



FAKULTETEN FÖR
NATURVETENSKAPER OCH TEKNIK

AVHANDLING PRO GRADU

Om olikheter gällande betafunktionen

Skribent:

Sofia KARLSSON, 37603

Handledare:

Mikael LINDSTRÖM

2021

Sammanfattning

Denna avhandling behandlar betafunktionen och dess egenskaper. Integralsubstitutioner samt betafunktionens relation till den närbesläktade gammafunktionen används för att bevisa ett antal kända likheter där betafunktionen figurerar. Dessutom presenteras betafunktionens tillämpning i form av betafördelningen samt betafunktionens medverkan i strängteorins uppkomst.

Avhandlingens huvudresultat är två nya olikheter, som framfördes år 2018 av Božin och Karapetrović:

$$B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right) \leq \frac{1}{(p-2)(p-4)}, \quad 2 < p < 4$$

och

$$\left(\frac{4-p}{2} + \frac{p-2}{2}s^4\right) B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) \leq \int_0^1 \psi_p(t) \max\{s^2, t^2\}^{p-2} dt, \quad 2 < p < 4,$$

där $s \in [0, 1]$ och $\psi_p(t) = t^{\frac{2}{p}-1}(1-t)^{-\frac{2}{p}}$, samt $B(x, y)$ betecknar betafunktionen. Senare samma år lyckades Lindström m.fl. förenkla bevisen till olikheterna. Båda versionerna av bevisen skildras.

I en hjälpsats till beviset till den ena nya olikheten, använder Božin och Karapetrović Sturms metod att räkna antalet reella nollställen till ett polynom. Därför innehåller avhandlingen även ett kapitel som ingående beskriver Sturm-följder, Sturms sats och Sturms metod. Det visade sig att det finns två olika sorters följder som i litteraturen benämns som Sturm-följder samt två versioner av Sturms sats, som anknyter till respektive följd. Skillnaden och sambandet mellan dessa varianter klargörs. Dessutom presenteras ett sätt att implementera Sturms metod i programmet Wolfram Mathematica.

Innehåll

1	Inledning	2
1.1	Avhandlingens syfte	2
1.2	Definitioner och kända resultat	3
2	Betafunktionen och dess egenskaper	6
2.1	Historisk bakgrund	6
2.2	Gammafunktionen	7
2.3	Betafunktionen	13
2.4	Betafunktionens egenskaper	14
2.5	Tillämpningar av betafunktionen	23
2.5.1	Betafördelningen	23
2.5.2	Strängteori	27
3	Sturms sats med tillämpningar	29
3.1	Några definitioner och resultat	29
3.2	Sturmföljder	30
3.3	Sturms sats	35
3.4	Tillämpningar	38
4	Två nya olikheter gällande betafunktionen	43
4.1	Förberedelser	43
4.2	De nya olikheterna	49
	Bilaga A Kod för Wolfram Mathematica	61

Kapitel 1

Inledning

1.1 Avhandlingens syfte

En artikel skriven av Božin och Karapetrović [5] publicerades i början av 2018 och har fungerat som inspiration för denna avhandling. I artikeln undersöks normen av Hilbertmatrisoperatoren \mathcal{H} på Bergmanrummet A^p . För att bevisa huvudresultatet, $\|\mathcal{H}\|_{A^p \rightarrow A^p} = \frac{\pi}{\sin(\frac{2\pi}{p})}$, $2 < p < 4$, använder Božin och Karapetrović två nya olikheter som involverar betafunktionen. Huvudsyftet med denna avhandling är att redogöra för bevisen för dessa två olikheter.

Litteraturen har en tendens att domineras av gammafunktionen framom betafunktionen, vilket kan bero på att betafunktionen lätt uttrycks med hjälp av gammafunktionen. Orsaken till att man överhuvudtaget studerar betafunktionen som sådan är att den förekommer så ofta i praktiken [1, s. 108]. Man kan stöta på den inom exempelvis fysiken [7, s. 6-8] och sannolikhetsläran [10, s. 168-170.]. Idén med avhandlingen är därför också att studera betafunktionen och dess egenskaper på djupet.

I beviset till en hjälpsats i sin artikel, refererar Božin och Karapetrović till Sturms metod för att räkna antalet reella rötter till ett polynom i ett specifikt intervall [5, Lemma 2.2., s. 530-531]. Det finns metoder som är mer effektiva för att studera rötterna till polynom [2], men Sturms metod har en viss fördel i sin enkelhet. Man behöver endast känna till polynomdivision med rest för att kunna använda den och den är mycket lätt att lära sig. Det är dock ingen självklarhet att läsaren påträffat metoden tidigare. Således är ett ytterligare syfte med avhandlingen att ingående beskriva Sturms metod.

1.2 Definitioner och kända resultat

Läsaren antas vara bekant med grundläggande algebra, komplex analys samt sannolikhetslära. Därför kommer vanliga begrepp som konvergens, analytisk, täthetsfunktion osv. inte att definieras separat. En del beteckningar och begrepp brukar dock användas på ett något varierande sätt i litteraturen, så deras innebörd i avhandlingen preciseras nedan.

Med de naturliga talen \mathbb{N} avses i denna avhandling mängden $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Mängden $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ betecknas istället med \mathbb{Z}_+ . Begreppen växande och avtagande funktioner syftar på funktioner med en derivata som är större än eller lika med noll respektive mindre än eller lika med noll, medan begreppen strängt växande och strängt avtagande används för funktioner med en derivata som är strängt större respektive strängt mindre än noll. På samma sätt används begreppen positiva och negativa funktioner för funktioner som kan anta funktionsvärdet noll, medan begreppen strängt positiva och strängt negativa funktioner har funktionsvärden som är strängt större respektive strängt mindre än noll.

Många av bevisen innehåller välkända resultat som hjälpsatser. Eftersom dessa resultat är allmänt förekommande och på grund av det faktum att de inte är fokus för avhandlingen, kommer de inte att bevisas eller vidare kommenteras. Referenser till bevisen har dock bifogats. Härefter presenteras de kända hjälpsatserna, i den ordning de påträffas.

Lemma 1.1. *Antag att den oändliga produkten $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$, $a_n \in \mathbb{C}$, inte har någon faktor som är lika med noll. Då är denna produkt absolut konvergent om och endast om summan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolut konvergent.*

Bevis. Se t.ex. [23, s. 3-4]. □

Lemma 1.2. (Gränsvärdesjämförelsetestet) *Låt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vara reellvärda serier med $a_n \geq 0$ och $b_n > 0$ för alla n . Låt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C$. Då gäller följande påståenden:*

- a) *Om $0 < C < \infty$, gäller det antingen att båda serierna $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar eller att båda divergerar.*
- b) *Om $C = 0$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar, så konvergerar även $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
- c) *Om $C = \infty$, $a_n > 0$ för alla n och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar, så divergerar även $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Bevis. Se t.ex.[17]. □

Lemma 1.3. (L'Hôpitals regel). *Antag att funktionerna f och g är analytiska på ett öppet område runt $z_0 \in \mathbb{C}$. Antag vidare att $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$ samt $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$. Då gäller*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Bevis. Se t.ex. [6, s. 97-99]. □

Lemma 1.4. *Antag att (f_n) är en följd av funktioner som är analytiska på en öppen mängd $D \subseteq \mathbb{C}$. Om (f_n) konvergerar likformigt mot gränsvfunktionen f på varje kompakta delmängd av D , så är f analytisk på D .*

Bevis. Se t.ex. [26, s. 1]. □

Lemma 1.5. *Låt $D \subseteq \mathbb{C}$ vara en öppen mängd och låt $\varphi : [a, \infty[\times D \rightarrow \mathbb{C}$ med $a \in \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion med en kontinuerlig partiell derivata $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Om integralen $\int_a^\infty \varphi(t, z) dt$ konvergerar likformigt på alla kompakta delmängder av D , definierar den en funktion som är analytisk på D .*

Bevis. Se t.ex [26, s. 2]. □

Lemma 1.6. (Identitetssatsen). *Låt funktionerna $f(z)$ och $g(z)$ vara analytiska i området $D \subseteq \mathbb{C}$ och låt $M \subseteq D$ ha en hopningspunkt $a \in D$. Om $f(z) = g(z)$ för $z \in M$, så är $f(z) = g(z)$ för alla $z \in D$.*

Bevis. Se t.ex. [27, s. 72]. □

Lemma 1.7. (Cauchys residysats). *Låt C vara en enkel, sluten kurva och antag att funktionen f är analytisk innanför och på denna kurva, förutom i ett ändligt antal punkter z_1, z_2, \dots, z_n . Då integrationsvägen går moturs, gäller*

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(z_j),$$

där $\text{Res}(z_j)$ är residyn för f i punkten z_j .

Bevis. Se t.ex. [25, s. 311-312]. □

Lemma 1.8. (Fubinis sats). Låt $(X, \sigma(X), \mu)$ och $(Y, \sigma(Y), \nu)$ vara fullständiga σ -ändliga måttrum och låt $f(x, y)$ vara en integrerbar funktion på $(X \times Y, \sigma(X \times Y), \mu \times \nu)$, dvs.

$$\int_{X \times Y} |f(x, y)| d(\mu \times \nu) < \infty.$$

Då gäller

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu \right) d\nu.$$

Bevis. Se t.ex. [24, s. 120-121]. □

Lemma 1.9. (Tonellis sats). Låt $(X, \sigma(X), \mu)$ och $(Y, \sigma(Y), \nu)$ vara fullständiga σ -ändliga måttrum och låt $f(x, y)$ vara en positiv mätbar funktion på $(X \times Y, \sigma(X \times Y), \mu \times \nu)$. Då gäller

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu \right) d\nu.$$

Bevis. Se t.ex. [24, s. 126-127]. □

Kapitel 2

Betafunktionen och dess egenskaper

2.1 Historisk bakgrund

Kline framför i [14, s. 423] att matematikerna Daniel Bernoulli (1700-1782) och Chrisitan Goldbach(1690-1764) arbetade under början av 1700-talet med frågeställningen om fakultetsfunktionen $n!$ kunde utvidgas till en funktion som även gäller tal $n \notin \mathbb{N}$. Den schweiziske matematikern Leonhard Euler(1707-1783) var vän till Bernoulli [20]. I [14, s. 423-424] framgår det hur Euler föreslog en lösning på problemet år 1729 genom att representera fakultetsfunktionen av $n \in \mathbb{R}$ som en oändlig produkt:

$$n! = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^n \frac{k}{k+n}. \quad (2.1)$$

Genom att sätta $n = \frac{1}{2}$ och manipulera uttrycket, kom Euler fram till

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \right) \left(\frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \right) \left(\frac{6 \cdot 6}{7 \cdot 9} \right) \dots,$$

vilket var ett resultat som matematikern John Wallis (1616-1703) hade publicerat redan 1655. Wallis hade studerat integraler av formen $\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$ och med den kunskapen fått resultatet genom att utgå ifrån $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ [14, s. 353].

Kline [14, s. 423-424] menar att kopplingen mellan Eulers resultat och Wallis fick Euler att studera sambandet mellan (2.1) och integraler av formen $\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$ med godtyckliga p och q . Genom att använda binomialsatsen för att ut-

veckla $(1-x)^q$ erhöill Euler resultatet

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \frac{q!}{(p+1)(p+2)\dots(p+q+1)}, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Med hjälp av vidare transformationer kom han även fram till en integralform för $n!$ med $n \in \mathbb{R}$:

$$n! = \int_0^1 (-\log x)^n dx. \quad (2.3)$$

Genom att använda substitutionen $t = -\log x$ erhöill han formen som brukar användas idag:

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx. \quad (2.4)$$

Denna integral (eller produkten 2.1) gavs symbolen $\Gamma(n+1)$ av Adrien-Marie Legendre runt år 1811 och namnet gammafunktionen härrör från denna symbol [8]. Ibland kallas integralen även Eulerintegralen av andra slaget [14, s.424].

Integralen (2.2) fick symbolen B (versaliserat β) av Jacques P.M. Binet (1786-1856) år 1839, vilket har lett till namnet betafunktionen [8]. Idag skriver man integralen i aningen annorlunda form [14, s. 424]:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0. \quad (2.5)$$

En del litteratur (exempelvis [1]) använder symbolen β . Integralen kallas även Eulerintegralen av första slaget [14, s. 424].

2.2 Gammafunktionen

Då man undersöker betafunktionen och dess egenskaper är en förståelse för gammafunktionen till nytta, eftersom att funktionerna är så nära relaterade.

I avsnitt 2.1 ovan, presenterades två möjliga definitioner på gammafunktionen, nämligen den oändliga produkten (2.1) och integralen (2.3). Agarwar, Barnett och Dragomir [1, s. 105] ger en tredje definition:

Definition 2.1. *Gammafunktionen $\Gamma(z)$ definieras som*

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)},$$

där z inte är ett negativt heltal eller 0.

Detta uttryck kommer att användas som gammafunktionens definition i denna avhandling.

Gränsvärdet i Definition 2.1 kan inte existera för x som är negativa heltal eller noll, eftersom bråkets nämnare då är noll och uttrycket divergerar. Gränsvärdet är dock väldefinierat i annat fall.

Sats 2.2. *Gränsvärdet*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$$

existerar för $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Z}_- \cup \{0\}\}$.

Bevis. Rainville [23, s. 5] bevisar detta påstående genom att utnyttja en oändlig produkt. Notera först att

$$\frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} = \frac{n}{z(z+n)} \cdot \frac{(n-1)!n^z}{(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}.$$

För alla $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Z}_- \cup \{0\}\}$ gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{z(z+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{z^2}{n} + z} = \frac{1}{z},$$

så följderna $\frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$ konvergerar då $n \rightarrow \infty$ ifall gränsvärdet för

$$P_n := \frac{(n-1)!n^z}{(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}$$

existerar då $n \rightarrow \infty$.

Betrakta uttrycket P_{n+1} :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{n!(n+1)^z}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \\ &= \frac{n!}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \cdot \frac{2^z}{1^z} \cdot \frac{3^z}{2^z} \cdot \frac{4^z}{3^z} \cdot \dots \cdot \frac{(n+1)^z}{n^z} \\ &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{k}{z+k} \cdot \frac{(k+1)^z}{k^z} \right) = \prod_{k=1}^n \left(\left(\frac{z+k}{k} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{k+1}{k} \right)^z \right) \\ &= \prod_{k=1}^n \left(\left(1 + \frac{z}{k} \right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{k} \right)^z \right). \end{aligned}$$

Således fås

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{k} \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^z \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left(1 + \frac{z}{k} \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^z - 1 \right).$$

¹Den observanta läsaren märker att detta är Eulers uttryck för $n!$ i produktform (2.1).

Nu ger Lemma 1.1 att den oändliga produkten $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ konvergerar absolut, om

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z - 1 \right| < \infty.$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är en känd konvergerande serie med strängt positiva termer och kan användas i gränsvärdesjämförelsetestet (Lemma 1.2):

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left| \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z - 1 \right|}{\frac{1}{k^2}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} k^2 \left| \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z - 1 \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{(1+zt)^{-1}(1+t)^z - 1}{t^2} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{(t+1)^z - tz - 1}{t^2(tz+1)} \right| \end{aligned}$$

Absolutbeloppet är en kontinuerlig funktion, så om $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$ för någon funktion g existerar, gäller $\lim_{t \rightarrow 0} |g(t)| = |\lim_{t \rightarrow 0} g(t)|$. Användning av l'Hôpitals regel (Lemma 1.3) två gånger ger

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)^z - tz - 1}{t^2(tz+1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{z(t+1)^{z-1} - z}{3zt^2 + 2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{z(z-1)(t+1)^{z-2}}{6zt + 2} = \frac{z(z-1)}{2}.$$

Således gäller

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left| \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z - 1 \right|}{\frac{1}{k^2}} = \left| \frac{z(z-1)}{2} \right|$$

och enligt gränsvärdesjämförelsetestet (Lemma 1.2) måste det gälla att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^z - 1 \right| < \infty.$$

Detta innebär att gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ existerar och därmed existerar även gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}.$$

□

Ibland kan det vara ändamålsenligt att uttrycka gammafunktionen på något annat sätt. Bl.a. Rainville [23, s. 9] använder Weierstrass definition för gammafunktionen, som innehåller Euler-Mascheronis konstant γ .

Sats 2.3. För $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Z}_- \cup \{0\}\}$ är Weierstrass definition av gammafunktionen, dvs.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right),$$

där

$$\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\ln t + \sum_{k=1}^t \frac{1}{k} \right),$$

ekvivalent med definitionen

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}.$$

Bevis. Se t.ex. [23, s. 11-12]. □

En viktig egenskap hos gammafunktionen är att dess värden kan beräknas rekursivt.

Sats 2.4. För gammafunktionen $\Gamma(z)$ med $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Z}_- \cup \{0\}\}$ gäller

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Bevis. Beviset följer direkt ur gammafunktionens definition (Definition 2.1):

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\dots(z+1+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{z \cdot n}{z+1+n} \cdot \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \right) \\ &= z \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

□

Betrakta $\Gamma(1)$. Med hjälp av Definition 2.1 fås

$$\Gamma(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (1+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} = 1.$$

En kombination av detta samt Sats 2.4 ger sambandet mellan gammafunktionen och faktulteten:

Sats 2.5. För $n = 0, 1, 2, \dots$ gäller $\Gamma(n+1) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$

Gammafunktionen kan ofta tillämpas i samband med integraler. Därför brukar en lätt modifierad version av Eulers integralform (2.3) användas som gammafunktionens definition [1, s 105] [23, s. 15]. Här presenteras integralformen som en sats, med utgångspunkt i Definition 2.1.

