TVH TIE- JA VESIRAKENNUSHALLITUS

TIENRAKENNUKSEN TUOTANTOFUNKTION KOKEILU

15.8.1983/PK,RK

B1/84

TALOUSOSASTO - TUTKIMUSTOIMISTO

ALKUSANAT

Tuotantofunktiokokeilun tarkoituksena oli selvittää mahdollisuuksia tutkia Tie- ja vesirakennuslaitoksen tienrakentamisen tuottavuutta ja sen kehitystä tuotantofunktion avulla. Työ tehtiin TVH:n rakentamistalouden ja tutkimustoimiston yhteistyönä vuoden 1982 lopun ja 1983 alun aikana. Vuoden 1982 havainnot liitettiin havaintoaineistoon mukaan kesän 1983 aikana. Kokeilu oli osa TVL:n tienrakennuksen taloudellisuuden ja tuottavuuden mittaamisen kehittämisprojektia (TATU).

Kokeiluun osallistuivat seuraavat henkilöt:

- rakentamisen teknisenä asiantuntijana TATU-projektiryhmä: Jussi Ala-Fossi (Rr), Seppo Kolkka (Rr), Hannu Kulju (K-P) ja Rainer Wikman (Ky)
- tilastolliset menetelmät ja mallien tilastollinen tulkinta sekä ATK-asiantuntemus Riitta Korhonen (Tt)
- taloudellinen asiantuntemus, mallien määrittely ja niiden tulkinta Pertti Karhu (Tt)
- raportin kirjoitti Pertti Karhu

TULOS

Tuotantoa tarkasteltaessa tuotantofunktion avulla oletetaan, että se voidaan kuvata jonakin matemaattisena mallina. Malli kuvaa tuotoksen määrän ja käytettyjen panosten määrien välistä tilastollista riippuvuutta. Tuotantofunktiosta saadaan esille eri panosten vaikutus saavutettuun tuotokseen sekä kokonaistuottavuuden kehitys. Kokeilussa määriteltiin kokonaistuottavuudeksi tuotoksen määrässä tapahtunut muutos, jota ei voitu selittää käytettyjen panosten määrissä tapahtuneilla muutoksilla. Tuottavuuden mittaamisen lisäksi tuotantofunktiota voi käyttää esimerkiksi tietyn tuotannon panostarpeen ennustamiseen ja yksittäisten panosten tuottavuuden mittaamiseen.

Tuotantofunktio on tarkoitettu johdon apuvälineeksi tuottavuuden yleisen kehityksen tarkasteluun. Sen avulla on mahdollista kontrolloida yksityiskohtaisempien tuottavuuden mittareiden luotettavuutta.

Kokeilussa keskityttiin tienrakentamisen ns. omien töiden tuotantofunktion muodostamiseen. Mallien kertoimet saatiin havaintoaineistosta, jonka muodostivat tuotoksen ja panoksien määrien aikasarjat vuosilta 1972-1982. Tuotantofunktion muodostamista haittasi tilastojen heikkous, erityisesti aikasarjojen lyhyys, minkä takia mallien kertoimien tilastollinen merkitsevyys jäi heikoksi. Kokeilussa saatujen tulosten mukaan tienrakentamisen omien töiden tuotoksen muutoksesta aiheutuu 29 % työvoiman (rakennusmiehet ja kuljettajat) määrän muutoksesta, 40 % koneiden ja autojen käytön muutoksesta ja 31 % urakoinnissa tapahtuneesta muutoksesta. Kokonaistuottavuuden kasvu tienrakentamisen omissa töissä oli vuodessa 1,4 %, mikä on samaa tasoa kuin tuottavuuden kasvu Suomen kansantaloudessa vastaavalla aikavälillä.

Tienrakentamisen tuotantofunktion testaaminen tulisi tehdä muutaman vuoden päästä uudestaan. Havaintoaineistoa on mahdollista parantaa myös siirtymällä hanketasoiseen tarkasteluun. Tarkastelu sopii myös muille toimialoille esimerkiksi kunnossapitoon. Tätä kokeilua parempien tulosten saavuttaminen edellyttää aineiston keräämisen kunnollista suunnittelua. Laitoksen tulisi kiinnittää erityistä huomiota pitkien vertailukelpoisten aikasarjojen keräämiseen.

