DISSERTATIO PHYSICO-MATHEMATICA

DE

COHÆRENTIA CORPORUM FIRMORUM ABSOLUTA,

Quam,

Conſ. Ampl. Fac. Philoſ. Aboënſ.

Publico Examini ſubmittunt

GUST. GABR. HÅLLSTRÖM,

Phil. Mag.

&

ERICUS JOH. FROSTERUS, *Joh. Fil.*

Stipendiarii Reg. Oſtrobotnienſes.

In Auditorio Majori die 2 Decembris 1795.

H. A. M. S.

ABOÆ, Typis FRENCKELLIANIS.

In S:am R:am M:tem

Spectatæ fidei Viro

Ad Reg Acad. Aboënſ. Phyſ. Profeſſori

nec non Reg. Acad. Scient. Stockh. & Societ. Litter. Upſal. Membro

Amplisſimo atque Celeberrimo

D:no ANDREAE PLANMAN,

Fautori propenſisſimo

In pignus animi venerabundi Pagellas haſce

D. D. D.

Nominis ejus Celeberrimi

Cultor devotisſimus

GUST. GABR. HÅLLSTRÖM.

§ I.

Doctrina *Cohærentiæ* corporum in omni Architectura, & Militari & Civili, rite tractanda, in Machinis omnimodis construendis, &c. utilissima, paucos adeo nacta est Cultores, ut mirum omnino sit, Viros de reliquis partibus Physices egregie meritos hanc omnino præteriisse. Antiquiorum enim Mathematicorum & Physicorum usque ad seculum XVII nullus Scientiam laudatam attigit. GALILÆUS primus est cultor ejus, quam ad leges Geometriæ revocare coepit. Hic jam proportionem Cohærentiæ Absolutæ ad Relativam (*) determinare conatus est, cui inveniendæ, etsi diversis modis processerint, fere omnes Cultores Scientiæ hujus post eum studuerunt.

A Con-

(*) *Cohærentia* vel *Resistentia Absoluta* dicitur vis, qua corpus resistit, ne tractum a viribus in directione ad longitudinem fibrarum parallela operantibus divellatur. *Cohærentia* autem *Respectiva* vel *Relativa* vocatur, quam exercet corpus contra potentiam perpendiculariter ad fibras suas longitudinales operantem & frangentem.

Conſideravit GALILÆUS corpora tamquam perfecte rigida, unde ſequeretur, fibrarum omnium eandem eſſe ubique contra vim rumpentem reſiſtentiam. Ex ea vero conſideratione patet, omnes fibras corporis transverſe rupti ſimul & in uno momento a ſe ſeparari. Hinc itaque concluſit, Cohærentiam Abſolutam duplam eſſe illius Relativæ, cui concluſioni, naturæ rei non convenienti, Propoſitiones ſuas ſuperſtruxit. In determinanda vero & comparanda firmitate corporum excavatorum, diametros tantum baſium imperfecte conſideravit.

BLONDELLUS poſt eum hanc rem tetigit. Oſtendit enim in Epiſtola anno 1661 edita, ſolidum non parabolicum, ut docuerat GALILÆUS, ſed ellipticum requiri, ut gravitatis expers in utraque extremitate ſua fulcris impoſitum, ubique æqualis ſit Reſiſtentiæ Reſpectivæ. Narrat ſe etiam Volumen de Reſiſtentia Solidorum, cui titulus Galilæus promotus, in lucem edidiſſe.

ALEXANDER MARCHETTUS Florentiæ & HONORATUS FABRY Lugduni anno 1669 libros ſuos de Reſiſtentia Solidorum conſcripſerunt. Hi vero plures continent Propoſitiones plane contrarias, cujus rei cauſa in erroribus, quos Auctores harum diverſo modo progredientes commiſerunt, quærenda eſt. Liber tamen Domini FABRY magis erroribus eſt obnoxius.

IGNATIUS G. PARDIESIUS poſtea in Tractatu de Viribus moventibus nonnulla hac de re propoſuit.

