småbarns möten med matematik i varierande sammanhang i vardagen på daghemmens småbarnsavdelningar analyseras och lyfts fram. De vuxna som arbetar med småbarn behöver vara medvetna om vad och hur barn erfar matematik för att kunna utmana barnens tänkande och förståelse för de kulturellt meningsbärande begrepp och symboler som barn förväntas ta till sig och använda. För att ytterligare belägga denna förståelse kunde ett framtida projekt vara att tillsammans med yrkesverksamma pedagoger i högre grad fokusera småbarns erfalande och lärande av matematik i syfte att dels öka barnens möjligheter till lärande, dels öka pedagogernas kompetens och intresse för matematik.

Det finns också skäl att i fortsättningen fokusera erfalande och förståelse av matematik hos äldre barn på daghem och i förskoleundervisningen. Att studera hur barn tillsammans kommunicerar och samspelar med matematik som gemensam fokusering kan ytterligare ge betydelsefulla ledtrådar till hur förståelsen av matematik växer fram, samt vilken betydelse kontext och socialt samspel kan ha för lärandet.

Summary

Introduction and study aim

International research on young children's learning has brought attention to the fact that infants and toddlers are not fragile people with non-logical minds. Instead, toddlers today are considered relatively competent social beings with skills and capacities, ready to encounter and master their surrounding world (Sommer, 1997; 2005). In this world children encounter many phenomena, including people and events in varied settings, from which they shape their understanding. Examples of such encountered phenomena can include mathematical symbols, concepts, and strategies that can be understood and used in different ways.

Mathematics is probably one of the greatest achievements of humankind. A modern adult usually understands the basics of counting and measuring and uses this knowledge everyday in many different situations. Throughout history, philosophers and mathematicians have tried to discover and describe the essence of mathematics, leading to the mystification of the phenomenon known as mathematics. Nonetheless, according to Wittgenstein (1978) and Ernest (1998), mathematical knowledge has developed from human activities bound to the world and cultures that men and women experience. Thus, mathematical knowledge is rooted in humans' everyday life, where people have come to an agreement regarding certain "laws" and principles in mathematics, combining personal understanding and general knowledge.

Adults usually have no difficulty interpreting the meaning of a number used as a symbol in different contexts. Adults understand that the number 5 may refer to five apples or five children, the 5 euro bill is equal in value to five 1 euro coins, and the number 5 on a bus has no real numerical meaning whereas a five on a competition's result list of most certainly has significance. How is it possible for a child to learn such different meanings? Symbols can be found in many different contexts, and that which is apparent to an adult must also be seen from a child's perspective and through that child's experiences and understanding of the world. Only this way is it possible for researchers to interpret and understand how children learn and understand different aspects of mathematics.

The aim of this study is to discern and describe toddlers' experiences of mathematics in everyday activities in the daycare environment. The study focuses on what toddlers experience, how the learning experience is formed, and how toddlers use their understanding to master their environment. In other words, the study will describe and qualitatively analyze children's encounters with mathematics and their perceptions of such.

Theoretical framework

Humans cannot avoid learning in their interaction with worldly phenomena and other people (Säljö, 2000; 2005). A child will always gain experience that he will rely on when trying to understand future situations. Consequently, the environment in which a child grows up plays an important role in what that child experiences and what possibilities for learning that child has. The world in which a child lives sets boundaries and provides opportunities for the kind of knowledge that is accessible and considered important as well as which tools or methods are available for use. Mathematics is no exception; a child growing up in Finland will encounter expectations regarding what he should learn and how mathematics should be used. Such expectations, determined by one's community and culture, can be found in curricula used with even the youngest children in daycare (Utbildningsstyrelsen, 2000; Stakes, 2005). According to Sommer (1997; 2005), the last twenty years of research in the field of Early Childhood Education has shown that learning takes place long before a child receives any form of schooling. One-year-olds are already skilled problem solvers when given opportunities to explore and learn in their self-chosen activities (for examples see Lindahl, 1996; Öhberg, 2004). This implies that mathematics is also a skill that a young child learns through everyday life.

Nuñez and Bryant (1996) describe children's mathematical development as three ongoing processes. Firstly, they assert that children's knowledge develops throughout childhood and is dependent on the children's experiences. This implies that children do not learn mathematics bit by bit but instead perceive structures and patterns that gradually form their understanding of a concept or phenomenon. Thus, young children already possess some kind of understanding, based on their experiences of concepts or phenomena. Secondly, according to Nuñez and Bryant, children learn the conventional systems used in the different situations they experience. These systems are dependent on the culture and context in which they appear and children learn to use the concepts, symbols, and methods they experience as tools for problem solving. Thirdly, Nuñez and Bryant define mathematics as a social activity which influences how children encounter mathematics in different situations, resulting in each child finding himself becoming a problem solver.

The phenomenographical interpretation of human learning perceives learning as being changes in understanding and acting towards a specific phenomenon (Marton, 1992; Marton & Booth, 1997). Marton and Morris (2002) state that some necessary conditions must exist in order that a certain kind of learning should occur. According to Marton and Morris, as well as Runesson (2005), these critical conditions of learning are variation, simultaneity, and discernment. In order to discern something, variation must occur simultaneous with the discernment of different aspects of a phenomenon. This theory of learning, the so-named variation theory (Runesson, 1999), sets the framework for understanding what is possible to learn in a learning situation.

During the last few decades, many studies of children's understanding of arithmetic and when children are able to use the principles of counting have been carried out. Many of these studies focus on children's ability, or lack of

ability, to understand and use numerals. Such a focus has resulted in studies where children younger than three years of age seldom participate even though it is a fact that children's understanding of numerals is established at an early age. Infants are, for example, capable of discriminating the amounts two and three, a preverbal process called subitizing, and are also capable of forming strategies for discriminating and comparing sets of items (Gallistel & Gelman, 1991). Children younger than two years of age are thereby capable of understanding the idea of a number before they use and understand numerals.

According to Gelman and Gallistel (1978; 1990), there are five principles that define counting: the one-to-one principle, where a child associates a single object to another object, one-to-one; the stable-order principle, where a child uses a consistent sequence of words; the cardinal principle, which implies that a child understands that the last counted object represents the total number of objects in a set; the abstraction principle, which is based on the concept that any item can be defined as being valid for counting; and the order-irrelevance principle, which involves understanding that a group of objects can be counted in any order, as long as each item is only counted once. The order-irrelevance principle can also include the understanding that a group of items consists of smaller quantities of items, forming the parts of a whole, and that these parts can be related to one another in different ways.

The relation between parts and whole seems to be one of the keys to understanding and using counting principles. Piaget (1968) argues that a child must first grasp the concept of conservation, founded on series or classification, to be able to understand and use numerals and arithmetic principles. According to Piaget, knowledge cannot suddenly appear in a child's mind but instead develops through interaction with the surrounding world, implying that early experiences are important for not only understanding current situations, but also for future learning and understanding. Subsequent research has given credence to this idea. Research on infants' and toddlers' arithmetical skills show that children seem to have arithmetic expectations, or a sense of numbers, long before they can verbally express their intuitive understanding (Starkey, Spelke & Gelman, 1990; Wynn, 1998; Mix, 2002). How such early competencies develop is related to the expectations and possibilities provided by a child's culture and community.