SISÄLLYSLUETTELO

TIE- JA VESIRAKENNUSHALLITUS
Tutkimustoimisto

Helsinki 7.2.1984

Nro 0/Tt-7
Viite

Jakelussa mainitut

Asia Tienrakennuksen tuotanto-
funktio

Talousosaston tutkimustoimisto lähettää oheisena tienrakennuksen tuotantofunktion kokeilua koskevan raportin.

Toimistopäällikkö Jorma Kosunen

LIITE:
Tienrakennuksen tuotanto-
funktion kokeilu

JAKELU:
Ylijohtaja
Talvitie
Koskinen
Osastot
Tt
Ta
Tv
Ti
Rt
Rr
Rs
Rm
Kp
Sts

Karhu/Vt
Kolkka/Rt
Ala-Fossi/Rt
Korhonen/Tt
Salovaara/Tt
Kirjasto
8 Piirit
Vikman/Ky-piiri
Kulju/K-P-piiri

VAS/SA

1. JOHDANTO

Tuotantofunktion kokeilun tarkoituksena oli selvittää mahdollisuuksia tutkia Tie- ja vesirakennuslaitoksen tien rakentamisen tuottavuutta ja sen kehittymistä tuotantofunktion avulla. Kokeilu oli osa TVL:n tienrakennuksen taloudellisuuden ja tuottavuuden mittaamisen kehittämisprojektia (TATU).

Tuottavuuden mittaamisessa voidaan erottaa kaksi lähestymistapaa. Suhdetarkasteluksi kutsutaan menetelmää, jolloin tuottavuus esitetään tuotoksen ja panoksen välisenä suhteena. Tuotos ja kokonaispanos muodostetaan tällöin yleensä jonkin indeksikaavan avulla tai tyydytään esittämään jonkin panoksen osatuottavuus, joista käytetyin lienee työntuottavuus. Riippuvuustarkastelu perustuu tuotantofunktioon. Tuotantofunktiota käytettäessä oletetaan, että tuotantolaitoksen tuotoksen ja sen tuottamiseen käytettyjen panosten välistä riippuvuutta voidaan kuvata riittävän tarkasti jonkin matemaattisen funktion avulla. Riippuvuustarkastelun etuna verrattuna suhdetarkasteluun on mm. se, että tuotantofunktion avulla voidaan arvioida suoraan yksittäisten panosten merkitys tuotoksen määrän kehitykseen. Esimerkiksi Valtion rautatiet on käyttänyt tuottavuutensa mittaamisessa hyväkseen tuotantofunktiota ja Posti- ja telehallituksen ennusteita laadittaessa on apuna ollut tuotantofunktio.

Kokeilussa keskityttiin ns. omien töiden tuotantofunktion muodostamiseen, mutta raportissa on esitetty myös karkea suhdetarkastelu samalta ajalta. Havaintoaineistona oli TVL:n omien töiden tuotoksen ja panosten aikasarjat vuosilta 1972-82.

2. TIENRAKENNUKSEN PANOKSET JA TUOTOS

2.1. Panokset

Tienrakentamisessa käytettävät panokset ovat miestyötä, konetyötä, kuljetuksia ja materiaalia. Työ voidaan tehdä TVL:n omassa työnjohdossa vuokratulla ja omalla konekalustolla tai urakoimalla. Panoksia mitattiin miestyötuntien (mh), konetuntien (kh), autotuntien (ah) määrällä, urakoiden kustannuksilla ja materiaalikustannuksilla. Näiden lisäksi oli käytettävissä konetonnituntien (kth) ja autotonnituntien (ath_2) määrä. Tiedot saadaan vuosilta 1972-82 sekä ns. omista töistä että kaikista töistä. Yleensä tuotantoprosessiin katsotaan osallistuvan tuotannontekijöinä työtä, pääomaa ja raaka-ainetta.

Työpanos

Tienrakentamisen työvoimapanos koostuu rakennusmiesten, koneenkuljettajien ja autonkuljettajien työstä. Koska edellä olevien työntekijäryhmien keskituntiansiot ovat yhtäsuuret[1)], voidaan kokonaistyöpanoksena käyttää tuotantoon osallistuvien työtuntien määrää. Työpanoksen tarkempi mitta olisi keskituntipalkalla painotettu työtuntien summa. Palkalla painottamiseen sisältyy olettamus, että kunkin työntekijäryhmän palkka vastaa kyseisen työn rajatuottavuutta tienrakentamisessa. Panoksen rajatuottavuudella tarkoitetaan tuotoksen määrän lisäystä, jonka kyseisen panoksen lisääminen yhdellä yksiköllä aiheuttaa muiden panosten määrien pysyessä muuttumattomina.

Pääomapanos

Selkeän yksikäsitteisen pääomapanoksen määrittely on hankalaa. Sen tulisi kuvata kiinteän pääoman käyttöä. Tuotantofunktiota estimoitaessa käytetään usein korvikemuuttujia kuten esim. koneiden käyttötunteja tai koneiden kuluttamaa energiaa. Tienrakentamisessa tuotannollista pääomaa ovat koneet ja autot. Niiden käyttöä mitattiin konetunneilla (kh) ja autotunneilla (ah).

Tienrakentamisessa tekninen kehitys ilmenee koneiden ja autojen koon suurenemisena ja tehon lisääntymisenä. Uudemmat koneet tuottavat tunnissa enemmän suoritetta kuin vanhemmat koneet. Kokeilussa haluttiin esille myös teknisen kehityksen ulkopuolella tapahtunut tuottavuuden muutos. Teknisen kehityksen mittariksi valittiin koneiden ja autojen

----

1) Lähde: Rakentamistalouden toimisto joulukuu 1982

koon muutos. Tällöin tuotannollisen kokonaispääomapanoksen muuttujana käytettiin konetonnituntien (kth) autotonnituntien (ath_2) summaa. Konetonnitunnit ja autotonnitunnit saatiin yhteismitallisiksi kertoimen avulla.

Urakat

Tuotantofunktion konstruoinnin kannalta urakat ovat vaikea ongelma. Urakoista on käytettävissä vain kustannustiedot eikä tiedossa ole missä suhteissa ja määrissä urakoissa käytetään koneita, autoja ja miestyötä. Teorian mukaan tuotoksen määrän selittäjinä olevat panokset eivät saisi olla päällekäisiä. Eräissä malleissa urakat pyrittiin kohdentaan eri panoksiin tekemällä ns. urakoiden kaato (liite 1).

Materiaali

Materiaalipanos katsottiin välituotteeksi. Tuotosta mitattaessa jalostusarvona voidaan välituotepanokset jättää tuotantofunktion ulkopuolelle.

2.2. Tuotos

Tuotantofunktion estimoinnissa käytettiin tuotoksen mittaamiseen samaa tapaa kuin panos/tuotos-menetelmää käytettäessä eli suoritteet painotettiin vuosien 78-81 yksikkökustannusosuuksien keskiarvolla ja laskettiin yhteen. Tuotoksen ja panosten aikasarjat ja laskentaperusteet on esitetty liitteessä 1.

Tuotoksen kuvaajina käytettiin myös kantavan kerroksen kuutioita ja tuotostiemetrejä. Näiden kokeilujen tulokset on esitetty liitteessä 4 taulukon muodossa.

3. TVL:N TUOTTAVUUS VUOSINA 1972-82 SUHDETARKASTELUN AVULLA MITATTUNA

Suhdetarkastelu voidaan esittää kaavan muodossa:

(3.1.) $T = Q/X$,

jossa T = tuottavuus

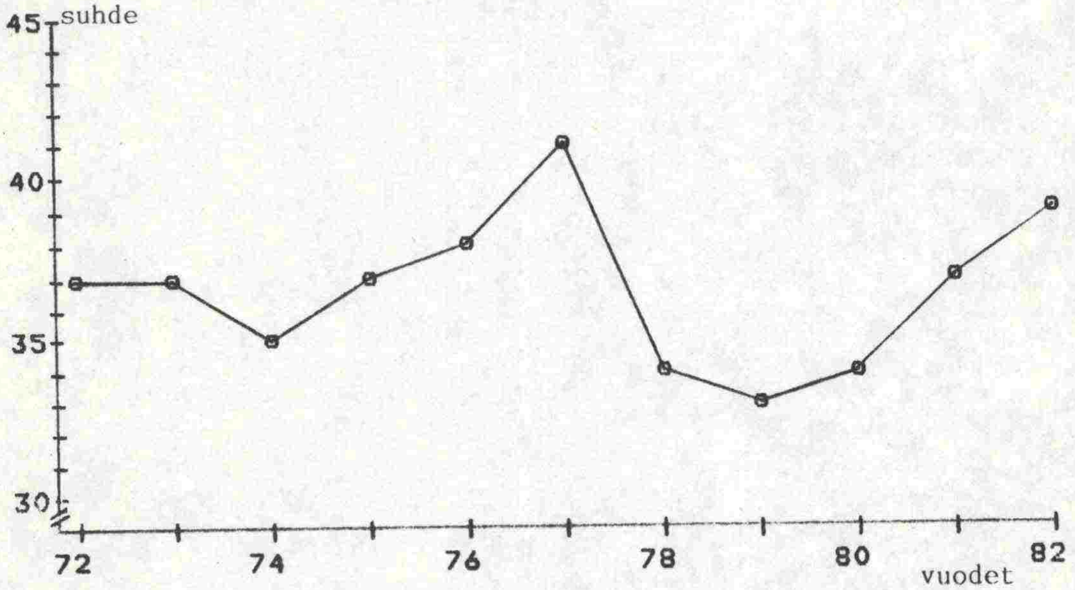
Q = tuotoksen määrä

X = yhdistetty kokonaispanos.

TVL:n omien töiden tuotos jaettiin kokonaispanoksella, jona käytettiin tienrakennuskustannusindeksilla vuoden 1972 hintatasoon muunnettuja tienrakennuksen (1000-litteran) kustannuksia.

Kuvassa 3.1. esitetään tuotos / 1000-litteran kustannusten suhteen kehitys v:na 72-82.

Kuva 3.1. Tuottavuuden kehitys vuosina 1972-82.



Kuviosta 3.1. näkyy selvästi, että tuottavuus laski vuonna 1978 erityisen voimakkaasti. Seuraavassa taulukossa esitetään tuottavuuden prosentuaalinen muutos edelliseen vuoteen verrattuna. Siitä käy ilmi, että tuottavuus laski vuodesta 77 vuoteen 78 liki 16 %.

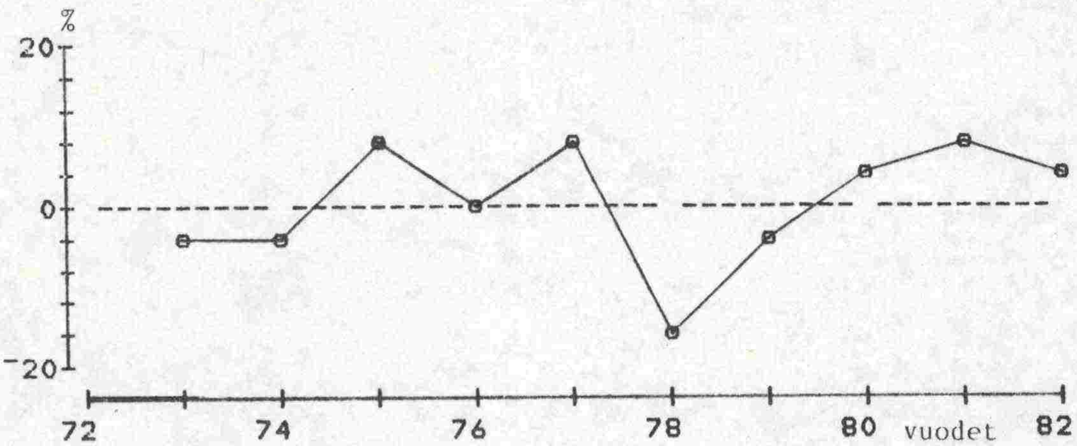
Taulukko 3.1. Tuottavuuden prosentuaalinen muutos v:na 72-82

	72-73	73-74	74-75	75-76	76-77	77-78	78-79	79-80	80-81	81-82
Q/X %-muutos	-2,2	-5,6	7,9	1,5	7,3	-15,9	-2,1	2,7	7,5	5,2

Q = tuotos, X = kokonaispanos: 1000-litteran kustannukset korjattuna tienrakennuskustannusindeksillä

Tuottavuuden prosenttiset muutokset edelliseen vuoteen verrattuna esitetään myös kuvassa 3.2.

Kuva 3.2. Tuottavuuden prosentuaalinen muutos vuosina 1972-82



Suhdetarkastelun mukaan tuottavuuden kasvu tarkastelulla aikavälillä oli keskimäärin 0,63 % vuodessa. