Åbo Akademi

FAKULTETSOMRÅDET FÖR
NATURVETENSKAPER OCH TEKNIK

MATEMATIK

Avhandling Pro Gradu

Den isoperimetriska olikheten och andra klassiska olikheter i Hardy- och Bergmanrum

Skribent:
Kira Liljestrand

Handledare:
Mikael Lindström

2022

Sammanfattning

I avhandlingen presenteras och bevisas den isoperimetriska olikheten, som enligt myter härstammar från antiken och från ett så kallat Didos problem. Matematiker världen över har lyckats bevisa den gamla och berömda olikheten på tiotals olika sätt. Beviset som framförs här bygger på Hardy-Littlewoods sats, vilken även bevisas i avhandlingen. I samband med Hardy-Littlewoods sats tillämpas Hardyrum och Bergmanrum samt satser i anknytning till Blaschkeprodukten, och därför behandlas till en början grundläggande teori med bevis kring dem. I det avslutande kapitlet studeras tre klassiska olikheter som visas vara ekvivalenta i Hardyrum och viktade Bergmanrum. Fejér-Riesz olikhet, Hardys olikhet och Hardy-Littlewoods olikhet är speciella i denna bemärkelse, eftersom ekvivalenta egenskaper inte är något allmänt förekommande mellan funktionsrummen.

Innehåll

Inledning

Dido var prinsessan av Tyros, som var en stad i landskapet Fenicien under antiken. Då Dido blev förrådd av sin bror Pygmalion flydde hon till norra Afrikas kust, till dagens Tunisien. Där bad hon landshövdingen om att få ett landområde. Hennes begäran godkändes under förutsättning att området skulle kunna omslutas med en oxhud. Klok som hon var, skar hon oxhuden i smala remsor som hon sedan omringade ett område med. Dido ville förstås ha ett så stort område som möjligt, och eftersom området kantades av Medelhavet valde hon att lägga oxremsorna i form av en halvcirkel. Detta stora landområde fick namnet Kartago, och Dido valdes till rikets drottning. [7]

Ett syfte med avhandlingen är att bevisa den isoperimetriska olikheten, som enligt myter härstammar från ett så kallat *Didos problem*. Det bakomliggande isoperimetriska problemet är ett av de äldsta och kändaste optimeringsproblemen. Vilken geometrisk figur i planet med en given omkrets L omsluter den största möjliga arean A? Lösningen på problemet är cirkeln, vilket Dido redan framförde omkring 900 f.Kr. Dock dröjde det över 2000 år innan någon kunde bevisa påståendet matematiskt. Problemet kan omformuleras och då erhålls den klassiska isoperimetriska olikheten: $L^2 - 4\pi A \geq 0$, där likhet gäller endast för cirkeln. [7, 1]

Det var först i mitten av 1800-talet som den schweiziske matematikern Jakob Steiner (1796–1863) introducerade grunderna till beviset. Han framlade rentav fem bevis för det isoperimetriska problemet, alla ur geometrins perspektiv. Somliga anser dock att han gjorde en miss i alla sina bevis med att anta att det existerar en lösning på problemet, vilket moderna analytiker inte alltid ser som en självklarhet. Den isoperimetriska olikheten har i alla tider intresserat matematiker världen över och nuförtiden finns det häpnadsväckande många och framförallt varierande – en del riktigt kluriga – bevis på den. [1]

Jag har tidigare bekantat mig med en bevisvariant (av Hurwitz från år 1902) som baserar sig på Fourierserier och Parsevals formel, och därför valde jag av nyfikenhet att i avhandlingen studera ett annat tillvägagångssätt. Beviset som jag presenterar här är en modifiering av Torsten Carlemans (1892–1949) bevis från år 1921. Carleman var en svensk matematiker och den första som bevisade den klassiska olikheten med hjälp av komplexanalytiska metoder. Beviset som jag framför baserar sig på Dragan Vukotićs [13] artikel, som är en av två huvudkällor i avhandlingen. Det elementära beviset bygger på Hardy-Littlewoods sats och ger i själva verket en mer allmän version av olikheten än den som Carleman bevisade (i och med hans överflödiga antagande om en slät kurva). [1]

I samband med Hardy-Littlewoods sats kommer Hardyrum och Bergmanrum in i bilden. Det är två nära besläktade men väldigt olika funktionsrum som samverkar med komplex analys, funktionalanalys och operatorteori. Bägge rummen har ett brett tillämpningsområde i matematik, bl.a. kan nämnas inom approximationsteori, harmonisk analys, plangeometri samt gällande partiella differentialekvationer och konforma avbildningar. Funktionsrummen har flera gemensamma egenskaper, men funktioner i Hardyrum beter sig i allmänhet bättre än i Bergmanrum medan resultaten i Bergmanrum ofta är mer tillfredsställande än i Hardyrum. Teorin kring Hardyrum är väletablerad och känd till skillnad från Bergmanrum vars teori är mer komplicerad och har än idag obesvarade grundläggande frågor. [4, 13]

Ett annat syfte med avhandlingen är att spinna vidare på teorin kring Hardy- och Bergmanrum utifrån en artikel av Kehe Zhu [14], vilken är den andra huvudkällan. Jag presenterar tre klassiska olikheter formulerade för Hardyrum H^p och visar att de går att överföra till att gälla även för viktade Bergmanrum A^p_α, där $0 < p < \infty$ och $-1 < \alpha < \infty$. Ett välkänt resultat medför sedan att man elegant kan återfå de ursprungliga olikheterna för Hardyrum genom att ta gränsvärdet av A^p_α då $\alpha \to -1^+$. Dessa tre klassiska olikheter är speciella i denna bemärkelse, eftersom ekvivalenta egenskaper inte är något allmänt förekommande rummen emellan.

Kapitel 1

Bakgrundsteori

I detta kapitel tas en blandning av grundläggande teori upp som behövs i ett senare skede av avhandlingen. Flera av resultaten är välkända och därför utelämnas bevis. Innehållet i kapitlet baseras i huvudsak på [2], [3], [5], [10] och [12].

1.1 Begrepp, definitioner och satser

För att göra det klart och tydligt preciseras inledningsvis vad som menas med vissa mängder som förekommer i texten. De naturliga talen betecknas $\mathbb{N}$ och utgör mängden av alla heltal som är icke-negativa, dvs. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Mängden av alla positiva heltal betecknas $\mathbb{Z}_+$, dvs. $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$. Detta är exempel på numrerbara, eller som det också kallas – uppräkneliga, mängder. Som vanligt betecknas den reella talmängden med $\mathbb{R}$ och den komplexa talmängden med $\mathbb{C}$, där $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

De komplexa talen har en väsentlig roll i avhandlingen och det antas att läsaren är bekant med grunderna i komplex analys. Låt z, z_1 och z_2 beteckna godtyckliga komplexa tal. Som påminnelse följer här några egenskaper och räkneregler för det komplexa konjugatet och absolutbeloppet:

- $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

- $z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} = z$
- $|z| \in \mathbb{R}$ och $|z| \geq 0$.

Lägg märke till att räknereglerna också kan tillämpas på komplexvärda funktioner. Till exempel den förstnämnda regeln svarar mot $|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}$ eller kort $|f|^2 = f\overline{f}$.

Till följande definieras viktiga delmängder av det komplexa talplanet samt en central funktionsegenskap.

Definition 1.1. En *öppen cirkelskiva* med radien $r > 0$ och medelpunkten $z_0 \in \mathbb{C}$ betecknas $D(z_0, r)$ och definieras som mängden av alla komplexa tal z som ligger på ett avstånd mindre än r från z_0, dvs.

$$D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Definition 1.2. Låt $\Omega \subset \mathbb{C}$ vara en mängd och $\partial\Omega$ beteckna dess rand. Unionen av mängden Ω och randen $\partial\Omega$ bildar det *slutna höljet* av Ω, vilket betecknas $\overline{\Omega}$:

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega.$$

Det är klart att $\Omega \subseteq \overline{\Omega}$, där likhet gäller om och endast om Ω är sluten. Vidare ger Definition 1.1 i kombination med Definition 1.2 att en sluten cirkelskiva med radien $r > 0$ och medelpunkten $z_0 \in \mathbb{C}$ definieras genom $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ och att randen av en cirkelskiva, såväl öppen som sluten, definieras genom $\partial D(z_0, r) = \partial\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

Definition 1.3. Mängden $\mathbb{D}$ som består av alla punkter innanför den origocentrerade enhetscirkeln $|z| = 1$, dvs.

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

kallas en *enhetscirkelskiva*.

Observera att enhetscirkelskivan är öppen och att den förhåller sig till den öppna cirkelskivan enligt $\mathbb{D} = D(0, 1)$. Funktionerna som studeras i avhandlingen är i regel avbildningar av formen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$.

Definition 1.4. Låt Ω vara en öppen mängd i $\mathbb{C}$ och antag en komplexvärd funktion på Ω. Funktionen är *analytisk i punkten* $z_0 \in \Omega$ om funktionen är deriverbar (komplex differentierbar) i någon omgivning av z_0. Funktionen är *analytisk* i Ω om funktionen är analytisk i varje punkt av Ω. Om funktionen är analytisk i hela $\mathbb{C}$, så kallas funktionen en *hel funktion*.

En komplexvärd analytisk funktion kallas också en *holomorf funktion*. Låt därför $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ beteckna rummet bestående av alla analytiska funktioner på enhetscirkelskivan $\mathbb{D}$. Snart presenteras ett viktigt resultat i fråga om analytiska funktioner. Men före det, låt $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ vara en funktionsserie av en komplex variabel z.

Definition 1.5. En funktionsserie av formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ kallas en *potensserie* centrerad i punkten $z_0 \in \mathbb{C}$. Konstanterna $a_n \in \mathbb{C}$ utgör potensseriens koefficienter.

En funktion som är analytisk i en omgivning av en punkt kan approximeras med en följd av polynom, eller med andra ord utvecklas i en potensserie, kring punkten. Denna potensserieutveckling visar sig vara Taylorutvecklingen av funktionen.

Sats 1.6. *Antag att funktionen f är analytisk i den öppna cirkelskivan $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$. Då gäller att*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{1.1}$$

för $|z - z_0| < r$, där potensseriens koefficienter ges av

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

och serien har konvergensradien $R \geq r$.

Bevis. Se [3, s. 72, Theorem 2.8].

Konvergensradien för potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ betecknas med R och är det största reella talet, $0 \leq R \leq \infty$ och $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, för vilket serien konvergerar för alla z som satisfierar $|z - z_0| < R$. Med andra ord svarar en konvergensradie mot radien för den största cirkelskiva inom vilken potensserien är konvergent. Utanför denna cirkelskiva är serien divergent. Närmare bestämt (se [3, s. 31, Theorem 1.3]) gäller det att för $0 < r < R$ **konvergerar** serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ **likformigt** på $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ och **absolut** för $|z - z_0| < R$.

Anmärkning 1.7. Om $D(z_0, r)$ i ovanstående sats är en origocentrerad cirkelskiva, dvs. $z_0 = 0$, så antar funktionens potensserieutveckling (1.1) formen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

I detta fall talar man också om en Maclaurinutveckling av funktionen.

Betrakta två origocentrerade potensserier $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ och $\sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$ med komplexa koefficienter a_i och b_i. Man kan undersöka produkten av dessa potensserier genom att utföra seriemultiplikationen och sedan gruppera termerna enligt gradtal av z:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i\right) &= \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...\right) \cdot \left(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ...\right) \\
&= a_0 b_0 + a_0 b_1 z + a_0 b_2 z^2 + ... \\
&\quad + a_1 b_0 z + a_1 b_1 z^2 + a_1 b_2 z^3 + ... \\
&\qquad + a_2 b_0 z^2 + a_2 b_1 z^3 + a_2 b_2 z^4 + ... \\
&= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 \\
&\quad + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) z^3 + ... \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + ... + a_i b_0) z^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\right) z^i.
\end{aligned}$$

Detta resultat kallas *Cauchyprodukten* av två oändliga potensserier.

Lemma 1.8. (Cauchyprodukt) *Antag potensserierna* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ *och* $\sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$*, där* $a_i, b_i \in \mathbb{C}$*. För produkten gäller att*

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i,$$

där

$$c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}.$$

Anmärkning 1.9. Cauchyprodukten gäller alls inte enbart för potensserier utan regeln går också att tillämpa på godtyckliga absolutkonvergenta oändliga serier. För de absolutkonvergenta serierna $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ och $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ med komplexa termer a_i och b_i gäller att

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}.$$

Och till sist ett välkänt resultat:

Lemma 1.10. **(Cauchy-Schwarz olikhet för komplexa tal)** *Låt $a_0, a_1, ..., a_n$ och $b_0, b_1, ..., b_n$ vara komplexa tal. Då gäller att*

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i \overline{b_i}\right|^2 \leq \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=0}^{n} |b_i|^2\right),$$

där $\overline{b_i}$ är det komplexa konjugatet till b_i. Likhet inträffar om och endast om talföljderna $\{a_i\}_{i=0}^{n}$ och $\{b_i\}_{i=0}^{n}$ är linjärt beroende, dvs. det finns en konstant $\lambda \in \mathbb{R}$ sådan att $a_i = \lambda b_i$ för varje $i = 0, 1, ..., n$.

Kom ihåg att summan av en konvergent geometrisk serie är

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + ... = \frac{a}{1-q},$$

förutsatt att konvergensvillkoret $|q| < 1$ är uppfyllt. Den geometriska serien har förstatermen a och kvoten, dvs. förhållandet mellan två påföljande termer, q.

Definition 1.11. En funktion sägs vara *icke-försvinnande* om den saknar nollställen i sin definitionsmängd.