Sats 2.6. *Gammafunktionen $\Gamma(x)$ kan i integralform uttryckas som*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Bevis. Kline anser i [14, s. 424] att Eulers härledning av integralformen inte skulle godkännas idag. Exempelvis Rainville har presenterat ett modernare och mer stringent bevis i [23, s. 15-18], som intresserade läsare hänvisas till. \square

En viktig egenskap hos gammafunktionen är att den är analytisk på hela sin definitionsmängd och således meromorfisk på det komplexa talplanet.

Sats 2.7. *Gammafunktionen $\Gamma(z)$ är analytisk i z som inte är 0 eller negativa heltal.*

Bevis. I [26, s. 3] bevisas detta genom att man med hjälp av Definition 2.6 först visar att $\Gamma(z)$ är analytisk för $\operatorname{Re}(z) > 0$. Resten av beviset följer ur detta samt gammafunktionens rekursiva egenskap (Sats 2.4).

Låt z tillhöra någon godtycklig kompakt mängd $M \subset \mathbb{C}$ på halvplanet $\operatorname{Re}(z) > 0$. Då M är kompakt, existerar det ett tal β sådant att $\operatorname{Re}(z) \leq \beta$. Om $t \geq 1$, gäller alltså $t^{\operatorname{Re}(z)-1} \leq C e^{\frac{1}{2}t}$ för någon tillräckligt stor konstant C . Betrakta nu integralen $\int_a^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ med $a > 0$. Denna integral konvergerar likformigt på M , eftersom det för $n \in \mathbb{Z}_+$ gäller att

$$\begin{aligned} \left| \int_a^n e^{-t} t^{z-1} dt - \int_a^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \right| &= \left| \int_n^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \right| \\ &\leq \int_n^{\infty} |e^{-t} t^{z-1}| dt \\ &= \int_n^{\infty} e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt \\ &\leq \int_n^{\infty} e^{-t} C e^{\frac{1}{2}t} dt \\ &= C \int_n^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t} dt \\ &= 2C e^{-\frac{1}{2}n}, \end{aligned}$$

vilket $\rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. Således består även varje funktion

$$f_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

av en integral som konvergerar likformigt på M . Lemma 1.5 ger att f_n är analytisk.

Låt z igen tillhöra en godtycklig kompakt mängd M definierad som ovan. Då existerar det ett tal α med $\operatorname{Re}(z) \geq \alpha > 0$. Vidare gäller $e^{-t} < 1$ och $t^{\operatorname{Re}(z)-1} \leq t^{\alpha-1}$, om $0 < t \leq 1$. För $n > m > 0$ fås således

$$\begin{aligned} |f_n - f_m| &= \left| \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt - \int_{\frac{1}{m}}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \right| \\ &= \left| \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} e^{-t} t^{z-1} dt \right| \\ &\leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |e^{-t} t^{z-1}| dt \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt \\ &< \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{\alpha} (m^{-\alpha} - n^{-\alpha}) \\ &< \frac{1}{\alpha} m^{-\alpha} \end{aligned}$$

För varje $\epsilon > 0$ existerar det ett N (t.ex. $N = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha\epsilon}}$) för vilket $N < m < n$ implicerar att $\frac{1}{\alpha} m^{-\alpha} < \epsilon$. Därmed konvergerar $f_n(z)$ likformigt mot $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z)$ på alla kompakta mängder på halvplanet $\operatorname{Re}(z) > 0$. Lemma 1.4 ger att $\Gamma(z)$ är analytisk för $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Gammafunktionens rekursiva egenskap (Sats 2.4) ger

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \dots = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)}$$

för godtyckligt $n \in \mathbb{Z}_+$. $\Gamma(z+n)$ är analytisk för $\operatorname{Re}(z+n) > 0$, med andra ord för $\operatorname{Re}(z) > -n$. Således är

$$\frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)}$$

meromorfisk för $\operatorname{Re}(z) > -n$ med enkla poler i $z = 0, -1, -2, \dots, -(n-1)$. Eftersom n var godtyckligt vald, är $\Gamma(z)$ analytisk för alla komplexa z som inte är 0 eller negativa heltal. \square

2.3 Betafunktionen

En möjlig definition av betafunktionen ges av Rainville i [23, s. 18], som en version av Eulers integralform (2.2).

Definition 2.8. *Betafunktionen, $B(x, y)$, definieras som*

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0.$$

Denna definition används genomgående i denna avhandling. Notera att definitionen gäller för komplexa x och y . En del litteratur, exempelvis [1, s. 108], väljer att definiera betafunktionen endast för en reell definitions mängd.

Relationen mellan betafunktionen och gammafunktionen kan uttryckas på följande sätt:

Sats 2.9.

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0.$$

Rainville presenterar ett bevis i [23, s. 18-19], där en substitution via polära koordinater används. Följande enklare bevis återfinns bl.a. i [15, s. 3].

Bevis. Sats 2.6 ger

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1} dt \int_0^\infty e^{-s}s^{y-1} ds, \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0,$$

vilket kan skrivas som

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)} ds dt, \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0.$$

Betrakta substitutionen $t = vu$ och $s = v(1-u)$. Nu gäller $u = \frac{t}{s+t}$ och $v = s+t$, så $0 \leq u < 1$ och $0 \leq v < \infty$. Vidare fås

$$\frac{\delta(s, t)}{\delta(u, v)} = \begin{vmatrix} -v & 1-u \\ v & u \end{vmatrix} = -vu - (v - vu) = -v.$$

Eftersom $v \geq 0$, gäller

$$dt ds = \left| \frac{\delta(s, t)}{\delta(u, v)} \right| du dv = v du dv.$$

Vid användning av denna substitution fås således

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty \int_0^1 (vu)^{x-1}(v(1-u))^{y-1}e^{-v}vdudv \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0 \\ &= \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du \int_0^\infty e^{-v}v^{x+y-1}dv \\ &= \operatorname{B}(x, y) \cdot \Gamma(x+y),\end{aligned}$$

där den senare likheten erhållits ur Definition 2.6 samt Definition 2.8.

Således gäller

$$\operatorname{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0.$$

□

2.4 Betafunktionens egenskaper

Betafunktionen har många speciella egenskaper. En hel del av dessa är en följd av gammafunktionens egenskaper samt relationen mellan betafunktionen och gammafunktionen.

Man kan börja med att konstatera att betafunktionen är strängt positiv för reella tal, eftersom funktionen består av en integral av en strängt positiv och kontinuerlig integrand. Betafunktionen är även symmetrisk, vilket kan ses med hjälp av substitutionen $u = 1 - t$:

$$\begin{aligned}\operatorname{B}(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}(-du) \\ &= \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du = \operatorname{B}(y, x).\end{aligned}$$

Notera även att

$$\operatorname{B}(1, 1) = \int_0^1 1 dt = 1.$$

Agarwal m.fl. nämner följande rekursiva egenskaper hos betafunktionen i [1, s. 109]:

Sats 2.10. För $x, y \in \mathbb{C}$ med $\operatorname{Re}(x) > 0$ och $\operatorname{Re}(y) > 0$ gäller

$$\operatorname{B}(x, y+1) = \frac{y}{x+y}\operatorname{B}(x, y) \quad \text{och} \quad \operatorname{B}(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\operatorname{B}(x, y).$$

Bevis. Likheterna fås direkt av Sats 2.9 och gammafunktionens rekursiva egenskap, Sats 2.4.

$$B(x, y + 1) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y + 1)}{\Gamma(x + y + 1)} = \frac{\Gamma(x)y\Gamma(y)}{(x + y)\Gamma(x + y)} = \frac{y}{x + y}B(x, y).$$

$$B(x + 1, y) = \frac{\Gamma(x + 1)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y + 1)} = \frac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x + y)\Gamma(x + y)} = \frac{x}{x + y}B(x, y).$$

□

Det ses lätt att Sats 2.10 bland annat implicerar att

$$B(x, y + 1) = \frac{x}{y} B(x + 1, y)$$

samt

$$B(x, y) = B(x, y + 1) + B(x + 1, y).$$

Man kan även se betafunktionens relation till fakulteten som en följd av dessa rekursiva egenskaper.

Sats 2.11.

$$B(x, y) = \frac{(x - 1)!(y - 1)!}{(x + y - 1)!} \quad x, y = 1, 2, 3, \dots$$

Bevis. Låt $x, y \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Sats 2.10 ger

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \frac{y - 1}{x + y - 1} B(x, y - 1) \\ &= \frac{y - 1}{x + y - 1} \cdot \frac{x - 1}{x + y - 2} B(x - 1, y - 1) \\ &= \frac{(y - 1)(y - 2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot (x - 1)(x - 2) \cdot \dots \cdot 1}{(x + y - 1)(x + y - 2) \cdot \dots \cdot 2} B(1, 1) \\ &= \frac{(y - 1)!(x - 1)!}{(x + y - 1)!}. \end{aligned}$$

Alternativt fås denna likhet direkt från Sats 2.9 följd av Sats 2.5:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)} = \frac{(x - 1)!(y - 1)!}{(x + y - 1)!} \quad x, y = 1, 2, 3, \dots$$

□

Betafunktionen kan representeras på flera olika sätt. Nedan följer några olika representationer.

Sats 2.12.

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(t+1)^{x+y}} dt, \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0.$$

Bevis. Satsen bevisas i [15, s. 3] med hjälp av substitutionen $t = \frac{s}{s+1}$ med $dt = \frac{1}{(s+1)^2} ds$ i betafunktionens definition. Denna substitution ger

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{s}{s+1} \right)^{x-1} \left(1 - \frac{s}{s+1} \right)^{y-1} \frac{1}{(s+1)^2} ds \\ &= \int_0^{\infty} s^{x-1} (s+1)^{-x+1} (s+1)^{-y+1} (s+1)^{-2} ds \\ &= \int_0^{\infty} \frac{s^{x-1}}{(s+1)^{x+y}} ds \end{aligned}$$

och satsen är bevisad. □

Korollarium 2.13.

$$B(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1} + t^{y-1}}{(t+1)^{x+y}} dt, \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0.$$

Bevis. Enligt Sats 2.12 gäller $B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(t+1)^{x+y}} dt$. Betafunktionen är symmetrisk, så det gäller även att

$$B(x, y) = B(y, x) = \int_0^{\infty} \frac{t^{y-1}}{(t+1)^{x+y}} dt.$$

Således fås

$$\begin{aligned} 2B(x, y) &= \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(t+1)^{x+y}} dt + \int_0^{\infty} \frac{t^{y-1}}{(t+1)^{x+y}} dt \\ \iff B(x, y) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1} + t^{y-1}}{(t+1)^{x+y}} dt. \end{aligned}$$

□

Sats 2.14.

$$B(x, y) = p^x (1+p)^y \int_0^1 \frac{t^{x-1} (1-t)^{y-1}}{(t+p)^{x+y}} dt, \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y), p > 0$$

Bevis. Notera först att substitutionen $t = pv$ med $dt = p dv$ i gammafunktionen integralform ger

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pv} (pv)^{x-1} p dv \\ &= p^x \int_0^{\infty} e^{-pv} v^{x-1} dv. \end{aligned}$$

Det gäller alltså att

$$\frac{\Gamma(x)}{p^x} = \int_0^\infty e^{-pv} v^{x-1} dv. \quad (2.6)$$

Betrakta nu integralen $\int_0^1 \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{(t+p)^{x+y}} dt$. Substitutionen $t = \frac{1}{1+u}$ med $dt = -\frac{1}{(1+u)^2} du$ ger

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{(t+p)^{x+y}} dt &= \int_\infty^0 \frac{\left(\frac{1}{1+u}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{1}{1+u}\right)^{y-1}}{\left(\frac{1}{1+u} + p\right)^{x+y}} \cdot \left(-\frac{1}{(1+u)^2}\right) du \\ &= \int_0^\infty \frac{(1+u)^{1-x} u^{y-1} (1+u)^{1-y}}{\frac{(pu+p+1)^{x+y}}{(1+u)^{x+y}}} \cdot \frac{1}{(1+u)^2} du \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{y-1} \cdot (1+u)^2}{(pu+p+1)^{x+y}} \cdot \frac{1}{(1+u)^2} du \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{y-1}}{(pu+p+1)^{x+y}} du. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Med hjälp av (2.6) fås

$$\frac{1}{(pu+p+1)^{x+y}} = \frac{\int_0^\infty e^{-(pu+p+1)v} v^{x+y-1} dv}{\Gamma(x+y)},$$

vilket i kombination med (2.7) ger

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{(t+p)^{x+y}} dt = \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty \int_0^\infty u^{y-1} e^{-(pu+p+1)v} v^{x+y-1} dv du. \quad (2.8)$$

Beteckna $f(u, v) := u^{y-1} e^{-(pu+p+1)v} v^{x+y-1}$. Om $\int_0^\infty \int_0^\infty |f(u, v)| du dv < \infty$, kan Fubinis sats (Sats 1.8) användas, så man kan ändra på integreringsordningen.

Det gäller att

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty |f(u, v)| dv du &= \int_0^\infty \int_0^\infty |u^{y-1}| |e^{-(pu+p+1)v}| |v^{x+y-1}| dv du \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{\operatorname{Re}(y-1)} e^{-(pu+p+1)v} v^{\operatorname{Re}(x+y-1)} dv du. \end{aligned}$$

Eftersom $u^{\operatorname{Re}(y-1)} e^{-(pu+p+1)v} v^{\operatorname{Re}(x+y-1)} > 0$ för $u, v \geq 0$, kan Tonellis sats (Sats 1.9) användas. Således kan man börja med att integrera med avseende på u . Uttryck (2.6) ger dessutom

$$\int_0^\infty e^{-pv} v^{\operatorname{Re}(y)-1} dv = \frac{\Gamma(\operatorname{Re}(y))}{p^{\operatorname{Re}(y)} v^{\operatorname{Re}(y)}},$$

så

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty |f(u, y)| dv du &= \frac{\Gamma(\operatorname{Re}(y))}{p^{\operatorname{Re}(y)}} \int_0^\infty e^{-(p+1)v} v^{\operatorname{Re}(x-1)} dv \\ &= \frac{\Gamma(\operatorname{Re}(x))\Gamma(\operatorname{Re}(y))}{p^{\operatorname{Re}(y)}(1+p)^{\operatorname{Re}(x)}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Alltså kan Fubinis sats användas i (2.8) och man erhåller

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{(t+p)^{x+y}} dt &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty e^{-(p+1)v} v^{x+y-1} \left(\int_0^\infty e^{-pvu} u^{y-1} du \right) dv \\ &= \frac{\Gamma(y)}{p^y \Gamma(x+y)} \int_0^\infty e^{-(p+1)v} v^{x-1} dv \\ &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{p^y(1+p)^x \Gamma(x+y)}, \end{aligned}$$

då (2.6) används två gånger. Sats 2.9 ger att detta är ekvivalent med

$$B(x, y) = p^y(1+p)^x \int_0^1 \frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{(t+p)^{x+y}} dt.$$

□

Det finns ett intressant samband mellan specialfallen $B(z, z)$ och $B(z, \frac{1}{2})$:

Sats 2.15. För $\operatorname{Re}(z) > 0$ gäller $B(z, z) = 2^{1-2z} B(z, \frac{1}{2})$.

Bevis. Detta bevis presenteras i [30].

Notera att först att substitutionen $t = u^2$ med $dt = 2udu$ i betafunktionens definition (Definition 2.8) ger

$$B(x, y) = \int_0^1 u^{2x-2}(1-u^2)^{y-1} 2udu.$$

Således kan man skriva

$$B(z, \frac{1}{2}) = B(\frac{1}{2}, z) = 2 \int_0^1 (1-u^2)^{z-1} du.$$

Med hjälp av betafunktionens definition fås även

$$B(z, z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1} dt.$$

Substitutionen $t = \frac{1+u}{2}$ med $dt = \frac{1}{2}du$ ger

$$\begin{aligned} B(z, z) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+u}{2}\right)^{z-1} \left(\frac{1-u}{2}\right)^{z-1} du \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{((1+u)(1-u))^{z-1}}{2^{z-1} \cdot 2^{z-1}} du \\ &= \frac{1}{2^{2z-1}} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{z-1} du. \end{aligned}$$

Eftersom $(1-u^2)^{z-1}$ är en jämn funktion, fås

$$\begin{aligned} B(z, z) &= \frac{1}{2^{2z-1}} \cdot 2 \int_0^1 (1-u^2)^{z-1} du \\ &= \frac{1}{2^{2z-1}} B\left(z, \frac{1}{2}\right) \\ &= 2^{1-2z} B\left(z, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

□

I litteraturen (t.ex. [23, s. 24]) är det vanligt att man ger Sats 2.15 som en egenskap hos gammafunktionen istället för betafunktionen. Med hjälp av Sats 2.9 kan Sats 2.15 skrivas som

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z} \frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z + \frac{1}{2})}, \quad z \neq 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots,$$

alltså

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z).$$

Eftersom $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, fås

Korollarium 2.16. (Legendres dupliceringsformel). För $z \notin \{-\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}\}$ gäller

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

Man kan hitta en del samband mellan betafunktionen och trigonometriska funktioner. Ett av dessa är Eulers reflektionsformel, som handlar om sinusfunktionen.

Sats 2.17. (Eulers reflektionsformel).

$$B(z, 1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Bevis. Rainville använder sig av detta bevis i [23, s. 19-21].