Methodological approach

Toddlers, who are not yet able to fully express themselves verbally, express their understanding through action (Piaget, 1982; Lindahl, 1996; Johansson, 1999; Öhberg, 2004). In order to study toddlers' learning, a researcher must take the child's perspective and interpret how an experienced phenomenon appears to a child. Such an endeavor is possible only if a non-dualistic approach to the world and its people is taken. A basic non-dualistic perspective maintains that people live in the same world but experience it differently; how a person understands a phenomenon is always dependent on previous experiences. A phenomenological approach, including a basic non-dualistic perspective, implies that the significance of an object or occurrence is related to the individual experiencing the object or occurrence (Bengtsson, 1999; Johansson, 1999). Marton and Booth (1997) share this

basic non-dualistic view of individuals living and learning in the world. According to Marton and Booth, actions and understanding are tightly interwoven in that an individual can only act in relation to his surrounding world based on his understanding of said surrounding world. Thus, a change in actions implies that a change in understanding has occurred. Therefore, in accordance with such a phenomenographic approach, a child's actions can be interpreted as expressions of his understanding and learning. Studying and analyzing these variations in understanding is the basis of a phenomenographic research approach. Phenomenographic studies often have implications for educational practice since they focus on variations in understanding experienced phenomena. The variations in understanding experienced phenomena depend, in turn, on the critical aspects of a phenomenon that a person is aware of (Marton, 2002). The phenomenographical interpretation of human learning, called variation theory (Runesson, 1999; 2005), views learning as changes in understanding and acting towards a specific phenomenon. Variation theory implies a focusing on that which it is possible to learn in a specific situation, given that there are a limited number of critical aspects in a phenomenon that must be discerned and simultaneously focused on in order for learning to occur.

The methodological approach delineated above places demands on the study's data collecting methods. In order to interpret children's actions as expressions of understanding, a researcher must observe the children's actions in a natural setting. However, a lone researcher is unable to perceive everything that is happening at the same time; it is not physically possible for a single person to grasp all actions and related context as well as interpersonal interaction at the same time.

Video technology betters for a researcher the possibility to comprehensively observe human actions. A videographic data collection method entails that a researcher uses video footage to record and describe phenomena or human actions in their natural settings (Lindahl, 2002). Videography can also be considered a methodological approach, where the purpose of study is to discern human actions and understanding. A videographic episode contains multiple occurrences that can be viewed repeatedly, thereby revealing more than that which is perceived in the moment that something happens. Videographic episodes therefore allow for a more thorough analysis of content and meaning in a given situation and ensure that different perspectives are taken into account.

A study of toddlers experiencing mathematics

Twenty-three children were videographically observed during everyday activities in daycare. The children included in this study are aged from 1 year, 1 month to 3 years, 9 months. Descriptions of the toddlers' actions and communication with other children and adults were analyzed in order to explore how the children came to understand the mathematics they encountered.

A phenomenographic approach sets the framework for this study's interpretation of the children's actions as expressions of understanding and learning. Furthermore, variation theory makes it possible to broaden the study's interpretation and understanding of the learning process. A videographic approach contributes towards the discernment and description of complexity

in the learning process. One must remember that learning is always contextual, content should not be overlooked when analyzing learning situations. Thus, variation theory and a videographic approach support a context-relation and make it possible to realize qualitative and reliable data.

Results

The video material shows variations in how toddlers experience and understand different aspects of mathematics. Through interaction with their surrounding world and other people, the children gained experience and became more aware of mathematics, a common part of everyday life.

Toddlers' experiences of mathematics

During the course of the day, children in daycare experience many mathematical concepts in interaction with adults and other children. Mathematical concepts are defined in this study as being descriptions of phenomena whose meaning appears in relation to other phenomena in the present situation. Together with their peers, the toddlers discuss and express their understanding of the meaning of concepts experienced. Consequently, different ways of understanding the same concept becomes palpable, providing the children an opportunity to experience different ways of understanding: as a result, learning occurs.

The concepts that toddlers experience and discuss the meaning of include describing dimensions and proportions, location, extension, numerosity, and succession. On the one hand, comparison is key in that most of the aforementioned concepts depend on relationships between objects; in other words an object can be either small or large depending on what it is compared to. On the other hand, number-concepts are more general and do not depend on observable relationships as regards quality. Number-concepts describe the numerical aspect of amounts and are, in this manner, more exact in content. When encountering the different ways of understanding the aforementioned concepts, the children express their own understanding and try to negotiate the meaning of said concepts with their peers.

Discerning similarities and differences is important in all kinds of learning, but especially when learning mathematics. Mathematics is a tool used to describe relationships between phenomena in the surrounding world, and, as such, depends on discerned differences. The children in this study often discuss visual similarities and differences, especially when their experience of a phenomenon differed from others. The visual aspects discussed included shape, color, size, and quantity. It is necessary to focus on these visual aspects in order to measure, compare, and properly identify and name experienced phenomena through appropriate concepts.

Experiencing similarities and differences between phenomena in the world is crucial for understanding and creating series or sequences. In a sequence, each unit has a specific relation to both the previous unit and the following unit. Such sequences can be composed of any kind of unit, regardless of whether the phenomenon is visible or experienced through any of the other senses. In this study, the children encountered auditory similarities and differences and tended to focus on differences in auditory character, strength, or

meaning. How the children experienced an auditory difference was then expressed in their explorative actions. Tactile and other qualitative similarities and differences were also observed in this study, but were not to the same extent focused on nor expressed by the children or adults.

The relationship between parts and whole is an important aspect in understanding the basics of counting and measuring. In this study, it becomes apparent that children encounter and focus on certain aspects of the part-whole relation, including: separate units, constant amounts, adding, subtracting and dividing amounts, matching items, and sequences.

The children in this study daily become aware of how things can be seen in terms of amounts, for example, a group of items with similar qualities. In order to experience an amount as a specific number of units, a child must first experience units as being separate from other units. The following episodes show how two children experience units in different situations and on different levels of abstraction.

Nora (1 year, 6 months) walks along the shelves where the children's snowsuits are hanging on coat pegs. Nora touches each snowsuit once when she passes by.

Julia (3:9) browses through a picture book. She recounts the story aloud and points with her index finger at seven separate characters while saying "one, two, three, four, six, seven, eight".

Nora is one of the youngest children observed in this study. She and her peers are often seen wandering around the daycare center, seemingly without purpose. However, upon analyzing Nora's actions, it is clear that she undergoes a lot of experiences that will develop her understanding of mathematics. The first episode above describes an ordinary activity where Nora singles out a group of items and touches them one by one. As Nora touches each snowsuit (only the snowsuits), she experiences them as a group of items with a common denominator. However, her touching each snowsuit once (and only once) also implies that she experiences the parts of this group as single units.