1.2 Riemanns avbildningssats

Antag en öppen, äkta och enkelt sammanhängande delmängd Ω av det komplexa talplanet $\mathbb{C}$. En *äkta delmängd* av $\mathbb{C}$ är en mängd som är icke-tom och olika hela $\mathbb{C}$. En mängd kallas *enkelt sammanhängande* om varje enkel sluten kurva i mängden kan kontinuerligt krympas och deformeras till en punkt i mängden. Förenklat innebär det att mängden, liksom dess komplement, är sammanhängande och saknar ”hål”. Antag vidare att mängden Ω har komplicerad geometrisk struktur. Hur bra skulle det inte vara om man då kunde överföra ett komplext problem gällande analytiska funktioner från Ω till en mängd med mer användbara egenskaper såsom enhetscirkelskivan $\mathbb{D}$? Som tur är finns *Riemanns avbildningssats*, som möjliggör denna effektiva lösningsmetod.

Sats 1.12. (Riemanns avbildningssats) *Antag att Ω är en öppen och enkelt sammanhängande mängd sådan att $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ och $\Omega \neq \emptyset$. Om $z_0 \in \Omega$, så existerar det en entydig konform avbildning $F : \Omega \to \mathbb{D}$ med egenskaperna*

$$F(z_0) = 0 \qquad \textit{och} \qquad F'(z_0) > 0.$$

Bevis. Se [10, s. 224, Theorem 3.1].

Vad är en konform avbildning?

Definition 1.13. Låt U och V beteckna två öppna delmängder av $\mathbb{C}$. En bijektiv (injektiv och surjektiv) holomorf funktion $f : U \to V$ kallas en *konform avbildning.*

Istället för konform avbildning kan man tala om *biholomorf avbildning*, eftersom den inversa funktionen $f^{-1} : V \to U$ visar sig också vara en holomorf funktion. Inversen är alltså också alltid en konform avbildning. Enhetscirkelskivan $\mathbb{D}$ är en öppen, äkta och enkelt sammanhängande delmängd av $\mathbb{C}$, och uppfyller därmed också antagandena i Riemanns avbildningssats. Den konforma avbildningen är vinkel- och orienteringsbevarande. Ett exempel på en konform avbildning är Möbiustransformationen.

Definition 1.14. En *Möbiustransformation* är en avbildning av formen

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

där a, b, c och d är komplexa konstanter sådana att $ad - bc \neq 0$.

Sats 1.15. *Möbiustransformationen avbildar cirklar och räta linjer i z-planet på cirklar och räta linjer i w-planet.*

Bevis. Se [6, s. 56, Sats 4.3].

För att förtydliga satsens innebörd behöver en cirkel inte nödvändigtvis avbildas på en cirkel eller ett halvplan på ett halvplan.

Riemanns avbildningssats behandlar endast öppna mängder och ställer inga som helst krav på randen av Ω. Satsen går att utvidga till att gälla även randen, men det kräver en viss regelbundenhet av $\partial\Omega$. Mängden, eller området, Ω bör vara begränsad. Följande kända sats av Carathéodory tillåter att man avbildar randen på randen, vilket kommer att behövas i beviset av den isoperimetriska olikheten.

Sats 1.16. (Carathéodory) *Antag att Ω är ett enkelt sammanhängande område i $\mathbb{C}$ som begränsas av en enkel sluten kurva $\partial\Omega$. Då kan varje konform avbildning $F : \mathbb{D} \to \Omega$ kontinuerligt utvidgas till $F : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$, som är en bijektiv avbildning. Enhetscirkelskivans rand avbildas på områdets rand; $F : \partial\mathbb{D} \to \partial\Omega$.*

Bevis. Se [5, s. 44].

Ett *Jordanområde* är ett område som begränsas av en *Jordankurva*, som är en enkel sluten kurva. Det innebär en kontinuerlig plan kurva som saknar ändpunkter och som inte skär sig själv. I föregående sats är Ω ett Jordanområde och $\partial\Omega$ motsvarande Jordankurva. Begreppet *rektifierbar* betyder uträtbar och innebär att kurvan är av ändlig längd. Hardyrummet $H^1(\mathbb{D})$ i följande lemma definieras senare.

Lemma 1.17. *Låt $F : \mathbb{D} \to \Omega$ vara en konform avbildning, där Ω är ett Jordanområde. Då är Jordankurvan $\partial\Omega$ rektifierbar om och endast om $F' \in H^1(\mathbb{D})$.*

Bevis. Se [5, s. 44, Theorem 3.12].

1.3 Lebesguerum

Följande funktionsrum kan man inte undgå från att stöta på i samband med funktionalanalys. Det är de så kallade *Lebesguerummen* bestående av funktioner som är p-integrerbara.

Definition 1.18. Rummet $L^p(X, \mu) = L^p(X)$ eller kort L^p, $1 \leq p < \infty$, består av alla komplexvärda mätbara funktioner på X med måttet μ sådana att

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) < \infty.$$

För $f \in L^p(X)$ definieras funktionens L^p-norm av

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Hur definieras L^p-rum för gränsfallet $p = \infty$? Låt f vara en mätbar funktion på X. Man säger att $f \in L^\infty(X)$ om det existerar ett icke-negativt tal M, $0 \leq M < \infty$, sådant att $|f(x)| \leq M$ för nästan varje $x \in X$. Denna mängd av funktioner kallas *väsentligt begränsade.* För $f \in L^\infty(X)$ ges L^∞-normen av funktionen f av talet

$$\|f\|_{L^\infty} := \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ för nästan varje } x \in X\}.$$

Sats 1.19. (Hölders olikhet) *Antag att* $1 \leq p \leq \infty$ *och* $1 \leq q \leq \infty$ *är sådana att*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Om $f \in L^p(X)$ *och* $g \in L^q(X)$*, så gäller att* $fg \in L^1(X)$ *och*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \tag{1.3}$$

Bevis. Se [12, s. 3, Theorem 1.1].

Hölders olikhet (1.3) skriven på integralform blir

$$\int_X |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \left(\int_X |g(x)|^q \, d\mu(x) \right)^{1/q}. \tag{1.4}$$

Lägg märke till att man i satsen använder överenskommelsen $\frac{1}{\infty} = 0$, vilket innebär att $p = 1$ svarar mot $q = \infty$ och vice versa. Satsen står för ett grundläggande resultat för L^p-rum och är egentligen en generalisering av Cauchy-Schwarz olikhet.

Lemma 1.20. (Fatou) *Antag att* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *är en följd av mätbara funktioner och att* $f_n \geq 0$ *för varje* $n \in \mathbb{Z}_+$. *Om*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

för nästan alla x, *så gäller att*

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Bevis. Se [11, s. 61, Lemma 1.7].

Kapitel 2

Hardyrum och Bergmanrum

Hardyrum är uppkallade efter Godfrey Harold Hardy (1877–1947) som var en brittisk matematiker och känd för sina betydelsefulla arbeten inom talteori och matematisk analys. G. H. Hardy, som han officiellt kallades, gjorde många gånger nära samarbete med sin landskollega John Edensor Littlewood (1885–1977) och tillsammans studerade de bl.a. primtal och Fourierserier. Det var den polske/amerikanske matematikern Stefan Bergman (1895–1977) som lade grunden för det funktionsrum som senare kom att heta Bergmanrum. Bergmans arbete var främst inom komplex analys och han studerade Bergmanrum huvudsakligen för fallet $p = 2$ och på mer allmänna områden än enhetscirkelskivan. [2, 4]

2.1 Hardy- och Bergmanrum med egenskaper

I detta avsnitt definieras Hardyrum och Bergmanrum. Dessutom presenteras grundläggande teori i anknytning till dem som behövs längre fram i avhandlingen. Innehållet i avsnittet baseras på [4], [13] och [15].

Definition 2.1. *Hardyrum* betecknas $H^p(\mathbb{D})$ eller kort H^p och är för $0 < p < \infty$ ett vektorrum som består av alla analytiska funktioner f på enhetscirkelskivan $\mathbb{D}$ sådana att

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{0<r<1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right]^{1/p} < \infty.$$

Man kan också säga att för $0 < p < \infty$ är Hardyrummet mängden av alla analytiska funktioner på $\mathbb{D}$ vars ovandefinierade H^p-norm är ändlig, dvs.

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_{H^p}^p = \sup_{0<r<1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right] < \infty \right\}.$$

Antag att f är en analytisk funktion på $\mathbb{D}$ och låt beteckna

$$M_p(r, f) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right)^{1/p},$$

där $0 < p < \infty$ och $0 \leq r < 1$. Man kan visa (se [5, s. 9, Theorem 1.5]) att dessa så kallade *integralmedelvärden* är icke-avtagande funktioner med avseende på r, dvs. $M_p(r_1, f) \leq M_p(r_2, f)$ då $r_1 \leq r_2$. Följaktligen för $f \in H^p$ gäller då att

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0<r<1} M_p(r, f) = \lim_{r \to 1^-} M_p(r, f).$$

För $p = \infty$ fås vektorrummet $H^\infty(\mathbb{D}) =: H^\infty$ som består av alla begränsade analytiska funktioner på $\mathbb{D}$. För $f \in H^\infty$ definieras normen som

$$\|f\|_{H^\infty} := \sup_{|z|<1} |f(z)| = \lim_{r \to 1^-} M_\infty(r, f),$$

där motsvarande integralmedelvärde då $0 \leq r < 1$ ges av

$$M_\infty(r, f) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|.$$

En holomorf funktion $f(z)$ definierad på den öppna enhetscirkelskivan $\mathbb{D}$ beter sig i allmänhet ganska oberäkneligt i närheten av randen $\partial\mathbb{D}$. Frigyes Riesz (1880–1956) har bevisat ett anmärkningsvärt resultat inom komplex analys som påvisar att det dock räcker att anta att $f \in H^p$, $0 < p \leq \infty$, för att funktionen f nästan överallt kommer att konvergera mot randfunktionen $f^*(e^{i\theta})$ på enhetscirkeln $\partial\mathbb{D}$.

Sats 2.2. *Låt $f \in H^p(\mathbb{D})$, där $0 < p \leq \infty$. Då existerar det ändliga radiella gränsvärdet*

$$f^*(e^{i\theta}) := \lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta})$$

nästan överallt för $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$. H^p-normen kan även uttryckas i termer av det radiella gränsvärdet:

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{H^p}^p &= \lim_{r\to 1^-}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})\right|^p d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^*(e^{i\theta})\right|^p d\theta
\end{aligned}
$$

för varje $f \in H^p(\mathbb{D})$.

Bevis. Se [8, s. 24, Theorem 1.22].

Man kan också visa för varje $f \in H^p$ att den utvidgade funktionen $f^* \in L^p(\partial\mathbb{D})$, $1 \leq p \leq \infty$, som är Lebesguerummet på $\partial\mathbb{D}$ med måttet $\frac{d\theta}{2\pi}$. Ofta betecknas i litteraturen $f^* = f$.

Låt dA beteckna Lebesgueareamåttet på enhetscirkelskivan $\mathbb{D}$. I polära koordinater ges areamåttet av $dA(z) = r dr d\theta$, där $r \in [0, 1[$ och $\theta \in [0, 2\pi]$. Variabeln $z = re^{i\theta}$ anger ett godtyckligt komplext tal i polär form. Faktorn $\frac{1}{\pi}$ framför ytintegralen i kommande definition normaliserar areamåttet på $\mathbb{D}$ så att arean av enhetscirkelskivan blir 1:

$$
A(\mathbb{D}) = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} r dr d\theta = 1.
$$

Definition 2.3. *Bergmanrum* betecknas $A^p(\mathbb{D})$ eller kort A^p och är för $0 < p < \infty$ ett vektorrum som består av alla analytiska funktioner f på $\mathbb{D}$ vars A^p-norm

$$
\|f\|_{A^p} := \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z)\right)^{1/p}
$$

är ändlig.

Igen kan man välja att istället uttrycka detta som

$$
A^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_{A^p}^p = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z) < \infty \right\}
$$

för $0 < p < \infty$. Normaliseringen med faktorn $\frac{1}{\pi}$, som man har valt för enkelhetens skull, bidrar ju också till att den konstanta funktionen $f \equiv 1$ har normen ett, dvs. $\|1\|_{A^p} = 1$.

Lägg märke till att även normen av $f \in A^p$ kan uttryckas med hjälp av integralmedelvärdet $M_p(r, f)$:

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{A^p} &= \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z) \right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p r dr d\theta \right)^{1/p} \\
&= \left(2 \int_0^1 r \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right) dr \right)^{1/p} \\
&= \left(2 \int_0^1 r M_p^p(r, f) \, dr \right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Anmärkning 2.4. Både Hardy- och Bergmanrum är försedda med en *äkta norm* då $1 \leq p < \infty$, medan för $0 < p < 1$ är normen inte äkta utan är en *seminorm*. En äkta norm är oftast att föredra och mer av intresse, och därför ligger fokus i avhandlingen för det mesta på det förstnämnda intervallet.

Hur förhåller sig Hardyrum och Bergmanrum till varandra? Och vad kan man säga om storleken på funktionsrummen för olika värden på p? Följande anmärkning och därpå kommande påståenden med bevis ger svar och belägg för frågorna.

Anmärkning 2.5. Utgående från definitionerna för Hardyrum (Definition 2.1) och Bergmanrum (Definition 2.3) kan man visa att för $0 < p \leq q < \infty$ gäller att $H^q \subseteq H^p$ och $A^q \subseteq A^p$. Den tidigare inklusionen kan dessutom utvidgas till att $H^\infty \subseteq H^p$ för varje p. Vidare gäller för $0 < p < \infty$ att $H^p \subseteq A^p$. I själva verket finns det ett ännu starkare samband mellan rummen, men detta överraskande resultat redogörs för i ett senare skede av avhandlingen. Ännu kan påpekas att dessa inklusioner utgör äkta delmängder ifall p-intervallet är strikt. Till exempel om $p < q$, så gäller att $H^q \subset H^p$ och $A^q \subset A^p$.

Påstående. Om $1 \leq p \leq q \leq \infty$, så gäller för $f \in H^q$ att $\|f\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^q}$. Speciellt gäller då att $H^q \subseteq H^p$.