Betrakta först betafunktionens integralform för $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$:

$$B(z, 1-z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z} dt = \int_0^1 \frac{t^z}{t(1-t)^z} dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^z \frac{dt}{t}. \quad (2.9)$$

Substitutionen $y = \frac{t}{1-t}$ med $dt = \frac{1}{(1+y)^2} dy$ ger

$$\begin{aligned} B(z, 1-z) &= \int_0^\infty y^z \cdot \frac{1+y}{y} \cdot \frac{1}{(1+y)^2} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{y^{z-1}}{1+y} dy, \quad 0 < \operatorname{Re}(z) < 1. \end{aligned}$$

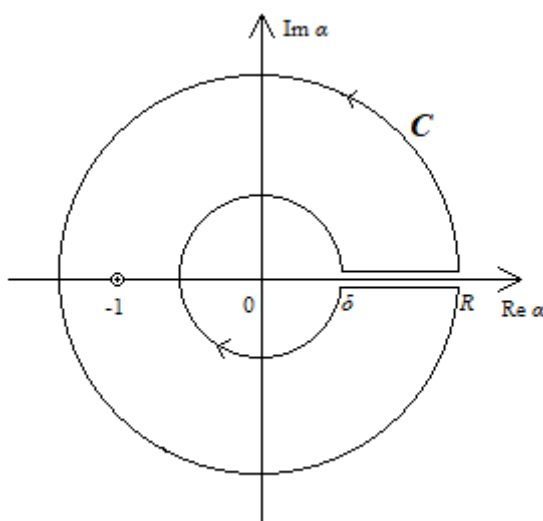
Denna framställning blir viktig senare i beviset.

Betrakta vidare funktionen $f(\alpha) := \frac{\alpha^{z-1}}{1+\alpha}$. Funktionen har en enkel pol i $\alpha = -1$. Residyn till funktionen $f(\alpha)$ i $\alpha = -1$ kan beräknas som

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, -1) &= \lim_{\alpha \rightarrow -1} (\alpha + 1)f(\alpha) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -1} \alpha^{z-1} \\ &= (-1)^{z-1}. \end{aligned}$$

Låt nu kurvan C i α -planet, där $\operatorname{Re}(\alpha) = y$, omsluta den enda singulariteten i $\alpha = -1$ enligt Figur 2.1. Cauchys residysats (Lemma 1.7) ger

$$\int_C \frac{\alpha^{z-1}}{1+\alpha} d\alpha = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, -1) = 2\pi i (-1)^{z-1} = 2\pi i e^{\pi i(z-1)} = -2\pi i e^{\pi i z}.$$



Figur 2.1: Kurvan C i α -planet omsluter singulariteten i $\alpha = -1$.

Då man betraktar kurvan C , ser man att man naturligt kan dela upp den i fyra delar:

$$\alpha = Re^{i\theta} \text{ med } d\alpha = iRe^{i\theta}d\theta, \quad \text{då } \theta \text{ går från } 0 \text{ till } 2\pi,$$

$$\alpha = ye^{2\pi i} \text{ med } d\alpha = e^{2\pi i}dy, \quad \text{då } y \text{ går från } R \text{ till } \delta,$$

$$\alpha = \delta e^{i\theta} \text{ med } d\alpha = i\delta e^{i\theta}d\theta, \quad \text{då } \theta \text{ går från } 2\pi \text{ till } 0$$

och

$$\alpha = ye^{0i} \text{ med } d\alpha = e^{0i}dy, \quad \text{då } y \text{ går från } \delta \text{ till } R.$$

Motsvarande delar av integralen $\int_C \frac{\alpha^{z-1}}{1+\alpha} d\alpha$ erhålls som

i)

$$\int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{z-1} iRe^{i\theta} d\theta}{1+Re^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{R^{z-1} e^{iz\theta-i\theta} iRe^{i\theta} d\theta}{1+Re^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{iR^z e^{iz\theta}}{1+Re^{i\theta}} d\theta,$$

ii)

$$\int_R^\delta \frac{(ye^{2\pi i})^{z-1} e^{2\pi i} dy}{1+ye^{2\pi i}} = \int_R^\delta \frac{y^{z-1} e^{2\pi iz-2\pi i} e^{2\pi i} dy}{1+ye^{2\pi i}} = \int_R^\delta \frac{y^{z-1} e^{2\pi iz}}{1+ye^{2\pi i}} dy,$$

iii)

$$\int_{2\pi}^0 \frac{(\delta e^{i\theta})^{z-1} i\delta e^{i\theta} d\theta}{1+\delta e^{i\theta}} = \int_{2\pi}^0 \frac{\delta^{z-1} e^{iz\theta-i\theta} i\delta e^{i\theta} d\theta}{1+\delta e^{i\theta}} = \int_{2\pi}^0 \frac{i\delta^z e^{iz\theta}}{1+\delta e^{i\theta}} d\theta,$$

och

iv)

$$\int_\delta^R \frac{(ye^{0i})^{z-1} e^{0i} dy}{1+ye^{0i}} = \int_\delta^R \frac{y^{z-1} e^{0z-0i} e^{0i} dy}{1+ye^{0i}} = \int_\delta^R \frac{y^{z-1} e^{0iz}}{1+y} dy.$$

Det gäller alltså att

$$\begin{aligned} -2\pi i e^{\pi iz} &= \int_C \frac{\alpha^{z-1}}{1+\alpha} d\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{iR^z e^{iz\theta}}{1+Re^{i\theta}} d\theta + \int_R^\delta \frac{y^{z-1} e^{2\pi iz}}{1+ye^{2\pi i}} dy \\ &\quad + \int_{2\pi}^0 \frac{i\delta^z e^{iz\theta}}{1+\delta e^{i\theta}} d\theta + \int_\delta^R \frac{y^{z-1} e^{0iz}}{1+y} dy. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Vid undersökning av beloppet av integralen (i), fås

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^{2\pi} \frac{iR^z e^{iz\theta}}{1 + Re^{i\theta}} d\theta \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{iR^z e^{iz\theta}}{1 + Re^{i\theta}} \right| d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{|i||R^z||e^{iz\theta}|}{|1 + Re^{i\theta}|} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{R^{\operatorname{Re}(z)} e^{-\operatorname{Im}(z)\theta}}{|1 + Re^{i\theta}|} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{R^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-\operatorname{Im}(z)\theta}}{\left| \frac{1}{R} + e^{i\theta} \right|} d\theta \\
 &\leq \int_0^{2\pi} \frac{R^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-\operatorname{Im}(z)\theta}}{\left| \left| \frac{1}{R} \right| - |e^{i\theta}| \right|} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{R^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-\operatorname{Im}(z)\theta}}{1 - \frac{1}{R}} d\theta.
 \end{aligned}$$

Eftersom $\operatorname{Re}(z) < 1$, gäller $\operatorname{Re}(z) - 1 < 0$ och

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{R^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-\operatorname{Im}(z)\theta}}{1 - \frac{1}{R}} d\theta = 0,$$

vilket innebär att även

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{iR^z e^{iz\theta}}{1 + Re^{i\theta}} d\theta = 0. \quad (2.11)$$

En liknande undersökning av integralen (iii) ger

$$\left| \int_{2\pi}^0 \frac{i\delta^z e^{iz\theta}}{1 + \delta e^{i\theta}} d\theta \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{\delta^{\operatorname{Re}(z)} e^{-\operatorname{Im}(z)\theta}}{|1 + \delta e^{i\theta}|} d\theta.$$

Eftersom

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{\delta^{\operatorname{Re}(z)} e^{-\operatorname{Im}(z)\theta}}{|1 + \delta e^{i\theta}|} d\theta = 0,$$

gäller alltså

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{2\pi}^0 \frac{i\delta^z e^{iz\theta}}{1 + \delta e^{i\theta}} d\theta = 0. \quad (2.12)$$

Med hjälp av (2.11) och (2.12), kan man skriva (2.10) som

$$\begin{aligned}
 -2\pi i e^{\pi iz} &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \int_C \frac{\alpha^{z-1}}{1 + \alpha} d\alpha \\
 &= \int_{\infty}^0 \frac{y^{z-1} e^{2\pi iz}}{1 + y e^{2\pi i}} dy + \int_0^{\infty} \frac{y^{z-1} e^{0iz}}{1 + y} dy \\
 &= -e^{2\pi iz} \int_0^{\infty} \frac{y^{z-1}}{1 + y} dy + \int_0^{\infty} \frac{y^{z-1}}{1 + y} dy \\
 &= (-e^{2\pi iz} + 1) \int_0^{\infty} \frac{y^{z-1}}{1 + y} dy.
 \end{aligned}$$

Detta innebär att

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{y^{z-1}}{1+y} dy &= \frac{2\pi i e^{\pi i z}}{e^{2\pi i z} - 1} \\ &= \frac{2\pi i}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \end{aligned}$$

För $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ gäller således

$$B(z, 1-z) = \int_0^\infty \frac{y^{z-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Funktionerna $B(z, 1-z)$ och $g(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ är dock analytiska för alla $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, så identitetssatsen (Lemma 1.6) ger att

$$B(z, 1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

□

En direkt följd av denna sats är:

Korollarium 2.18.

$$B\left(\frac{1+p}{2}, \frac{1-p}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}, \quad 0 < p < 1.$$

Bevis. Då $\frac{1-p}{2} = 1 - \frac{1+p}{2}$, kan Sats 2.17 användas:

$$B\left(\frac{1+p}{2}, \frac{1-p}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi(1+p)}{2}\right)} = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi p}{2}\right)} = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi p}{2}}.$$

□

2.5 Tillämpningar av betafunktionen

2.5.1 Betafördelningen

Betafördelningen är en sannolikhetsfördelning med täthetsfunktionen

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{i övriga fall} \end{cases}$$

där α och β är parametrar med $\alpha, \beta > 0$ [10, s. 168]. Härefter kommer $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ att användas för att beteckna att en stokastisk variabel X är betafördelad.

Beräkning av betafördelningens väntevärde ger

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 x \cdot f(x; \alpha, \beta) \\ &= \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\text{B}(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \\ &= \frac{1}{\text{B}(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^\alpha (1-x)^{\beta-1}. \end{aligned}$$

Enligt betafunktionens definition (Sats 2.8), kan man således skriva

$$E[X] = \frac{\text{B}(\alpha + 1, \beta)}{\text{B}(\alpha, \beta)},$$

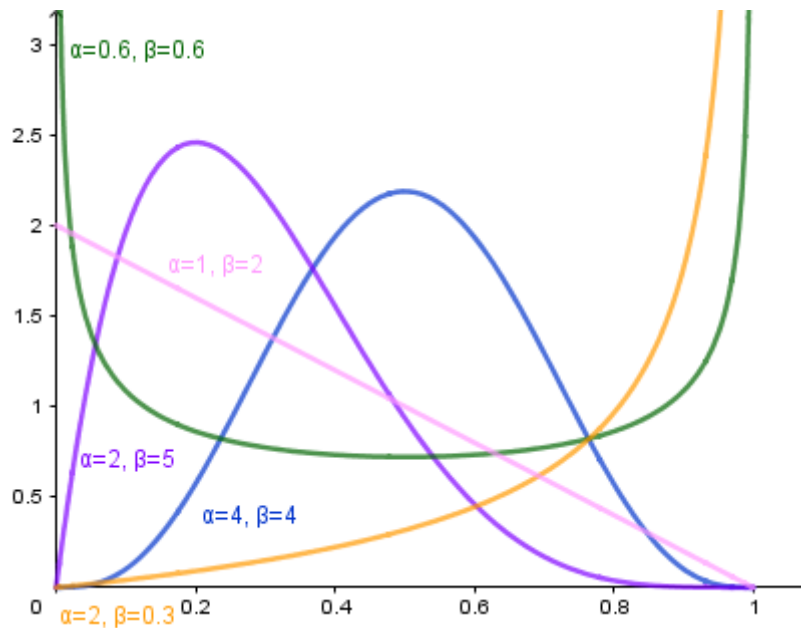
vilket enligt Sats 2.10 innebär att

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{\text{B}(\alpha, \beta)}{\text{B}(\alpha, \beta)} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \end{aligned}$$

Det faktum att täthetsfunktionen är olika noll endast för $0 \leq x \leq 1$ och dessutom kontinuerlig, gör att den kan användas i situationer då den stokastiska variabeln beskriver en sannolikhet. Dessutom kan fördelningsfunktionens graf se ut på många olika sätt, beroende på hur man väljer parametrarna α och β (se Figur 2.2). Detta gör betafördelningen flexibel och det är därför lätt att anpassa en sådan fördelning till insamlade data. [13]

Följande exempel är hämtat ur [10, s. 168-170] och beskriver en hypotetisk situation där betafördelningen kan tillämpas.

Exempel 2.19. Man vill undersöka sannolikheten för att en viss medicin fungerar för en person. Antag att medicinen har en viss sannolikhet att fungera varje gång den används och att försöken är oberoende av varandra. Man väljer att se denna sannolikhet som en betafördelad stokastisk variabel, alltså $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$, där X beskriver sannolikheten att medicinen fungerar vid ett försök. Parametrarna α och β väljs utifrån det man vet om situationen, eventuellt har man information om vilken form täthetsfunktionen för sannolikheten bör ha.



Figur 2.2: Betafördelningens täthetsfunktion med olika α och β .

Medicinen ges till n stycken försökspersoner och data över för hur många personer medicinen fungerar samlas in. Låt den stokastiska variabeln Y beteckna antalet lyckade försök. Eftersom försöken är oberoende och sannolikheten för att ett försök lyckas är lika stort för alla försök, är antalet lyckade försök givet $X = x$ binomialfördelat. Då erhålls följande täthetsfunktion

$$f_{Y|X}(i|x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i},$$

där i är antalet lyckade försök och n det totala antalet försök.

Nu fås

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, i) &= f_{Y|X}(i|x) \cdot f_X(x) \\ &= \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \cdot \frac{1}{\text{B}(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \\ &= \binom{n}{i} \frac{1}{\text{B}(\alpha, \beta)} x^{\alpha+i-1} (1-x)^{\beta+n-i-1}. \end{aligned}$$

Om man betecknar antalet misslyckade försök, $n - i$, med j , kan man skriva

$$f_{X,Y}(x, i) = \binom{n}{i} \frac{1}{\text{B}(\alpha, \beta)} x^{\alpha+i-1} (1-x)^{\beta+j-1}.$$

Vidare fås

$$\begin{aligned}
 f_Y(i) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x, i) dx \\
 &= \int_0^1 \binom{n}{i} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha+i-1} (1-x)^{\beta+j-1} dx \\
 &= \binom{n}{i} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{\alpha+i-1} (1-x)^{\beta+j-1} dx \\
 &= \binom{n}{i} \frac{B(\alpha+i, \beta+j)}{B(\alpha, \beta)},
 \end{aligned}$$

där den sista likheten fås med hjälp av betafunktionens definition (Definition 2.8).

Nu erhålls ett intressant resultat:

$$\begin{aligned}
 f_{X|Y}(x|i) &= \frac{f_{X,Y}(x, i)}{f_Y(i)} \\
 &= \frac{1}{B(\alpha+i, \beta+j)} x^{\alpha+i-1} (1-x)^{\beta+j-1}.
 \end{aligned}$$

Detta är igen en betafördelning! Efter att man gett medicinen åt n stycken försökspersoner och samlat in data för antalet lyckade försök i och antalet misslyckade försök j , kan man alltså modifiera sin fördelningsfunktion genom att använda de nya parametrarna $\alpha+i$ och $\beta+j$.

Notera att väntevärdet för denna nya betafördelning är

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \frac{\alpha+i}{\alpha+i+\beta+j} \\
 &= \frac{\alpha+i}{\alpha+\beta+n}.
 \end{aligned}$$

Om man har ett stort antal försökspersoner, kan man alltså förvänta sig att sannolikheten att medicinen fungerar är ungefär $\frac{i}{n}$, alltså förhållandet mellan antalet lyckade försök och antalet försökspersoner. Något annat resultat skulle vara högst orimligt.

Exemplet visar att betafördelningen är speciellt användbar inom bayesiansk statistik då man använder sig av metoden bayesiansk inferens. Metoden går ut på att använda en a-priori-fördelning och en likelihood-fördelning samt insamlade data för att få fram en a-posteriori-fördelning. Om a-priori-fördelningens täthetsfunktion är f_X , så är likelihood-fördelningens täthetsfunktion $f_{Y|X}$ och a-posteriori-fördelningens täthetsfunktion är $f_{X|Y}$. Den stokastiska variabeln X

beskriver någon osäker parameter och den stokastiska variabeln Y beskriver de experimentella försökens utfall. [12]

Betafördelningens användbarhet syns tydligt i litteraturen. Man hittar många studier där betafördelningen använts, bl.a. inom toxikologi [11, s. 423-436], bioanalys [11, s. 437-455], ekonomi [11, s. 457-483] och meteorologi [18].

2.5.2 Strängteori

Under historiens lopp har man inom fysiken försökt konstruera en övergripande teori som skulle förklara alla fysikaliska fenomen på makro- och mikronivå [29]. Ett resultat av detta är Standardmodellen, som beskriver hur alla subatomära partiklar växelverkar med varandra. Modellen innefattar tre fundamentala växelverkningsarter: Stark växelverkan, svag växelverkan och elektromagnetisk växelverkan. Man har dock inte lyckats förena modellen med Albert Einsteins allmänna relativitetsteori om gravitation [28]. En alternativ övergripande teori, som innefattar även gravitationen, är strängteori [9]. Strängteorins historia är kopplad till en intressant upptäckt gällande betafunktionen.

I [9] framför Greene att man på 1960-talet undersökte den starka växelverkan som binder ihop protoner och neutroner i atomkärnan. På CERN arbetade en fysiker vid namn Gabriele Veneziano med detta. Materialet han hade till förfogande bestod av experimentell data som samlats in från partikelacceleratorer runt om i världen. Enligt Dattoli och del Franco [7] insåg Veneziano att egenskaperna hos mesoner i stark växelverkan med varandra kan förklaras om man tolkar betafunktionen som partiklarnas spridningsamplitud. Detta visade sig vara ett stort genombrott. I [7] poängteras det anmärkningsvärda i att Veneziano kom till sitt resultat med hjälp av endast en kvalificerad gissning som baserade sig på vissa fysiska egenskaper som råkade passa in på en känd funktion.