In the second episode above, Julia's actions express the same perception of units and relationship between parts and whole as in the first episode, but Julia also expresses her understanding verbally. Julia clearly experiences the figures in the book as parts of a group when she points at them one by one while simultaneously saying a word for each figure. While she does not count aloud using a "proper" number sequence, she does count out the single parts of a group. Both Nora and Julia experience and express the same idea, even though their idea is experienced in different contexts and on different levels of abstraction.

Another aspect that is of great importance to furthering arithmetical understanding is the comprehension that a constant amount remains constant, it does not change in quantity even if the units are spread out or change places. Children learn to understand this concept of conservation when experiencing how parts and whole relate to one another. The children in this study explore and learn about constant amounts by, for example, sorting items; an example of such is when a child manipulates a number of items and notices that the quantity remains unchanged. The following episode

shows how a boy discovers that he can create the same pattern several times, he varies the order of the units and their placement on the table yet always creates the same pattern. Through this activity, the boy learns something important about the relationship between parts and whole.

Teo (3:5) lines up five differently colored sticks in a row, [head to tail,] one after the other. He places a square above the first stick from the left and another square against the first square. These two squares together are exactly the length of one stick. Teo places two more squares above the second stick from the left. Teo then makes a new row using the same sticks and places four squares above the first two sticks, starting from the right. The four squares used are exactly the length of the two [abutting] sticks.

Teo experiences the relationship between the different parts he uses, where some parts are twice as long as other parts. In order to discover this fact, he repeats the sorting activity, using another area of the table and putting the units together in a different order. The variations in the activity provide Teo the insight that parts do not change in length and that their relation in length to other parts is constant. Even though he does not experience the amount as a number of items, he gains important experience of the foundation of numerical concepts; the content of the whole will be constant despite the fact that parts can be put together in different ways. The discovery of a constant relationship between parts is also important for understanding measurement and measuring. In order to measure, a person needs a reference that will remain constant, a reference he can relate other things to and which allows for the discovery of similarities and/or differences.

The children in the study experience in various settings how amounts change when items are added to or subtracted from. The study's analysis shows that toddlers are in some manner aware of the principles of addition and subtraction and that they struggle to understand how parts and whole are related. It has previously been determined that infants possess arithmetic expectations. This study demonstrates how young children explore and experience arithmetic principles in self-chosen activities. Even though children may not understand the concept of numbers, they possess an intuitive understanding of how an amount changes. In order for children to understand how a group as a whole will change in quantity if the number of items forming said group changes, it is necessary to experience how single units form a group.

Dividing an amount implies splitting a group into units. The units resulting from such a split gain new meaning as individual groupings when the original amount decreases. However, division differs from subtraction as regards the role that the new amount is given. In division, parts have qualitatively equal meaning; both the remainder and original are of equal interest. However, in subtraction, the part taken away has no further meaning; the part that remains of the original amount is what is important. In this study, it is possible to discern how children understand the idea of division by focusing on how parts form a whole with meaning.

Adam (3:1) piles four cups, one on top of the other. The tower of cups falls and Adam pushes the cups off the table. He says, "Gun's got mail". Adam picks up three of the cups from the floor and stacks them inside

one another. He places them on the table, turns them up side down, and builds another cup tower. Adam removes one cup at a time, giving them to Gun while saying "Moomin Mother's, Moomin Father's, and the Moomin Troll's".

Adam first assembles the parts of a whole. He then splits the whole into parts when rebuilding the cup tower several times. Then, when Adam distributes and allocates the parts of the whole to specific characters, he expresses his understanding of the cups as parts of a whole that can be divided into smaller amounts and whose parts possess certain meaning.

Matching is an important aspect of mathematical understanding. Matching or pairing items together from different entities implies that a child is able to experience units as parts that can be assembled to form a new whole. In this manner, parts may be assigned different meaning and relationships depending on which whole they belong to. Young children can be observed matching items one-to-one when they discover the qualities that relate objects to one another. It is important that children discover similarities and differences and make a choice regarding which qualities to consider or disregard.

One-year-olds often participate in sorting activities where they form wholes in accordance with their understanding of similar or dissimilar qualities. One-year-old Nora provides a simple but descriptive example of matching in this manner.

Nora (1:6) sits on the floor, picking and sorting plastic animals into a basket. She lifts up two giraffes and places them feet-to-feet. Nora then walks away with a giraffe in each hand.

This episode provides several examples of matching. From many different toys, Nora picks two that in some way look alike. The chosen plastic animals have something in common and Nora investigates this by placing them feet-to-feet. During her experiment the giraffes' feet meet, Nora has matched the four feet of one giraffe to the four feet of the other giraffe. Furthermore, Nora has matched the two giraffes using her hands; she subsequently holds a giraffe in each hand. This type of matching is often seen in toddler activities, for example, when toddlers try on shoes – one shoe for one hand or one shoe for one foot. In such an activity, children match a part from one group with a part from another group, forming a new group, a pair.

Experiencing order or sequence is important for understanding series and succession, for example, creating a shorter or longer series or understanding a series of numbers. In a sequence, parts have a specific relationship with their preceding and subsequent parts. As regards numbers series, one should focus on the numerical value of the parts in the series and no other qualities should be focused on. However, experiences of sequences are important in order that a person begins to grasp the idea of a relationship between parts in a sequence. In this study, even one-year-olds experience and explore sequences using, for example, differently sized cups. The children in this study experience sequences with concrete physical objects as well as time. Time is a difficult phenomenon to understand; yet, it must be understood because it greatly influences humans' everyday life. To make sense of time, children try to structure the day as a sequence of occurrences. This seems

to help children grasp both what has happened and what will happen later on during the day.

Critical conditions of learning mathematics

Based on the study data, the critical conditions of learning mathematics are *simultaneity*, *variation*, *reasonableness*, and *fixed points*. Simultaneity implies that a child experiences how a phenomenon can have different simultaneous meanings, depending on the perspective taken. Variation, or experiencing how a phenomenon can vary, is important, in that when a previously experienced concept or phenomenon appears in different settings, a child can still understand it in a certain way. In such cases, a child has abstracted the meaning of the phenomenon until a common meaning was reached, a meaning which then applies even if the context varies. Reasonableness is another critical condition of learning mathematics, implying that a child gauges and chooses that which seems to be reasonable in a specific situation; for example, children in the study gauged which tool they needed to solve a problem or which concept best described an experienced phenomenon in a given situation. A fixed point is a known, previously experienced phenomenon which a child relates new experiences to, and the critical condition fixed points implies that a child takes a reference point for his exploratory activities. Relating a new experience to earlier experiences allows a child to interpret and understand phenomena and reinforces used reference points for better use in further exploration.

Learning is a complex process that should not be perceived as consisting of separate parts. The critical conditions presented here are discerned from the study material in order to describe the complexity of learning. These conditions should be understood as interacting parts of the entire process known as learning. The following episode gives an example of how critical conditions together form a learning experience.