Bevis. Fixera $r \in [0, 1[$ och beteckna $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$, samt antag att $f \in H^q$. Notera först och främst att alla funktioner $f \in H^q$ och alla funktioner $f \in H^p$ är kontinuerliga på $\mathbb{D}$, ty funktionerna är analytiska på $\mathbb{D}$. Speciellt är funktionen f_r kontinuerlig på den *kompakta*, dvs. slutna och begränsade, mängden $r\overline{\mathbb{D}}$ för varje $0 \leq r < 1$, och därmed antar den ett största värde i mängden.

Först ska Hölders olikhet (Sats 1.19) på integralform tillämpas på funktionen f_r. Låt $1 \leq p < q \leq \infty$. För att undvika sammanblandning av liknande variabler införs nya beteckningar i Sats 1.19: $a := p$ och $b := q$. Sätt $a = \frac{q}{p} > 1$ och sambandet $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ger att $b = \frac{a}{a-1} = \frac{q/p}{q/p-1} = \frac{pq}{p(q-p)} = \frac{q}{q-p}$, $p \neq q$. Med hjälp av Hölders olikhet för integraler (1.4) fås då att

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f_r(e^{i\theta})\right|^p d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f_r^p(e^{i\theta}) \cdot 1\right| d\theta \\
&\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f_r^p(e^{i\theta})\right|^{q/p} d\theta\right)^{\frac{1}{q/p}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1^{\frac{q}{q-p}}\, d\theta\right)^{1/\frac{q}{q-p}} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f_r(e^{i\theta})\right|^{p\cdot\frac{q}{p}} d\theta\right)^{p/q} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\right)^{\frac{q-p}{q}}}_{=1} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f_r(e^{i\theta})\right|^{q} d\theta\right)^{p/q}.
\end{aligned}$$

Följaktligen gäller för varje $r \in [0, 1[$ att

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f_r(e^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f_r(e^{i\theta})\right|^q d\theta\right)^{1/q},$$

som enligt Definition 1.18 precis motsvarar $\|f_r\|_{L^p} \leq \|f_r\|_{L^q}$. Detta resultat stämmer naturligtvis också för $p = q$. Nu följer för $1 \leq p \leq q \leq \infty$ att

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0\leq r<1} \|f_r\|_{L^p} \leq \sup_{0\leq r<1} \|f_r\|_{L^q} = \|f\|_{H^q}.$$

Alltså gäller olikheten $\|f\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^q}$ för varje $f \in H^q$. Detta medför sedan inklusionen $H^q \subseteq H^p$, eftersom om f tillhör H^q så tillhör f även H^p:

$$\begin{aligned}
\text{antag } f \in H^q \quad &\overset{\text{Def. 2.1}}{\Leftrightarrow} \quad \exists M \in \mathbb{R}_+ : \ \|f\|_{H^q} \leq M < \infty \\
&\Rightarrow \qquad\qquad\qquad\quad \|f\|_{H^p} \leq M < \infty \\
&\overset{\text{Def. 2.1}}{\Leftrightarrow} \quad f \in H^p.
\end{aligned}$$

□

Påstående. Om $1 \leq p \leq q \leq \infty$, så gäller för $f \in A^q$ att $\|f\|_{A^p} \leq \|f\|_{A^q}$. Speciellt gäller då att $A^q \subseteq A^p$.

Bevis. Låt $1 \leq p < q \leq \infty$ och antag att $f \in A^q$. På samma sätt och med samma exponenter som i förra beviset kan man använda Hölders olikhet på integralform, dvs. Sats 1.19 och formel (1.4), och få att

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f^p(z) \cdot 1| \, dA(z) \\
&\leq \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f^p(z)|^{q/p} \, dA(z)\right)^{\frac{1}{q/p}} \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} 1^{\frac{q}{q-p}} \, dA(z)\right)^{1/\frac{q}{q-p}} \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^{p \cdot \frac{q}{p}} \, dA(z)\right)^{p/q} \underbrace{\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} dA(z)\right)^{\frac{q-p}{q}}}_{=1, \text{ ty } \|1\|_{A^p}^p = 1} \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^q \, dA(z)\right)^{p/q},
\end{aligned}$$

varför

$$\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z)\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^q \, dA(z)\right)^{1/q}.$$

Enligt definitionen av Bergmanrum (Definition 2.3) är detta samma som $\|f\|_{A^p} \leq \|f\|_{A^q}$, som också gäller för $p = q$. I likhet med föregående bevis följer härav att $A^q \subseteq A^p$.

$\square$

Påstående. Om $0 < p < \infty$, så gäller för $f \in H^p$ att $\|f\|_{A^p} \leq \|f\|_{H^p}$. Speciellt gäller då att $H^p \subseteq A^p$.

Bevis. Tag $f \in H^p$. Emedan då

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0<r<1} M_p(r, f) < \infty,$$

är det klart att

$$M_p(r, f) \leq \|f\|_{H^p} < \infty$$

för varje $r \in]0, 1[$. Detta i sin tur implicerar

$$r M_p^p(r, f) \;\leq\; r\|f\|_{H^p}^p$$

och vidare

$$2\int_0^1 rM_p^p(r,f)\,dr \;\leq\; 2\int_0^1 r\|f\|_{H^p}^p\,dr,$$

vilket kan skrivas som

$$\|f\|_{A^p}^p \;\leq\; 2\,\|f\|_{H^p}^p \int_0^1 r\,dr$$

eller

$$\|f\|_{A^p}^p \;\leq\; \|f\|_{H^p}^p.$$

Alltså gäller för $f \in H^p$, $0 < p < \infty$, att $\|f\|_{A^p} \leq \|f\|_{H^p}$ och därav följer på samma sätt som tidigare att $H^p \subseteq A^p$.

□

Följande två satser anger en grundläggande egenskap hos Hardyrum respektive Bergmanrum för specialfallet $p = 2$.

Sats 2.6. *Antag att $f \in H^2(\mathbb{D})$ och låt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

vara funktionens Taylorutveckling på $\mathbb{D}$. Då gäller att

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Bevis. Låt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ och sätt

$$f_N(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n z^n,$$

där $N \in \mathbb{N}$. I enlighet med det som tidigare har konstaterats om potensseriers konvergens gäller för $0 < r < 1$ att $f_N(z) \to f(z)$, då $N \to \infty$, likformigt på kompakta delmängder av $\mathbb{D}$. För ett godtyckligt komplext tal $z = re^{i\theta}$ är

$$f_N(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{N} a_n r^n e^{in\theta}$$

och notera där att $a_n \in \mathbb{C}$, $r^n \in \mathbb{R}$ och $e^{in\theta} \in \mathbb{C}$. Genom att tillämpa räkneregler för komplexa tal och egenskaper hos ändliga summor fås att

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f_N(re^{i\theta})\right|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_N(re^{i\theta})\,\overline{f_N(re^{i\theta})}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{N} a_n r^n e^{in\theta}\right)\overline{\left(\sum_{m=0}^{N} a_m r^m e^{im\theta}\right)}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{N} a_n r^n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{m=0}^{N} \overline{a_m}\, r^m e^{-im\theta}\right)d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} a_n\,\overline{a_m}\,r^n r^m\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\,d\theta. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Integralen i uttrycket visar sig utgöra en ortonormalitetsrelation:

om $m = n$, så gäller att

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^0\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi-0}{2\pi} = 1$$

och om $m \neq n$, så gäller att

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\,d\theta &= \frac{1}{2\pi(n-m)i}\cdot\left[e^{i(n-m)\theta}\right]_0^{2\pi} = \frac{\left(e^{2\pi i}\right)^{n-m}-e^0}{2\pi(n-m)i} \\
&= \frac{1^{n-m}-1}{2\pi(n-m)i} = \frac{1-1}{2\pi(n-m)i} = 0.
\end{aligned}$$

Därmed försvinner varje term i summan i uttryck (2.6) för vilka $m \neq n$ och kvar blir

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f_N(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{N} a_n\,\overline{a_n}\,r^n r^n = \sum_{n=0}^{N}|a_n|^2 r^{2n}$$

som gäller för varje $r \in\,]0,1[$. På grund av den likformiga konvergensen hos funktionen f_N följer att

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{N\to\infty}\left|f_N(re^{i\theta})\right|^2 d\theta \\
&= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f_N(re^{i\theta})\right|^2 d\theta\right] \\
&= \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{N}|a_n|^2 r^{2n}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}.
\end{aligned}$$

Slutligen tillämpas definitionen av Hardyrum (Definition 2.1) för fallet $p = 2$. Enligt definitionen är integralen som alstrar normen uppåt begränsad och som redan tidigare påpekats ökar den med r, vilket innebär att integralens minsta övre begränsning (supremum) fås genom att ta gränsvärdet och låta r gå mot 1 från vänster. Således gäller för $f \in H^2(\mathbb{D})$ att

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^2}^2 &= \sup_{0<r<1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^2 d\theta \right] \\
&= \lim_{r\to 1^-} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^2 d\theta \right] \\
&= \lim_{r\to 1^-} \left[\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2,
\end{aligned}$$

eftersom $r^{2n} \to 1$ då $r \to 1^-$ för varje $n \in \mathbb{N}$. Med detta är satsens formel bevisad.

$\square$

Sats 2.7. *Antag att $f \in A^2(\mathbb{D})$ och låt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

vara funktionens Taylorutveckling på $\mathbb{D}$. Då gäller att

$$\|f\|_{A^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}.$$

Bevis. Denna formel för $f \in A^2(\mathbb{D})$ bevisas på liknande sätt som formeln i föregående sats. Låt igen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ och $f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, där $z = re^{i\theta}$ och $N \in \mathbb{N}$. Antag att $0 < \rho < 1$. Då gäller att $f_N(z)$ konvergerar likformigt mot $f(z)$, då $N \to \infty$, på den kompakta mängden $\overline{D} := \overline{D}(0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$.

I likhet med ovan följer av räkneregler för komplexa tal samt ortonormalitetsrelationen (uttrycket reduceras så att kvar blir igen endast termer för vilka $m = n$) att

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{\overline{D}} |f_N(z)|^2\, dA(z) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\rho \int_0^{2\pi} f_N(re^{i\theta})\, \overline{f_N(re^{i\theta})}\, r dr d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\rho \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{N} a_n r^n e^{in\theta}\right)\overline{\left(\sum_{m=0}^{N} a_m r^m e^{im\theta}\right)} r dr d\theta \\
&= 2\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} a_n\, \overline{a_m}\cdot \int_0^\rho r^{n+m+1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta\right) dr \\
&= 2\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 \cdot \int_0^\rho r^{2n+1}\, dr \\
&= 2\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 \cdot \left[\frac{r^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^\rho \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n|^2}{n+1}\, \rho^{2(n+1)}.
\end{aligned}
$$

Den likformiga konvergensen hos funktionen f_N på $\overline{D}$ medför då $N \to \infty$ att

$$
\frac{1}{\pi}\int_{\overline{D}} |f(z)|^2\, dA(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}\, \rho^{2(n+1)},
$$

och genom att låta $\rho \to 1^-$ erhålls

$$
\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2\, dA(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}.
$$

Sätt $p = 2$ i definitionen av Bergmanrum (Definition 2.3) och den erhållna likheten kan uttryckas som

$$
\|f\|_{A^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1},
$$

som är den eftersökta identiteten.

$\square$

Tack vare formlerna i föregående satser är det också möjligt att studera funktioner i $H^2(\mathbb{D})$ och $A^2(\mathbb{D})$ enbart utifrån deras potensseriekoefficienter. Teorin kring Hardy- och Bergmanrum är mer komplicerad för $p \neq 2$, bl.a. eftersom det i detta fall inte finns motsvarande formler.

2.2 Blaschkeprodukt

Blaschkeprodukten uppträder inom komplex analys och är en begränsad analytisk funktion på enhetscirkelskivan som är konstruerad utifrån en ändlig eller oändlig följd av nollställen. Denna funktion med många värdefulla egenskaper är relaterad till Hardyrum men kan dessvärre inte användas på motsvarande sätt för Bergmanrum. Avsnittet baseras på källorna [3], [4], [5] och [13].

Lemma 2.8. *Låt $z_n \in \mathbb{C}$, där $n = 1, ..., N$. Då gäller att*

$$\left| \prod_{n=1}^{N} (1 + z_n) - 1 \right| \leq \prod_{n=1}^{N} (1 + |z_n|) - 1$$

för varje $N \in \mathbb{Z}_+$.

Bevis. Hjälpsatsen bevisas med induktion. Notera först att

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{k+1} (1 + z_n) - 1 &= \prod_{n=1}^{k} (1 + z_n)(1 + z_{k+1}) - 1 \\
&= \prod_{n=1}^{k} (1 + z_n) + z_{k+1} \prod_{n=1}^{k} (1 + z_n) - 1 - z_{k+1} + z_{k+1} \\
&= \left(\prod_{n=1}^{k} (1 + z_n) - 1 \right) + z_{k+1} \left(\prod_{n=1}^{k} (1 + z_n) - 1 \right) + z_{k+1} \\
&= (1 + z_{k+1}) \left(\prod_{n=1}^{k} (1 + z_n) - 1 \right) + z_{k+1} \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

för $k \in \mathbb{Z}_+$. Det är uppenbart att olikheten gäller för enklast möjliga fall $N = 1$. Antag att påståendet gäller för $N = k$. Med hjälp av uttryck (2.11), den välkända triangelolikheten samt induktionsantagandet bevisas att påståendet även gäller för nästa fall $N = k + 1$:

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{n=1}^{k+1} (1 + z_n) - 1 \right| &= \left| (1 + z_{k+1}) \left(\prod_{n=1}^{k} (1 + z_n) - 1 \right) + z_{k+1} \right| \\
&\leq |1 + z_{k+1}| \left| \prod_{n=1}^{k} (1 + z_n) - 1 \right| + |z_{k+1}| \\
&\leq (1 + |z_{k+1}|) \left(\prod_{n=1}^{k} (1 + |z_n|) - 1 \right) + |z_{k+1}|
\end{aligned}$$

$$= \prod_{n=1}^{k+1}(1+|z_n|) - 1.$$

Med andra ord gäller olikheten för varje $N \in \mathbb{Z}_+$.