Senare visade Leonard Susskind, Holger Nielsen och Yoichiro Nambu att Venezianos resultat kunde tolkas som vibrationer av tunna strängar. Matematiskt sett, kunde man alltså tolka situationen som att mesonerna var ihopkopplade med strängar. Detta ledde till födelsen av strängteori, som beskriver alla partiklar i naturen som strängar med olika sorters vibrationer. Dessa vibrationer bestämmer partiklarnas massa och laddning. Enligt strängteoretikerna, skulle också masslösa partiklar kunna beskrivas på detta sätt och därför kan strängteorin vara den övergripande teorin om fysikaliska fenomen man suktar efter. [9]

Strängteorin har genomgått en hel del utveckling under dess cirka femtioåriga liv, men det bör påpekas att den tills vidare inte verifierats av empiriska experiment. I nuläget är det alltså frågan om en rent teoretisk konstruktion.[9]

Kapitel 3

Sturms sats med tillämpningar

3.1 Några definitioner och resultat

Detta kapitel handlar om polynom och polynomdivision. Varje polynom kan framställas endast på ett sätt som är en linjär kombination av funktioner av formen x^j . Speciellt gäller att gradtalet av ett polynom är entydigt bestämt. Gradtalet av ett reellt polynom P betecknas i detta kapitel som $\deg(P)$.

Följande resultat gäller: Antag att $S(x)$ och $P(x) \neq 0$ är godtyckliga polynom. Då finns det entydiga polynom q och r sådana att $\deg(r) < \deg(P)$ och

$$S(x) = q(x)P(x) + r(x)$$

för alla $x \in \mathbb{R}$. Polynomet r kallas resten i divisionen $\frac{S(x)}{P(x)}$ och kommer härafter att betecknas som $\text{rem}(S, P)$.

Definition 3.1. *En delare eller faktor i polynomet P är ett polynom d sådant att $\text{rem}(P, d) = 0$. För två reella polynom S och P definieras en största gemensamma delare som ett polynom d som är en delare i både S och P och för vilket det gäller att alla andra delare i S och P även är delare i d .*

Observera att en största gemensamma delare enligt denna definition inte är entydig. Man kan dock visa att entydighet gäller, om man även kräver att den ledande termen i den största gemensamma delaren ska ha koefficienten 1.

3.2 Sturmföljder

Den fransk-schweiziska matematikern Charles-François Sturm (1803-1855) har gett namn åt en viss typ av polynomföljd [19], där polynomen kan betraktas på ett intervall eller på hela reella tallinjen. Definitionen av polynomföljden ges av Raghavan [22, s. 2] som

Definition 3.2. Låt P_0 vara ett polynom olika noll och låt P_0, P_1, \dots, P_n vara en följd av polynom med följande egenskaper:

- a) P_0 har inga multipla nollställen.
 - b) P_n är ett strängt positivt eller ett strängt negativt polynom.
 - c) Inga konsekutiva polynom P_j, P_{j+1} i följderna har samma nollställen.
 - d) Om x_0 är ett nollställe till något polynom $P_j(x)$, i följderna, har $P_{j-1}(x_0)$ och $P_{j+1}(x_0)$ olika förtecken.
 - e) Om x_0 är ett nollställe till $P_0(x)$, har $P_1(x_0)$ samma förtecken som $P'_0(x_0)$.
- Då kallas följderna P_0, P_1, \dots, P_n en Sturmföljd eller en Sturmkedja av polynomet $P = P_0$.

Anmärkning 3.3. För att förtydliga skillnaden mellan en Sturmföljd beskriven ovan och liknande konstruktioner, refererar denna avhandling ofta till Sturmföljder som "allmänna Sturmföljder".

Ofta används en specifik sorts följd, som i denna avhandling benämns som en klassisk Sturmföljd.

Definition 3.4. Låt P vara ett polynom olika noll och definiera $P_0 = P$. Om P_0 är ett konstant polynom, låt detta enda element utgöra en följd. I andra fall, definiera vidare $P_1 = P'$ och konstruera en följd genom

$$\begin{aligned} P_2 &= -\text{rem}(P_0, P_1), \\ P_3 &= -\text{rem}(P_1, P_2), \\ &\vdots \\ P_n &= -\text{rem}(P_{n-2}, P_{n-1}), \\ 0 &= -\text{rem}(P_{n-1}, P_n) \end{aligned}$$

där n är det minsta antalet divisioner som krävs för att få en rest med värdet 0. Följderna P_0, P_1, \dots, P_n kallas den klassiska Sturmföljden av polynomet P .

En klassisk Sturmföljd kan konstrueras av vilket polynom som helst, så länge polynomet inte är identiskt med noll [22, s. 1]. Eftersom $\deg(\text{rem}(P_j, P_{j+1})) < \deg(P_{j+1})$, avtar polynomens gradtal i den klassiska Sturmföljden. En klassisk Sturmföljd består således alltid av ett ändligt antal polynom. Observera att en klassisk Sturmföljd inte alltid är en allmän Sturmföljd.

Anmärkning 3.5. Det finns viss variation i terminologin i litteraturen gällande Sturmföljder. Božin och Karapetrović kallar följderna i Definition 3.4 för en Sturmföljd i [5], inte klassisk Sturmföljd. De nämner inte den allmänna sortens följd, som här har definierats som en Sturmföljd i Definition 3.2, över huvudtaget. Prasolov gör på samma sätt i [21].

Konstruktionen av en klassisk Sturmföljd är egentligen Euklides algoritm för polynomdivision, förutom att varannan erhållen restterm i Euklides algoritm har motsatt tecken jämfört med motsvarande element i den klassiska Sturmföljden [22, s. 1]. Detta innebär att den sista termen P_n i en klassisk Sturmföljd är en största gemensamma delare av polynomen P_0 och P_1 , vilket kan bevisas genom att man undersöker följdens rekursiva egenskaper.

Sats 3.6. *Den klassiska Sturmföljden P_0, P_1, \dots, P_n av polynomet P har följande egenskaper:*

- a) *Om polynomet f är en faktor i två konsekutiva polynom P_j och P_{j+1} i följderna, är f en faktor i alla polynom i följderna.*
- b) *Det sista polynomet P_n delar alla polynom i följderna.*

Bevis. a) Antag att f är en faktor i två konsekutiva polynom P_j och P_{j+1} i Sturmföljden. Då existerar polynom p_j samt p_{j+1} för vilka $P_j = f \cdot p_j$ och $P_{j+1} = f \cdot p_{j+1}$. Enligt Definition 3.4 är $P_{j+2} = -\text{rem}(P_j, P_{j+1})$, så

$$\begin{aligned} P_{j+2} &= q_{j+2} \cdot P_{j+1} - P_j \\ &= f \cdot (q_{j+2} \cdot p_{j+1} - p_j). \end{aligned}$$

Då det även gäller att $P_{j+1} = -\text{rem}(P_{j-1}, P_j)$, fås

$$\begin{aligned} P_{j+1} &= q_{j+1} \cdot P_j - P_{j-1} \\ \iff P_{j-1} &= q_{j+1} \cdot P_j - P_{j+1} \\ &= f \cdot (q_{j+1} \cdot p_j - p_{j+1}). \end{aligned}$$

Eftersom varje polynom i den klassiska Sturmföljden erhålls med likadana rekursiva beräkningar som ovan, kan man med hjälp av induktion dra slutsatsen att f är en faktor i alla dessa polynom.

b) Enligt Definition 3.4 gäller $\text{rem}(P_{n-1}, P_n) = 0$, så P_n delar P_{n-1} . Polynomet P_n delar naturligtvis även sig självt. Då delar P_n två konsekutiva polynom i den klassiska Sturmföljden, så enligt egenskap a) måste P_n dela alla polynom i följderna. \square

Dessa två egenskaper ger tillsammans följsatsen

Korollarium 3.7. *Det sista polynomet P_n i den klassiska Sturmföljden av polynomet P är en största gemensamma delare av P och P' .*

Denna konstruktion innebär även att ett polynom med multipla rötter har en klassisk Sturmföljd med speciella egenskaper.

Sats 3.8. *Låt P_0, P_1, \dots, P_n vara den klassiska Sturmföljden av polynomet P och låt $m = 2, 3, 4, \dots$ samt $x_0 \in \mathbb{R}$. Följande tre villkor är ekvivalenta:*

- a) $(x - x_0)^{m-1}$ är en faktor i två konsekutiva polynom $P_j(x)$ och $P_{j+1}(x)$ i den klassiska Sturmföljden.
- b) $(x - x_0)^m$ är en faktor i $P(x)$.
- c) $(x - x_0)^{m-1}$ är en faktor i alla polynom i den klassiska Sturmföljden.

Bevis. Ekvivalenserna kan bevisas genom tre implikationer.

a) \rightarrow c): Implikationen ges direkt av Sats 3.6.

c) \rightarrow b): Antag att $(x - x_0)^{m-1}$ är en faktor i alla polynom i Sturmföljden. Då är $(x - x_0)^{m-1}$ en faktor i $P_1(x) = P'(x)$, så det finns ett polynom p_1 med $P'(x) = (x - x_0)^{m-1} \cdot p_1(x)$. Om $\deg(p_1) = t$, resulterar t stycken deriveringar av

p_1 i en konstant. Med hjälp av partialintegrering fås nu

$$\begin{aligned}
 P(x) &= P(x) - P(x_0) = \int_{x_0}^x P'(y) dy \\
 &= \frac{1}{m}(x - x_0)^m p_1(x) - \int_{x_0}^x \frac{1}{m}(y - x_0)^m p_1'(y) dy \\
 &= \frac{1}{m}(x - x_0)^m p_1(x) - \frac{1}{m(m+1)}(x - x_0)^{m+1} p_1'(x) \\
 &\quad + \int_{x_0}^x \frac{1}{m(m+1)}(y - x_0)^{m+1} p_1''(y) dy \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{i=0}^{t-1} \left((-1)^i \frac{(x - x_0)^{m+i} p_1^{(i)}(x)}{\prod_{k=0}^i (m+k)} \right) + (-1)^t \int_{x_0}^x \frac{(y - x_0)^{m+t-1}}{\prod_{k=0}^{t-1} (m+k)} p_1^{(t)}(y) dy \\
 &= \sum_{i=0}^{t-1} \left((-1)^i \frac{(x - x_0)^{m+i} p_1^{(i)}(x)}{\prod_{k=0}^i (m+k)} \right) + (-1)^t \frac{(x - x_0)^{m+t}}{\prod_{k=0}^t (m+k)} p_1^{(t)}(x) \\
 &= \sum_{i=0}^t (-1)^i \frac{(x - x_0)^{m+i} p_1^{(i)}(x)}{\prod_{k=0}^i (m+k)}.
 \end{aligned}$$

Således gäller

$$P(x) = (x - x_0)^m \sum_{i=0}^t (-1)^i \frac{(x - x_0)^i p_1^{(i)}(x)}{\prod_{k=0}^i (m+k)},$$

alltså är $(x - x_0)^m$ en faktor i $P(x)$.

b) \rightarrow a) Antag att $(x - x_0)^m$ är en faktor i $P(x) = P_0(x)$. Då existerar ett polynom $p_0(x)$ sådant att $P(x) = (x - x_0)^m p_0(x)$, så

$$\begin{aligned}
 P_1(x) &= P'(x) = m(x - x_0)^{m-1} p_0(x) + (x - x_0)^m p_0'(x) \\
 &= (x - x_0)^{m-1} (m p_0(x) + (x - x_0) p_0'(x)).
 \end{aligned}$$

Därmed är $(x - x_0)^{m-1}$ en faktor i två konsekutiva polynom i den klassiska Sturmföljden, nämligen $P_0(x)$ och $P_1(x)$. \square

Korollarium 3.9. Låt P_0, P_1, \dots, P_n vara den klassiska Sturmföljden av polynomet P och låt $x_0 \in \mathbb{R}$. Följande tre villkor är ekvivalenta:

- x_0 är ett gemensamt nollställe till två konsekutiva polynom P_j och P_{j+1} i Sturmföljden.
- x_0 är ett nollställe med multipliciteten ≥ 2 till P .
- x_0 är ett nollställe till alla polynom i Sturmföljden.

En klassisk Sturmföljd av ett polynom P med multipla nollställen är inte en allmän Sturmföljd, ty villkor a) i Definition 3.2 är inte uppfyllt. Även omvändningen gäller:

Sats 3.10. *En klassisk Sturmföljd av ett polynom P , vars reella nollställen har multipliciteten 1, är en allmän Sturmföljd.*

Bevis. Raghavan bevisar satsen i [22, s. 2-3] genom att visa att samtliga villkor i Definition 3.2 är uppfyllda.

Låt P_0, P_1, \dots, P_n vara den klassiska Sturmföljden av polynomet $P = P_0$, vars reella rötter har multipliciteten 1. Man kan då genast konstatera att villkor a) i 3.2 är uppfyllt. En klassisk Sturmföljd kan endast bildas av polynom som inte är identiska med 0, så även villkoret att P_0 i den allmänna Sturmföljden inte är identiskt med 0 är uppfyllt.

Antag att det sista polynomet P_n i följderna inte är strängt positivt eller strängt negativt. Då måste P_n ha ett nollställe $x_0 \in \mathbb{R}$ och då P_n är en gemensam delare till P_0 och P_1 , är x_0 även en rot till båda dessa polynom. Enligt Korollarium 3.9 är x_0 i så fall ett multipelt nollställe till P , vilket strider mot antagandet att alla reella nollställen till P är enkla. Således måste P_n vara ett strängt positivt eller ett strängt negativt polynom och egenskap b) i Definition 3.2 gäller.

Antagandet att de reella nollställena till P är enkla innebär, enligt Korollarium 3.9, även att inga konsekutiva polynom i följderna har samma nollställen. Därmed är egenskap c) i Definition 3.2 uppfylld.

Betrakta tre konsekutiva polynom P_{j-1} , P_j och P_{j+1} i följderna sådana att $1 < j < n$. Enligt Korollarium 3.9 är ett nollställe x_0 till P_j inte ett nollställe till P_{j+1} och inte heller till P_{j-1} . Vidare ger $P_{j+1}(x_0) = q_{j+1}(x_0)P_j(x_0) - P_{j-1}(x_0)$ att $P_{j+1}(x_0) = -P_{j-1}(x_0)$. Alltså har $P_{j+1}(x_0)$ och $P_{j-1}(x_0)$ motsatta tecken och egenskap d) i Definition 3.2 gäller.

Eftersom $P_1 = P'$ i den klassiska Sturmföljden, är det klart att egenskap e) i Definition 3.2 är uppfylld.

Alla egenskaper i Definition 3.2 gäller således för den klassiska Sturmföljden, så den är en allmän Sturmföljd. \square

3.3 Sturms sats

Sturms metod att räkna antalet nollställen till polynom utgår ifrån en sats som finns i två versioner. Det är ofta den andra versionen, den som handlar om klassiska Sturmföljder, som används i praktiken.

Den första versionen av Sturms sats ges av Bartlett [3, s. 3] som följande:

Sats 3.11. (Sturms sats, version 1) *Låt $P \neq 0$ vara ett polynom med enbart enkla nollställen och låt P_0, P_1, \dots, P_n vara en Sturmföljd av detta polynom. Beteckna antalet teckenbyten i Sturmföljden för ett visst variabelvärde x med $w(x)$. Antalet reella nollställen till P mellan a och b ($P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$ och $a < b$) fås som $w(a) - w(b)$.*

Bevis. Bartlett presenterar detta bevis av satsen i [3, s. 3].

Det kan endast ske teckenbyten i Sturmföljden om förtecknet till något polynom $P_i(x)$ förändras, vilket bara kan inträffa om x rör sig över ett nollställe till P_i . Beviset går därför ut på att visa att antalet teckenbyten $w(x)$ i Sturmföljden minskar med ett då x rör sig över ett nollställe till $P(x)$, medan $w(x)$ hålls oförändrat om x rör sig över nollställen till övriga polynom.

Låt $x_0 \in \mathbb{R}$ vara ett nollställe till ett polynom P_j $0 < j < n$ i Sturmföljden. Enligt egenskap d) i Definition 3.2, har $P_{j-1}(x_0)$ och $P_{j+1}(x_0)$ olika tecken. Eftersom alla polynom är kontinuerliga, kan ett polynom i Sturmföljden bara byta tecken vid ett nollställe. För ett tillräckligt litet $|\epsilon| > 0$ har då även $P_{j-1}(x_0 + \epsilon)$ och $P_{j+1}(x_0 + \epsilon)$ motsatta tecken. Detta innebär att antalet teckenbyten i följderna $P_{j-1}(x), P_j(x), P_{j+1}(x)$ är konstant 1 då man låter x röra sig över x_0 . Observera att P_n , enligt egenskap b) i Definition 3.2, inte har något nollställe och kan därför inte påverka antalet teckenbyten i följderna. Alltså kan det totala antalet teckenbyten i Sturmföljden inte förändras då man låter x röra sig över nollställen för övriga polynom i följderna än $P_0(x)$.

Antag att $P \equiv C$, där C är någon reell konstant olika noll. Polynomet P har inga nollställen i detta fall och enligt föregående stycke kommer då $w(a) - w(b) = 0$, oberoende av hur a och b är valda. Alltså fås antalet nollställen till P som $w(a) - w(b)$.