Nul-

Nullus adhuc, ſi WURTSIUM quendam excipias, experimentis, doctrinam Cohærentiæ corporum, quæ magnam partem certitudinis ſuæ iis accurate inſtitutis debet, & Propoſitiones ſuas ope calculi Geometrici inventas, confirmare meditatus eſt, antequam PETRUS MARIOTTUS ea conſulendo invenit, Cohærentiam Abſolutam triplam & interdum majorem eſſe Relativæ. Quoniam itaque nulla dantur nobis cognita corpora perfecte rigida, ruptionem, incipiendo a puncto ſupremo baſeos, pedetentim & ſucceſſive fieri, & fibras, quo magis a loco infimo baſeos rupturæ, ut centro motus, diſtant, hoc eſt, quo magis extenduntur, eo magis reſiſtere, obſervavit, unde hypotheſin illam, Reſiſtentiam fibrarum extenſarum in ratione extenſionis eſſe, asſumſit.

GOTHOFR. WILH. LEIBNITZIUS deinde experimentis & hypotheſi MARIOTTI innixus, in *Actis Eruditorum Lipſienſibus An. 1684.* demonſtravit, Reſiſtentiam Abſolutam triplo majorem Relativa eſſe, exiſtente nimirum altitudine baſeos fixæ corporis transverſe rupti æquali ponderis rumpentis diſtantiæ ab eadem baſi.

Hunc in doctrina hacce elaboranda ſecutus eſt PETRUS VARIGNONUS, qui ope Geometriæ ſublimioris concinnavit regulam univerſalem pro invenienda proportione Reſiſtentiæ Abſolutæ ad Relativam, quæ ſe extendit ad omnes, quæcunque excogitari vel exiſtere poſſint, proportiones reſiſtentiæ fibrarum ad

earum extenſiones. Data itaque vel aſſumta quacunque ratione inter reſiſtentiam & extenſionem fibrarum, ex ejus regula plura Cohærentiam corporum ſpectantia Problemata ſolvi poſſunt, uti videre licet in *Memoires de l'Acad. Roy. des Sciences à Paris. An. 1702.*

Jacobus Bernoullius omnia usque ad ſuum tempus cognita Syſtemata, quibus Cohærentiæ corporum explicatæ ſunt, correxit ea obſervatione, quod in loco rupturæ corporum ruptorum circumrotationem non circa locum infimum craſſitiei, ita ut omnes fibræ extenderentur, ſed alium quendam intermedium, unde ſurſum fibræ extendantur, deorſum vero comprimantur, fieri animadverterit. Secundum hæc principia calculos ſubducens, Cohærentiam Abſolutam corporum ruptorum majorem eſſe quam triplam Relativæ, poſita nempe diſtantia ponderis rumpentis a baſi fixa corporis transverſe rupti æquali altitudini ejusdem baſeos, invenit. Hæc deſcripta reperiuntur in *Memoires de l'Acad. Roy. des Sciences à Paris. An. 1705.*

Antonius Parentius reſiſtentiam Tuborum cylindricorum fluido plenorum examinavit & calculum geometricum de Cohærentia Solidorum inſtitutum, experimentis quibusdam ex Quercu & Pino captis confirmare conatus eſt. Ea, quæ in Doctrina hacce ex nullo pendent Syſtemate vel Hypotheſi de extenſione fibrarum & loco motus in rumpendo, ope Geometriæ ſublimioris expoſuit. Hæc & alia, quæ de hac re ſcripſit, inveniuntur in *Memoires de l'Acad. Roy. des Sciences à Paris. An. 1707, 1708 & 1710.* Pau-

Paulus Hoste deinde Volumen de Cohærentia conſcripſit, & Gvidus Grandi paucis ex ſublimiori Geometria petitis Propoſitionibus Doctrinam Cohærentiæ corporum amplificavit.

Marinus Mersennus in Harmonic. & Renatus Antonius Reaumurius in *Memoires de l'Acad. Roy. des Sciences à Paris An. 1711.* experimenta, pro exploranda firmitate funium inſtituta, deſcripſerunt.

