DISSERTATIO ACADEMICA,

DE

FIGURA TELLURIS OPE PENDULORUM DETERMINANDA;

CUJUS

PART. IV,

CONS. AMPL. FAC. PHIL. AB.

PRÆSIDE

M. GUST. GABR. HÅLLSTRÖM,

PHYS. PROFESS. PUBL. ORD., REG. ACAD. SCIENTIAR. STOCHOLM. ET SOCIET. IMPER. OECON. FENNIÆ MEMBRO,

PRO GRADU PHILOSOPHICO

P. P.

SIM. VILHELMUS APPELGREN,

Ostrobotniensis.

IN AUD. MATHEMAT. D. XXII JUNII MDCCCX.

H. P. M. S.

ABOÆ, TYPIS FRENCKELLIANIS.

41.

Si quidem inæqualitas & diſſimilitudo in meridianis terreſtribus ſupponenda eſt, quod menſuræ graduum meridianorum diverſorum innuere videntur, nihil tamen impedit, quominus quivis meridiani ſinguli ut elliptici conſiderentur. Hæc hypotheſis, uti ſimpliciſſima, ſaltem eo usque aliis præferenda videtur, adeoque a nobis hic adhibenda, donec oſtenſum ſit illam experientiæ non convenire. Quod ad denſitatem telluris attinet, illam primum æquabilem ſupponimus, ut innoteſcat an oſcillationes pendulorum eam confirment nec ne. In eo igitur quæſtio hic verſatur, ut examinentur illi meridiani, pro quibus longitudo aliqua penduli data eſt, quod quidem eo ducit, ut determinetur pro quovis meridiano elliptico ratio axeos minoris ad majorem; ex æqualitate enim vel inæqualitate hujus rationis faciliima erit concluſio de ſimilitudine vel diſſimilitudine meridianorum.

 Sit

Sit igitur meridiani cujusdam terrestris semiaxis minor seu semiaxis telluris constans $= a$, ratio vero hujus ad semiaxin majorem ut $1 : n$, ut sit distantia a centro telluris ad æquatorem in hoc meridiano $= na$. In id inquirendum est, ut ope pendulorum determinetur, an valor n in diversis meridianis diversus sit nec ne. Ex iis quæ demonstrarunt Mathematici (*) sequitur, in sphæroide ellipsoidica homogenea vim gravitatis pro diversis locis rationem tenere normalis meridiani ellipt.- ad locum observatoris relati, cumque sint longitudines pendulorum in ratione vis gravitatis, erunt quoque inter se ut normales telluris. Facta vero latitudine geographica loci observatoris $= l$, atque penduli simplicis minuta secunda ibi oscillantis longitudo $= p$, erit primo valor normalis $=$ $\frac{a}{n \, Cos l \sqrt{n^2 + Tg l^2}}$ (**). Pro alio loco ejusdem meridiani, cujus

*) *Theorie de la Figure de la Terre par Clairaut*, *Paris* 1743, *2 Partie*, §. 18, p. 188. *Mechanik des Himmels von P. S. La Place*, *übers. von J. C. Burckhardt*, *Berlin* 1802, 2 *Th.* p. 64.

**) *Dissert. Acad. resolvens problemata nonnulla posita figura telluris ellipsoidica*, *Præs. Mart. Joh. Wallenio* & *Resp. Thom. Mattheiszen*, *Aboæ* 1767, §. 3 & 4.

cujus latitudo est $=\lambda$, & ubi longitudo penduli est observata $=\pi$, erit similiter normalis $=\frac{a}{n\, Cos\lambda \sqrt{n^2 + Tg\lambda^2}}$.
Instituta deinde comparatione habetur $p : \pi ::$ $Cos\lambda \sqrt{n^2 + Tg\lambda^2} : Cos l \sqrt{n^2 + Tg l^2}$, unde post debitam reductionem eruitur valor quæsitus $n^2 = \frac{\pi^2 Sin\lambda^2 - p^2 Sin l^2}{p^2 Cos l^2 - \pi^2 Cos\lambda^2}$ (*).