Emma (2:6) puts six cubes in a row on the table: two yellow, two green, and two blue. She takes a yellow ball and places it beside the yellow cubes. Julia (3:9) places a black cylinder at the end of the row of cubes and continues to place balls in a row next to the cubes. The balls roll away and the girls catch them and put them back in the row. The girls are now placing one ball beside each cube and then forming another similar row of cubes and balls next to the first row. The cylinder is left alone, without a match. There are two more balls and one cube left on the table and a grown-up that has been following the girls' actions says, "there are two more balls". Emma replies, "oh no, is there room for three more?" and then, "there is!" when Julia places the last cube on top of the cylinder. The cube placed on the cylinder falls off and Julia [then] places the cube at the end of the row of cubes, making the rows even. Julia puts one of the balls on top of the last cube and the grown-up asks, "now there is one left, where are you going to put it". Emma points at the cylinder, saying "there!", and Julia places the last ball on top of the cylinder. There is now one ball over each cube, even over the cylinder. Julia looks closely at what they have built and says, "there are the stairs and there is the roof and that's where you go in". Julia points

at every ball once, saying, “there and there and there...” pointing every time she speaks.

Simultaneity is clearly demonstrated in this episode when the girls experience the balls and cubes as separate units simultaneously related to other items that form a whole. The girls perceive the shape of the items as the quality that forms the group. At the same time, they match items from one group with items from another group: cubes and balls in different rows while one cube and one ball make a pair. In this episode, the single parts can have many different meanings depending on what the part is related to. The girls obviously experience these different meanings simultaneously, in that they seem to come up with an idea of what to build and then follow this idea until all items hold a particular place in the structure.

Variation is another critical condition of learning also demonstrated in this episode. In order to understand the quality and characteristics of parts and how they relate to one another, Emma and Julia vary how they build and form a whole. Through variation, the girls experience the different relationships that the parts can have. When the girls sort the cubes and balls, for example, they separate according to shape, but when they start adding a ball to each cube, the previously single units become part of a pair. Variation within an activity makes it possible for children to experience and explore the deeper meaning of a phenomenon. As seen in this episode, when the cylinder does not seem to fit into the configuration, the girls find a way of broadening the concept so that the cylinder fits and is given a role.

One of the girls, Emma, clearly demonstrates a sense of reasonableness during this activity. When there are just a few items left to use in the construction, Emma notices that the remaining space available is limited and asks aloud if there is room for three more objects. She assesses the number of items left and the room available, and then proceeds to state that there is enough room, thus clearly reasoning about dimensions and focusing on the parts to be put together.

Fixed points are also an important critical condition of learning. When children relate what they experience to something experienced previously, it helps them make the experienced phenomena concrete and understandable. In the study, the children express how they relate to different fixed points in play and activities, for example, when Julia describes the structure she and Emma have built as “stairs” and explains where to go. One can assume that Julia is relating the structure she built to a house with stairs she is familiar with in that she points to every “stair” (i.e. unit) and says “there and there and there...” The fixed points help Julia stay focused and aware of the different aspects of the experienced phenomenon. Fixed points are important in activities where mathematical content needs to be focused on, when a child builds a tower of blocks, for example. The tower is perceived as being “high” in relation to other fixed points such as the child itself, another person who might be taller than the child, or a doll much smaller than the tower. How high the tower is experienced as being depends on what a child relates it to.

How toddlers use their understanding of mathematics

Through toddlers' actions and communication with others, it is possible to interpret how they experience and understand mathematical phenomena. Mathematics is a phenomenon that children have a lot of experience of and which they always perceive through earlier experiences, that is to say they relate their experience to each actual situation. How children understand mathematics affects how they use mathematics when mastering their world. One cannot separate meaning and applicability in mathematics, especially as mathematics is a tool used in communication and problem solving.

In this study, the analysis of how the observed children use their understanding of mathematics shows that children use mathematics to abide by social rules, to describe their surrounding world, and as a tool for problem solving. In order to abide by social rules, the toddlers must share tools equally and/or take other's skills and capacities into consideration. It also seems important to the children that "everyday" rules are followed; they clearly express their understanding of such rules and the necessity for all to follow the rules.

Mathematical concepts were created in order to describe and give general meaning to phenomena in the surrounding world. Accordingly, the meaning of mathematical concepts must be negotiated, given that mathematical concepts are viable only if several people agree on their meaning. Children negotiate in this manner every day. When someone, another child or an adult, applies a concept differently than the observing child himself would, a conflict arises. The child making the observation struggles to make the other person aware of his understanding of the concept or his understanding of which concept should be used to describe that specific phenomenon.

Problem solving also engages toddlers' mathematical understanding. Jigsaw puzzles are common in daycare and to solve a jigsaw puzzle, a child must have a strategy. The purpose of such a strategy is to structure and simplify the selection of correct jigsaw pieces, implying that insight into the relationship between parts and whole is important. Successful actions also include strategies intended to maintain order. Logical thinking, where possible events are taken into account and a child is able to think beyond the present situation, is an important aspect of both problem solving and a child's mathematical understanding.

Discussion

It is apparent in toddlers' everyday activities that it is important to negotiate concepts' meaning with others. Through interpersonal interaction and communication, different aspects and ways of understanding a phenomenon or concept can be discerned, bettering the possibility that the understanding and learning of new ways of interpreting the surrounding world will be shared. Both Runesson (1999) and von Glasersfeld (2001) also agree that this argument is fundamental to learning.

All types of sensory experiences of similarities or differences are important for mathematical understanding. Ahlberg (1994) maintains that children need experiences that employ different senses in order to discover how phenomena are related to one another. This study investigates and demonstrates

how toddlers discover similarities and differences and tries to understand the relationship between phenomena experienced through different senses.

When toddlers discover qualities that relate objects to one another, the matching of items one-to-one can be observed. The discovery of similarities and differences and the choosing of qualities to consider or disregard is key to understanding numerals and counting. Furthermore, according to Zur and Gelman (2004), such actions appear to be part of an implicit strategy for estimating an amount. Thus, the ability to estimate amounts is an important aspect of understanding and using mathematics. When it comes to number series, it is important to focus on the numerical value of the parts in the series, not other qualities (Piaget, 1968). However, experiences of sequences are important for grasping the idea of the relationship between parts in a sequence. In this study, even one-year-olds experience and explore sequences, for example, with differently sized cups.

Marton and Morris (2002) maintain that some necessary conditions exist in order that a certain kind of learning occur. Marton and Morris, as well as Runesson (2005), refer to variation, simultaneity, and discernment as being the critical conditions of learning. In this study, the critical condition discernment is problemized, resulting in the emergence of reasonableness and fixed points as two critical conditions of learning mathematics. These critical conditions are interrelated parts of the learning process. In order to understand and learn different aspects of mathematics, toddlers must focus on variations of experienced phenomenon and variations within said experienced phenomenon. They must also simultaneously focus on the different aspects of the experienced phenomenon. Another critical condition is to reason in relation to logic and possible occurrences (reasonableness) and to relate experienced phenomenon to fixed points. Fixed points allow a toddler to take into account earlier experienced phenomena and understanding as a reference point. All of these critical conditions together can lead a child to a new way of understanding.