Antag nu att P inte är en konstant och låt x_0 vara ett nollställe till P ($= P_0$). Enligt egenskap e) i Definition 3.2, har $P_1(x_0)$ samma tecken som $P'(x_0)$. Enligt egenskap c) gäller $P_1(x_0) \neq 0$ och enligt egenskap a) gäller $P'(x_0) \neq 0$. Då

måste det existera ett tillräckligt litet $\epsilon > 0$ för att det för $x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ ska gälla att $P_1(x)$ och $P'(x)$ har samma förtecken och $P_1(x), P'(x) \neq 0$. Detta innebär att polynomen $P_0(x)$ och $P_1(x)$ har olika tecken för $x \in [x_0 - \epsilon, x_0]$, medan polynomen har samma tecken för $x \in (x_0, x_0 + \epsilon]$. Alltså minskar antalet teckenbyten i Sturmföljden med ett om och endast om x rör sig över ett nollställe till P . Antalet nollställen till P i intervallet $[a, b]$ fås därför som $w(a) - w(b)$ ($P(a) \neq 0, P(b) \neq 0$ och $a < b$). \square

Božin och Karapetrović [5, s. 530] uttrycker den andra versionen av Sturms sats på följande sätt:

Sats 3.12. (Sturms sats, version 2) *Beteckna antalet teckenbyten för ett specifikt variabelvärde x i den klassiska Sturmföljden av polynomet $P(x)$ med $w(x)$. Om man inte räknar med multipliciteter, fås antalet nollställen mellan a och b ($P(a) \neq 0, P(b) \neq 0$ och $a < b$) som $w(a) - w(b)$.*

Bevis. Detta bevis återfinns i [3, s. 3-4].

Antag att alla nollställen till P i intervallet $[a, b]$ ($P(a) \neq 0, P(b) \neq 0$ och $a < b$) är enkla. Enligt Sats 3.10, är den klassiska Sturmföljden en allmän Sturmföljd på detta intervall. Enligt Sats 3.11 fås antalet nollställen mellan a och b som $w(a) - w(b)$.

Antag nu att P har åtminstone ett multipelt nollställe i intervallet (a, b) . Enligt Sats 3.6, delar det sista polynomet P_n alla polynom i den klassiska Sturmföljden. Således existerar det polynom p_0, p_1, \dots, p_n sådana att $P_i = P_n \cdot p_i$. Det är klart att ett reellt nollställe till p_0 också är ett nollställe till P . Antag att $x_0 \in \mathbb{R}$ är ett nollställe till P . Då kan $P(x)$ faktoriseras som $P(x) = (x - x_0)^m f_0(x)$, där m är nollställets multiplicitet och f_0 är ett polynom med $f_0(x_0) \neq 0$. Sats 3.8 ger att $(x - x_0)^{m-1}$ delar $P_n(x)$ (om $m = 1$ fås $(x - x_0)^{m-1} = 1$, som naturligtvis delar alla polynom). Då gäller $P_n(x) = (x - x_0)^{m-1} f_1(x)$, där f_1 är ett polynom.

Observera att $f_1(x_0) \neq 0$, eftersom P_n är en största gemensamma delare till P och P' . Om $f_1(x_0) = 0$, delar $(x - x_0)^m$ både $P(x)$ och $P'(x)$. Enligt Sats 3.8 skulle x_0 då vara ett nollställe med multipliciteten $m + 1$ till P , vilket är en motsägelse.

Vidare gäller

$$p_0(x) = \frac{P(x)}{P_n(x)} = \frac{(x - x_0)^m f_0(x)}{(x - x_0)^{m-1} f_1(x)} = \frac{(x - x_0) f_0(x)}{f_1(x)}, \quad (3.1)$$

så x_0 är även ett nollställe till p_0 . Alltså har P_0 och p_0 exakt samma nollställen, då man inte tar multipliciteter i beaktande.

Följden p_0, p_1, \dots, p_n är en allmän Sturmföljd, eftersom den har alla nödvändiga egenskaper:

Egenskap a): Enligt (3.1) ovan, kommer alla multipla nollställen i P_0 att vara enkla nollställen till p_0 . Eftersom $P_0 = P_n \cdot p_0$, är det inte heller möjligt att p_0 skulle ha något multipelt nollställe som inte är ett multipelt nollställe till P_0 . Alltså måste alla nollställen till p_0 vara enkla.

Egenskap b): Det gäller att $p_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_n(x)} = 1$, så $p_n(x)$ är ett strängt positivt polynom.

Egenskap c): Eftersom det för $1 < j < n$ gäller att

$$p_{j+1}(x) = \frac{P_{j+1}(x)}{P_n(x)} = \frac{q_{j+1}(x)P_j(x) - P_{j-1}(x)}{P_n(x)} = q_{j+1}(x)p_j(x) - p_{j-1}(x),$$

gäller samma rekursionsformel som för klassiska Sturmföljder. Därför gäller det även för följderna p_0, p_1, \dots, p_n att om $x_0 \in \mathbb{R}$ är ett nollställe till två konsekutiva polynom $p_j(x)$ och p_{j+1} , måste x_0 vara ett nollställe till alla polynom i följderna. Det är dock omöjligt att p_n har något nollställe, då $p_n(x) \equiv 1$. Således kan två konsekutiva polynom i följderna p_0, p_1, \dots, p_n inte ha gemensamma nollställen.

Egenskap d): Antag att $x_0 \in \mathbb{R}$ är ett nollställe till p_j . Enligt den ovannämnda rekursionsformeln fås

$$p_{j+1}(x_0) = q_{j+1}(x_0)p_j(x_0) - p_{j-1}(x_0) = -p_{j-1}(x_0).$$

Därmed har $p_{j+1}(x_0)$ och $p_{j-1}(x_0)$ motsatta förtecken.

Egenskap e): Antag att x_0 är ett nollställe till p och då även ett nollställe till P med någon multiplicitet m . Som konstaterats ovan, gäller $P(x) = (x - x_0)^m f_0(x)$ och $P_n(x) = (x - x_0)^{m-1} f_1(x)$, där f_0 och f_1 är polynom med $f_0(x_0), f_1(x_0) \neq 0$. Nu erhålls

$$p_1(x) = \frac{P'(x)}{P_n(x)} = \frac{m(x - x_0)^{m-1} f_0(x) + (x - x_0)^m f_0'(x)}{(x - x_0)^{m-1} f_1(x)} = \frac{m f_0(x) + (x - x_0) f_0'(x)}{f_1(x)}$$

och

$$p_1(x_0) = \frac{m f_0(x_0)}{f_1(x_0)}.$$

Vidare ger (3.1) ovan att

$$p_0(x) = \frac{(x - x_0) f_0(x)}{f_1(x)},$$

så

$$p'_0(x) = \frac{f_0(x)}{f_1(x)} + \frac{(x-x_0)f'_0(x)}{f_1(x)} - \frac{(x-x_0)f_0(x)f'_1(x)}{(f_1(x))^2}$$

och

$$p'_0(x_0) = \frac{f_0(x_0)}{f_1(x_0)}.$$

Eftersom $m > 0$, har $p_1(x_0)$ samma förtecken som $p'_0(x_0)$.

Beteckna antalet teckenbyten i $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ med $w_p(x)$. Då p_0, p_1, \dots, p_n är en allmän Sturmföljd, ger Sats 3.11 att antalet nollställen till p_0 i intervallet (a, b) fås av $w_p(a) - w_p(b)$. Då $p_0(x)$ och $P(x)$ har exakt samma nollställen, ges även antalet nollställen till $P(x)$ i intervallet (a, b) av $w_p(a) - w_p(b)$. Emedan alla element i följderna P_0, P_1, \dots, P_n fås genom $P_i = P_n \cdot p_i$, där P_n är oberoende av i , måste det gälla att $w(x) = w_p(x)$. Antalet nollställen till P i intervallet (a, b) fås alltså som $w(a) - w(b)$, då rötternas multipliciteter inte tas i beaktande. \square

I en del litteratur, exempelvis [21], nämns inte den första versionen av Sturms sats över huvudtaget och med "Sturms sats" syftar man då på den andra versionen. I [3, s. 3] betecknas den andra versionen som en följsats av den första.

3.4 Tillämpningar

Sturms metod att räkna antalet reella nollställen till ett polynom $P(x)$ på intervallet (a, b) går ut på att skapa den klassiska Sturmföljden av polynomet, evaluera följderna i punkterna a och b och sedan beräkna $w(a) - w(b)$, vilket enligt Sturms sats version 2 (Sats 3.12) då ger antalet nollställen i intervallet. Observera att man genom att använda $a \rightarrow -\infty$ och $b \rightarrow \infty$ får antalet nollställen till P på hela reella tallinjen. För att sedan hitta dessa nollställen kan man dela upp grundintervallet och fortsätta använda Sturms metod på delintervallen, tills man hittat intervall som innehåller exakt ett nollställe. Sedan kan man använda någon numerisk metod på intervallen för att få fram nollställena.

Exempel 3.13. *Betrakta polynomet $P(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$.*

a) *Hur många reella nollställen har P i intervallet $(0, 1)$?*

b) *Hur många reella nollställen har P på hela reella tallinjen?*

Lösning: Den klassiska Sturmföljden av P konstrueras enligt algoritmen i Definition 3.4. Då fås direkt

$$P_0(x) = P(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$$

samt

$$P_1(x) = P'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 8x.$$

Polynomdivision ger

$$2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)(8x^3 - 12x^2 + 8x) + \left(\frac{1}{2}x^2 + x - 1\right),$$

så

$$P_2(x) = -\text{rem}(P_0(x), P_1(x)) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1.$$

På samma sätt fås

$$P_3(x) = -80x + 56$$

samt

$$P_4(x) = -\frac{11}{200}.$$

a) Insättning av intervallets första ändpunkt $x = 0$ ger

$$P_0(0) = -1$$

$$P_1(0) = 0$$

$$P_2(0) = 1$$

$$P_3(0) = 56$$

$$P_4(0) = -\frac{11}{200}.$$

Man ser att förtecknet förändras från negativt till positivt och sedan till negativt igen. Alltså är antalet teckenbyten $w(0) = 2$.

Insättning av den andra ändpunkten $x = 1$ ger i sin tur

$$P_0(1) = 1$$

$$P_1(1) = 4$$

$$P_2(1) = -\frac{1}{2}$$

$$P_3(1) = -24$$

$$P_4(1) = -\frac{11}{200}.$$

Förtecknet förändras en gång, så $w(1) = 1$. Enligt Sturms sats (Sats 3.12) erhålls antalet nollställen till P i intervallet $(0, 1)$ som $w(0) - w(1) = 2 - 1 = 1$.

b) För att erhålla antalet nollställen på hela reella tallinjen, låter man ändpunkterna gå mot $-\infty$ respektive ∞ . Då den första ändpunkten går mot $-\infty$ fås

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P_0(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 8x^3 - 12x^2 + 8x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P_2(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x^2 - x + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P_3(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -80x + 56 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P_4(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{11}{200} = -\frac{11}{200}$$

Eftersom förtecknen ändras tre gånger, gäller $\lim_{x \rightarrow -\infty} w(x) = 3$.

Då den andra ändpunkten går mot ∞ , fås vidare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_0(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 8x^3 - 12x^2 + 8x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_2(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{2}x^2 - x + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_3(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} -80x + 56 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_4(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{11}{200} = -\frac{11}{200}$$

Här förändras förtecknet endast en gång i kedjan, dvs. $\lim_{x \rightarrow \infty} w(x) = 1$. Sturms sats (Sats 3.12) ger att polynomet P har totalt $3 - 1 = 2$ reella nollställen.

Det kan vara mödosamt att använda Sturms metod att räkna antalet nollställen i praktiken. Polynomdivisionen som krävs för att skapa Sturmföljden är inte alltid helt enkel att utföra för hand och koefficienterna i polynomen i den klassiska Sturmföljden kan bli svårhanterliga bråk. För att minska risken för mänskliga fel, kan man skriva ett program som utför beräkningarna. Koden till ett sådant program i Wolfram Mathematica återfinns i Bilaga A. Programmet används i lösningen till följande exempel, som Božin och Karapetrović använder i [5] för att visa en av de nya olikheterna.

Exempel 3.14. Visa att polynomen $\eta(x) = x^6 - 11x^5 + 39x^4 - 25x^3 - 117x^2 + 171x + 2$ och $\xi(x) = 2x^7 - 25x^6 + 104x^5 - 103x^4 - 302x^3 + 565x^2 + x - 2$ är strängt positiva på intervallet $(2, 4)$.

Lösning: Genom direkt beräkning fås $\eta(2) = 12 > 0$ och $\eta(4) = 30 > 0$. Således är η strängt positiv i intervallet $(2, 4)$, om η inte har nollställen i detta intervall. Božin och Karapetrović visar detta i [5, s. 530-531] med hjälp av Sturms metod.

Om man låter programmet i Wolfram Mathematica (se Bilaga A) konstruera Sturmföljden för polynomet η , erhålls

$$\begin{aligned}\eta_0(x) &= x^6 - 11x^5 + 39x^4 - 25x^3 - 117x^2 + 171x + 2 \\ \eta_1(x) &= 6x^5 - 55x^4 + 156x^3 - 75x^2 - 234x + 171 \\ \eta_2(x) &= \frac{137}{36}x^4 - \frac{211}{6}x^3 + \frac{1211}{12}x^2 - 71x - \frac{217}{4} \\ \eta_3(x) &= -\frac{18864}{18769}x^3 - \frac{471744}{18769}x^2 + \frac{2630664}{18769}x - \frac{3328632}{18769} \\ \eta_4(x) &= -\frac{534184509}{137288}x^2 + \frac{23375194135}{1235592}x - \frac{2362435261}{102966} \\ \eta_5(x) &= -\frac{16805420098648}{136830827795841}x + \frac{14769101055592}{45610275931947} \\ \eta_6(x) &= \frac{115866443986827591180987}{1028575493459159159409604}\end{aligned}$$

Detta är ett exempel på en klassisk Sturmföljd som skulle vara mödosam att beräkna för hand.

Vidare räknar programmet ut att insättning av den första ändpunkten $x = 2$ resulterar i

$$\begin{aligned}\eta_0(2) &= 12 \\ \eta_1(2) &= -37 \\ \eta_2(2) &= -\frac{469}{36} \\ \eta_3(2) &= -\frac{105192}{18769} \\ \eta_4(2) &= -\frac{414738593}{617796} \\ \eta_5(2) &= \frac{78076372040}{998765166393} \\ \eta_6(2) &= \frac{115866443986827591180987}{1028575493459159159409604}\end{aligned}$$

Det finns två teckenbyten i följderna, så $w_\eta(2) = 2$.

Vid insättning av den andra ändpunkten, $x = 4$, fås

$$\begin{aligned}\eta_0(4) &= 30 \\ \eta_1(4) &= 83 \\ \eta_2(4) &= -\frac{1}{36} \\ \eta_3(4) &= -\frac{1561176}{18769} \\ \eta_4(4) &= -\frac{1471376986}{154449} \\ \eta_5(4) &= -\frac{22914377227816}{136830827795841} \\ \eta_6(4) &= \frac{115866443986827591180987}{1028575493459159159409604}\end{aligned}$$

Även med denna ändpunkt är antalet teckenbyten två, alltså $w_\eta(4) = 2$.

Eftersom $w_\eta(2) - w_\eta(4) = 2 - 2 = 0$, kan man med hjälp av Sturms sats (Sats 3.12) konstatera att polynomet $\eta(x) = x^6 - 11x^5 + 39x^4 - 25x^3 - 117x^2 + 171x + 2$ inte har några nollställen på intervallet $(2, 4)$. Eftersom $\eta(2), \eta(4) > 0$ implicerar detta att $\eta(x)$ är strängt positivt för $x \in (2, 4)$.

Fallet med ξ är analogt. Det gäller att $\xi(2) = 180$ och $\xi(4) = 210$, så ξ är strängt positivt för $x \in (2, 4)$, om polynomet inte har reella nollställen i detta intervall. Koden i Bilaga A ger följande resultat för ändpunkterna $x = 2$ och $x = 4$ i den klassiska Sturmföljden av polynomet ξ (se Bilaga A för exakta värden)

$$\begin{array}{ll}\xi_0(2) > 0 & \xi_0(4) > 0 \\ \xi_1(2) < 0 & \xi_1(4) > 0 \\ \xi_2(2) < 0 & \xi_2(4) < 0 \\ \xi_3(2) < 0 & \xi_3(4) < 0 \\ \xi_4(2) < 0 & \xi_4(4) < 0 \\ \xi_5(2) > 0 & \xi_5(4) < 0 \\ \xi_6(2) > 0 & \xi_6(4) > 0 \\ \xi_7(2) > 0 & \xi_7(4) > 0,\end{array}$$

så $w_\xi(2) - w_\xi(4) = 2 - 2 = 0$. Alltså har inte $\xi = 2x^7 - 25x^6 + 104x^5 - 103x^4 - 302x^3 + 565x^2 + x - 2$ några nollställen i intervallet $(2, 4)$. Därmed är både $\eta(x)$ och $\xi(x)$ strängt positiva för $x \in (2, 4)$.

Kapitel 4

Två nya olikheter gällande betafunktionen

4.1 Förberedelser

Hjälpresultaten som förevisas i detta avsnitt, kommer att användas i bevisen för de nya olikheterna som Božin och Karapetrović presenterar i [5].

För att beskriva att två funktioner är växande eller avtagande samtidigt, kan följande begrepp användas.

Definition 4.1. *Två funktionen f och g är synkrona på mängden $I \subseteq \mathbb{R}$, om*

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0 \quad \forall x, y \in I.$$

Detta begrepp är centralt i en hjälpsats som presenteras av Agarwal m.fl. i [1, s. 110].