Apparet igitur, ad inveniendum numerum n requiri ut in eodem meridiano duobus locis observata sit longitudo penduli. Deficientibus autem ubique talibus observationibus, ponamus longitudinem penduli sub ipso polo telluris esse $= P$, ut pro latitudine poli $= 90°$ habeatur $n = \frac{1}{p\, Cos l} \sqrt{(P^2 - p^2 Sin l^2)}$.
Si igitur quodam artificio semel determinata est P, singulæ quævis longitudines pendulorum hujus æquationis ope rationem præbent axeos minoris meridiani ad majorem. Ad inveniendum vero P comparentur loca, quæ perfecte

*) Hic idem est valor, quem alia ratione inventum præbet *Dissert. Acad. de Figura telluris pendulorum ope definienda, Præs. Andr. Planman & Resp. Isaac. Nordberg Aboæ 1778 P. I, p. 14.*

vel saltem proxime ad eundem pertinent meridianum, ut habeatur $n = \frac{1}{p\,Cos\,l}\sqrt{P^2 - p^2\,Sin\,l^2} = \frac{1}{\pi\,Cos\,\lambda}\sqrt{P^2 - \pi^2\,Sin\,\lambda^2}$. Inde enim elicitur valor

$$P = p\pi\sqrt{\frac{Sin\,l^2\,Cos\,\lambda^2 - Cos\,l^2\,Sin\,\lambda^2}{\pi^2\,Cos\,\lambda^2 - p^2\,Cos\,l^2}} = p\pi\sqrt{\frac{Sin\,(l+\lambda)\,Sin\,(l-\lambda)}{\pi^2\,Cos\,\lambda^2 - p^2\,Cos\,l^2}},$$

seu etiam, facto $Cos\,q = \frac{p\,Cos\,l}{\pi\,Cos\,\lambda}$, $P = \frac{p}{Cos\,\lambda\,Sin\,q}\sqrt{Sin\,(l+\lambda)\,Sin\,(l-\lambda)}$.

Cum non nisi pauciores habeamus ejusmodi observationes pendulorum, quæ ad eundem meridianum referri possent, unde, si ex inevitabilibus parvis erroribus in longitudinibus pendulorum magnæ variationes in valore penduli polaris oriuntur, patet valorem P non adeo accurate determinari posse, ut ad inveniendam n illo uti liceat, examinandum est quomodo variatio dP a variationibus dp & $d\pi$ dependeat. Sumtis igitur differentialibus logarithmicis habetur

$$\frac{dP}{P} = \frac{\pi^2\,Cos\,\lambda^2 . \frac{dp}{p} - p^2\,Cos\,l^2 . \frac{d\pi}{\pi}}{\pi^2\,Cos\,\lambda^2 - p^2\,Cos\,l^2}.$$

Error, cui obnoxii esse possunt valores longitudinis pendulorum supra allati, intra limites $\pm 0{,}02$ lineæ parisinæ contineri supponitur, ut de observationibus suis plerique asseverant auctores. Poni itaque potest $dp = \pm d\pi = \pm 0{,}02$; cumque valores p & π limites $439{,}1$ & $441{,}4$ non excedant, valores $\frac{dp}{p}$ & $\frac{d\pi}{\pi}$ continebuntur intra limites $\frac{0{,}02}{439{,}1}$ & $\frac{0{,}02}{441{,}4}$, hoc est, intra $0{,}00004555$ & $0{,}00004531$, unde apparet, sine metu erroris fieri posse $\frac{dp}{p} = \pm \frac{d\pi}{\pi} = 0{,}0000454$. Pro signo positivo erit hinc $\frac{dP}{P} = \frac{dp}{p} = \pm 0{,}0000454$, & error determinandus $dP = \pm 0{,}0000454 . P$, qui minor erit quantitate $\pm 0{,}020066$ lin parisin., quoniam $P < 442$ lin. Si vero $\frac{dp}{p} = -\frac{d\pi}{\pi} = \pm 0{,}0000454$, erit $\frac{dP}{P} = \pm 0{,}0000454 . \frac{\pi^2 Cos\lambda^2 + p^2 Cosl^2}{\pi^2 Cos\lambda^2 - p^2 Cosl^2}$ seu dividendo per $\pi^2 Cos\lambda^2$, & substituendo valorem $Cosq$, $\frac{dP}{P} = \pm 0{,}0000454 . \frac{1 + Cosq^2}{1 - Cosq^2} = \pm 0{,}0000454 \left(\frac{2}{Sin q^2} - 1\right)$ unde $dP = \pm 0{,}0000454 \left(\frac{2}{Sin q^2} - 1\right) P$. Hinc autem apparet, decrescere valorem dP crescente $Sin\, q^2 = 1 - \frac{p^2 Cosl^2}{\pi^2 Cos\lambda^2}$, & contra, & quidem cum ratio $\frac{p^2}{\pi^2}$