The study results support the idea of toddlers being competent and active skillful learners, contributing to existing research and knowledge regarding toddlers' learning (Lindahl, 1996; Johansson, 1999; Løkken, 2000).

Implications for educational practice

The results from this study do have implications as regards current understanding of how toddlers learn mathematics in everyday activities. Adults working with young children play an important role in setting perimeters for children's experiences and possibilities to explore mathematical concepts, including phenomena in the children's physical environment and social interaction. Knowledge regarding which aspects of mathematics should be understood so that mathematical principles and concepts can then in turn be understood and how children negotiate meaning with their peers provides adults working with young children an opportunity to support and challenge children's learning.

Referenser

- Adler, B. (1996a). Matematikens väsen. I G. Malmer & B. Adler, *Matematiksvårigheter och dyslexi*. Lund: Studentlitteratur.
- Adler, B. (1996b). Pedagogiska konsekvenser. I G. Malmer & B. Adler, *Matematiksvårigheter och dyslexi*. Lund: Studentlitteratur.
- Adler, B. (2001). *Vad är dyskalkyli? En bok om Matematiksvårigheter. Orsaker, diagnos och hjälp*. Höllviken: NU-Förlaget.
- Ahlberg, A. (1992). *Att möta matematiska problem. En belysning av barns lärande*. (Diss.) Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Ahlberg, A. (1994). *Att möta matematiken i förskolan. Rita, tala och räkna matematik*. Rapport nr 12, Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.
- Ahlberg, A. (1995). *Att möta matematiken i förskolan. Matematiken i temarbetet*. Rapport nr 14, Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.
- Ahlberg, A. (2001). *Lärande och delaktighet*. Lund: Studentlitteratur.
- Ahlberg, A. & Hamberger, B. (1995). *Att möta matematiken i förskolan. 6-åringars förståelse av tal och räkning*. Rapport nr 8, Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.
- Ahonen, S. (1994). Fenomenografinen tutkimus. Teoksessa L. Syrjälä, S. Ahonen, E. Syrjäläinen & S. Saari, *Laadullisen tutkimuksen työtapoja*. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Andersson, M. (2006). En matematikers syn på lärande i tidiga år. I G. Emanuelsson & E. Doverborg (Red.), *Matematik i förskolan. Nämnaren Tema 7*. NCM, Göteborgs universitet.
- Aunio, P., Niemivirta, M., Hautamäki, J., Van Luit, J., Shi, J. & Zhang, M. (2006). Young children's number sense in China and Finland. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 20 (5), 483–502.
- Bauersfeld, H. (1998). Radikalkonstruktivism, interaktionism och matematikundervisning. I A. Engström (Red.), *Matematik och reflektion*. Lund: Studentlitteratur.
- Beilin, H. (1992). Piaget's new theory. In H. Beilin & P. Pufall (Eds.), *Piaget's theory. Prospects and possibilities*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Bellagamba, F. & Tomasello, M. (1999). Re-enacting intended acts: Comparing 12- and 18-month-olds. *Infant behavior & development*, 22 (2), 277–282.
- Bengtsson, J. (1999). En livsvärldsansats för pedagogisk forskning. I J. Bengtsson (Red.), *Med livsvärlden som grund*. Lund: Studentlitteratur.
- Benoit, L., Lehalle, H. & Jouen, F. (2004). Do young children acquire number words through subitizing or counting? *Cognitive Development*, (19), 291–307.

- Bowden, J. & Marton, F. (1998). *The university of learning*. London: Kogan Page.
- Bruner, J. (1996). *The culture of education*. (3rd ed.). Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- Butterworth, B. (1999). *Den matematiska människan – siffrornas roll i vår kultur och historia*. Stockholm: Wahlström & Widstrand.
- Butterworth, G. & Harris, M. (1994). *Principles of developmental psychology*. Hove: Lawrence Erlbaum Associates Ltd.
- Campbell, S. (2001). Three philosophical perspectives on logic and psychology: Implications for mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, (14).
- Carlgren, I. & Marton, F. (2002). *Lärare av i morgon*. Stockholm: Lärarförbundet.
- Cashon, C. & Cohen, L. (2000). Eight-month-old infants' perception of possible and impossible events. *Infancy*, 1 (4), 429–446.
- Charlesworth, R. (1996). *Experiences in math for young children*. (3rd ed.). Albany, NY: Delmar Publishers.
- Clearfield, M. (2004). Infants' enumeration of dynamic displays. *Cognitive Development*, (19), 309–324.
- Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31 (3/4), 175–190.
- Curcio, F. & Schwartz, S. (2006). Förskolebarns algebraiska tänkande. I G. Emanuelsson & E. Doverborg (Red.), *Matematik i förskolan. Nämnaren Tema 7*. NCM, Göteborgs universitet.
- Dagvårdens verksamhetsplan för barn under tre år* (1986). Helsingfors: Socialstyrelsen.
- Devlin, K. (1994). *Mathematics: the science of patterns. The search for order in life, mind and the universe*. New York: Scientific American Library.
- Dewey, J. (1997). *Demokrati och utbildning*. Orig. 1916. Göteborg: Daidalos.
- Donaldson, M. (1978). *Hur barn tänker*. (2. uppl.). Lund: Liber.
- Doverborg, E. (1987). *Matematik i förskolan? Rapport nr 5*, Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.
- Doverborg, E. & Pramling Samuelsson, I. (1999). *Förskolebarn i matematikens värld*. Stockholm: Liber.
- Doverborg, E., Pramling, I. & Qvarsell, B. (1990). *Inläring och utveckling. Barnet, förskolan och skolan*. Stockholm: Liber.
- Engström, A. (1998). Piagets genetiska epistemologi. I A. Engström (Red.), *Matematik och reflektion*. Lund: Studentlitteratur.
- Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany: State University of New York.
- Forskningsetiska delegationen (2002). *God vetenskaplig praxis och handläggning av avvikelser från den*. Tillgänglig på <http://pro.tsv.fi/tenk/htksve.pdf> (22.1.2007).