Lemma 4.2. (Tjebysjevs integralolikhet för synkrona funktioner) *Låt $f, g, h: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara funktioner sådana att $h(x) \geq 0$ för alla $x \in I$ och h, hfg, hf och hg är integrerbara på I . Om f och g är synkrona på I , gäller olikheten*

$$\int_I h(x) dx \int_I h(x) f(x) g(x) dx \geq \int_I h(x) f(x) dx \int_I h(x) g(x) dx.$$

Bevis. Betrakta integralen

$$\begin{aligned}
 & \int_I \int_I h(x)h(y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))dxdy \\
 &= \int_I \int_I h(x)h(y)f(x)g(x)dxdy - \int_I \int_I h(x)h(y)f(x)g(y)dxdy \\
 &\quad - \int_I \int_I h(x)h(y)f(y)g(x)dxdy + \int_I \int_I h(x)h(y)f(y)g(y)dxdy \\
 &= 2 \int_I h(x)dx \int_I h(x)f(x)g(x)dx - 2 \int_I h(x)f(x)dx \int_I h(x)g(x)dx.
 \end{aligned}$$

Således gäller identiteten

$$\begin{aligned}
 & \int_I h(x)dx \int_I h(x)f(x)g(x)dx - \int_I h(x)f(x)dx \int_I h(x)g(x)dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_I \int_I h(x)h(y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))dxdy.
 \end{aligned}$$

Enligt antagandet att $h(x) \geq 0$ för alla $x \in I$ samt att f och g är synkrona, kan högra ledet i likheten ovan inte vara negativt, så

$$\begin{aligned}
 & \int_I h(x)dx \int_I h(x)f(x)g(x)dx - \int_I h(x)f(x)dx \int_I h(x)g(x)dx \geq 0. \\
 \iff & \int_I h(x)dx \int_I h(x)f(x)g(x)dx \geq \int_I h(x)f(x)dx \int_I h(x)g(x)dx.
 \end{aligned}$$

□

I [1, s. 114] används Tjebysjevs integralolikhet för att bevisa följande olikhet gällande betafunktionen.

Sats 4.3. Om $0 < x, y \leq 1$, så är $B(x, y) \leq \frac{1}{xy}$.

Bevis. Definiera funktionerna $f, g, h: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ genom $f(t) = t^{x-1}$, $g(t) = t^{y-1}$ och $h(t) = te^{-t}$. För $0 < x \leq 1$ och $0 < y \leq 1$, är båda funktionerna f och g avtagande, så f och g är synkrona på denna definitionsmängd. Vidare är h , $hf(t) = t^{x+y-1}e^{-t}$, $hg(t) = t^ye^{-t}$ integrerbara på $(0, \infty)$. Nu kan Tjebysjevs integralolikhet (Sats 4.2) användas:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty h(t)dt \int_0^\infty h(t)f(t)g(t)dt \geq \int_0^\infty h(t)f(t)dt \int_0^\infty h(t)g(t)dt \\
 \iff & \int_0^\infty te^{-t}dt \int_0^\infty t^{x+y-1}e^{-t}dt \geq \int_0^\infty t^xe^{-t}dt \int_0^\infty t^ye^{-t}dt
 \end{aligned}$$

Detta kan dock skrivas med hjälp av gammafunktionen (Definition 2.6) som

$$\begin{aligned} \Gamma(2) \cdot \Gamma(x+y) &\geq \Gamma(x+1) \cdot \Gamma(y+1) \\ \iff \Gamma(x+y) &\geq x\Gamma(x) \cdot y\Gamma(y) \\ \iff \frac{1}{xy} &\geq \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \end{aligned}$$

Med hjälp av Sats 2.9 fås alltså $B(x, y) \leq \frac{1}{xy}$. \square

Nedanstående enkla resultat bevisas av Božin och Karapetrović i [5, s. 531] genom att man direkt Maclaurinutvecklar $(1-t)^\alpha$ och att studerar denna utveckling. Här visas olikheten istället genom att studera början till en form av härledning av Maclaurinutvecklingen.

Lemma 4.4. Om $\alpha \in (0, 1] \cup (2, 3)$ och $t \in (0, 1)$ gäller

$$(1-t)^\alpha \leq 1 - \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2$$

Bevis. Beviset går ut på att omskrivningen $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)du$ används flera gånger. Först fås

$$\begin{aligned} (1-t)^\alpha &= 1 + \int_0^t -\alpha(1-u)^{\alpha-1} du \\ &= 1 - \alpha \int_0^t (1-u)^{\alpha-1} du. \end{aligned}$$

Vidare gäller $(1-u)^{\alpha-1} = 1 + \int_0^u -(\alpha-1)(1-v)^{\alpha-2}dv$, så man kan skriva

$$\begin{aligned} (1-t)^\alpha &= 1 - \alpha \int_0^t \left(1 + \int_0^u -(\alpha-1)(1-v)^{\alpha-2}dv \right) du \\ &= 1 - \alpha t + \alpha(\alpha-1) \int_0^t \left(\int_0^u (1-v)^{\alpha-2}dv \right) du. \end{aligned} \tag{4.1}$$

På samma sätt erhålls $(1-v)^{\alpha-2} = 1 + \int_0^v -(\alpha-2)(1-w)^{\alpha-3}dw$, vilket ger

$$\begin{aligned} \int_0^u (1-v)^{\alpha-2}dv &= \int_0^u 1dv + \int_0^u \int_0^v -(\alpha-2)(1-w)^{\alpha-3}dw dv \\ &= u - (\alpha-2) \int_0^u \int_0^v (1-w)^{\alpha-3}dw dv, \end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\int_0^u (1-v)^{\alpha-2}dv \right) du &= \int_0^t udu + \int_0^t \left(-(\alpha-2) \int_0^u \int_0^v (1-w)^{\alpha-3}dw dv \right) du \\ &= \frac{1}{2}t^2 - (\alpha-2) \int_0^t \int_0^u \int_0^v (1-w)^{\alpha-3}dw dv du. \end{aligned}$$

Således kan ekvation 4.1 skrivas som

$$(1-t)^\alpha = 1 - \alpha t + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)t^2 - \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \int_0^t \int_0^u \int_0^v (1-w)^{\alpha-3} dw dv du.$$

Eftersom $w \leq v \leq u \leq t$ och $t \in (0, 1)$, är integranden $(1-w)^{\alpha-3}$ strängt positiv, så trippelintegralen är strängt positiv. För $\alpha \in (0, 1] \cup (2, 3)$ är produkten $-\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$ negativ. Således är den sista termen i uttrycket ovan negativ och man kan därför konstatera att

$$(1-t)^\alpha \leq 1 - \alpha t + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)t^2, \quad \alpha \in (0, 1] \cup (2, 3), \quad t \in (0, 1).$$

□

Följande hjälpsats används i ett av de alternativa bevisen till de nya olikheterna.

Lemma 4.5. För $x > 1$ och $0 < y < 1$ gäller

$$B(x, y) < \frac{1}{xy}(x + y - xy).$$

Bevis. Bhayo och Sándor använder genomgående funktionen $\psi(x) := \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ i sitt bevis av hjälpsatsen i [4, s. 4-5]. Rainville härleder ett behändigt sätt att uttrycka $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ i [23, s. 10] genom att studera den naturliga logaritmen av Weierstrass definition av gammafunktionen (Sats 2.3).

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(x) &= \ln \left(x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}} \right) \right)^{-1} \\ &= -\ln \left(x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}} \right) \right) \\ &= -\ln x - \ln e^{\gamma x} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) + \ln e^{-\frac{x}{n}} \right) \\ &= -\ln x - \gamma x - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right). \end{aligned}$$

Termvis derivering med avseende på x ger nu

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} &= -\frac{1}{x} - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{x+n} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) \\ &= -\frac{1}{x} - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Alltså kan man skriva

$$\psi(x) = -\gamma - \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} \right).$$

Bhayo och Sándor börjar med att visa att det för

$$g_x(y) := \psi(1+x) - \psi(x+y) - \frac{1-y}{x+y-xy}.$$

gäller att $g_x(y) < 0$, om $x > 1$ och $0 < y < 1$.

Betrakta först termen

$$\psi(x+y) = -\gamma - \frac{1}{x+y} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+y+n} - \frac{1}{n} \right).$$

Derivering med avseende på y ger

$$\begin{aligned} \psi'(x+y) &= \frac{1}{(x+y)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+y+n)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+y+n)^2} \end{aligned}$$

samt

$$\psi''(x+y) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(x+y+n)^3}. \quad (4.2)$$

Derivering av $g_x(y)$ ger

$$\begin{aligned} g'_x(y) &= -\psi'(x+y) - \frac{-1(x+y-xy) - (1-y)(1-x)}{(x+y-xy)^2} \\ &= -\psi'(x+y) - \frac{-x-y+xy-1+x+y-xy}{(x+y-xy)^2} \\ &= -\psi'(x+y) + \frac{1}{(x+y-xy)^2} \end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned} g''_x(y) &= -\psi''(x+y) - 2 \cdot (1-x) \cdot \frac{1}{(x+y-xy)^3} \\ &= \frac{2x-2}{(x(1-y)+y)^3} - \psi''(x+y). \end{aligned}$$

För $x > 1$ och $0 < y < 1$, ger (4.2) att $\psi''(x+y) < 0$. Eftersom det för dessa värden på x och y även gäller att

$$\frac{2x-2}{(x(1-y)+y)^3} > 0,$$

kan man konstatera att $g_x''(y) > 0$. Således är funktionen $g_x(y)$ strängt konvex för $x > 1$ och $0 < y < 1$.

Notera även att

$$\begin{aligned} \psi(1+x) - \psi(x) &= -\gamma - \frac{1}{1+x} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x+n} - \frac{1}{n} \right) + \gamma + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{1+x+n} \right). \end{aligned}$$

Summan i detta uttryck är dock teleskoperande, så

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{1+x+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{1+x+n} \right) = \frac{1}{1+x}.$$

Därmed gäller

$$\psi(1+x) - \psi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x}. \quad (4.3)$$

Betrakta nu $g_x(0)$ och $g_x(1)$. Det gäller att

$$g_x(0) = \psi(1+x) - \psi(x) - \frac{1}{x}$$

och med hjälp av (4.3) erhålls

$$g_x(0) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

Dessutom gäller

$$g_x(1) = \psi(1+x) - \psi(1+x) - \frac{1-1}{x+1-x} = 0.$$

Eftersom $g_x(y)$ är strängt konvex för $x > 1$ och $0 < y < 1$, måste alltså $g_x(y) < 0$ för dessa variabelvärden.

Definiera nu

$$h_y(x) := \ln(\Gamma(1+x)) + \ln(\Gamma(1+y)) - \ln(\Gamma(x+y)) - \ln(x+y-xy).$$

Derivatn med avseende på x är

$$\begin{aligned} h_y'(x) &= \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)} - \frac{1-y}{x+y-xy} \\ &= \psi(1+x) - \psi(x+y) - \frac{1-y}{x+y-xy} \\ &= g_x(y). \end{aligned}$$

Eftersom $g_x(y) < 0$, gäller således $h'_y(x) < 0$ för $x > 1$ och $0 < y < 1$, så h_y är strängt avtagande på $(1, \infty)$ för dessa värden y . Vidare fås

$$\begin{aligned} h_y(1) &= \ln(\Gamma(1+1)) + \ln(\Gamma(1+y)) - \ln(\Gamma(1+y)) - \ln(1+y-1 \cdot y) \\ &= \ln 1 - \ln 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

För $x > 1$ och $0 < y < 1$ gäller således

$$\begin{aligned} &h_y(x) < 0 \\ \iff &\ln(\Gamma(1+x)) + \ln(\Gamma(1+y)) - \ln(\Gamma(x+y)) < \ln(x+y-xy) \\ \iff &\ln\left(\frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1+y)}{\Gamma(x+y)}\right) < \ln(x+y-xy) \\ \iff &\frac{\Gamma(1+x)\Gamma(1+y)}{\Gamma(x+y)} < (x+y-xy). \end{aligned}$$

Enligt Sats 2.4 är detta ekvivalent med

$$\begin{aligned} &\frac{x\Gamma(x)y\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} < (x+y-xy) \\ \iff &\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} < \frac{1}{xy}(x+y-xy) \end{aligned}$$

och enligt Sats 2.9 kan man då skriva

$$B(x, y) < \frac{1}{xy}(x+y-xy).$$

□

4.2 De nya olikheterna

I detta avsnitt presenteras olikheterna och bevisen som Božin och Karapetrović framför i [5, s. 531-536]. Dessa bevis jämförs även med alternativa versioner givna av Lindström m.fl. i [16].

Sats 4.6. Om $2 < p < 4$, gäller $B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right) \leq \frac{1}{(p-2)(p-4)}$.

Bevis. Božin och Karapetrović bevisar satsen genom att undersöka tre fall var för sig: $2 < p \leq \frac{5}{2}$, $p \in (\frac{5}{2}, 3] \cup (\frac{7}{2}, 4)$ och $3 < p \leq \frac{7}{2}$. I de två senare fallen används resultaten i Exempel 3.14.

(i) $2 < p \leq \frac{5}{2}$:

I detta fall gäller det att $0 < 2(p-2) \leq 1$ samt $0 < \frac{2}{p} \leq 1$. Nu ger Lemma 4.3 att

$$B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right) \leq \frac{1}{\frac{2}{p} \cdot 2(p-2)} = \frac{p(4-p)}{4} \cdot \frac{1}{(p-2)(4-p)}.$$

Det gäller dock att

$$\frac{p(4-p)}{4} = \frac{4-(p-2)^2}{4} < 1, \quad \text{då } 2 < p \leq \frac{5}{2},$$

så

$$B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right) < \frac{1}{(p-2)(4-p)}, \quad 2 < p \leq \frac{5}{2}.$$

(ii) $p \in (\frac{5}{2}, 3] \cup (\frac{7}{2}, 4)$:

Nu gäller $2p-5 \in (0, 1] \cup (2, 3)$, så Lemma 4.4 kan användas:

$$\begin{aligned} B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right) &= \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1} (1-t)^{2p-5} dt \\ &\leq \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1} \left(1 - (2p-5)t + \frac{(2p-5)(2p-6)}{2} t^2\right) dt \\ &= \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1} dt - (2p-5) \int_0^1 t^{\frac{2}{p}} dt + (2p-5)(p-3) \int_0^1 t^{\frac{2}{p}+1} dt \\ &= \frac{p}{2} \left[t^{\frac{2}{p}}\right]_0^1 - \frac{(2p-5)}{\frac{2}{p}+1} \left[t^{\frac{2}{p}+1}\right]_0^1 + \frac{(2p-5)(p-3)}{\frac{2}{p}+2} \left[t^{\frac{2}{p}+2}\right]_0^1 \\ &= \frac{p}{2} - \frac{(2p-5)}{\frac{2}{p}+1} + \frac{(2p-5)(p-3)}{\frac{2}{p}+2} \\ &= \frac{p}{2} - \frac{p(2p-5)}{2+p} + \frac{p(2p-5)(p-3)}{2+2p} \\ &= p \cdot \frac{(p+1)(p+2) - 2(2p-5)(p+1) + (p+2)(p-3)(2p-5)}{2(p+1)(p+2)} \\ &= p \cdot \frac{p^2 + 3p + 2 - 4p^2 + 6p + 10 + 2p^3 - 7p^2 - 7p + 30}{2(p^2 + 3p + 2)} \\ &= \frac{p^4 - 5p^3 + p^2 + 21p}{p^2 + 3p + 2}. \end{aligned}$$

Beviset är alltså klart om

$$\frac{p^4 - 5p^3 + p^2 + 21p}{p^2 + 3p + 2} \leq \frac{1}{(p-2)(4-p)}. \quad (4.4)$$

Omskrivning av denna olikhet ger

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \frac{1}{-p^2 + 6p - 8} + \frac{-p^4 + 5p^3 - p^2 - 21p}{p^2 + 3p + 2} \\
 \iff 0 &\leq p^2 + 3p + 2 + (-p^2 + 6p - 8)(-p^4 + 5p^3 - p^2 - 21p) \\
 &= p^2 + 3p + 2 + p^6 - 11p^5 + 39p^4 - 25p^3 - 118p^2 + 168p \\
 &= p^6 - 11p^5 + 39p^4 - 25p^3 - 117p^2 + 171p + 2.
 \end{aligned}$$

Enligt Exempel 3.14 gäller $p^6 - 11p^5 + 39p^4 - 25p^3 - 117p^2 + 171p + 2 > 0$ för $2 < p < 4$. Alltså gäller olikhet (4.4) och därmed gäller även

$$\mathrm{B}\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right) \leq \frac{1}{(p-2)(4-p)}, \quad p \in \left(\frac{5}{2}, 3\right] \cup \left(\frac{7}{2}, 4\right).$$

(iii) $3 < p \leq \frac{7}{2}$:

Enligt sats 2.10 gäller

$$\begin{aligned}
 \mathrm{B}\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right) &= \frac{2p-5}{\frac{2}{p} + 2p-5} \mathrm{B}\left(\frac{2}{p}, 2p-5\right) \\
 &= \frac{p(2p-5)}{2+2p^2-5p} \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1} (1-t)^{2p-6} dt \\
 &= \frac{p(2p-5)}{(2p-1)(p-2)} \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1} (1-t)^{2p-6} dt.
 \end{aligned}$$