$\square$

Sats 2.9. *Låt* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *och antag att* $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$ *konvergerar likformigt på kompakta mängder i* $\mathbb{D}$*. Då gäller att*

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} f_n(z)$$

konvergerar likformigt på kompakta mängder i $\mathbb{D}$*. Vidare är nollställena till* f *lika med unionen av nollställena till alla* f_n *beräknade med multiplicitet.*

Bevis. Låt K vara en godtycklig kompakt delmängd av $\mathbb{D}$. Man kan anta att $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$, där $0 < r < 1$. Notera att med triangelolikheten fås att

$$|x| = |1 + (x-1)| \leq 1 + |x-1| = 1 + |1-x|$$

för varje x, varför oberoende av N gäller att

$$\begin{aligned}\left|\prod_{n=1}^{N} f_n(z)\right| &= \prod_{n=1}^{N} |f_n(z)| \leq \prod_{n=1}^{N}(1 + |1 - f_n(z)|) \\ &\leq \prod_{n=1}^{N} e^{|1-f_n(z)|} = e^{\sum_{n=1}^{N} |1-f_n(z)|} \\ &\leq C < \infty\end{aligned}$$

för $z \in K$. I uppskattningen har man också använt att $1 + x \leq e^x$ för varje x samt antagandet att $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$ konvergerar likformigt på K. Låt $N > M$. Lemma 2.8 ($f_n(z) = 1 + z_n$, dvs. sätt $z_n = f_n(z) - 1$) och den nyssgjorda uppskattningen medför att

$$\begin{aligned}\left|\prod_{n=1}^{N} f_n(z) - \prod_{n=1}^{M} f_n(z)\right| &= \left|\prod_{n=1}^{M} f_n(z)\right|\left|\prod_{n=M+1}^{N} f_n(z) - 1\right| \\ &\leq C\left(\prod_{n=M+1}^{N}(1 + |f_n(z) - 1|) - 1\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C\left(\prod_{n=M+1}^{N}(1+|1-f_n(z)|)-1\right)\\
&\leq C\left(e^{\sum_{n=M+1}^{N}|1-f_n(z)|}-1\right),
\end{aligned}
$$

som konvergerar mot 0 likformigt på K, då $N > M \to \infty$. Alltså konvergerar produktfunktionen $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ likformigt på K.

Vidare till det andra påståendet. Satsens antagande implicerar att på kompakta mängder i $\mathbb{D}$ är

$$
\sum_{n=M+1}^{\infty} |1 - f_n(z)| < \frac{1}{2}
$$

om M är tillräckligt stort, vilket betyder att för varje $z \in \mathbb{D}$ finns det en omgivning av z där högst ett ändligt antal av funktionerna f_n har nollställen. Det är klart att

$$
f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=1}^{M} f_n(z) \prod_{n=M+1}^{\infty} f_n(z).
$$

Med resultaten ovan samt att $\sum_{n=M+1}^{N} |1 - f_n(z)| \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$ för $N > M$ erhålls att

$$
\left|\prod_{n=M+1}^{N} f_n(z) - 1\right| \leq e^{\sum_{n=M+1}^{N}|1-f_n(z)|} - 1 \leq e^{\frac{1}{2}} - 1 < 1,
$$

dvs. produkten $\prod_{n=M+1}^{N} f_n(z)$ (eller de enskilda funktionerna f_n för $n = M + 1, ..., N$) kan inte ha nollställen i närheten av z. Låt $N \to \infty$ och produkten $\prod_{n=M+1}^{\infty} f_n(z)$ saknar nollställen nära z.

$\square$

Definition 2.10. En oändlig *Blaschkeprodukt* är en funktion av formen

$$
B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z},
$$

där $z_n \in \mathbb{C}$ och $0 < |z_n| < 1$ för varje $n \in \mathbb{Z}_+$.

I definitionen kan talen z_n betraktas som en oändlig följd $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ på $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. En Blaschkeprodukt består av *Blaschkefaktorer*. För $z_n \in \mathbb{D}$ definieras en Blaschkefaktor som funktionen

$$b_n(z) = \begin{cases} \dfrac{|z_n|}{z_n} \dfrac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z} & \text{om } z_n \neq 0, \\ z & \text{om } z_n = 0. \end{cases}$$

I följande sats betecknar B den ovandefinierade Blaschkeprodukten och B^* den motsvarande utvidgade funktionen.

Sats 2.11. *Låt $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \subseteq \mathbb{D} \setminus \{0\}$ vara en följd sådan att $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty$. Då gäller att $B \in H^\infty$ och $|B(z)| < 1$ för alla $z \in \mathbb{D}$, dvs. $\|B\|_{H^\infty} \leq 1$. Vidare gäller att $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ nästan överallt, varför $\|B\|_{H^\infty} = 1$.*

Bevis. Antag att $z_n \in \mathbb{D}$ och $z_n \neq 0$, dvs. $0 < |z_n| < 1$, för varje $n \in \mathbb{Z}_+$. Med hjälp av komplexa räkneregler och triangelolikheten fås att

$$\begin{aligned}
\left| 1 - \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z} \right| &= \left| \frac{z_n(1 - \overline{z_n} z) - |z_n|(z_n - z)}{z_n(1 - \overline{z_n} z)} \right| \\
&= \left| \frac{z_n - |z_n|^2 z - |z_n| z_n + |z_n| z}{z_n(1 - \overline{z_n} z)} \right| \\
&= \left| \frac{z_n(1 - |z_n|) + |z_n| z(1 - |z_n|)}{z_n(1 - \overline{z_n} z)} \right| \\
&= \left| \frac{(z_n + |z_n| z)(1 - |z_n|)}{z_n(1 - \overline{z_n} z)} \right| \\
&= \frac{\big|z_n + |z_n| z\big| \big|1 - |z_n|\big|}{|z_n||1 - \overline{z_n} z|} \\
&\leq \frac{(|z_n| + |z_n||z|)(1 - |z_n|)}{|z_n||1 - \overline{z_n} z|} \\
&\leq \frac{(1 + |z|)(1 - |z_n|)}{1 - |\overline{z_n}||z|} \\
&\leq \frac{(1 + |z|)(1 - |z_n|)}{1 - |z|} \\
&\leq \frac{1 + r}{1 - r}(1 - |z_n|)
\end{aligned}$$

för $|z| \leq r < 1$. Satsens antagande ger att

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)| := \sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z} \right| \leq \frac{1 + r}{1 - r} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty$$

som därmed konvergerar likformigt på kompakta mängder i $\mathbb{D}$ (och $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \subseteq \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$), varpå Sats 2.9 ger att Blaschkeprodukten

$$B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n-z}{1-\overline{z_n}z}$$

konvergerar likformigt på kompakta mängder i $\mathbb{D}$. Således gäller att $B\in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ (se [3, s. 151, Theorem 2.1]). Emedan varje faktor i Blaschkeprodukten B har absolutbelopp mindre än 1 på $\mathbb{D}$, så följer att $|B(z)|<1$ för alla $z\in\mathbb{D}$. Speciellt fås att $B\in H^\infty$, så Blaschkeproduktens radiella gränsvärden $B^*(e^{i\theta})$ existerar nästan överallt i $\partial\mathbb{D}$ och $|B^*(e^{i\theta})|\leq 1$ för nästan alla $\theta\in[0,2\pi[$.

Låt B_N beteckna produktfunktionen bestående av de N första faktorerna i Blaschkeprodukten, dvs.

$$B_N(z)=\prod_{n=1}^{N}\frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n-z}{1-\overline{z_n}z}.$$

Funktionen B_N är kontinuerlig på $\overline{\mathbb{D}}$ och $|B_N(e^{i\theta})|=1$ för alla $\theta\in[0,2\pi[$, ty den ändliga Blaschkeprodukten är definierad på enhetscirkelskivans rand $\partial\mathbb{D}$. Även den oändliga produktfunktionen B/B_N utgör en Blaschkeprodukt och $B/B_N\in H^\infty$. Eftersom B/B_N är analytisk på $|z|\leq r$, så följer enligt *Cauchys medelvärdessats* (se [6, s. 102, Sats 7.6]) att

$$\left|\frac{B(0)}{B_N(0)}\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{B(re^{i\theta})}{B_N(re^{i\theta})}\,d\theta\right|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|B(re^{i\theta})\right|}{\left|B_N(re^{i\theta})\right|}\,d\theta$$

som gäller för varje $r\in\,]0,1[$, varför det radiella gränsvärdet ger att

$$\begin{aligned}\left|\frac{B(0)}{B_N(0)}\right|&\leq\lim_{r\to1^-}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|B(re^{i\theta})\right|}{\left|B_N(re^{i\theta})\right|}\,d\theta\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|B^*(e^{i\theta})\right|}{\left|B_N(e^{i\theta})\right|}\,d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|B^*(e^{i\theta})\right|d\theta\\&\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\\&=1.\end{aligned}$$

Låt $N\to\infty$ så att $|B_N(0)|\to|B(0)|$, vilket ger att likhet måste gälla ovan och

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|B^*(e^{i\theta})\right|d\theta=1.$$

Följaktligen är $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ för nästan alla $\theta \in [0, 2\pi[$.

$\square$

Sats 2.12. (G. Szegő) *Låt $f \in H^p$, där $p \geq 1$, och $f \not\equiv 0$. Då har funktionen f ett numrerbart antal nollställen som ges av följden $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ och som uppfyller Blaschkevillkoret*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|) < \infty.$$

Bevis. Se [5, s. 18, Theorem 2.3].

Nu finns det tillräckligt med bakgrundsfakta för att framlägga en eftertraktad och nödvändig faktoriseringssats. Det är den redan nämnde F. Riesz som har tagit fram ett klassiskt resultat där funktioner tillhörande Hardyrum kan delas upp i två faktorer, varav den ena är en Blaschkeprodukt bestående av alla ifrågavarande funktionens nollställen. Den andra faktorn är en funktion som därmed saknar nollställen och som även visar sig ha andra nyttiga egenskaper. Tack vare denna sats kan många problem i $H^p(\mathbb{D})$-rum förenklas och överföras till det mer fördelaktiga rummet $H^2(\mathbb{D})$. Satsen kommer att tillämpas i beviset av den isoperimetriska olikheten. Vid tidpunkten för T. Carlemans ursprungliga bevis var F. Riesz sats endast känd för ändliga Blaschkeprodukter, vilket är orsaken till hans överflödiga antagande om en slät kurva.

Sats 2.13. (F. Riesz) *Låt $f \in H^p$, $1 \leq p < \infty$, vara sådan att $f \not\equiv 0$ och låt B vara Blaschkeprodukten svarande mot nollställena $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ till funktionen f. Då gäller att $f(z) = B(z)g(z)$, där $g \in H^p$ är en icke-försvinnande funktion på $\mathbb{D}$ med egenskapen $\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$.*

Bevis. Man kan anta att funktionen f har oändligt många nollställen, eftersom i annat fall är satsen och beviset ointressant. Låt

$$g(z) = \frac{f(z)}{B(z)} \qquad \text{och} \qquad g_N(z) = \frac{f(z)}{B_N(z)},$$

där B_N är Blaschkeprodukten svarande mot de N första nollställena till f. Det är klart att $|g(z)| \geq |f(z)|$ för alla $z \in \mathbb{D}$, ty $|B(z)| \leq 1$ för alla $z \in \mathbb{D}$, vilket ger att $\|g\|_{H^p} \geq \|f\|_{H^p}$.

Å andra sidan, eftersom $|B_N(e^{i\theta})| = 1$ för alla $\theta \in [0, 2\pi[$ så gäller för fixerat $N \in \mathbb{Z}_+$ och $\epsilon > 0$ att

$$\left|B_N(e^{i\theta})\right| > 1 - \epsilon$$

då $|z|$ är tillräckligt nära 1. Följaktligen gäller för $r \in]0, 1[$ att

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|g_N(re^{i\theta})\right|^p d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{f(re^{i\theta})}{B_N(re^{i\theta})}\right|^p d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1-\epsilon)^{-p}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta \\
&\leq (1-\epsilon)^{-p} \cdot \sup_{0<r<1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right] \\
&= (1-\epsilon)^{-p}\, \|f\|_{H^p}^p.
\end{aligned}$$

Låt $\epsilon \to 0$ och kvar blir

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|g_N(re^{i\theta})\right|^p d\theta \;\leq\; \|f\|_{H^p}^p$$

som gäller för varje $r \in]0, 1[$ och alla $N \in \mathbb{Z}_+$. Emedan $g_N(z) \to g(z)$, då $N \to \infty$, likformigt på kompakta delmängder av $\mathbb{D}$ och $|g_N(z)| \leq |g_{N+1}(z)|$ för alla $N \in \mathbb{Z}_+$ och varje $z \in \mathbb{D}$, ger den *monotona konvergenssatsen* (se [9, s. 21, Lebesgue's Monotone Convergence Theorem 1.26]) att

$$\begin{aligned}
\|g\|_{H^p}^p &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|g(re^{i\theta})\right|^p d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{N\to\infty} \left|g_N(re^{i\theta})\right|^p d\theta \\
&= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|g_N(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right] \\
&\leq \|f\|_{H^p}^p
\end{aligned}$$

för varje $r \in]0, 1[$, varför $\|g\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^p}$. Detta i kombination med den redan erhållna olikheten $\|g\|_{H^p} \geq \|f\|_{H^p}$ ger att $\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$ och satsen är bevisad.