- Fosse, T. & Munter, J. (1996). Geometri og små barn - hva er det? I M. Johnsen Høines (Red.), *De små teller også. Matematikken i førskolepedagogikken*. Landås: Caspar.
- Frege, G. (2002). *Aritmetikens grundvalar*. Orig. 1884. Stockholm: Thales.
- Fröbel, F. (1995). *Människans fostran*. Orig. 1826. Lund: Studentlitteratur.
- Fuson, K. & Hall, J. (1983). The acquisition of early number word meanings: a conceptual analysis and review. In H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. London: Academic Press.
- Gallistel, C. R. & Gelman, R. (1990). The what and how of counting. *Cognition*, (34), 197–199.
- Gallistel, C. R. & Gelman, R. (1991). Subitizing: the preverbal counting process. In F. Craik, W. Kessen & A. Ortony (Eds.), *Essays in honor of George Mandler*. Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.
- Gallistel, C. R., Gelman, R. & Cordes, S. (2005). The cultural and evolutionary history of the real numbers. I S. Levinson & P. Jaisson (Eds.), *Evolution and culture*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Gelman, R. (1982). Accessing one-to-one correspondence: still another paper about conservation. *British Journal of Psychology*, (73), 209–220.
- Gelman, R. & Gallistel, C. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- Ginsburg, H. P. (1996). Toby's math. In R.J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: a way of knowing and learning*. London: The Falmer Press.
- von Glasersfeld, E. (1997). Amplification of a constructivist perspective. *Issues in Education*, 3 (2), 203–209.
- von Glasersfeld, E. (2001). The radical constructivist view of science. *Foundations of Science*, (6), 31–43.
- Goode, D. (1992). *Data in social research: an ethnomethodological interpretation of quantitative data, descriptions and videotape #1*. Paper presenterat vid seminariet "Video i kvalitativ pedagogisk forskning". Sønderborg, Danmark, juni 1992.
- Gopnik, A., Meltzoff, A. & Kuhl, P. (1999). *The scientist in the crib. Minds, brains, and how children learn*. New York: William Morrow and Company, Inc.
- Gran, B. (1998). Matematik på elevens villkor. I B. Gran (Red.), *Matematik på elevens villkor – i förskola, grundskola och gymnasieskola*. Lund: Studentlitteratur.
- Haapasalo, L. (1997). Konstruktivistisen pedagogiikan problematiikasta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (Toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki säätiö ja koulutuksen tutkimuslaitos.
- Hammersley, M. & Atkinson, P. (1995). *Ethnography. Principles in practice*. (2nd ed.) London: Routledge.

- Hannula, M. (2005). *Spontaneous focusing och numerosity in the development of early mathematical skills*. (Diss.). Turku: Annales Universitatis Turkuensis
- Harnishfeger, K. & Bjorklund, D. (1990). Children's strategies: a brief history. In D. Bjorklund (Ed.), *Children's strategies. Contemporary views of cognitive development*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Ltd.
- Hasselgren, B. & Beach, D. (1997). Phenomenography – a “good-for-nothing brother” of phenomenology? Outline of an analysis. *Higher Education Research & Development*, 16 (2), 191–202.
- Hegel, G. W. F. (1979). *Phenomenology of spirit*. Orig. 1807. Oxford: Oxford University Press.
- Heidegger, M. (1981). *Varat och tiden*. Orig. 1927. Lund: Doxa.
- Helenius, A. (2001). Varhaiskasvatuksen juurilla. Teoksessa K. Karila, J. Kinos & J. Virtanen (Toim.), *Varhaiskasvatuksen teoriasuuntauksia*. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* London: Jonathan Cape.
- Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. (1998). *Tutki ja kirjoita*. Helsingfors: Kirjayhtymä.
- Hujala, E. (2002). The curriculum for early learning in the context of society. *International Journal of Early Years Education*, 10 (2), 95–104.
- Hundeide, K. (2006). *Sociokulturella ramar för barns utveckling – barns livsvärldar*. Lund: Studentlitteratur.
- Hunting, R. P. (2003). Part–whole number knowledge in preschool children. *Journal of Mathematical Behaviour*, (22), 217–235.
- Husserl, E. (1976). *Ideas. General introduction to pure phenomenology*. New York: Humanities Press Inc.
- Husserl, E. (1989). *Fenomenologins idé*. Göteborg: Daidalos.
- Hwang, P. & Nilsson, B. (1996). *Utvecklingspsykologi. Från foster till vuxen*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Hägglom, L. (2000). *Räknespår. Barns matematiska utveckling från 6 till 15 års ålder*. (Diss.) Åbo: Åbo Akademi University Press.
- Hännikäinen, M. & Rasku-Puttonen, H. (2001). Piaget'n ja Vygotskin merkitys varhaiskasvatuksessa. Teoksessa K. Karila, J. Kinos & J. Virtanen (Toim.), *Varhaiskasvatuksen teoriasuuntauksia*. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Ikäheimo, H. (1997). Matematiikan esi- ja alkuopetuksen kysymyksiä. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (Toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki säätiö ja koulutuksen tutkimuslaitos.
- Illeris, K. (2001). *Lärande i mötet mellan Piaget, Freud och Marx*. Lund: Studentlitteratur.
- Johansson, E. (1999). *Etik i småbarns värld. Om värden och normer bland de yngsta barnen i förskolan*. (Diss.) Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

- Johansson, E. (2001). Morality in children's worlds – rationality of thought or values emanating from relations? *Studies in Philosophy and Education*, (20), 354–358.
- Johnsen Høines, M. (2000). *Matematik som språk. Verksamhetsteoretiska perspektiv*. Malmö: Liber.
- Kagan, J. (1981). *The second year. The emergence of self-awareness*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- Kant, I. (2004). *Kritik av det rena förnuftet*. Orig. 1781. Stockholm: Thales.
- Keranto, T. (1997). Kriittinen ajattelu ja tieteen tuntemus matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (Toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki säätiö ja koulutuksen tutkimuslaitos.
- Klein, P. (1994). Molar assessment and parental intervention in infancy and early childhood: new evidence. In R. Feuerstein, P. Klein & A. Tannenbaum (Eds.), *Mediated learning experience (MLE): theoretical, psychological and learning implications*. London: Freund Publishing House Ltd.
- Kvale, S. (1997). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur.
- Langer, J., Gillette, P. & Arriaga, R. I. (2003). Toddlers' cognition of adding and subtracting objects in action and in perception. *Cognitive Development*, (18), 233–246.
- Langeveld, M. J. (1986). How does the child experience the world of Things? *Phenomenology + Pedagogy*, 2 (3), 215–223.
- Larsson, S. (2005). Om kvalitet i kvalitativa studier. *Nordisk Pedagogik*, 25 (1), 16–35.
- Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Leino, J. (1997). Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (Toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki säätiö ja koulutuksen tutkimuslaitos.
- Lindahl, M. (1996). *Inläring och erfارande. Ettåringars möte med förskolans värld*. (Diss.) Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Lindahl, M. (2002). *Vårda – vägleda – lära. Effekstudie av ett interventionsprogram för pedagogers lärande i förskolemiljön*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Lindahl, M. (2003a). Särskolepedagogers lärande med hjälp av videografi. I K. Ström & K. Linnanmäki (Red.), *Specialpedagogik i tiden. Festskrift tillägnad Ulla Lahtinen*. Rapport nr 4, Vasa: Åbo Akademi, Pedagogiska Fakulteten.
- Lindahl, M. (2003b). Videografiskt förfaringsätt. I J. Sjöberg, H. Andersson & O. Björkqvist (Red.), *Läraren och pedagogiken. Festskrift tillägnad Sven-Erik Hansén*. Vasa: Åbo Akademi, Pedagogiska fakulteten.