Beteckna $f(p) := \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1} (1-t)^{2p-6} dt$. För $3 < p \leq \frac{7}{2}$ gäller $2p-6 \in (0, 1]$, så Lemma 4.4 ger

$$\begin{aligned}
 f(p) &\leq \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1} \left(1 - (2p-6)t + \frac{(2p-6)(2p-7)}{2} t^2\right) \\
 &= \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1} dt - (2p-6) \int_0^1 t^{\frac{2}{p}} dt + \frac{(2p-6)(2p-7)}{2} \int_0^1 t^{\frac{2}{p}+1} dt \\
 &= \frac{p}{2} \left[t^{\frac{2}{p}}\right]_0^1 - \frac{(2p-6)}{\frac{2}{p}+1} \left[t^{\frac{2}{p}+1}\right]_0^1 + \frac{(p-3)(2p-7)}{\frac{2}{p}+2} \left[t^{\frac{2}{p}+2}\right]_0^1 \\
 &= \frac{p}{2} - \frac{p(2p-6)}{p+2} + \frac{p(p-3)(2p-7)}{2p+2} \\
 &= p \cdot \frac{(p+1)(p+2) - 2(p+1)(2p-6) + (p+2)(p-3)(2p-7)}{2(p+1)(p+2)} \\
 &= p \cdot \frac{(p^2 + 3p + 2) - (4p^2 - 8p - 12) + (2p^3 - 9p^2 - 5p + 42)}{2(p^2 + 3p + 2)} \\
 &= \frac{p^4 - 6p^3 + 3p^2 + 28p}{p^2 + 3p + 2}.
 \end{aligned}$$

Således gäller

$$\begin{aligned} B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right) &\leq \frac{p(2p-5)}{(2p-1)(p-2)} \cdot \frac{p^4 - 6p^3 + 3p^2 + 28p}{p^2 + 3p + 2} \\ &= \frac{2p^6 - 17p^5 + 36p^4 + 41p^3 - 140p^2}{(p-2)(2p^3 + 5p^2 + p - 2)} \end{aligned}$$

och beviset är därför klart ifall

$$\frac{2p^6 - 17p^5 + 36p^4 + 41p^3 - 140p^2}{2p^3 + 5p^2 + p - 2} \leq \frac{1}{(4-p)}. \quad (4.5)$$

Omskrivning av denna olikhet ger

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{4-p} + \frac{-2p^6 + 17p^5 - 36p^4 - 41p^3 + 140p^2}{2p^3 + 5p^2 + p - 2} \\ \iff 0 &\leq 2p^3 + 5p^2 + p - 2 + (4-p)(-2p^6 + 17p^5 - 36p^4 - 41p^3 + 140p^2) \\ &= 2p^3 + 5p^2 + p - 2 + 2p^7 - 25p^6 + 104p^5 - 103p^4 - 304p^3 + 560p^2 \\ &= 2p^7 - 25p^6 + 104p^5 - 103p^4 - 302p^3 + 565p^2 + p - 2. \end{aligned}$$

Enligt Exempel 3.14 gäller $2p^7 - 25p^6 + 104p^5 - 103p^4 - 302p^3 + 565p^2 + p - 2 > 0$ för $2 < p < 4$. Alltså gäller olikhet (4.4) och därmed gäller även

$$B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right) \leq \frac{1}{(p-2)(4-p)}, \quad 3 < p \leq \frac{7}{2}.$$

(i), (ii) och (iii) ger tillsammans att

$$B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right) \leq \frac{1}{(p-2)(4-p)}, \quad 2 < p < 4.$$

□

I [16] lyckas Lindström m.fl. förkorta beviset ovan med hjälp av Lemma 4.5 och man undviker på så sätt användningen av Exempel 3.14. Fallet $2 < p \leq \frac{5}{2}$ görs på samma sätt som i [5], men fallen $p \in (\frac{5}{2}, 3] \cup (\frac{7}{2}, 4)$ och $3 < p \leq \frac{7}{2}$ slås ihop. Detta alternativa bevis presenteras nedan.

Alternativt bevis. Antag att $\frac{5}{2} < p < 4$. Eftersom $2(p-2) > 1$ och $\frac{2}{p} < \frac{4}{5} < 1$,

kan Lemma 4.5 användas på följande sätt:

$$\begin{aligned}
 B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right) &< \frac{1}{\frac{2}{p} \cdot 2(p-2)} \left(\frac{2}{p} + 2(p-2) - \frac{2}{p} \cdot 2(p-2)\right) \\
 &= \frac{1}{2(p-2)} \left(\frac{p}{2} \cdot \frac{2}{p} + \frac{p \cdot 2(p-2)}{2} - \frac{p}{2} \cdot \frac{2}{p} \cdot 2(p-2)\right) \\
 &= \frac{1}{2(p-2)} (1 + p^2 - 2p - 2p + 4) \\
 &= \frac{1}{(p-2)} \cdot \frac{1}{2} (p^2 - 4p + 5). \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

Vid undersökning av differensen av uttrycken $\frac{1}{4-p}$ och $\frac{1}{2}(p^2 - 4p + 5)$ fås

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4-p} - \frac{p^2 - 4p + 5}{2} &= \frac{-(4-p)(p^2 + 4p + 5) + 2}{2(4-p)} \\
 &= \frac{p^3 - 8p^2 + 21p - 18}{2(4-p)} \\
 &= \frac{(p^2 - 6p + 9)(p-2)}{2(4-p)} \\
 &= \frac{(p-3)^2(p-2)}{2(4-p)}.
 \end{aligned}$$

Enligt antagandet $\frac{5}{2} < p < 4$ gäller $\frac{(p-3)^2(p-2)}{2(4-p)} \geq 0$, vilket innebär att $\frac{1}{2}(p^2 - 4p + 5) \leq \frac{1}{4-p}$. Insättning av detta i 4.6 ger

$$B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right) < \frac{1}{(p-2)(4-p)}, \quad \frac{5}{2} < p < 4.$$

□

Sats 4.7. Låt $2 < p < 4$ och $s \in [0, 1]$. Då gäller

$$\left(\frac{4-p}{2} + \frac{p-2}{2}s^4\right) B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) \leq \int_0^1 \psi_p(t) \max\{s^2, t^2\}^{p-2} dt,$$

där $\psi_p(t) = t^{\frac{2}{p}-1}(1-t)^{-\frac{2}{p}}$.

Bevis. Definiera

$$F_p(s) := \left(\frac{4-p}{2} + \frac{p-2}{2}s^4\right) B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) - \int_0^1 \psi_p(t) \max\{s^2, t^2\}^{p-2} dt.$$

Att bevisa satsen är nu ekvivalent med att visa att $F_p(s) \leq 0$ för $s \in [0, 1]$. Här visas detta genom undersökning av derivator, vilket leder till $\sup F = F(1) = 0$.

Emedan

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi_p(t) \max\{s^2, t^2\}^{(p-2)} dt &= \int_0^s \psi_p(t) \max\{s^2, t^2\}^{(p-2)} dt \\ &\quad + \int_s^1 \psi_p(t) \max\{s^2, t^2\}^{(p-2)} dt \\ &= \int_0^s \psi_p(t) s^{2(p-2)} dt + \int_s^1 \psi_p(t) t^{2(p-2)} dt, \end{aligned}$$

gäller det att

$$F_p(s) = \left(\frac{4-p}{2} + \frac{p-2}{2} s^4 \right) B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) - s^{2(p-2)} \int_0^s \psi_p(t) dt - \int_s^1 \psi_p(t) t^{2(p-2)} dt.$$

Derivering ger nu

$$\begin{aligned} F'_p(s) &= 2(p-2)B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) s^3 - 2(p-2)s^{2(p-2)-1} \int_0^s \psi(t) dt \\ &\quad - s^{2(p-2)} \psi_p(s) + s^{2(p-2)} \psi_p(s) \\ &= 2(p-2)s^{2p-5} \left[B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) s^{8-2p} - \int_0^s \psi(t) dt \right], \end{aligned} \tag{4.7}$$

alltså med beteckningen

$$G_p(s) := B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) s^{8-2p} - \int_0^s \psi(t) dt,$$

gäller

$$F'_p(s) = 2(p-2)s^{2p-5}G_p(s).$$

Vidare fås

$$\begin{aligned} G'_p(s) &= B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) (8-2p)s^{7-2p} - \psi_p(s) \\ &= 2(4-p)B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) s^{7-2p} - s^{\frac{2}{p}-1}(1-s)^{-\frac{2}{p}} \\ &= \frac{2(4-p)B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right)}{s^{1-\frac{2}{p}}(1-s)^{\frac{2}{p}}} \left[s^{8-2p-\frac{2}{p}}(1-s)^{\frac{2}{p}} - \frac{1}{2(4-p)B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right)} \right]. \end{aligned}$$

Med beteckningen

$$E_p(s) := s^{8-2p-\frac{2}{p}}(1-s)^{\frac{2}{p}} - \frac{1}{2(4-p)B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right)}$$

gäller således

$$G'_p(s) = \frac{2(4-p)\text{B}\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right)}{s^{1-\frac{2}{p}}(1-s)^{\frac{2}{p}}} E_p(s).$$

Ytterligare en derivering ger

$$\begin{aligned} E'_p(s) &= \left(8 - 2p - \frac{2}{p}\right) s^{7-2p-\frac{2}{p}} (1-s)^{\frac{2}{p}} - \frac{2}{p} s^{8-2p-\frac{2}{p}} (1-s)^{\frac{2}{p}-1} \\ &= s^{7-2p-\frac{2}{p}} (1-s)^{\frac{2}{p}-1} \left[\left(8 - 2p - \frac{2}{p}\right) (1-s) - \frac{2}{p} s \right] \\ &= \frac{2s^{7-2p-\frac{2}{p}}}{(1-s)^{1-\frac{2}{p}}} \left[\left(4 - p - \frac{1}{p}\right) (1-s) - \frac{1}{p} s \right] \\ &= \frac{2s^{7-2p-\frac{2}{p}}}{(1-s)^{1-\frac{2}{p}}} \left[4 - p - \frac{1}{p} - (4-p)s \right] \\ &= \frac{2(4-p)s^{7-2p-\frac{2}{p}}}{(1-s)^{1-\frac{2}{p}}} \left[\frac{4-p-\frac{1}{p}}{4-p} - s \right]. \end{aligned}$$

Resten av beviset kan nu delas in i två fall, som undersöks var för sig.

(i) $2 + \sqrt{3} \leq p < 4$: Notera att $4 - p - \frac{1}{p} = \frac{-p^2+4p-1}{p}$ har nollställena $p = 2 \pm \sqrt{3}$ och således gäller $4 - p - \frac{1}{p} \leq 0$ i detta fall. Nu ses det lätt att $E'_p(s) \leq 0$ för $s \in (0, 1)$, så $E_p(s)$ är avtagande i detta intervall.

I fallet $4 - p - \frac{1}{p} < 0$ (dvs. $2 + \sqrt{3} < p$) fås

$$\lim_{s \rightarrow 0+} s^{2(4-p-\frac{1}{p})} (1-s)^{\frac{2}{p}} = +\infty,$$

så $\lim_{s \rightarrow 0+} E_p(s) = +\infty$. I fallet $4 - p - \frac{1}{p} = 0$ fås, med hjälp av Sats 2.17, att

$$\begin{aligned} E_p(0) &= 1 - \frac{1}{2(4-p)\text{B}\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right)} \\ &= 1 - \frac{\sin \frac{2\pi}{p}}{2(4-p)\pi} = 1 - \frac{\sin \frac{2\pi}{2+\sqrt{3}}}{2(2-\sqrt{3})\pi} \\ &> 1 - \frac{\sin \frac{2\pi}{2+\sqrt{3}}}{2 \cdot \frac{1}{4}\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} \sin \frac{2\pi}{2+\sqrt{3}} \\ &> 0. \end{aligned}$$

För alla $p \in [2 + \sqrt{3}, 4)$ gäller alltså att $E_p(s) > 0$, då $s \rightarrow 0+$. Däremot gäller

$$E_p(1) = 1 \cdot 0 - \frac{1}{2(4-p)\text{B}\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right)} < 0.$$

Då E_p även är kontinuerlig på $[0, 1]$, måste E_p ha exakt ett nollställe $s_0 \in (0, 1)$, med $E_p(s) > 0$ för $s \in [0, s_0)$ och $E_p(s) < 0$ för $s \in (s_0, 1]$. Således gäller $G'_p(s) \geq 0$ för $s \in (0, s_0]$ samt $G'_p(s) \leq 0$ för $s \in [s_0, 1)$, vilket innebär att G_p är växande på $(0, s_0]$ och avtagande på $[s_0, 1)$. Vidare erhålls

$$G_p(0) = B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) \cdot 0^{8-2p} - \int_0^0 \psi(t) dt = 0$$

samt

$$\begin{aligned} G_p(1) &= B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) \cdot 1^{8-2p} - \int_0^1 \psi(t) dt \\ &= \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1} (1-t)^{-\frac{2}{p}} dt - \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1} (1-t)^{-\frac{2}{p}} dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

På grund av kontinuiteten hos G_p , innebär detta att $G_p(s) \geq 0$ för $s \in [0, 1]$. Således är även $F'_p(s) \geq 0$ på $[0, 1]$ och F_p är växande på detta intervall. För alla $s \in [0, 1]$ gäller nu att

$$\begin{aligned} F_p(s) \leq F_p(1) &= \left(\frac{4-p}{2} + \frac{p-2}{2}\right) B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) - \int_0^1 \psi(t) dt \\ &= 1 \cdot \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1} (1-t)^{-\frac{2}{p}} dt - \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1} (1-t)^{-\frac{2}{p}} dt \quad (4.8) \\ &= 0 \end{aligned}$$

och beviset är klart för detta fall.

(ii) $2 < p < 2 + \sqrt{3}$: Tvärt emot fallet (i), är $4 - p - \frac{1}{p} > 0$. Nu gäller $p_0 := \frac{4-p-\frac{1}{p}}{4-p} \in (0, 1)$. Med denna beteckning erhålls

$$E'_p(s) = \frac{2(4-p)s^{7-2p-\frac{2}{p}}}{(1-s)^{1-\frac{2}{p}}}(p_0 - s).$$

Det ses lätt att $E'_p(s) \geq 0$ för $s \in (0, p_0)$ och $E'_p(s) \leq 0$ för $s \in [p_0, 1)$, så E_p är växande på $[0, p_0]$ och avtagande på $[p_0, 1]$. Detta implicerar att $\max_{0 \leq s \leq 1} E_p(s) = E_p(p_0)$. Vidare fås

$$E_p(0) = E_p(1) = -\frac{1}{2(4-p)B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right)} < 0.$$

Med hjälp av en antites kan man visa att $E_p(p_0) > 0$. Antag att $E_p(p_0) \leq 0$. För $s \in [0, 1]$ gäller då $E_p(s) \leq 0$, ty $E_p(s) \leq E_p(p_0)$ på detta intervall. Således är $G'_p \leq 0$ på $(0, 1)$, och G_p är avtagande för $s \in [0, 1]$. Precis som i (i)-fallet gäller $G_p(0) = G_p(1) = 0$, så $G_p \equiv 0$ och då gäller även $G'_p \equiv 0$. På $[0, 1]$ måste alltså $E_p \equiv 0$ och därmed även $E'_p \equiv 0$, vilket är omöjligt. Således gäller $E_p(p_0) > 0$.

Betrakta intervallet $[0, p_0]$. Eftersom E_p är växande på detta intervall och $E_p(p_0) > 0$ och $E_p(0) < 0$, finns det exakt ett nollställe $p_1 \in (0, p_0)$ till E_p med

$$E_p < 0 \text{ på } [0, p_1), \quad E_p(p_1) = 0 \quad \text{samt} \quad E_p > 0 \text{ på } (p_1, p_0].$$

Betrakta nu intervallet $[p_0, 1]$. Som tidigare visat, är E_p avtagande på detta intervall och $E_p(1) < 0$. Även här finns det då exakt ett nollställe till E_p , $p_2 \in (p_0, 1)$, denna gång med

$$E_p > 0 \text{ på } [p_0, p_2), \quad E_p(p_2) = 0 \quad \text{samt} \quad E_p < 0 \text{ på } (p_2, 1].$$

Genom att slå ihop intervallen erhålls således

$$E_p \leq 0 \text{ på } [0, p_1], \quad E_p \geq 0 \text{ på } [p_1, p_2] \quad \text{samt} \quad E_p \leq 0 \text{ på } [p_2, 1]$$

och det följer att

$$G'_p \leq 0 \text{ på } (0, p_1] \cup [p_2, 1) \quad \text{samt} \quad G'_p \geq 0 \text{ på } [p_1, p_2].$$

Detta innebär att G_p är avtagande på $(0, p_1] \cup [p_2, 1)$, men växande på $[p_1, p_2]$. Emedan $G_p(0) = G_p(1) = 0$, existerar ett nollställe $p_3 \in (p_1, p_2)$ till G_p med

$$G_p \leq 0 \text{ på } [0, p_3] \quad \text{samt} \quad G_p \geq 0 \text{ på } [p_3, 1].$$

Nu kan det konstateras att

$$F'_p \leq 0 \text{ på } [0, p_3] \quad \text{samt} \quad F'_p \geq 0 \text{ på } [p_3, 1].$$

Då F_p är växande på $[p_3, 1]$, gäller

$$F_p(s) \leq F_p(1) = 0$$

på detta intervall. Vidare erhålls

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \psi_p(t) \cdot t^{2(p-2)} dt &= \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1} (1-t)^{-\frac{2}{p}} \cdot t^{2(p-2)} dt \\
 &= \int_0^1 t^{\frac{2}{p}+2(p-2)-1} (1-t)^{-\frac{2}{p}} dt \\
 &= B\left(\frac{2}{p} + 2(p-2), 1 - \frac{2}{p}\right) \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p} + 2(p-2)\right) \Gamma\left(1 - \frac{2}{p}\right)}{\Gamma(2(p-2) + 1)} \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p} + 2(p-2)\right) \Gamma\left(1 - \frac{2}{p}\right)}{2(p-2)\Gamma(2(p-2))} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)} \\
 &= \frac{1}{2(p-2)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p} + 2(p-2)\right)}{\Gamma(2(p-2))\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{p}\right) \Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}{1} \\
 &= \frac{1}{2(p-2)} \cdot \frac{1}{B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right)} \cdot B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right),
 \end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned}
 F_p(0) &= \frac{4-p}{2} B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) - \int_0^1 \psi_p(t) \cdot t^{2(p-2)} dt \\
 &= \frac{4-p}{2} B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) - \frac{B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right)}{2(p-2)B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right)} \\
 &= \frac{B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right)}{2} \left[4-p - \frac{1}{(p-2)B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right)} \right] \\
 &= \frac{(4-p)B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right)}{2B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right)} \left[B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right) - \frac{1}{(p-2)(4-p)} \right].
 \end{aligned}$$

Sats 4.6 ger att för $2 < p < 4$ gäller

$$B\left(\frac{2}{p}, 2(p-2)\right) - \frac{1}{(p-2)(4-p)} \leq 0,$$

så för $s \in [0, p_3]$, då F_p är avtagande, gäller

$$F_p(s) \leq F_p(0) \leq 0.$$

Således är $F_p \leq 0$ på $[0, 1]$ och beviset är klart. □

I [16] ger Lindström m.fl. ett alternativt bevis för fallet $2 + \sqrt{3} \leq p < 4$. Även i denna version visas $\sup F = F(1) = 0$, men en integralsubstitution gör denna version betydligt kortare än den föregående.