Petrus van Muschenbroek magnam copiam experimentorum, cum ruptis variis corporibus varii generis, formæ & poſitionis diligenter a ſe inſtitutorum, in ſua *Introductione ad Cohærentiam corporum firmorum* deſcripſit, ubi etiam calculo analytico Doctrinam hancce tractat. In comparanda vero Reſiſtentia Relativa corporum variæ formæ & poſitionis ruptorum, minus felicem eum fuiſſe judicamus. Ex experimentis ſuis invenit, proportionem Cohærentiæ Abſolutæ ad Relativam variare inter 2:1 & 18:1.

Buffonius multa quoque experimenta firmitatem lignorum ſpectantia inſtituit, & ea deſcripſit in *Memoires de l'Acad. Roy. des Sciences à Paris. An. 1740 & 1741.*

du Hamel inter eos quoque eſt numerandus, qui experimentis inſtituendis Doctrinam Cohærentiæ corporum promovit. Operam enim proportioni inter numerum fibrarum extenſarum & compreſſarum in rumpenda Salice determinandæ impendit, oſtendens hac re, quomodo idem in quibusvis aliis corporibus inve-

inveniatur. Vide hæc deſcripta in *Memoires de l'Acad. Roy. des Sciences à Paris. An.* 1742.

FRIDERICUS PALMQVIST Librum, cui titulus: *Om kroppars faſthet och ſtyrka*, conſcripſit, ubi ea, quæ MUSCHENBROEK in ſua Introductione ad Cohærentiam corporum firmorum de Cohærentia Abſoluta proponit, in Svecanum ſermonem vertit, & Reſiſtentiam Relativam corporum partim tamquam perfecte rigida aſſumtorum partim quoque ſecundum hypotheſin MARIOTTI de reſiſtentia fibrarum proportionali extenſioni earum conſideratorum, ſecundum GALILÆI & LEIBNITZII demonſtrationes proportionis Reſiſtentiæ Abſolutæ ad Relativam, ad calculos geometricos vocavit.

LEONARDUS EULERUS tandem commentationem de vi Columnarum in *Memoires de l'Acad. Roy. des Sciences à Berlin Tom XIII. & in Actis Acad. Scient Imp. Petropolit. An. 1778* vel *Tom. II. Part. I. exhibuit.*

Cæteri, quos novimus hanc materiam attigiſſe, phyſicam tantum Cohærentiæ cauſam inveſtigare conati ſunt; exiguo vero ſucceſſu & parvo emolumento ipſi Scientiæ laborarunt. Neque nos, arcanis naturæ detegendis impares nos ducentes, cauſam hanc indagabimus: quasdam tantummodo Leges, quas in corporibus quibusdam ſecundum longitudinem fibrarum rumpendis ſequitur Cohærentia eorum, breviter exponere nobis propoſuimus, obſecrantes, velis, Lector Benevole, juveniles hosce conatus mitiori ſubjice-

jicere censuræ. — In antecessum vero observare licet, in tota hacce Dissertatione firmitatem aliorum corporum in quæstionem non vocari, nisi homogeneorum & quorum omnes sectiones ad basin fixam parallelæ similes & similiter positæ sunt.

§. II.

THEOREMA I. *Cohærentia Absoluta corporis cujusvis est in quovis loco sui in ratione crassitiei* (*).

Nam sint a^2, b^2 crasities in duobus locis corporis cujusvis, & c Cohærentia Absoluta cujusque fibræ ejus; erunt a^2c, b^2c Cohærentiæ Absolutæ in iisdem locis. Est vero $a^2c : b^2c :: a^2 : b^2$.

Coroll. Sunt itaque Cohærentiæ Absolutæ plurium corporum cujusvis crassitiei, ejusdem materiæ & ubivis æque crassorum, uti crassities eorum.

Obs. Ponimus in sequentibus sex §§. basin supremam fixam corporum, cum in directione ad longitudinem fibrarum parallela tracta verticaliter deorsum pendeant, horizontalem & ideo perpendicularem ad longitudinem fibrarum esse, quod hic, ut erroribus alias oriundis obviam iremus, indicare necesse putavimus.

§. III.

(*) Cum crassitie heic intelligimus aream sectionis ad longitudinem perpendicularis.