parum

parum ſit variabilis, dP minorem fieri quo minor ſumitur $Cos\,l$ reſpectu $Cos\,\lambda$. Inde igitur concludendum eſt, latitudinem λ minimam eligi debere, & illam l maximam, quæ ſumi poteſt, atque valorem P eſſe certiorem pro majori differentia $l-\lambda$ quam pro minori.

Secundum hæc principia eligamus primum obſervationes Upſaliæ & in Promontorio bonæ ſpei factas, pro quibus locis differentia meridianorum non eſt niſi $0°.44'.45''$, atque habemus ex præcedentibus $l=59°\,51'\,50''$, $\lambda=-33°\,55'\,15''$, $p=440{,}9168$, $\pi=440{,}0898$, adeoque $q=52°\,41'\,15''$, & $P=441{,}3958$. Cumque ſimul proveniat variatio maxima $dP=\pm\,0{,}043319$, apparet limites, intra quos continetur valor P, eſſe $441{,}4388$ & $441{,}3522$.

Pro Spitzbergen & Gotha, quorum locorum meridiani non niſi $0°\,50'\,39''$ a ſe diſtant, eſt $l=79°\,47'$, $\lambda=50°\,56'\,17''$, $p=441{,}3796$, $\pi=440{,}5860$, $q=73°\,37'\,4'',5$, $P=441{,}4569$, $dP=\pm\,0{,}0235$ atque valoris P limites $441{,}4804$ & $441{,}4334$.

Pro Upſalia & Vienna eſt differentia meridianorum $=1°\,15'\,43''$, $l=59°\,51'\,50''$, $\lambda=48°\,12'\,36''$ $p=440{,}9168$, $\pi=440{,}5500$, nec non $q=41°\,3'\,29''$,

&

& $P = 441{,}4263$, $dP = \pm\, 0{,}07287$, adeoque limites valoris $P = 441{,}4992$ & $441{,}3534$.

Differentia meridianorum quoque Viennæ & Promontorii bonæ ſpei non eſt niſi $= 2^\circ\, 0'\, 28''$, quare apparet horum locorum obſervationes idoneas eſſe ad inveniendum valorem P. Ipſa autem comparatione inſtituta, factaque $l = 48^\circ\, 12'\, 36''$, $\lambda = -33^\circ\, 55'\, 15''$, $p = 440{,}5500$, & $\pi = 440{,}0898$, provenit $q = 36^\circ\, 29'\, 38''{,}6$, $P = 441{,}3884$, atque $dP = \pm\, 0{,}0933$, adeoque limites $441{,}4817$ & $441{,}2951$.

Collatis obſervationibus pro Spitzbergen & Roma, quorum locorum differentia meridianorum eſt $2^\circ\, 34'\, 9''$, erit $l = 79^\circ\, 47'$; $\lambda = 41^\circ\, 53'\, 54''$, $p = 441{,}3796$; $\pi = 440{,}3101$; $q = 76^\circ\, 10'\, 47''{,}5$, $P = 441{,}4442$, $dP = \pm\, 0{,}0225$, & valoris P limites $441{,}4667$ atque $441{,}4217$.

Ex obſervationibus Arensburgi & ad Promontorium bonæ ſpei factis, pro quibus locis differentia meridianorum eſt $4^\circ\, 4'\, 36''$, habetur $l = 58^\circ 15'\, 9''$; $\lambda = -33^\circ\, 55'\, 15''$; $p = 440{,}8848$; $\pi = 440{,}0898$; $q = 50^\circ\, 33'\, 44''{,}3$; $P = 441{,}4236$; $dP = \pm\, 0{,}0472$, atque limites valoris $P = 441{,}4708$ & $441{,}3764$.