Alternativt bevis. I detta bevis definieras $F_p(s)$ på samma sätt som i beviset ovan, dvs.

$$F_p(s) := \left(\frac{4-p}{2} + \frac{p-2}{2}s^4 \right) B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) - \int_0^1 \psi_p(t) \max\{s^2, t^2\}^{p-2} dt.$$

och enligt 4.7 gäller

$$F'_p(s) = 2(p-2)s^{2p-5} \left[B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) s^{8-2p} - \int_0^s \psi(t) dt \right]. \quad (4.9)$$

Variabelsubstitutionen $t = \frac{x}{s}$ med $dt = \frac{1}{s} dx$ i

$$B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) = \int_0^1 t^{\frac{2}{p}-1} (1-t)^{-\frac{2}{p}} dt$$

ger

$$\begin{aligned} B\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) &= \int_0^s \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{2}{p}-1} \left(1 - \frac{x}{s}\right)^{-\frac{2}{p}} \frac{1}{s} dx \\ &= \int_0^s \left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{2}{p}-1} x^{\frac{2}{p}-1} \left(\frac{1}{s}\right)^{-\frac{2}{p}} (s-x)^{-\frac{2}{p}} \frac{1}{s} dx \\ &= \int_0^s \left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{2}{p}-1-\frac{2}{p}+1} x^{\frac{2}{p}-1} (s-x)^{-\frac{2}{p}} dx \\ &= \int_0^s x^{\frac{2}{p}-1} (s-x)^{-\frac{2}{p}} dx. \end{aligned}$$

Med denna substitution blir 4.9

$$\begin{aligned} F'_p(s) &= 2(p-2)s^{2p-5} \left[s^{8-2p} \int_0^s t^{\frac{2}{p}-1} (s-t)^{-\frac{2}{p}} dt - \int_0^s t^{\frac{2}{p}-1} (1-t)^{-\frac{2}{p}} dt \right] \\ &= 2(p-2)s^{2p-5} \left[\int_0^s t^{\frac{2}{p}-1} \left(s^{8-2p} (s-t)^{-\frac{2}{p}} - (1-t)^{-\frac{2}{p}} \right) dt \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Definiera nu funktionen $H_{p,s}(t) = s^{8-2p}(s-t)^{-\frac{2}{p}} - (1-t)^{-\frac{2}{p}}$ för godtyckligt valda $p \in [2 + \sqrt{3}, 4)$ och $s \in [0, 1)$. På grund av integralgränserna, gäller $0 \leq t \leq s$. Eftersom $\lim_{t \rightarrow s} H_{p,s} = +\infty$, är $H_{p,s}(t)$ strängt positiv, om funktionen inte har något nollställe i $(0, s)$.

Antag att $H_{p,s}(t)$ har ett nollställe $t_0 \in (0, s)$. Detta innebär att

$$\begin{aligned}
 H_{p,s}(t_0) = 0 &\iff s^{8-2p}(s-t_0)^{-\frac{2}{p}} = (1-t_0)^{-\frac{2}{p}} \\
 &\iff s^{-8+2p}(1-t_0)^{-\frac{2}{p}} = (s-t_0)^{-\frac{2}{p}} \\
 &\iff s^{(4-p)p}(1-t_0) = s-t_0 \\
 &\iff s^{(4-p)p} - s^{(4-p)p}t_0 = s-t_0 \\
 &\iff s^{(4-p)p}t_0 - t_0 = s^{(4-p)p} - s \\
 &\iff t_0 = \frac{s^{(4-p)p} - s}{s^{(4-p)p} - 1}.
 \end{aligned}$$

Eftersom $2 + \sqrt{3} \leq p < 4$, gäller $s^{(4-p)p} - 1 < 0$ för alla $s \in [0, 1)$. Kravet $t_0 > 0$ ger då att det för $s \in [0, 1)$ gäller att

$$\begin{aligned}
 s^{(4-p)p} - s < 0 &\iff s^{(4-p)p} < s \\
 &\iff (4-p)p > 1 \\
 &\iff p^2 - 4p + 1 < 0 \\
 &\iff 2 - \sqrt{3} < p < 2 + \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Detta är en motsägelse, då $p \geq 2 + \sqrt{3}$. Alltså har $H_{p,s}(t)$ inget nollställe i $0 < t < s$ och måste således vara strängt positiv för alla $t \in [0, s]$.

Med denna information och framställningen 4.10, fås $F'_p(s) \geq 0$. Således är $F_p(s)$ växande för alla $s \in [0, 1]$. Eftersom $F_p(1) = 0$ (se 4.8), gäller det för $s \in [0, 1]$ och $p \in [2 + \sqrt{3}, 4)$ att

$$\begin{aligned}
 &F_p(s) \leq 0 \\
 \iff &\left(\frac{4-p}{2} + \frac{p-2}{2}s^4\right) \text{B}\left(\frac{2}{p}, 1 - \frac{2}{p}\right) \leq \int_0^1 \psi_p(t) \max\{s^2, t^2\}^{p-2} dt.
 \end{aligned}$$

□

Bilaga A

Kod för Wolfram Mathematica

Följande kod skrevs i Wolfram Mathematica för att räkna antalet rötter med Sturms metod i Exempel 3.14:

```
ClearAll;
Print["The Sturm chain:"];

(*Function to be studied*)
n[t_] := t^6 - 11 t^5 + 39 t^4 - 25 t^3 - 117 t^2 + 171 t + 2;

p1 = n[t]
p2 = n'[t]
chain = {p1, p2};

(*Constructing the Sturm chain *)
While[Exponent[PolynomialRemainder[p1, p2, t], t] >= 0,
  temp = p2;
  p2 = -PolynomialRemainder[p1, p2, t];
  p1 = temp;
  Print[p2];
  AppendTo[chain, p2]]

Print[" "];
```

```
(*Evaluate in chosen points a and b, count sign changes*)
a = 2;
b = 4;
StringForm["Chain evaluated in a=':', a]
wa = 0;
last = chain[[1]] /. t -> a ;
Print[last ];
For[i = 2, i <= Length[chain], i++,
  current = chain[[i]] /. t -> a;
  Print[current];
  If[((last > 0 ) && (current < 0)) || ((last < 0) &&
    (current > 0)),
    wa++
  ]
  If[current != 0,
    last = current]
]
StringForm["Number of sign changes: '", wa]
Print[""];
StringForm["Chain evaluated in b=':', b]
wb = 0;
last = chain[[1]] /. t -> b ;
Print[last ];
For[i = 2, i <= Length[chain], i++,
  current = chain[[i]] /. t -> b;
  Print[current];
  If[((last > 0 ) && (current < 0)) || ((last < 0) &&
    (current > 0)),
    wb++
  ]
  If[current != 0,
    last = current]
]
```



```
StringForm["Number of sign changes: '", wb]
Print[""];
StringForm["' has ' roots between t=' and t='",
n[t], (wa - wb), a, b]
```

Koden genererar följande resultat:

The Sturm chain:

$$\begin{array}{r}
 2 + 171 t - 117 t^2 - 25 t^3 + 39 t^4 - 11 t^5 + t^6 \\
 171 - 234 t - 75 t^2 + 156 t^3 - 55 t^4 + 6 t^5 \\
 -\frac{217}{4} - 71 t + \frac{1211 t^2}{12} - \frac{211 t^3}{6} + \frac{137 t^4}{36} \\
 -\frac{3328632}{18769} + \frac{2630664 t}{18769} - \frac{471744 t^2}{18769} - \frac{18864 t^3}{18769} \\
 -\frac{2362435261}{102966} + \frac{23375194135 t}{1235592} - \frac{534184509 t^2}{137288} \\
 \frac{14769101055592}{45610275931947} - \frac{16805420098648 t}{136830827795841} \\
 \frac{115866443986827591180987}{1028575493459159409604}
 \end{array}$$

Chain evaluated in a=2:

$$\begin{array}{r}
 12 \\
 - 37 \\
 - \frac{469}{36} \\
 - \frac{105192}{18769} \\
 - \frac{414738593}{617796} \\
 \frac{78076372040}{998765166393} \\
 \frac{115866443986827591180987}{1028575493459159409604}
 \end{array}$$

Number of sign changes: 2

```

Chain evaluated in b = 4:

30
83
- 1
- 36
1561176
- 18769
1471376986
- 154449
22914377227816
- 136830827795841
115866443986827591180987
1028575493459159409604

Number of sign changes: 2

2 + 171 t - 117 t^2 - 25 t^3 + 39 t^4 - 11 t^5 + t^6 has 0 roots
between t=2 and t=4
    
```

Om man byter ut $n[t_]$:= $t^6 - 11 t^5 + 39 t^4 - 25 t^3 - 117 t^2 + 171 t + 2$ mot $n[t_]$:= $2t^7 - 25 t^6 + 104 t^5 - 103 t^4 - 302 t^3 + 565 t^2 + t - 2$, får man följande utskrift:

```

The Sturm chain:

-2 + t + 565 t^2 - 302 t^3 - 103 t^4 + 104 t^5 - 25 t^6 + 2 t^7
1 + 1130 t - 906 t^2 - 412 t^3 + 520 t^4 - 150 t^5 + 14 t^6
171 14167 t 8450 t^2 13606 t^3 4337 t^4 419 t^5
98 - 49 - 49 + 49 - 49 + 49
- 357847 - 167678343 t + 93970044 t^2 - 6244560 t^3 - 2232440 t^4
175561 - 175561 175561 175561 175561
750172153 370244279681 t 14105107781099 t^2
- 37951480 - 45406235 + 2542749160
- 605235838279 t^3
- 635687290
994375593366040641 32770418691702199893 t
- 4173027266161434962 + 2086513633080717481
21991836341813186793 t^2
- 4173027266161434962
    
```

```

16590822901016619830537123920027
116600106113463600655680699284
+ 119704456479873654771471944075171 t
  3381403077290444419014740279236
1019846644824650682964449217579755797721475660698
6867511754517080390923054281649914930774780961

```

Chain evaluated in a=2

```

180
- 243
  18369
-   98
  45509877
-  175561
  892947311811
-  508549832
  42119953806190011759
  4173027266161434962
  720542777089229284628520481831125
  3381403077290444419014740279236
  1019846644824650682964449217579755797721475660698
  6867511754517080390923054281649914930774780961

```

Number of sign changes: 2

Chain evaluated in b=4

```

210
521
  4429
-   98
  138706995
-  175561
  8473100543
-  1759688
  90700407528759430185
-  4173027266161434962
  959951690048976594171464369981467
  3381403077290444419014740279236
  1019846644824650682964449217579755797721475660698
  6867511754517080390923054281649914930774780961

```

Number of sign changes: 2

```
- 2 + t + 565 t2 - 302 t3 - 103 t4 + 104 t5 - 25 t6 + 2 t7 has  
0 roots between t=2 and t=4
```

Litteraturförteckning

- [1] Agarwal, R., Barnett N. & Dragomir, S. (2000). Inequalities for Beta and Gamma Functions via Some Classical and New Integral Inequalities. *Journal of Inequalities and Applications*, 5, 103-165.
- [2] Akritas, Alkiviadis & Vigklas, Panagiotis. (2010). Counting the number of real roots in an interval with Vincent's theorem. *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie. Nouvelle Série.*, 3.
- [3] Bartlett, P. (2013). *Finding All the Roots: Sturm's Theorem*. Hämtad 8 april från http://web.math.ucsb.edu/~padraic/mathcamp_2013/root_find_alg/Mathcamp_2013_Root-Finding_Algorithms_Day_2.pdf.
- [4] Bhayo, B. & Sándor, J. (2015). On the inequalities for beta function. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 21(2), 1-7.
- [5] Božin, V. & Karapetrović, B. (2018). Norm of the Hilbert matrix on Bergman spaces. *Journal of Functional Analysis*, 274, 525-543.
- [6] Cohen, H. (2003) *Fundamentals and Applications of Complex Analysis*. New York: Kluwer Academic / Plenum Publishers.
- [7] Dattoli, G. & del Franco, M. (2010). The Euler Legacy to Modern Physics. *Lecture notes of "Seminario Interdisciplinare di Matematica "*, (9), 1-24. Hämtad 4 september 2018 från <http://dimie.unibas.it/site/home/ricerca/aree/pubblicazioni/documento3011704.html>
- [8] *Earliest Uses of Function Symbols*. (2017). Hämtad 6 september från <http://jeff560.tripod.com/functions.html>
- [9] Greene, B. (2020). String theory. I *Encyclopaedia Britannica* . Hämtad 1 mars 2021 från <https://www.britannica.com/science/string-theory>

- [10] Grinstead, C. M. & Snell, J.L. (1997). *Introduction to probability*. New York: American Mathematical Society.
- [11] Gupta, A. & Nadarajah, S. (red.). (2004). *Handbook of Beta Distribution and Its Applications*, Boca Raton: Taylor & Francis Group.
- [12] Kim, A. (2020). *Bayesian Inference - Intuition and Example*. Hämtad 3 mars 2021 från <https://towardsdatascience.com/bayesian-inference-intuition-and-example-148fd8fb95d6>
- [13] Kim, A. (2020). *Beta Distribution - Intuition, Examples, and Derivation*. Hämtad 3 mars 2021 från <https://towardsdatascience.com/beta-distribution-intuition-examples-and-derivation-cf00f4db57af>
- [14] Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, volume 2*. New York: Oxford University Press.
- [15] Koekoek, R. (u.å.). *The gamma and the beta function*. Hämtad 11 juli 2019 från <https://homepage.tudelft.nl/11r49/documents/wi4006/gammabeta.pdf>
- [16] Lindström, M., Miihkinen, S. & Wikman, N. (2018). Norm estimates of weighted composition operators pertaining to the Hilbert Matrix. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 147(6), 2425-2435.
- [17] Mathonline. (u.å.) *The Limit Comparison Test for Positive Series of Real Numbers* <http://mathonline.wikidot.com/the-limit-comparison-test-for-positive-series-of-real-number>
- [18] Mielke, P. (1975). Convenient Beta Distribution Likelihood Techniques for Describing and Comparing Meteorological Data. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*(14)6: 985-990.
- [19] O'Connor, J & Robertson, E. (2001). *Jacques Charles François Sturm*. Hämtad 7 september från <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Sturm.html>
- [20] O'Connor, J & Robertson, E. (1998). *Leonhard Euler*. Hämtad 5 september från <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Euler.html>

- [21] Prasolov, V. (2004). *Polynomials* (D Leites, Trans). Berlin: Springer. (Originalarbete publicerat 2001).
- [22] Raghavan, K. (2016). *Sturm's Method for the Number of Real Roots of a Real Polynomial*. Hämtad 29.5.2018 från https://www.imsc.res.in/~knr/past/sturm/formal_notes.pdf
- [23] Rainville, E. (1960). *Special Functions*. New York: The Macmillan Company.
- [24] Reitano, R. (2018). *Foundations of Quantitative Finance:5. General Measure and Integration Theory*. Waltham: Självpublicerad. Hämtad 18 mars 2021 från <https://robertrreitano.com/wp-content/uploads/2020/04/Book5.pdf>
- [25] Saff, E. & Snider, A. (2003). *Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering, Science and Mathematics, 3rd Edition*. Upper Saddle River: Pearson Education.
- [26] Seip, K. (2014). *The Gamma Function*. Hämtad 7 juli 2019 från https://wiki.math.ntnu.no/_media/ma3001/2014v/analytisktaallteori/gamma_function_notes.pdf
- [27] Shabat, B. V. (2003). *Introduction to Complex Analysis - excerpts*. Hämtad 21 juni 2019 från <http://math.stanford.edu/~ryzhik/shabat-all.pdf>
- [28] Sutton, C. (2017). Standard model. I *Encyclopaedia Britannica*. Hämtad 1 mars 2021 från <https://www.britannica.com/science/Standard-Model>
- [29] Sutton, C. (2020). Unified field theory. I *Encyclopaedia Britannica*. Hämtad 1 mars 2021 från <https://www.britannica.com/science/unified-field-theory>
- [30] Weisstein, E. *Legendre Duplication Formula*. Hämtad 15 juli 2019 från <http://mathworld.wolfram.com/LegendreDuplicationFormula.html>