§. III.

THEOREMA II. *Cohærentia Absoluta dati corporis gravis crescit in minori ratione quam soliditas* (*).

Assumta enim linea quadam in Sectione $= a$, erit (Theor. I, §. II.), Cohærentia Absoluta corporis proportionalis ipsi a^2 & soliditas ipsi a^3. Crescente vero corpore sit linea b homologa ipsi a, erit Cohærentia Absoluta hujus corporis proportionalis ipsi b^2 & soliditas ipsi b^3. Quum vero sit $a < b$, erit $a^3 : b^3 < a^2 : b^2$, unde constat resistentiam b^2 minorem esse ratione ponderis b^3 contra se operantis, quam resistentiam a^2 ratione ponderis a^3.

Coroll. I. Idem valet, si hæc corpora rumpantur a ponderibus P, p respective proportionalibus gravitatibus a^3, b^3. Cum enim sit $a^3 : b^3 :: P : p$; erit $a^3 + P : b^3 + p :: a^2 : b^3$, unde habetur $a^3 + P : b^3 + p < a^2 : b^2$.

Coroll. II. Hinc sequitur, Conos,, Pyramides, & omnia denique corpora, quorum, cum ex fixa basi verticaliter pendent, partes infra sectionem ad basin parallelam ubiqunque institutam sunt similes toti corpori, & quæ rumpuntur a sua gravitate, rumpi in basi, qua fixa sunt.

§. IV.

THEOREMA III. *Si corpus ubivis æque crassum a pondere quovis tractum rumpitur, fiet ruptura in basi suprema fixa.*

Nam sit gravitas partis illius corporis propositi, quæ est infra ruptionem, $= G$, pondus ei appensum

(*) Patet corpus propositum ita crescere supponendum esse, ut semper sit sibi simile.

ſum $= P$, Reſiſtentia corporis Abſoluta, quæ ubique eſt eadem, $= R$; erit vis rumpens $= P + G$. Fit vero ruptio in eo loco ejus, ubi ratio $\frac{P + G}{R}$ eſt maxima, quod accidit quando G eſt maxima, manentibus P & R iisdem; quare corpus propoſitum rumpitur in ſuprema ſua baſi fixa.

Coroll. Si ſit $P = o$, hoc eſt, ſi rumpatur corpus tractum a ſua tantum gravitate, idem valet.

§ V.

PROBLEMA I. *Invenire longitudinem corporis datæ & æqualis ubique craſſitiei, quod, verticaliter ſuſpenſum, pondus datum vix ſuſtinere valeat.*

Sit pondus datum geſtandum Q, data craſſities a^2, P pondus maximum, quod geſtari poteſt a corpore alio, ejusdem materiæ ac illud propoſitum, craſſitiei a^2 & datæ longitudinis b, Reſiſtentia Abſoluta R, & longitudo quæſita x; erunt $a^2 b + P$ & $a^2 x + Q$ pondera maxima, quibus Cohærentia Abſoluta R corporum horum reſiſtere valet. Eſt itaque $a^2 b + P = R$, & $a^2 x + Q = R$, unde habetur æquatio: $a^2 b + P = a^2 x + Q$, quæ dat $x = b + \frac{P - Q}{a^2}$.

Coroll. Si deſideretur talis longitudo ejusdem corporis, ut propriam gravitatem vix ſuſtinere valeat, ponendum eſt $Q = o$, quo facto erit longitudo quæſita $= b + \frac{P}{a^2}$.

§. VI.

PROBLEMA II. *Data longitudine corporis, datæ materiæ, ubivis æque crassi & verticaliter suspensi, invenire crassitiem, quæ sit minima, qua Pondus datum gestetur.*

Sit p pondus maximum, quod corpus aliud, ejusdem materiæ & longitudinis ac illud propositum, & crassitiei cujusdam datæ $= b^2$, gestare valeat, longitudo data $= c$, pondus datum gestandum $= P$, & crassities quæsita $= x^2$. Quoniam pondera $b^2 c + p$ & $c x^2 + P$, sunt maxima, erunt proportionalia resistentiis suis, quæ sunt ut b^2 & x^2 (Theor. I. §. 11.); quare inferatur: $b^2 c + p : c x^2 + P :: b^2 : x^2$, unde habetur $x^2 = \frac{b^2 P}{p}$.