- Lindahl, M. & Pramling Samuelsson, I. (2002). Imitation and variation: reflections on toddlers' strategies for learning. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 46 (1), 25–45.
- Lindström, B., Marton, F., Lindahl, M. & Packendorff, M. (manus). *The seventh sense. Enhancing arithmetic skills by boosting the sensuous experience of numbers through perceptual-bodily interaction with a computer game.*
- Lippitz, W. (1986). Understanding children, communicating with children, approaches to the child within us, before us, and with us. *Phenomenology + Pedagogy*, 4 (3), 56–65.
- Lipton, J. & Spelke, E. (2003). Origins of number sense: large-number discrimination in human infants. *Psychological Science*, 14 (5), 396–401.
- Locke, J. (1916). *Tankar om uppfostran*. Orig. 1693. Uppsala: F. C. Askersbergs bokförlagsaktiebolag.
- Løkken, G. (2000). Using Merleau-Pontyan phenomenology to understand the toddler. Toddler interactions in child day-care. *Nordisk pedagogik*, 20 (1), 13–23.
- Løkken, G. & Søbstad, F. (1995). *Observation och intervju i förskolan*. Lund: Studentlitteratur.
- Malinen, P. (1997). Katsaus matematiikan oppimisen, oppimisvaikeuksien ja opetuksen tutkimuksiin Suomessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (Toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki säätiö ja koulutuksen tutkimuslaitos.
- Malmer, G. (1996). Matematik för alla. I G. Malmer & B. Adler, *Matematik-svårigheter och dyslexi*. Lund: Studentlitteratur.
- Mankiewicz, R. (2001). *Matematiken genom tiderna*. Stockholm: Albert Bonniers.
- Markman, E. (1979). Classes and collections: conceptual organization and numerical abilities. *Cognitive Psychology*, (11), 395–411.
- Marton, F. (1981). Phenomenography – describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*, (10), 177–200.
- Marton, F. (1992). På spaning efter medvetandets pedagogik. *Forskning om utbildning. Tidskrift för analys och debatt*, (4), 28–40.
- Marton, F. (1997). Mot en medvetandets pedagogik. I M. Uljens (Red.), *Didaktik*. Lund: Studentlitteratur.
- Marton, F. (2002). *Konsten att lära alla allt*. Föreläsning vid Institutionen för barnpedagogik, Åbo Akademi, 20 april 2002.
- Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.
- Marton, F. & Morris, P. (2002). What matters? In F. Marton & P. Morris (Eds.), *What matters? Discovering critical conditions of classroom learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Marton, F., Wen, Q. & Wong, K. C. (2005). 'Read a hundred times and the meaning will appear...' Changes in Chinese university students' views of the temporal structure of learning. *Higher Education*, (49), 291–318.

- Mattinen, A. (2006). *Huomio lukumääriin. Tutkimus 3-vuotiaiden lasten matemaattisten taitojen tukemisesta päiväkodissa*. (Diss.) Turku: Turun Yliopisto.
- Mayer, R. & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. In R. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- McCrink, K. & Wynn, K. (2004). Large-number addition and subtraction by 9-month-old infants. *Psychological Science*, 15 (11), 776–781.
- Meltzoff, A. & Moore, K. (1999). Persons and representation: why infant imitation is important for theories of human development. In J. Nadel & G. Butterworth (Eds.), *Imitation in infancy*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Merleau-Ponty, M. (1962). Phenomenology of perception. In T. Honderich (Ed.), *International library of philosophy and scientific method*. New York: Routledge.
- Miller, K. F. & Paredes, D. R. (1996). On the shoulders of giants: cultural tools and mathematical development. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates
- Mix, K. (2002). The construction of number concepts. *Cognitive Development*, (17), 1345–1363.
- Mix, K., Huttenlocher, J. & Levine, S. C. (1996). Do preschool children recognize auditory-visual numerical correspondences? *Child Development*, (67), 1592–1608.
- Molander, B. (1993). *Kunskap i handling*. Göteborg: Daidalos.
- Munter, H. & Siren-Tiusanen (1999). Osallistuva kvalitatiivinen lähestymistapa kolmea vuotta nuorempien lasten päivähoiton tutkimisessa. Teoksessa I. Ruoppila, E. Hujala, K. Karila, J. Kinos, P. Niiranen & M. Ojala (Toim.), *Varhaiskasvatuksen tutkimusmenetelmiä*. Jyväskylä: ATENA.
- Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Niiranen, P. & Kinos, J. (2001). Suomalaisen lastentarha- ja päiväkotipedagogiikan jäljillä. Teoksessa K. Karila, J. Kinos & J. Virtanen (Toim.), *Varhaiskasvatuksen teoriasuuntauksia*. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Nuñez, T. & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford: Blackwell Publishers.
- Nutbrown, C. (1999). *Threads of thinking. Young children learning and the role of early education* (2nd ed.). London: Paul Chapman Publishing Ltd.
- OECD/PISA (2004). *Learning for tomorrow's world. First results from PISA 2003*. Programme for International Student Assessment, OECD Publications.
- Packer, M.J. & Goicoechea, J. (2000). Sociocultural and constructivist theories of learning: ontology, not just epistemology. *Educational Psychologist*, 35 (4), 227–241.

- Pang, M. F. (2003). Two faces of variation: on continuity in the phenomenographic movement [1]. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 47 (2), 145–156.
- Perner, J. (1991). *Understanding the representational mind*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- Phillips, D. & Soltis, J. (1991). *Perspectives on learning* (2nd ed.). New York: Teachers College Press.
- Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. New York: W.W. Norton & Company Inc.
- Piaget, J. (1959). *The language and thought of the child* (3rd ed.). London: Routledge.
- Piaget, J. (1962). *Play, dreams and imitation in childhood*. New York: Norton & Company Inc.
- Piaget, J. (1968). *Barnets själsliga utveckling*. Lund: Liber.
- Piaget, J. (1972). *The principles of genetic epistemology*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Piaget, J. (1977). *Psychology and epistemology. Towards a theory of knowledge*. Harmondsworth: Penguin.
- Piaget, J. (1982). *The child's conception of the world*. London: Granada Publishing.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1977). *Lapsen psykologia*. Jyväskylä: Gummerus.
- Pramling, I. (1983). *The child's conception of learning*. (Diss.) Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Pramling, I. (1991). *Barn och inläring*. Lund: Studentlitteratur.
- Pramling, I. (1994). *Kunnandets grunder: Prövning av en fenomenografisk ansats till att utveckla barns sätt att uppfatta sin omvärld*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Pramling Samuelsson, I. & Lindahl, M. (1999). *Att förstå det lilla barnets värld - med videons hjälp*. Stockholm: Liber.
- Pramling Samuelsson, I. & Asplund Carlsson, M. (2003). *Det lekande lärande barnet i en utvecklingspedagogisk teori*. Stockholm: Liber.
- Preisler, G. (1990). *Att införa video – i psykologiskt och pedagogiskt stödjande arbete med barn med funktionsnedsättningar*. Rapport från psykologiska institutionen. Stockholms universitet.
- Rasmussen, J. (1998). Constructivism and phenomenology – what do they have in common, and how can they be told apart? *Cybernetics and Systems: An International Journal*, (29), 553–576.
- Rubinstein Reich, L. & Wesén, B. (1986). *Observera mera!* Lund: Studentlitteratur.
- Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll*. (Diss.) Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Runesson, U. (2005). Beyond discourse and interaction. Variation: a critical aspect for teaching and learning mathematics. *Cambridge Journal of Education*, 35 (1), 69–87.