Quam

Quam adhuc inſtituere poſſemus comparationem inter obſervationes ſub æquatore in Peru & in Portobello factas, ideo hic omittimus, quod aperte erroneum, nimis nempe parvum, præbeat valorem longitudinis *P*. Illud indicat longitudinem penduli in Portobello juſto minorem eſſe aſſumtam, quod etiam ex continuitatis lege, quam indicant obſervationes locorum vicinorum, intelligitur.

Collatis jam valoribus longitudinis penduli polaris eo ordine quo determinati ſunt, oritur ſequens comparatio:

$P = 441,3958$	$dP = \pm 0,0433$
4569	0235
4263	0729
3884	0933
4442	0225
4226	0472
Medium $= 441,5225$	

Illud autem medium arithmeticum non efficit valorem maxime probabilem, cum diverſi hi valores *P* non omnes eadem certitudine gaudeant. Quo latiores nempe ſunt limites, intra quos continetur *P*, hoc eſt, quo majores ſunt variationes *dP*, eo incertiorem eſſe patet hunc ipſum, unde ſequitur, gradum probabilitatis cujusque valoris *P* menſurari

ſurari correſpondente qvantitate $\frac{1}{dP}$. Factis igitur $\frac{1}{dP'}=A'$, $\frac{1}{dP''}=A''$, $\frac{1}{dP'''}=A'''$, &c., pro qvibuscunque valoribus P', P'', P''' &c., erit probabilior longitudinis penduli polaris valor

$$P=\frac{A'P'+A''P''+A'''P'''+\&c.}{A'+A''+A'''+\&c.}=441{,}4361 \text{ lin. pariſ.}$$

Et quidem hunc valorem non ſolum intra limites ſupra præſcriptos contineri apparet, verum etiam, non dixerimus utrum fortuito an neceſſitate urgente, præciſe eundem eſſe, quem requirunt arctisſimi limites. Comparatis enim limitibus ex obſervationibus Upſaliæ & in Promontorio bonæ ſpei factis, qui requirunt, ut ſit valor $P<441{,}4388$, cum illis, qui ex obſervationibus in Spitzbergen & Gothæ inſtitutis derivantur, & ſecundum quos eſſe debet $P>441{,}4335$, colligitur, medium inter hos valorem eſſe $P=441{,}4361$ ſeu præciſe eundem, quem ex conſideratis omnibus valoribus & eorum limitibus ſupra determinavimus. Eo usque igitur, donec novis obſervationibus oſtenſum ſit alium valorem huic eſſe præferendum, eo utendum eſſe judicamus.

Determinato ſic valore P, derivari poteſt ratio axium cujuscunque Meridiani terreſtris elliptici, in quo data eſt longitudo quædam penduli, ex hac æquatione: $n = \frac{\sqrt{(P^2 - p^2 Sin\, l^2)}}{p\, Cof\, l} = \frac{1}{p} \sqrt{(P^2 + (P^2 - p^2) Tg\, l^2)}$, quæ quidem ob faciliorem calculum in duas ſequentes reſolvatur: $Sin\, r = \frac{p}{P} . Sin\, l$, & $n = \frac{P\, Cof\, r}{p\, Cof\, l}$. Cognita vero n, data quoque erit $n - 1$, quæ quantitas a *La Place* ellipticitas appellata, parte aliquota $\frac{1}{s}$ ſemiaxis telluris exprimatur, ita ut ſit $s = \frac{1}{n - 1}$.

Eo vero ipſo, quo pro quovis meridiano hinc determinatur valor n, ſimul in id inquirendum eſt, an variationes hujus valoris revera indicent aliquam eſſe in figura telluris aberrationem ab ellipſoide, vel an potius apparens tantum ſit hæc aberratio, ab erroribus tantum in valoribus P & p derivanda. In eum igitur finem quærenda eſt variatio valoris n a ſynchronis variationibus quantitatum P & p dependens. Sumtis ſcilicet differentialibus logarithmicis valoris n, habetur $\frac{dn}{n} = \frac{1}{Cof\, r^2} \left(\frac{dP}{P} - \frac{dp}{p} \right)$, atque $dn = \frac{n}{Cof\, r^2} \left(\frac{dP}{P} - \frac{dp}{p} \right)$.