$\square$

Kapitel 3

Den isoperimetriska olikheten

I detta kapitel behandlas den isoperimetriska olikheten, vars bevis grundar sig på ett resultat av G. H. Hardy och J. E. Littlewood. Inledningsvis bevisas denna sats genom ett standard bevisföringssätt för Hardyrum där man först bevisar specialfallet $p = 2$ med vars hjälp man sedan kan bevisa det allmänna fallet. Innehållet i kapitlet baseras på Dragan Vukotićs [13] artikel.

Sats 3.1. (Hardy-Littlewoods sats) *För $0 < p < \infty$ gäller att varje funktion f som tillhör $H^p(\mathbb{D})$ tillhör även $A^{2p}(\mathbb{D})$, dvs. $H^p \subseteq A^{2p}$, samt satisfierar olikheten $\|f\|_{A^{2p}} \leq \|f\|_{H^p}$. Likheten gäller om och endast om f kan skrivas i formen*

$$f(z) = \left(\frac{c}{1 - \lambda z}\right)^{2/p},$$

där $|\lambda| < 1$ och $c \in \mathbb{C}$.

Bevis. Till en början betraktas fallet $p = 2$. Låt $f \in H^2 \subseteq A^2$ enligt Anmärkning 2.5. Olikheten som då ska bevisas är $\|f\|_{A^4} \leq \|f\|_{H^2}$. Med hjälp av definitionen av Bergmanrum (Definition 2.3) samt räkneregel för komplexvärda funktioner kan uttrycket $\|f\|_{A^4}^4$ omskrivas till $\|f^2\|_{A^2}^2$:

$$\|f\|_{A^4}^4 = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^4 \, dA(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \left|f^2(z)\right|^2 dA(z) = \|f^2\|_{A^2}^2.$$

Eftersom funktioner tillhörande funktionsrummet A^2 är komplexvärda analytiska funktioner på den öppna origocentrerade enhetscirkelskivan $\mathbb{D}$, har f (och f^2) en potensserieutveckling kring origo enligt Sats 1.6 och Anmärkning 1.7. Med andra ord kan funktionen för varje $z \in \mathbb{D}$ uttryckas som $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, där

$a_n \in \mathbb{C}$. Därefter kan Cauchyprodukten (Lemma 1.8) av två oändliga potensserier tillämpas och då fås att

$$\begin{aligned} \|f\|_{A^4}^4 = \|f^2\|_{A^2}^2 = \|f \cdot f\|_{A^2}^2 \\ = \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \right\|_{A^2}^2 \\ = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right) z^n \right\|_{A^2}^2 . \end{aligned}$$

Sats 2.7 ger att A^2-normen i kvadrat kan omskrivas i enlighet med $\|\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i\|_{A^2}^2$ $= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|a_i|^2}{i+1}$. Genom att jämföra det senaste uttrycket med vänsterledet i formeln ses att den inre summan $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ motsvarar koefficienten a_i. Därav följer av formeln likheten

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right) z^n \right\|_{A^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right|^2 .$$

Till följande kan faktorn $\frac{1}{n+1}$ flyttas in i absolutbeloppet och summan, varefter Cauchy-Schwarz olikhet för komplexa tal (Lemma 1.10) går att tillämpa på varje term i den oändliga summan. Notera där att $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \in \mathbb{R}$, så i lemmat är $\overline{b_i} = b_i$ enligt komplex räkneregel. Alltså fås att

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k a_{n-k}|^2 \right) \left(\sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right|^2 \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k a_{n-k}|^2 \right) \left(\left| \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right|^2 \sum_{k=0}^{n} 1 \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k a_{n-k}|^2 \right) \left(\frac{1}{n+1} \cdot (\underbrace{1+1+...+1}_{n+1 \text{ st.}}) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k a_{n-k}|^2 \right) \left(\frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 |a_{n-k}|^2 . \end{aligned}$$

Det återstår att göra det omvända till proceduren ovan. Cauchyprodukten av två absolutkonvergenta oändliga serier (Anmärkning 1.9) tillsammans med Sats 2.6 ger att

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2|a_{n-k}|^2 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\right)\\ &= \|f\|_{H^2}^2\cdot\|f\|_{H^2}^2\\ &= \|f\|_{H^2}^4.\end{aligned}$$

Sammantaget är det klart att $\|f\|_{A^4}^4 \le \|f\|_{H^2}^4$, varav följer den eftersökta olikheten $\|f\|_{A^4} \le \|f\|_{H^2}$ som gäller för varje $f \in H^2$. På samma sätt som tidigare medför detta i sin tur att $H^2 \subseteq A^4$. Med andra ord gäller inklusionen $H^p \subseteq A^{2p}$ för fallet $p = 2$.

När gäller likheten $\|f\|_{A^4}^4 = \|f\|_{H^2}^4$, dvs. $\|f\|_{A^4} = \|f\|_{H^2}$? I uträkningarna ovan gjordes uppskattningen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}a_k a_{n-k}\right|^2 \le \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}|a_k a_{n-k}|^2,$$

eller närmare bestämt en kedja av olikheter av formen

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_k a_{n-k}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right|^2 \le \left(\sum_{k=0}^{n}\left|a_k a_{n-k}\right|^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right|^2\right) \tag{3.4}$$

för varje $n \in \mathbb{N}$, vars likhet nu bör kontrolleras. Den förstnämnda olikheten kan förtydligas med parenteser till

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}a_k a_{n-k}\right|^2\right) \le \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k a_{n-k}|^2\right),$$

och då är det lätt att inse att vänster och höger led i olikheten är lika med varandra om de oändliga summornas motsvarande termer är lika med varandra. Likhet gäller trivialt för termerna svarande mot $n = 0$ och $n = 1$:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{0}a_k a_{0-k}\right|^2 &= |a_0 a_0|^2 = \sum_{k=0}^{0}|a_k a_{0-k}|^2,\\ \frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{1}a_k a_{1-k}\right|^2 &= \frac{1}{2}\left|a_0 a_1 + a_1 a_0\right|^2 = \frac{1}{2}\left|2a_0 a_1\right|^2 = 2\left|a_0 a_1\right|^2\end{aligned}$$

$$= |a_0 a_1|^2 + |a_1 a_0|^2 = \sum_{k=0}^{1} |a_k a_{1-k}|^2.$$

För övriga n kan konstateras att enligt Cauchy-Schwarz olikhet för komplexa tal (Lemma 1.10) gäller likhet i (3.4) om och endast om $a_k a_{n-k}$ och $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ är linjärt beroende för $k = 0, 1, ..., n$, dvs. då

$$a_k a_{n-k} = \frac{C_n}{\sqrt{n+1}}, \tag{3.6}$$

där C_n är en konstant som beror av n. Eftersom detta samband ska gälla för varje $k = 0, 1, ..., n$, så fås följande kedja av likheter

$$a_0 a_n = a_1 a_{n-1} = ... = \frac{C_n}{\sqrt{n+1}} \tag{3.7}$$

för alla n. Betrakta vidare ekvation (3.6). Om $k = 0$ och $n = 2m$, så följer att $a_0 a_{2m} = \frac{C_{2m}}{\sqrt{2m+1}}$, liksom $k = m$ och $n = 2m$ ger att $a_m a_m = \frac{C_{2m}}{\sqrt{2m+1}}$. Dessa i kombination ger sambandet $a_0 a_{2m} = a_m^2$ för $m \in \mathbb{N}$. Om då $a_0 = 0$, så är också $a_m = \pm\sqrt{a_0 a_{2m}} = 0$ för varje $m = 1, 2, ...$. Det i sin tur medför att $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$ för varje $z \in \mathbb{D}$, dvs. $f \equiv 0$, som är ett ointressant fall och därför kan antas i följande steg att $a_0 \neq 0$. Låt beteckna $\lambda = \frac{a_1}{a_0}$. Från likhetskedjan (3.7) följer att

$$a_n = \frac{a_1}{a_0} a_{n-1} = \lambda a_{n-1}$$

för varje $n = 1, 2, ...$. Genom iteration erhålls

$$\begin{aligned}
a_n &= \lambda a_{n-1} \\
a_{n-1} &= \lambda a_{(n-1)-1} = \lambda a_{n-2} \\
a_{n-2} &= \lambda a_{n-3} \\
&\vdots \\
a_2 &= \lambda a_1 \\
a_1 &= \lambda a_0
\end{aligned}$$

som sammanslaget blir $a_n = \lambda a_{n-1} = \lambda^2 a_{n-2} = \lambda^3 a_{n-3} = ... = \lambda^{n-1} a_1 = \lambda^n a_0$, varför $a_n = \lambda^n a_0$ för $n \in \mathbb{N}$. Slutligen kan konstateras att den ifrågavarande funktionen svarande mot specialfallet $p = 2$ antar formen

$$f(z) = \frac{a_0}{1 - \lambda z} \tag{3.9}$$

då $|\lambda| < 1$ och $a_0 \in \mathbb{C}$, eftersom insättning i funktionens Taylorutveckling ger

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 (\lambda z)^n = \frac{a_0}{1 - \lambda z}.$$

Den sista likheten i beräkningen ovan följer av att det är fråga om en geometrisk serie (med förstatermen a_0 och kvoten λz) som konvergerar om $|\lambda z| = |\lambda||z| < 1$. För varje $z \in \mathbb{D}$ gäller att $|z| < 1$ enligt Definition 1.3, varför konvergensvillkoret för den geometriska serien kan förenklas till $|\lambda| < 1$. Likheten $\|f\|_{A^4} = \|f\|_{H^2}$ implicerar alltså funktionsuttrycket (3.9), vilket stämmer överens med satsens påstående för $p = 2$.

Den omvända implikationen för $p = 2$ bör ännu bevisas. Antag att

$$f(z) = \frac{c}{1 - \lambda z},$$

där konstanterna c och λ är komplexa samt $|\lambda| < 1$. Funktionsuttrycket motsvarar summan av en konvergent, ty $|\lambda z| < |\lambda| < 1$ i enlighet med ovan, geometrisk serie (med förstatermen c och kvoten λz), så uttrycket kan vidare omskrivas till

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c(\lambda z)^n$$

för $z \in \mathbb{D}$. Med hjälp av Cauchyprodukten (Lemma 1.8) och i likhet med tidigare beräkningar kan ett uttryck för funktionen f^2 bildas:

$$\begin{aligned}
f^2(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} c\lambda^n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c\lambda^n z^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c\lambda^k c\lambda^{n-k} \right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(c^2 \lambda^n \sum_{k=0}^{n} 1 \right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c^2 (n+1) \lambda^n z^n.
\end{aligned}$$

Genom att på funktionerna ovan tillämpa tidigare resultat, formlerna i Sats 2.6 och Sats 2.7, komplexa räkneregler (notera att $|\lambda^n| = |\lambda|^n$ för $n \in \mathbb{N}$) samt summan av en konvergent geometrisk serie erhålls

$$\|f\|_{H^2}^4 = \left(\|f\|_{H^2}^2\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c\lambda^n|^2\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c|^2|\lambda|^{2n}\right)^2 = \left(\frac{|c|^2}{1-|\lambda|^2}\right)^2 \tag{3.11}$$

då $|\lambda| < 1$, och

$$\begin{aligned}\|f\|_{A^4}^4 = \|f^2\|_{A^2}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c^2(n+1)\lambda^n|^2}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c|^4(n+1)^2|\lambda|^{2n}}{n+1} \\ &= |c|^4 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|\lambda|^{2n}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Allmänt gäller till följd av derivering att

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2\right)^{n+1}\right) = 2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}$$

och å andra sidan ger igen summan av en konvergent geometrisk serie att

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^2 \cdot \left(x^2\right)^n = \frac{x^2}{1-x^2}$$

då $|x| < 1$, varför

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) = \frac{2x(1-x^2) - x^2(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

Sätt $x = |\lambda|$ och för $|\lambda| < 1$ och $\lambda \neq 0$ gäller då att

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|\lambda|^{2n} = \frac{1}{\left(1-|\lambda|^2\right)^2}.$$

Med hjälp av detta kan sambandet mellan uttrycken (3.11) och (3.12) visas, nämligen

$$\|f\|_{A^4}^4 = |c|^4\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|\lambda|^{2n} = |c|^4 \cdot \frac{1}{\left(1-|\lambda|^2\right)^2} = \left(\frac{|c|^2}{1-|\lambda|^2}\right)^2 = \|f\|_{H^2}^4.$$

Följaktligen erhålls den eftersökta likheten $\|f\|_{A^4} = \|f\|_{H^2}$. Om $\lambda = 0$, så fås den konstanta funktionen $f(z) = c$, $c \in \mathbb{C}$, för vilken likheten $\|f\|_{A^4} = \|f\|_{H^2}$ gäller trivialt. Därmed är satsens påstående om likhet för fallet $p = 2$ avklarat.