- Runesson, U. (2006). What is it possible to learn? On variation as a necessary condition for learning. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 50 (4), 397–410.
- Runesson, U. & Marton, F. (2002). The object of learning and the space of variation. In F. Marton & P. Morris (Eds.), *What matters? Discovering critical conditions of classroom learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Sandberg, J. (1995). Are phenomenographic results reliable? *Nordisk Pedagogik*, 15, (3), 156–164.
- Sandberg, J. (1996). Are phenomenographic results reliable? In G. Dall'Alba & B. Hasselgren (Eds.), *Reflections on phenomenography. Toward a methodology?* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Saxe, G. S., Dawson, V., Fall, R. & Howard, S. (1996). Culture and children's mathematical thinking. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics. The philosophy of mathematics*. New York: Oxford University Press.
- Siegler, R. S. & Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates Ltd.
- Sommer, D. (1997). *Barndomspsykologi*. Stockholm: Runa.
- Sommer, D. (2005). *Barndomspsykologiska fasetter*. Stockholm: Liber.
- Stakes (2005). *Grunderna för planen för småbarnsfostran (version II)*. Stakes Forsknings- och utvecklingscentralen för social- och hälsovården. Tillgänglig på <http://varttua.stakes.fi/SV/index.htm> (3.11.2006)
- Starkey, P. & Gelman, R. (1982). The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic. In T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Starkey, P., Spelke, E. & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition*, (36), 97–127.
- Stern, D. (1991). *Spädbarnets interpersonella värld. Ur psykoanalytiskt och utvecklingspsykologiskt perspektiv*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Sternberg, R. J. (1996). What is mathematical thinking? In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stewart, I. (2001). Förord. I R. Mankiewicz, *Matematiken genom tiderna*. Stockholm: Albert Bonniers.
- Suomala, J. (1999). *Student's problem solving in the LEGO/Logo learning environment*. (Diss.) Jyväskylä: University of Jyväskylä.
- Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma.

- Säljö, R. (2005). *Lärande och kulturella redskap. Om lärprocesser och det kollektiva minnet*. Stockholm: Norstedts Akademiska.
- Trost, J. (1994). *Enkätboken*. Lund: Studentlitteratur.
- Ullstadius, E. (1998). *Exploring early imitation*. Göteborg University, Department of Psychology.
- Utbildningsstyrelsen (2000). *Grunderna för förskoleundervisningens läroplan 2000*. Helsingfors: Utbildningsstyrelsen.
- Utbildningsstyrelsen (2004). *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen 2004*. Helsingfors: Utbildningsstyrelsen.
- Užgiris, I. (1999). Imitation as activity: its developmental aspects. In J. Nadel & G. Butterworth (Eds.), *Imitation in infancy*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Vallberg Roth, A-C. (2002). *De yngre barnens läroplanshistoria – från 1800-talets mitt till idag*. Lund: Studentlitteratur.
- Valsiner, J. (1997). *Culture and the development of children's actions. A theory of human development*. (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons Inc.
- Vetenskapsrådet (2007). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Tillgänglig på http://www.vr.se/download/18.6b2f98a910b3e260ae28000360/HS_15.pdf (22.1.2007).
- Vilette, B. (2002). Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction? Evidence against early arithmetic. *Cognitive Development*, (17), 1365–1383.
- Vygotskij, L. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- Vygotskij, L. (1980). *Psykologi och dialektik*. Stockholm: Norstedts & Söner.
- Waern, Y. & Lundh, L-G. (1992). Problemlösning. I L-G. Lundh, H. Montgomery & Y. Waern (Red.), *Kognitiv psykologi*. Lund: Studentlitteratur.
- Werner, H. (1948). *Comparative psychology of mental development*. New York: Follett Publishing Company.
- Willatts, P. (1990). Development of problem-solving strategies in infancy. In D. Bjorklund, (Ed.), *Children's strategies. Contemporary views of cognitive development*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Willatts, P. (1997). Beyond the "couch potato" infant: how infants use their knowledge to regulate action, solve problems and achieve goals. In G. Bremner, A. Slater & G. Butterworth (Eds.), *Infant development. Recent advances*. East Sussex: Erlbaum Psychology Press.
- Wittgenstein, L. (1978). *Remarks on the foundations of mathematics*. London: MIT Press.
- Wynn, K. (1998). Numerical competence in infants. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills*. Hove: Psychology Press.
- Wynn, K. & Chiang, W-C. (1998). Limits to infants' knowledge of objects: the case of magical appearance. *Psychological Science*, 9 (6), 448–455.

- Zur, O. & Gelman, R. (2004). Young children can add and subtract by predicting and checking. *Early Childhood Research Quarterly*, (19), 121–137.
- Ödman, P-E. (1994). *Tolkning, förståelse, vetande. Hermeneutik i teori och praktik*. Göteborg: Norstedts.
- Öhberg, C. (2004). *Tanke och handling. Ettåringars utforskande och problemlösande aktiviteter*. Rapport nr 8, Vasa: Åbo Akademi, Pedagogiska fakulteten.

Vilka möjligheter har ett litet barn att lära sig matematik i vardagen på ett daghem?

Dagligen används en mångfald matematiska begrepp och principer av såväl vuxna som barn. Ofta används matematik oreflekterat, eftersom kunskapen blivit ett naturligt redskap i det dagliga livet. När ett barn växer upp finns det förväntningar på barnet att det skall lära sig förstå och använda matematik i många olika sammanhang. Den studie som här presenteras lyfter fram den matematik som småbarn möter i den dagliga verksamheten på daghemmens småbarnsavdelningar. Barnens sätt att använda sin matematiska kunskap visar hur barnen uppfattar innebörden i matematik och dess användningsmöjligheter.

Analysen av vad som sker i mötet med matematik visar att småbarn i samspel med andra människor och sin omvärld tillägnar sig grundläggande erfarenheter och skapar en gemensam förståelse av meningsfull matematik. Barnens möjligheter att lära sig den kulturella innebörden av matematik är dock i hög grad beroende av vad som skiljs ur och fokuseras av dem själva och andra.

Avsikten med en studie av detta slag är att synliggöra den mångfald av grundläggande erfarenheter av matematik som barn tillägnar sig på varierande sätt i det dagliga samspelet med andra människor och miljön. Genom att uppmärksamma barns erfarenheter och möjligheter till lärande kan såväl miljön som möten med andra människor göras inbjudande och utmanande för barnens utforskande och lärande.

Åbo Akademis förlag
ISBN 978-951-765-358-9