§. VII.

PROBLEMA III. *Invenire distantiam loci ruptionis ab utraque extremitate corporis cujusvis dati, a pondere quovis rumpente tracti.*

Sit pondus datum $= P$, crassities corporis dati in eo loco ubi rumpitur $= y^2$, distantia loci hujus ab extremitate infima $= x$; erit Resistentia Absoluta corporis in distantia x ab extremitate infima ut y^2 (Theor. I. §. 11.), soliditas portionis ejus, quæ est infra rupturam, $= \int y^2 dx$, & pondus rumpens $= P + \int y^2 dx$. Quando corpus rumpitur in distan-

tia

tia x ab extremitate infima, erit proportio ponderis $P + \int y^2 dx$ ad resistentiam y^2, hoc est $\frac{P + \int y^2 dx}{y^2}$ maxima, unde sumta ejus fluxione & posita $= o$, habetur æquatio: $dx - \frac{2dy\,P + \int y^2 dx)}{y^3} = o$, in qua substituantur, in quovis casu dato, pro y & dy valores harum in x expressi, ut inveniatur valor quæsitus distantiæ x.

Coroll. I. Si corpus rumpendum ubivis ejusdem sit crassitiei $= a^2$, erit $a = y$, hoc est, erit y constans, unde fit $dy = o$, qui valor ipsius dy in præcedenti æquatione adhibitus, dat $dx = o$, quod indicat fore x constantem.

Coroll. II. In omnibus Conis & Pyramidibus, crassitiei in basi fixa suprema $= a^2$, & longitudinis $= b$, est $y = \frac{ax}{b}$, $dy = \frac{a}{b} \cdot dx$ & $\int y^2 dx = \frac{a^2}{b^2} \int x^2 dx = \frac{a^2 x^3}{3b^2}$, unde, substitutis in æquatione nuper inventa pro y^3, dy & $\int y^2 dx$ valoribus earum $\frac{a^3 x^3}{b^3}$, $\frac{a}{b} \cdot dx$ & $\frac{a^2 x^3}{3b^2}$, eruitur $x = \sqrt[3]{\frac{6bP}{a^2}}$.

§. VIII.

PROBLEMA IV. *Invenire æquationem corporis, quod, datæ longitudinis in basi data fixum, a pondere quovis dato tractum, ubivis æqualis sit Resistentiæ Absolutæ.*

Sit basis data $= a^2$, crassities corporis hujus $= y^2$ in distantia ab extremitate infima $= x$, longitudo $= b$,

1 ad n ut ſolidum $a^2 b$ ad ſoliditatem corporis quæſiti, quæ itaque ſit $= na^2 b$, & pondus datum $= P$. Erit $P + na^2 b$ pondus agens contra reſiſtentiam a^2, & pondus agens contra reſiſtentiam y^2, $P + \int y^2 dx$. Eſt autem in corporibus ejusdem ubivis reſiſtentiæ ratio vis rumpentis ad correſpondentem ei reſiſtentiam ſemper eadem, ita ut ſit $\frac{P + na^2 b}{a^2} = \frac{P + \int y^2 dx}{y^2}$, unde habetur $(P + na^2 b) y^2 = a^2 P + a^2 \int y^2 dx$, & ſumtis utrinque fluxionibus $2(P + na^2 b) y dy = a^2 y^2 dx$ vel $dx = \frac{2(P + na^2 b)}{a^2} \cdot \frac{dy}{y}$, quæ eſt æquatio ad Curvam Logarithmicam cujus Subtangens eſt $= \frac{2(P + na^2 b)}{a^2}$. Solidum igitur ex rotatione hujus Curvæ circa Aſymptoton genitum, poſito Aſymptoto hoc verticali, ubivis ejusdem erit Cohærentiæ Abſolutæ.

Coroll. Si ponatur $P = o$, hoc eſt, ſi deſideretur corpus, quod propria ſua gravitate ubivis ejusdem ſit Cohærentiæ abſolutæ, erit Logarithmicæ hujus Subtangens $= 2\,n\,b$.

§. IX.

PROBLEMA V. *Si corpus quodvis datum baſi ſua ad longitudinem fibrarum verticali fixum in dato quocunque ſitu ſit, & in directione ad longitudinem fibrarum parallela trahatur, invenire vim maximam quam ſuſtinere valet.*

Sit corporis dati AB (Fig. 1.) in loco ubi rumpitur Cohærentia Abſoluta data $= R$, gravitas $= G$, pondus maximum quæſitum $= P$, & angulus quem

ſacit

facit directio ponderis cum directione gravitatis, hoc est, ang. $BCD = m$. Ducatur linea verticalis CD, quæ exprimat gravitatem G, & resolvatur vis CD in duas alias CE, DE, quarum hæc agit perpendiculariter ad corpus AB, & nihil ad id in directione CB rumpendum efficit, illa vero ad rumpendum corpus in eadem directione ac pondus P confert. Est vero $CD : CE :: I : Cosm. :: G : G\ Cosm$, (posito Sinu toto $= I$), unde invenitur $P + G\ Cosm = R$ & $P = R - G\ Cosm$.

Coroll. I. Si trahatur corpus deorsum verticaliter, erit $m = o$, $Cosm = I$ & $P = R - G$.

Coroll. II. Si in directione horizontali trahatur corpus, erit $m = 90°$, adeoque $Cosm = o$, & $P = R$.

Coroll III. Si corpus sursum in directione ad horizontem obliqua trahatur, erit $m > 90°$ sed simul $m < 180°$, adeoque $Cosm$ negativus & $P = R + G\ Cosm$.

Coroll. IV. Tracto corpore sursum verticaliter, fit $m = 180°$, quare erit $Cosm = - I$, & $P = R + G$.

§. X.

PROBLEMA VI. *Determinare firmitatem funis dati contorti, data inflexione funiculorum tortorum hunc componentium.*

Sit (Fig. 2.) AB funiculus datus homogeneus formæ cylindricæ, qui contortione inflectatur in statum AMB. Sumantur puncta M, N sibi infinite propinqua,

qua, & per hæc ducantur plana ML & NO ad curvam $AMNB$ in M & N normalia, inter quæ interceptum ſolidum $MNOL$ erit elementum funiculi inflexi, cujus figura naturalis eſt $MmlL$, ita ut fibræ quævis extra S ſitæ Dp inflexione extendantur ad P. Producantur ML & NO ita ut ſibi invicem occurrant in R, quo facto radius oſculi ad N erit $NR = r$, qui, data hic conſtante curvatura, cognitus eſt & conſtans manet. Sit diameter crasſitiei funiculi $ON = c$, & $BN = s$. Quum itaque fibræ quævis extenſæ DP lineam NS circa S vi ſua contrahente circumrotare conentur, conſideranda erit hæc vis tamquam applicata diſtantiis ſuis SP a S. Sit p vis talis, quæ fibram quandam, datæ longitudinis $= f$ & ejusdem materiæ ac funis AB, præciſe ita extendat ut ſit $= f + t$, & $f : t :: Dp : pP$; erunt vires, quibus fibræ extenſæ $f + t$ & DP ſe contrahere nituntur, æquales (*), quare, ob æquilibrium inter p & vim contrahentem fibræ $f + t$, vis eadem funis DP erit $= p$. Sit diſtantia $Sp = u$; erit ob ang. $MRN =$ ang. $mSN, r : ds :: u : pP$, & $pP = \frac{uds}{r}$; eſt vero longitudo fibræ $Dp = ds$, quare erit $Dp : pP :: ds : \frac{uds}{r} :: r : u :: f : t$. Momentum autem fibræ

(*) Vide demonſtrationem hujus rei in *Diſſertat. de Inflexionibus Laminarum Elaſticarum*, a *Cel. Dno* J. H. LINDQUIST *Aboæ* 1777 *edita*, *Partic. I.* §. 4.

fibræ DP eſt $= pu$, & ductis per p & ei in linea ml infinite propinquum punctum planis ad ml normalibus, erit, poſita $SN = m$, quæ, data materia funis, eſt cognita & quidem in hac quæſtione conſtans, latitudo horum planorum per naturam circuli $= 2\sqrt{OP.PN} = 2\sqrt{c.m - u - \overline{m-u}^2}$, nec non, poſita craſſitie cujusque fibræ $= e^2$, multitudo fibrarum his planis interceptarum $= \frac{2du}{e^2}\sqrt{c.\overline{m-u}-\overline{m-u}^2}$, unde invenitur momentum harum fibrarum $= \frac{2pudu}{e^2}\sqrt{c.\overline{m-u}-\overline{m-u}^2}$, adeoque ſumma momentorum omnium fibrarum inter S & P $= \frac{2}{e^2}\int pudu\sqrt{c.\overline{m-u}-\overline{m-u}^2}$. Facta itaque poſt integrationem $u = m$, habetur ſumma momentorum omnium fibrarum inter S & N, hoc eſt, quoniam fibræ inter S & O, quæ comprimuntur, & quarum itaque firmitas, qua extenſioni reſiſtunt, non diminuitur, in quæſtionem non veniant, ſumma virium reſiſtentium, quas funiculus AB in quovis loco ſui M flexioni reſiſtendo amittit, quæ ſit $= Q$. Sit vero reſiſtentia funiculi AB non flexi in $M = R$, & angulus, quem facit directio vis trahentis cum directione in qua contra illam agit reſiſtentia, $= n$, reſoluta vi R in duas alias, parallelam unam, alteram normalem ad directionem vis trahentis, erit illa $= R\ Coſn$ (poſito Sinu toto $= 1$), & reſiſtentia ejus in M, inflexi

ita

ita ut r sit Radius ejus osculi, $= R\,Cos\,n - Q$, quod de quovis puncto funiculi AB valet.

§. XI.

Quomodo applicatio formulæ hujus generalis, pro determinanda parte illa resistentiæ, quam funiculus datus flexioni resistendo amittit, inventæ, fiat, exemplo simplicissimo ostendamus. Hypothesin illam, extensiones ejusdem fibræ diversis potentiis tensæ viribus hisce proportionales esse, etsi eam non dubiam modo, sed etiam minus veram esse plures evincant rationes (°), simplicitatis obtinendæ gratia assumamus; cum patet, fore p proportionalem ipsi $t = \frac{fu}{r}$. Ponamus quoque omnes fibras in inflectendo extendi, ita ut sit $m = c$. Formula itaque inuenta generalis hanc accipiet formam: $\frac{2f}{c^2 r}\int u^2 du \sqrt{(c-u)u}$. Ut vero Integralis hujus sumi possit, reducatur ad formam rationalem, ponendo $\sqrt{(c-u)u} = (c-u)z$. Hinc erit $(c-u)u = (c-u)^2 z^2$, $u = (c-u)z^2 = \frac{cz^2}{1+z^2}$, $du = \frac{2czdz}{(1+z^2)^2}$, $\sqrt{(c-u)u} = \frac{cz}{1+z^2}$, & $u^2 du \sqrt{(c-u)u} = \frac{2c^4 z^6 dz}{(1+z^2)^5}$. In integranda vero fluxio-

(°) Cfr. Jac. Bernoulli *Opera Tom. II. pag.* 981.

fluxione $\frac{2c^4 z^6 dz}{(1+z^2)^5}$ ponatur $z = Tgv$; unde posito Sinu toto $= 1$, erit $du = \frac{dz}{1+z^2}$, $1+z^2 = \frac{1}{Cosv^2}$, $dz = \frac{dv}{Cosv^2}$, & $\frac{2c^4 z^6 dz}{(1+z^2)^5} = 2c^4\, Tgv^6\, Cosv^8\, dv =$ $= 2c^4\, Sin\, v^6\, Cosv^2\, dv$. Est vero

$$\int Sin\, v^6\, Cosv^2\, dv = \frac{Sin\, v^7\, Cosv}{8} + \tfrac{1}{8}\int Sin\, v^6\, dv,$$

$$\int Sin\, v^6\, dv = -\frac{Sin\, v^5\, Cosv}{6} + \tfrac{5}{6}\int Sin\, v^4\, dv,$$

$$\int Sin\, v^4\, dv = -\frac{Sin\, v^3\, Cosv}{4} + \tfrac{3}{4}\int Sin\, v^2\, dv,$$

& $\int Sin\, v^2\, dv = -\frac{Sin\, v\, Cosv}{2} + \tfrac{1}{2}v$ (*), hoc est,

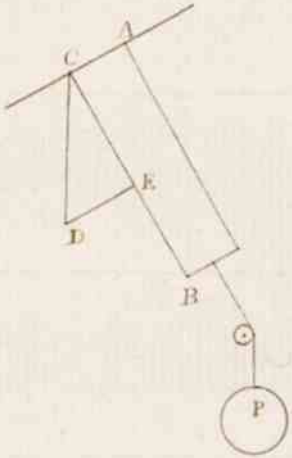
$$\int Sin\, v^6\, Cosv^2\, dv = \frac{Sin\, v^7\, Cosv}{8} - \frac{Sin\, v^5\, Cosv}{6}$$

$$- \frac{5\, Sin\, v^3\, Cosv}{192} - \frac{5\, Sin\, v\, Cosv}{128} + \frac{5\, v}{128}.$$ Substitutis i-

C taque

(*) Harum quatuor æquationum Demonstrationes videre licet in *Differt. de Integratione Fluxionum formæ* $(Sin\, z)^m . (Cos\, n\, dz$, *Præside Cel. D:no* M. J. WALLENIO a *Cel. D:no* JOH. HENR. LINDQUIST *Aboæ* 1768 *edita*. §. 2.

Fig. 1.



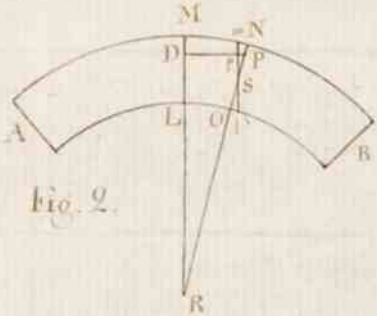


Fig. 2.

taque pro *Sin v & Cosv*, valoribus eorum $\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ & $\frac{1}{\sqrt{1+z}}$, & pro v Arcu circuli, cujus Tangens est $= z$, prodibit æquatio

$$\int\frac{z^6\,dz}{(1+z^2)^5} = \frac{z^7}{8(1+z^2)^4} - \frac{z^5}{48(1+z^2)^3} - \frac{5z^3}{192(1+z^2)^2} - \frac{5z}{128(1+z)} + \frac{5}{128}\,Arc.\,Tg\,z,$$

& ulterius pro z, $1+z^2$ & dz substituendo valores $\sqrt{\frac{u}{c-u}}$, $\frac{c}{c-u}$ & $\frac{cdu}{2(c-u)\sqrt{u}}$, habetur $\int u^2\,du\,\sqrt{(c-u)u} = 2c^4$ $\left[\frac{u^2\sqrt{(c-u)u}}{8c^4} - \frac{u^2\sqrt{(c-u)u}}{48c^3} - \frac{5u\sqrt{(c-u)u}}{192c^2} - \frac{5\sqrt{(c-u)u}}{128c} + \frac{5}{128}\,Arc.\,Tg.\,\sqrt{\frac{u}{c-u}}\right]$. Facta itaque $u = c$, est $c-u = 0$, & tota vis, quam in casu hoc assumto flexioni resistendo amittit funiculus, $= \frac{5c^4}{32e}\frac{f}{r}\,Arc.\,Tg\,\sqrt{\frac{c}{0}} = \frac{5c^4}{32e}\frac{f}{r}\,Arc.\,Tg.\,\infty$, vel posito Diametro circuli ad Peripheriam ut $2:\pi$, hæc vis $= \frac{5\pi c^4}{128e}\frac{f}{r}$.