Nu finns verktygen för att bevisa påståendet $\|f\|_{A^{2p}} \leq \|f\|_{H^p}$ för godtyckligt p. Låt $f \in H^p$, $0 < p < \infty$, och antag till en början att funktionen är icke-försvinnande på $\mathbb{D}$, dvs. $f(z) \neq 0$ för varje $z \in \mathbb{D}$. Då kan man betrakta en entydig analytisk gren (huvudgrenen) av funktionen $f^{\frac{p}{2}}$. Definitionen av Hardyrum (Definition 2.1) ger normsambandet

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^p}^{p/2} = \left(\|f\|_{H^p}^p\right)^{1/2} &= \left(\sup_{0<r<1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right]\right)^{1/2} \\
&= \sup_{0<r<1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^{2p/2} d\theta\right]^{1/2} \\
&= \sup_{0<r<1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^{\frac{p}{2}}(re^{i\theta})\right|^{2} d\theta\right]^{1/2} \\
&= \left\|f^{\frac{p}{2}}\right\|_{H^2},
\end{aligned}$$

och därav vet man också att $f^{\frac{p}{2}} \in H^2$. På motsvarande sätt visas för Bergmanrum (Definition 2.3) att

$$\begin{aligned}
\|f\|_{A^{2p}}^{p/2} = \|f\|_{A^{2p}}^{2p/4} &= \left(\|f\|_{A^{2p}}^{2p}\right)^{1/4} \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^{2p}\,dA(z)\right)^{1/4} \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^{4p/2}\,dA(z)\right)^{1/4} \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}|f^{\frac{p}{2}}(z)|^{4}\,dA(z)\right)^{1/4} \\
&= \left\|f^{\frac{p}{2}}\right\|_{A^4}.
\end{aligned}$$

Tidigare i beviset konstaterades att $\|f\|_{A^4} \leq \|f\|_{H^2}$ för varje $f \in H^2$, varför

$$\|f\|_{A^{2p}}^{p/2} = \left\|f^{\frac{p}{2}}\right\|_{A^4} \leq \left\|f^{\frac{p}{2}}\right\|_{H^2} = \|f\|_{H^p}^{p/2}. \tag{3.15}$$

Således gäller olikheten $\|f\|_{A^{2p}} \leq \|f\|_{H^p}$ för alla funktioner $f \in H^p$ som saknar nollställen. Tidigare i beviset konstaterades också att likheten $\|f\|_{A^4} = \|f\|_{H^2}$ gäller om och endast om $f(z) = \frac{c}{1-\lambda z}$, där $c \in \mathbb{C}$. Härur följer att likhet inträffar i (3.15) då $f^{\frac{p}{2}}(z) = \frac{c}{1-\lambda z}$, vilket i sin tur medför att $\|f\|_{A^{2p}} = \|f\|_{H^p}$ om och endast om

$$f(z) = \left(\frac{c}{1-\lambda z}\right)^{2/p}.$$

Notera att detta är en funktion som saknar nollställen, förutsatt att $c \neq 0$.

Slutligen, låt igen $f \in H^p$, $0 < p < \infty$, men antag nu att funktionen har nollställen på $\mathbb{D}$, dvs. $f(z) = 0$ åtminstone i en punkt $z \in \mathbb{D}$. Antag också att $f \not\equiv 0$. Enligt F. Riesz sats (Sats 2.13) kan funktionen då faktoriseras i formen $f(z) = B(z)g(z)$, där B är Blaschkeprodukten som har samma nollställen som funktionen f och $g \in H^p$ är en funktion som saknar nollställen på $\mathbb{D}$, dvs. $g(z) \neq 0$ för varje $z \in \mathbb{D}$. Vidare gäller enligt samma sats att $\|f\|_{H^p} = \|g\|_{H^p}$. Med stöd av Sats 2.11 vet man att Blaschkeprodukten har egenskapen $|B(z)| < 1$ för varje $z \in \mathbb{D}$ och att $B \in H^\infty$. Från definitionen av Bergmanrum (Definition 2.3) följer att

$$\begin{aligned}
\|Bg\|_{A^{2p}} &= \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |B(z)g(z)|^{2p}\, dA(z)\right)^{1/2p} \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \big(|B(z)||g(z)|\big)^{2p}\, dA(z)\right)^{1/2p} \\
&\leq \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |g(z)|^{2p}\, dA(z)\right)^{1/2p} \\
&= \|g\|_{A^{2p}}.
\end{aligned}$$

Följaktligen fås att

$$\frac{\|f\|_{A^{2p}}}{\|f\|_{H^p}} = \frac{\|Bg\|_{A^{2p}}}{\|g\|_{H^p}} \leq \frac{\|g\|_{A^{2p}}}{\|g\|_{H^p}} \leq 1, \tag{3.17}$$

där den senare olikheten följer utifrån det som konstaterades på föregående sida: för varje funktion $g \in H^p$ som saknar nollställen gäller att $\|g\|_{A^{2p}} \leq \|g\|_{H^p}$. Ekvation (3.17) ger att $\|f\|_{A^{2p}} < \|f\|_{H^p}$ för alla funktioner $f \in H^p$ som har nollställen. Det är strikt olikhet på grund av att det på föregående sida konstaterades att likhet gäller om och endast om funktionen saknar nollställen (och antar den givna formen) och därför kan inte likhet gälla i detta fall. Härmed står det klart att för $0 < p < \infty$ gäller olikheten $\|f\|_{A^{2p}} \leq \|f\|_{H^p}$ för varje funktion $f \in H^p$. Detta implicerar satsens första påstående; $H^p \subseteq A^{2p}$ för godtyckligt p, och satsen är bevisad.

$\square$

Då Hardy-Littlewoods sats är fulländad kan man äntligen formulera och elegant bevisa den isoperimetriska olikheten.

Sats 3.2. (Den isoperimetriska olikheten) *Antag att Ω är ett Jordanområde med arean $A(\Omega)$ som begränsas av en rektifierbar kurva $\partial\Omega$ vars längd är $L(\partial\Omega)$. Då gäller att*

$$A(\Omega) \leq \frac{L(\partial\Omega)^2}{4\pi},$$

där likhet inträffar om och endast om Ω är en cirkelskiva.

Bevis. Antag att Ω är en öppen, äkta och enkelt sammanhängande delmängd av det komplexa talplanet $\mathbb{C}$. Till följd av Riemanns avbildningssats (Sats 1.12) existerar det då en konform avbildning $f^{-1} =: F : \mathbb{D} \to \Omega$. Eftersom Ω är ett Jordanområde som begränsas av Jordankurvan $\partial\Omega$ kan avbildningen enligt Carathéodory (Sats 1.16) kontinuerligt utvidgas till att gälla även randen; $F : \partial\mathbb{D} \to \partial\Omega$. Då gäller att

$$\begin{aligned} L(\partial\Omega) &= L(F(\partial\mathbb{D})) \\ &= L(F(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\})) \\ &= \lim_{r \to 1^-} L(F(\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\})). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ett uttryck för längden av cirkelavbildningen fås genom att sätta $u = F(re^{i\theta})$ och sedan derivera med avseende på θ:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(F(re^{i\theta})) = F'(re^{i\theta}) \cdot re^{i\theta} \cdot i.$$

Därmed är $du = F'(re^{i\theta})rie^{i\theta}d\theta$ och eftersom båglängden av en reguljär kurva Γ ges av $\int_\Gamma |du|$, så följer att

$$\begin{aligned} L(F(\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\})) &= \int_0^{2\pi} \left|F'(re^{i\theta})rie^{i\theta}d\theta\right| \\ &= \int_0^{2\pi} \left|F'(re^{i\theta})\right||r|\underbrace{|i|}_{=1}\underbrace{\left|e^{i\theta}\right|}_{=1}|d\theta| \\ &= r\int_0^{2\pi} \left|F'(re^{i\theta})\right| d\theta. \end{aligned}$$

Således kan längden av randen av Ω, ekvation (3.18), enligt Lemma 1.17 uttryckas som

$$L(\partial\Omega) = \lim_{r \to 1^-} r\int_0^{2\pi} \left|F'(re^{i\theta})\right| d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \lim_{r \to 1^-} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| F'(re^{i\theta}) \right| d\theta \right] \\
&= 2\pi \sup_{0<r<1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| F'(re^{i\theta}) \right| d\theta \right] \\
&= 2\pi \left\| F' \right\|_{H^1}.
\end{aligned}
$$

Till följande beräknas arean av området Ω. Här utnyttjas att arean av en konform avbildning F av en (mätbar) delmängd X ges av $\int\int_X |F'(z)|^2 dxdy$. Man får att

$$
\begin{aligned}
A(\Omega) &= A(F(\mathbb{D})) \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| F'(re^{i\theta}) \right|^2 r dr d\theta \\
&= \pi \cdot \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |F'(z)|^2 \, dA(z) \\
&= \pi \left\| F' \right\|_{A^2}^2.
\end{aligned}
$$

Hardy-Littlewoods sats (Sats 3.1) ger att för $p = 1$ och $f = F'$ gäller olikheten $\|F'\|_{A^2} \leq \|F'\|_{H^1}$ för varje funktion $F' \in H^1(\mathbb{D})$. Eftersom $\partial\Omega$ är en rektifierbar kurva, enligt satsens antagande, så följer av Lemma 1.17 att den konforma avbildningen F uppfyller egenskapen $F' \in H^1$. Genom att då utgå ifrån det faktum att $\|F'\|_{A^2} \leq \|F'\|_{H^1}$ och därpå tillämpa längd- och arearesultaten erhålls följande olikheter som sinsemellan är ekvivalenta:

$$
\begin{aligned}
\|F'\|_{A^2} &\leq \|F'\|_{H^1} \\
\|F'\|_{A^2}^2 &\leq \|F'\|_{H^1}^2 \\
\frac{A(\Omega)}{\pi} &\leq \frac{L(\partial\Omega)^2}{4\pi^2} \\
A(\Omega) &\leq \frac{L(\partial\Omega)^2}{4\pi}.
\end{aligned}
$$

Den isoperimetriska olikheten är med detta bevisad men det kvarstår att undersöka dess likhet. Igen med stöd av Hardy-Littlewoods sats (applicera $p = 1$ och $f = F'$ i Sats 3.1) kan man konstatera att likhet i ovanstående ekvivalenser inträffar om och endast om funktionen F' antar formen

$$F'(z) = \left(\frac{c}{1-\lambda z}\right)^2 = \frac{C}{(1-\lambda z)^2},$$

där c, C och λ är komplexa konstanter. Genom att integrera F' får man

$$F(z) = C\int (1-\lambda z)^{-2}\, dz = \frac{C}{\lambda(1-\lambda z)} + K = \frac{az+b}{1-\lambda z},$$

där man kan anta att $\lambda \neq 0$ därför att fallet $\lambda = 0$ är uppenbart. Vidare är K, a och b komplexa konstanter och den erhållna funktionen är rationell med linjära funktioner i täljaren och nämnaren. Med andra ord är F en Möbiustransformation (se Definition 1.14) förutsatt att $\lambda \neq 0$ och $C \neq 0$. Funktionen F avbildar då en cirkelskiva på en cirkelskiva eller på ett halvplan enligt Sats 1.15, men eftersom halvplanets randkurva inte är ändlig och eftersom $F(\mathbb{D}) = \Omega$ så måste mängden Ω vara en cirkelskiva.

$\square$

Kapitel 4

Ekvivalenta olikheter i Hardyrum och viktade Bergmanrum

Med stöd av Kehe Zhus [14] artikel behandlas i detta kapitel tre klassiska olikheter som visar sig vara ekvivalenta i Hardyrum och Bergmanrum. Bergmanrummet (Definition 2.3) som definierades i början av avhandlingen är egentligen ett specialfall och går att utvidgas och skrivas i en mer allmän form som följer här.

Definition 4.1. Låt $0 < p < \infty$ och $-1 < \alpha < \infty$. Ett *viktat Bergmanrum*, som betecknas $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ eller kort A^p_α, består av alla analytiska funktioner f på $\mathbb{D}$ sådana att

$$\|f\|_{A^p_\alpha} := \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z)\right)^{1/p} < \infty,$$

där

$$dA_\alpha(z) = (\alpha+1)\big(1-|z|^2\big)^\alpha \, dA(z).$$

Märk att Definition 2.3 svarar mot det oviktade fallet $\alpha = 0$. Eftersom $|z| = r$ då $z = re^{i\theta}$, ges det viktade areamåttet på enhetscirkelskivan $\mathbb{D}$ i polära koordinater av $dA_\alpha(z) = (\alpha+1)\big(1-r^2\big)^\alpha r dr d\theta$.

4.1 Från Hardyrum till Bergmanrum

I detta avsnitt presenteras de tre klassiska olikheterna för Hardyrum. Därtill visas att var och en av dem kan genom integration i radiell riktning översättas till att gälla även för viktade Bergmanrum.

4.1.1 Fejér-Riesz olikhet

Till först en olikhet framtagen av Lipót Fejér (1880–1959) och den redan bekanta matematikern Frigyes Riesz.

Sats 4.2. (Fejér-Riesz olikhet) *Antag att* $0 < p < \infty$. *För varje funktion* $f \in H^p$ *gäller att*

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, dx \le \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| f^*(e^{i\theta}) \right|^p d\theta.$$

Bevis. Se [5, s. 46, Theorem 3.13].

I följande sats är Fejér-Riesz olikhet formulerad för viktade Bergmanrum.

Sats 4.3. *Antag att* $0 < p < \infty$ *och* $-1 < \alpha < \infty$. *För varje funktion* $f \in A^p_\alpha$ *gäller att*

$$\int_{-1}^{1} \left(1 - |x|^2\right)^{\alpha+1} |f(x)|^p \, dx \le \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z).$$

Bevis. Antag att $0 < p < \infty$ och $-1 < \alpha < \infty$, samt antag att $f \in A^p_\alpha$. Fixera $r \in \,]0,1[$ och beteckna $f_r(z) = f(rz)$ för godtyckligt $z \in \mathbb{D}$. Notera att för $0 < r < 1$ är $f_r^*(e^{i\theta}) = f_r(e^{i\theta})$, då $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Det är klart att funktionen $f_r \in H^p$ för varje r och därav gäller enligt Fejér-Riesz olikhet (Sats 4.2) att

$$\int_{-1}^{1} |f_r(x)|^p \, dx \le \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| f_r(e^{i\theta}) \right|^p d\theta,$$

dvs.

$$\int_{-1}^{1} |f(rx)|^p \, dx \le \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta.$$

Genom att multiplicera båda leden i olikheten med $(\alpha + 1)\left(1 - r^2\right)^\alpha r dr$ och samtidigt integrera över $r \in \,]0,1[$ erhålls

$$\int_0^1 \int_{-1}^{1} |f(rx)|^p (\alpha+1)\left(1-r^2\right)^\alpha r dr dx \le \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p (\alpha+1)\left(1-r^2\right)^\alpha r dr d\theta,$$

vilket kan skrivas som

$$(\alpha + 1) \int_0^1 r\left(1 - r^2\right)^\alpha \left(\int_{-1}^{1} |f(rx)|^p \, dx \right) dr \le \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z). \tag{4.1}$$

Till följande kan det vänstra ledet i olikheten omskrivas med hjälp av variabelsubstitution. Sätt $u = rx$. Då är $x = \frac{u}{r}$, som man kan derivera med avseende på u och få

$$\frac{dx}{du} = \frac{d}{du}\left(\frac{u}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{du}{du} = \frac{1}{r},$$

dvs. $dx = \frac{1}{r}\,du$. Integrationsintervallet $x \in [-1, 1]$ motsvarar nu $u \in [-r, r]$. Det vänstra ledet i olikhet (4.1) kan därmed omskrivas till

$$(\alpha + 1)\int_0^1 r\big(1 - r^2\big)^\alpha \left(\int_{-r}^{r} |f(u)|^p\,\frac{1}{r}\,du\right) dr$$

och då r förkortas bort erhålls

$$(\alpha + 1)\int_0^1 \big(1 - r^2\big)^\alpha \left(\int_{-r}^{r} |f(u)|^p\,du\right) dr.$$

Enligt *Fubinis sats* (se t.ex. [9, s. 164, Theorem 8.8 (a)]) får man utan problem kasta om integrationsordningen i uttrycket ovan (ty funktionerna är kontinuerliga, mätbara och icke-negativa) men då bör man samtidigt byta integrationsgränser; emedan $-r \leq u \leq r$ och $0 < r < 1$ fås att $-1 < u < 1$ och $|u| \leq r < 1$. Det förra uttrycket är således ekvivalent med

$$(\alpha + 1)\int_{-1}^{1} |f(u)|^p \left(\int_{|u|}^{1} \big(1 - r^2\big)^\alpha\,dr\right) du.$$

Genom att tillbakasätta variabeln $x := u$ får olikhet (4.1) utseendet

$$(\alpha + 1)\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \left(\int_{|x|}^{1} \big(1 - r^2\big)^\alpha\,dr\right) dx \;\leq\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p\,dA_\alpha(z). \tag{4.2}$$

Vidare är det klart att $r\big(1 - r^2\big)^\alpha < \big(1 - r^2\big)^\alpha$ för varje $r \in \left]0, 1\right[$ och därmed även att

$$\int_{|x|}^{1} r\big(1 - r^2\big)^\alpha\,dr \;\leq\; \int_{|x|}^{1} \big(1 - r^2\big)^\alpha\,dr$$

(ty funktionerna är alltid positiva), samt notera att

$$\begin{aligned}\int_{|x|}^{1} r\big(1 - r^2\big)^\alpha\,dr &= -\frac{1}{2}\int_{|x|}^{1} (-2r)\big(1 - r^2\big)^\alpha\,dr \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\big(1 - r^2\big)^{\alpha+1}}{\alpha + 1}\right]_{|x|}^{1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2(\alpha+1)} \cdot \Big(0 - \big(1-|x|^2\big)^{\alpha+1}\Big) \\
&= \frac{\big(1-|x|^2\big)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)},
\end{aligned}
$$

varför

$$
\frac{1}{2}\big(1-|x|^2\big)^{\alpha+1} \;\le\; (\alpha+1)\int_{|x|}^{1} \big(1-r^2\big)^{\alpha}\, dr.
$$

Sammantaget ger detta tillsammans med olikhet (4.2) att

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \big(1-|x|^2\big)^{\alpha+1}\, dx \;&\le\; (\alpha+1)\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \bigg(\int_{|x|}^{1} \big(1-r^2\big)^{\alpha}\, dr\bigg) dx \\
&\le\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z),
\end{aligned}
$$

dvs.

$$
\int_{-1}^{1} \big(1-|x|^2\big)^{\alpha+1} |f(x)|^p \, dx \;\le\; \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z)
$$

och beviset är klart.

□

4.1.2 Hardys olikhet

Nästa klassiska resultat inom Hardyrumteori är en olikhet av självaste G. H. Hardy.

Sats 4.4. (Hardys olikhet) *Antag att $f \in H^1$ och låt*

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n
$$

vara funktionens Taylorutveckling på $\mathbb{D}$. Då gäller att

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n+1} \;\le\; \pi \|f\|_{H^1}.
$$

Bevis. Se [5, s. 48, Corollary].

Motsvarigheten till Hardys olikhet för viktade Bergmanrum presenteras av följande sats.

Sats 4.5. *Antag att* $-1 < \alpha < \infty$ *och att* $f \in A^1_\alpha$. *Låt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

vara funktionens Taylorutveckling på $\mathbb{D}$. *Då gäller att*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{(n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha+2\right)}|a_n| \leq \int_{\mathbb{D}} |f(z)|\, dA_\alpha(z).$$

Bevis. Antag att $-1 < \alpha < \infty$ och att $f \in A^1_\alpha$. Låt fixera $r \in]0,1[$ och beteckna $f_r(z) = f(rz)$ för godtyckligt $z \in \mathbb{D}$. Funktionen f_r har då Taylorutvecklingen

$$f_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n z^n.$$

Emedan $f_r \in H^1$ för varje r ($p = 1$) ger Hardys olikhet (Sats 4.4) att

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n r^n|}{n+1} \leq \pi \|f_r\|_{H^1},$$

vilket kan skrivas som

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n| r^n}{n+1} \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta \tag{4.5}$$

eftersom

$$\begin{aligned}
\pi \|f_r\|_{H^1} &= \pi \sup_{0<s<1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f_r(se^{i\theta})\right| d\theta\right] \\
&= \pi \lim_{s\to 1^-} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f_r(se^{i\theta})\right| d\theta\right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{s\to 1^-} \left[\int_0^{2\pi} \left|f(rse^{i\theta})\right| d\theta\right] && \Big|\ f_s \text{ konv. likf. på } r\overline{\mathbb{D}} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \lim_{s\to 1^-} \left|f(rse^{i\theta})\right| d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta.
\end{aligned}$$

Utifrån olikhet (4.5), där summans alla termer är positiva, vet man att följande gäller för varje $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n| r^n}{n+1} \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta.$$

Liksom i föregående bevis multipliceras till följande båda leden i olikheten med måttet $(\alpha+1)\big(1-r^2\big)^\alpha r dr$ samt integreras över intervallet $]0,1[$. Då erhålls

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n| r^n}{n+1}\right)(\alpha+1)\big(1-r^2\big)^\alpha r dr \le \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} \big|f(re^{i\theta})\big|(\alpha+1)\big(1-r^2\big)^\alpha r dr d\theta,$$

dvs.

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n| r^{n+1}}{n+1}\right)(\alpha+1)\big(1-r^2\big)^\alpha\, dr \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|\, dA_\alpha(z). \tag{4.7}$$

På grund av den ändliga summan är det fritt fram att integrera termvis och därmed kan det vänstra ledet i olikheten omskrivas enligt

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n| r^{n+1}}{n+1}\right)(\alpha+1)\big(1-r^2\big)^\alpha\, dr = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{|a_n|(\alpha+1)}{n+1}\int_0^1 \big(1-r^2\big)^\alpha r^{n+1}\, dr\right),$$

varefter man låter $N \to \infty$. Det återstår att skriva uttrycket med hjälp av *gammafunktionen* Γ, som för $x > 0$ definieras som

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt.$$

Man kan visa (se [10, s. 160, Proposition 1.1]) att gammafunktionen som sådan kan utvidgas till en analytisk funktion på halvplanet $\mathrm{Re}(x) > 0$. Det är en unik funktion med många intressanta och välkända egenskaper, däribland

$$\int_0^1 (1-t)^{x-1}t^{y-1}\, dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \tag{4.8}$$

där $x > 0$ och $y > 0$, samt

$$(x+1)\Gamma(x+1) = \Gamma(x+2). \tag{4.9}$$

Betrakta integralen

$$\int_0^1 \big(1-r^2\big)^\alpha r^{n+1}\, dr,$$

där $-1 < \alpha < \infty$ och $n \in \mathbb{N}$. Före formel (4.8) går att tillämpa på integralen, behöver man göra variabelsubstitution. Sätt $t = r^2$. Då är $r = \sqrt{t}$ (den negativa lösningen slopas ty $r > 0$), där $t > 0$. Vidare fås att

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{t}},$$

dvs. $dr = \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt$. Integrationsintervallet förblir det samma. Integralen kan därmed uttryckas som

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(1-r^2\right)^{\alpha} r^{n+1}\, dr &= \int_0^1 (1-t)^{\alpha} \left(\sqrt{t}\right)^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\alpha}\, t^{\frac{1}{2}(n+1)} t^{-\frac{1}{2}}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\alpha}\, t^{\frac{n}{2}}\, dt,
\end{aligned}$$

varefter formel (4.8) går att applicera. Identifiera $\alpha = x - 1$ och $\frac{n}{2} = y - 1$, vilket ger att $x = \alpha + 1 > 0$ respektive $y = \frac{n}{2} + 1 > 0$. Följaktligen fås att

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|a_n|(\alpha+1)}{n+1} \int_0^1 \left(1-r^2\right)^{\alpha} r^{n+1}\, dr \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|a_n|(\alpha+1)}{n+1} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^{\alpha}\, t^{\frac{n}{2}}\, dt \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{(n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha+2\right)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|\Gamma(\alpha+2)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{(n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha+2\right)},
\end{aligned}$$

där den sista likheten följer av gammafunktionens egenskap (4.9). Med utgångspunkt i olikhet (4.7) erhålls då $N \to \infty$ att

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{(n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha+2\right)} |a_n| \;\leq\; \int_{\mathbb{D}} |f(z)|\, dA_{\alpha}(z),$$

vilket skulle bevisas.

$\square$

4.1.3 Hardy-Littlewoods olikhet

Den tredje och sista olikheten är ytterligare ett resultat till följd av samarbetet mellan G. H. Hardy och J. E. Littlewood. Nämnvärt är att Hardys olikhet (Sats 4.4) är egentligen ett specialfall av denna sats.

Sats 4.6. (Hardy-Littlewoods olikhet) *För varje $p \in]0,2]$ existerar det en konstant $C_p > 0$ sådan att*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}|a_n|^p \;\le\; C_p \int_0^{2\pi} \left|f^*(e^{i\theta})\right|^p d\theta$$

för varje funktion $f \in H^p$ med Taylorutvecklingen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ på $\mathbb{D}$.

Bevis. Se [5, s. 95, Theorem 6.2].

Också av Hardy-Littlewoods olikhet finns det en analogi för viktade Bergmanrum.

Sats 4.7. *Antag att $0 < p \le 2$ och $-1 < \alpha < \infty$. Om C_p är samma konstant som i Sats 4.6, så gäller att*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+\alpha+2\right)}(n+1)^{p-2}|a_n|^p \;\le\; 2C_p \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z)$$

för varje funktion $f \in A^p_\alpha$ med Taylorutvecklingen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ på $\mathbb{D}$.

Bevis. Tag ett $p \in]0,2]$ samt antag att $-1 < \alpha < \infty$ och att $f \in A^p_\alpha$. Låt igen $f_r(z) = f(rz)$ för $r \in]0,1[$ och $z \in \mathbb{D}$. Funktionen f_r har då Taylorutvecklingen

$$f_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n z^n.$$

Åter gäller för $0 < r < 1$ att $f_r^* = f_r$. Eftersom $f_r \in H^p$ för varje r så följer av Hardy-Littlewoods olikhet (Sats 4.6) att det existerar en konstant $C_p > 0$ sådan att

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}|a_n r^n|^p \;\le\; C_p \int_0^{2\pi} \left|f_r(e^{i\theta})\right|^p d\theta$$

eller

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}|a_n|^p \, r^{np} \;\le\; C_p \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta.$$

Summan i olikheten har endast positiva termer, varför det är klart att

$$\sum_{n=0}^{N}(n+1)^{p-2}|a_n|^p \, r^{np} \;\le\; C_p \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta$$

för varje $N \in \mathbb{N}$. Efter multiplikation av båda leden med $(\alpha+1)\big(1-r^2\big)^{\alpha} r dr$ samt integration över $]0,1[$ erhålls

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N}(n+1)^{p-2}|a_n|^p\, r^{np+1}\right)(\alpha+1)\big(1-r^2\big)^{\alpha}\, dr \;\le\; C_p \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z). \tag{4.12}$$

Till följande vill man omskriva det vänstra ledet i olikheten med hjälp av gammafunktionen Γ. Notera först att i likhet med tidigare kan man omskriva uttrycket enligt

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N}(n+1)^{p-2}|a_n|^p\, r^{np+1}\right)(\alpha+1)\big(1-r^2\big)^{\alpha}\, dr \\
&= \sum_{n=0}^{N}\left((n+1)^{p-2}|a_n|^p(\alpha+1)\int_0^1 \big(1-r^2\big)^{\alpha} r^{np+1}\, dr\right),
\end{aligned}$$

och sedan låta $N \to \infty$. Integralen i uttrycket påminner om motsvarande integral i föregående bevis, endast en exponent som avviker, och därför utförs härnäst av samma syfte den samma variabelsubstitutionen. Integralen får därmed utseendet

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \big(1-r^2\big)^{\alpha} r^{np+1}\, dr &= \int_0^1 (1-t)^{\alpha}\big(\sqrt{t}\big)^{np+1}\frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\alpha}\, t^{\frac{np}{2}}\, dt,
\end{aligned}$$

där $t \in\,]0,1[$ och $n \in \mathbb{N}$. Det är nu möjligt att tillämpa gammafunktionens egenskap (4.8) på integralen. Identifiera igen $\alpha = x-1$ och $\frac{np}{2} = y-1$, vilket ger att $x = \alpha+1 > 0$ respektive $y = \frac{np}{2}+1 > 0$. Följaktligen fås att

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)^{p-2}|a_n|^p(\alpha+1)\int_0^1 \big(1-r^2\big)^{\alpha} r^{np+1}\, dr\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)^{p-2}|a_n|^p(\alpha+1)\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\alpha}\, t^{\frac{np}{2}}\, dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}|a_n|^p\,\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma\big(\frac{np}{2}+1\big)}{\Gamma\big(\frac{np}{2}+\alpha+2\big)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}|a_n|^p\,\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma\big(\frac{np}{2}+1\big)}{\Gamma\big(\frac{np}{2}+\alpha+2\big)},
\end{aligned}$$

där den sista likheten följer av egenskap (4.9). Olikhet (4.12) implicerar att

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+\alpha+2\right)}(n+1)^{p-2}|a_n|^p \leq 2C_p \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z),$$

och med detta är satsen bevisad.

$\square$

4.2 Från Bergmanrum till Hardyrum

I detta avslutande avsnitt visas hur man utgående från Fejér-Riesz olikhet, Hardys olikhet samt Hardy-Littlewoods olikhet formulerade för viktade Bergmanrum kan återfå de ursprungliga motsvarigheterna för Hardyrum. De tre föreliggande olikheterna svarar mot analoga tillbakaöversättningar, som alla grundar sig på följande välkända sats.

Sats 4.8. *Antag att* $0 < p < \infty$ *och att* $f \in H^p$. *Då gäller att funktionen* $f \in A^p_\alpha$ *för varje* $\alpha \in]-1, \infty[$ *samt att*

$$\lim_{\alpha \to -1^+} \|f\|_{A^p_\alpha} = \|f\|_{H^p}.$$

Bevis. Antag att $0 < p < \infty$ och att $f \in H^p$. Genom att tillämpa definitionen av viktat Bergmanrum (Definition 4.1) samt byta till polära koordinater och därefter tillämpa definitionen av Hardyrum (Definition 2.1) fås att

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{A^p_\alpha} &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z) \\
&= \frac{\alpha+1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \left(1-|z|^2\right)^\alpha dA(z) \\
&= \frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p \left(1-r^2\right)^\alpha r dr d\theta \\
&= 2(\alpha+1)\int_0^1 r\left(1-r^2\right)^\alpha \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right) dr \\
&\leq 2(\alpha+1)\int_0^1 r\left(1-r^2\right)^\alpha \left(\sup_{0<r<1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right]\right) dr \\
&= -(\alpha+1)\|f\|^p_{H^p}\int_0^1 (-2r)\left(1-r^2\right)^\alpha dr \\
&= -(\alpha+1)\|f\|^p_{H^p} \cdot \left[\frac{\left(1-r^2\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1
\end{aligned}$$

$$= -(\alpha+1)\|f\|_{H^p}^p \cdot \left(-\frac{1}{\alpha+1} \right)$$
$$= \|f\|_{H^p}^p.$$

Alltså gäller för $f \in H^p$ att $\|f\|_{A^p_\alpha} \leq \|f\|_{H^p}$, vilket ger att $H^p \subseteq A^p_\alpha$ för varje $\alpha \in]-1, \infty[$. Detta medför i sin tur att $f \in A^p_\alpha$ för varje $\alpha \in]-1, \infty[$ samt att

$$\limsup_{\alpha \to -1^+} \|f\|_{A^p_\alpha} \leq \|f\|_{H^p}. \tag{4.17}$$

Å andra sidan, emedan

$$\|f\|_{H^p}^p = \sup_{0<r<1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right]$$

ger definitionen av supremum att för varje $\epsilon > 0$ existerar det ett $\sigma \in]0,1[$ sådant att

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta > \|f\|_{H^p}^p - \epsilon$$

för varje $r \in]\sigma, 1[$. Av beräkningarna ovan samt denna uppskattning följer att

$$\begin{aligned}
\|f\|_{A^p_\alpha}^p &= 2(\alpha+1) \int_0^1 r\left(1-r^2\right)^\alpha \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right) dr \\
&\geq 2(\alpha+1) \int_\sigma^1 r\left(1-r^2\right)^\alpha \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right) dr \\
&\geq -(\alpha+1)\left(\|f\|_{H^p}^p - \epsilon\right) \int_\sigma^1 (-2r)\left(1-r^2\right)^\alpha dr \\
&= -(\alpha+1)\left(\|f\|_{H^p}^p - \epsilon\right) \cdot \left[\frac{\left(1-r^2\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_\sigma^1 \\
&= -(\alpha+1)\left(\|f\|_{H^p}^p - \epsilon\right) \left(-\frac{\left(1-\sigma^2\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) \\
&= \left(\|f\|_{H^p}^p - \epsilon\right)\left(1-\sigma^2\right)^{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Genom att i båda leden låta $\alpha \to -1^+$ erhålls

$$\liminf_{\alpha \to -1^+} \|f\|_{A^p_\alpha}^p \geq \|f\|_{H^p}^p - \epsilon,$$

ty $\left(1-\sigma^2\right)^{\alpha+1} \to 1$ för varje $\sigma \in]0,1[$ då $\alpha \to -1^+$. Eftersom $\epsilon > 0$ får väljas godtyckligt (ϵ är nu oberoende av σ), kan man låta $\epsilon \to 0$ och det medför att

$$\liminf_{\alpha \to -1^+} \|f\|_{A^p_\alpha} \geq \|f\|_{H^p}. \tag{4.19}$$

Olikheterna (4.22) och (4.19) i kombination blir

$$\limsup_{\alpha\to-1^+} \|f\|_{A^p_\alpha} \le \|f\|_{H^p} \le \liminf_{\alpha\to-1^+} \|f\|_{A^p_\alpha}, \tag{4.20}$$

vilket ger att likhet måste gälla och därmed fås att

$$\lim_{\alpha\to-1^+} \|f\|_{A^p_\alpha} = \|f\|_{H^p}.$$

$\square$

Påstående. Fejér-Riesz olikhet (Sats 4.2) följer av Sats 4.3 och Sats 4.8.

Bevis. Antagandet i Sats 4.2 (Fejér-Riesz olikhet) är att $f \in H^p$, där $0 < p < \infty$. Sats 4.8 ger då att $f \in A^p_\alpha$ för varje $\alpha \in]-1,\infty[$, varför

$$\int_{-1}^{1} \left(1-|x|^2\right)^{\alpha+1} |f(x)|^p \, dx \le \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z)$$

enligt Sats 4.3. Detta kan uttryckas som

$$\int_{-1}^{1} \left(1-|x|^2\right)^{\alpha+1} |f(x)|^p \, dx \le \pi \|f\|^p_{A^p_\alpha}$$

då man skriver det högra ledet som en norm i det viktade Bergmanrummet enligt Definition 4.1. Vidare ger Sats 4.8 (se uttryck (4.20) i slutet av beviset) att

$$\liminf_{\alpha\to-1^+} \|f\|_{A^p_\alpha} = \|f\|_{H^p}.$$

Av detta, tillsammans med Fatous lemma (Lemma 1.20), följer att

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, dx &= \int_{-1}^{1} \lim_{\alpha\to-1^+} \left(1-|x|^2\right)^{\alpha+1} |f(x)|^p \, dx \\
&\le \liminf_{\alpha\to-1^+} \int_{-1}^{1} \left(1-|x|^2\right)^{\alpha+1} |f(x)|^p \, dx \\
&\le \pi \liminf_{\alpha\to-1^+} \|f\|^p_{A^p_\alpha} \\
&= \pi \|f\|^p_{H^p}.
\end{aligned}$$

Slutligen av det faktum att varje funktion $f \in H^p$ kan utvidgas till att gälla även på randen av enhetscirkelskivan, kan H^p-normen enligt Sats 2.2 uttryckas som

$$\|f\|^p_{H^p} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f^*(e^{i\theta})\right|^p d\theta.$$

Alltså fås att

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, dx \;\leq\; \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \left| f^*(e^{i\theta}) \right|^p d\theta,$$

som är den eftersökta Fejér-Riesz olikheten.

$\square$

Påstående. Hardys olikhet (Sats 4.4) följer av Sats 4.5 och Sats 4.8.

Bevis. Antag att $f \in H^1$ $(p = 1)$ och låt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ vara funktionens Taylorutveckling på $\mathbb{D}$. Enligt Sats 4.8 gäller då att $f \in A^1_\alpha$ för varje $\alpha \in \,]-1, \infty[$ samt att

$$\lim_{\alpha \to -1^+} \|f\|_{A^1_\alpha} = \|f\|_{H^1}.$$

Vidare ger Sats 4.5 och Definition 4.1 att

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{(n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha+2\right)} |a_n| \;\leq\; \int_{\mathbb{D}} |f(z)| \, dA_\alpha(z) \;=\; \pi \|f\|_{A^1_\alpha},$$

vilket implicerar att

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{(n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha+2\right)} |a_n| \;\leq\; \pi \|f\|_{A^1_\alpha}$$

för varje $N \in \mathbb{N}$, eftersom $\Gamma(x) > 0$ för varje $x > 0$. Av detta fås följande ekvivalenser:

$$\lim_{\alpha \to -1^+} \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{(n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha+2\right)} |a_n| \right] \;\leq\; \lim_{\alpha \to -1^+} \pi \|f\|_{A^1_\alpha}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{|a_n|}{n+1} \cdot \lim_{\alpha \to -1^+} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha+2\right)} \right) \;\leq\; \pi \lim_{\alpha \to -1^+} \|f\|_{A^1_\alpha}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{|a_n|}{n+1} \cdot \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \right) \;\leq\; \pi \|f\|_{H^1}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n|}{n+1} \;\leq\; \pi \|f\|_{H^1}.$$

Ovan har använts att $\Gamma(x) = (x-1)!$ för $x \in \mathbb{Z}_+$, dvs. $\Gamma(1) = 0! = 1$. Låt $N \to \infty$ och resultatet blir Hardys olikhet.

$\square$

Påstående. Hardy-Littlewoods olikhet (Sats 4.6) följer av Sats 4.7 och Sats 4.8.

Bevis. Tag ett $p \in]0,2]$. Antag att C_p är en positiv konstant som beror av p och att $f \in H^p$. Låt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ vara funktionens Taylorutveckling på $\mathbb{D}$. Sats 4.8 ger att $f \in A^p_\alpha$ för varje $\alpha \in]-1, \infty[$, varför

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+\alpha+2\right)}(n+1)^{p-2}|a_n|^p \leq 2C_p \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z)$$

enligt Sats 4.7. Detta medför på samma sätt som tidigare att

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+\alpha+2\right)}(n+1)^{p-2}|a_n|^p \leq 2\pi C_p \|f\|^p_{A^p_\alpha}$$

för varje $N \in \mathbb{N}$. Till följande vill man igen utnyttja gränsvärdet

$$\lim_{\alpha \to -1^+} \|f\|_{A^p_\alpha} = \|f\|_{H^p}$$

från Sats 4.8. Genom att då låta $\alpha \to -1^+$ i senaste olikhet erhålls följande ekvivalenser:

$$\sum_{n=0}^{N} \left((n+1)^{p-2}|a_n|^p \cdot \lim_{\alpha \to -1^+} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+\alpha+2\right)} \right) \leq 2\pi C_p \lim_{\alpha \to -1^+} \|f\|^p_{A^p_\alpha}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \left((n+1)^{p-2}|a_n|^p \, \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right)} \right) \leq 2\pi C_p \|f\|^p_{H^p}$$

$$\sum_{n=0}^{N} (n+1)^{p-2}|a_n|^p \leq 2\pi C_p \|f\|^p_{H^p}. \tag{4.22}$$

Som bekant från Sats 2.2 kan H^p-normen uttryckas med hjälp av det radiella gränsvärdet, dvs.

$$\|f\|^p_{H^p} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f^*(e^{i\theta})\right|^p d\theta$$

för varje $f \in H^p$. Applicera detta i uttryck (4.22) och låt samtidigt $N \to \infty$ och kvar blir

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-2}|a_n|^p \leq C_p \int_0^{2\pi} \left|f^*(e^{i\theta})\right|^p d\theta,$$

som är precis Hardy-Littlewoods olikhet.

□

Litteraturförteckning

[1] Blåsjö, V. The Isoperimetric Problem. *The American Mathematical Monthly 112*, 6 (2005), 526–566.

[2] Clapham, C. & Nicholson, J. *The Concise Oxford Dictionary of Mathematics*, 5th ed. Oxford Paperback Reference. Oxford University Press, 2014.

[3] Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable I*, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer, New York, 1978.

[4] Duren, P. L. & Schuster, A. *Bergman Spaces.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 100. American Mathematical Society, 2004.

[5] Duren, P. L. *Theory of H^p Spaces.* Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks, vol. 38. Academic Press, New York, 1970.

[6] Glader, C. & Lindström, M. *Analytiska funktioner.* Föreläsningsanteckningar, Åbo Akademi, 2008. Hämtad 12.04.2022 från http://web.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/analytiska/.

[7] Kazarinoff, N. D. *Geometric Inequalities.* New Mathematical Library. Yale University Press, 1961.

[8] Pavlović, M. *Function Classes on the Unit Disc: An Introduction.* De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 52. De Gruyter, 2014.

[9] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*, 3rd ed. Mathematics Series. McGraw-Hill, 1987.

[10] Stein, E. M. & Shakarchi, R. *Complex Analysis.* Princeton Lectures in Analysis II. Princeton University Press, New Jersey, 2003.

[11] Stein, E. M. & Shakarchi, R. *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces.* Princeton Lectures in Analysis III. Princeton University Press, New Jersey, 2005.

[12] Stein, E. M. & Shakarchi, R. *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis.* Princeton Lectures in Analysis IV. Princeton University Press, New Jersey, 2011.

[13] Vukotić, D. The Isoperimetric Inequality and a Theorem of Hardy and Littlewood. *The American Mathematical Monthly 110*, 6 (2003), 532–536.

[14] Zhu, K. Translating Inequalities between Hardy and Bergman Spaces. *The American Mathematical Monthly 111*, 6 (2004), 520–525.

[15] Zhu, K. *Operator Theory in Function Spaces.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 138. American Mathematical Society, 2007.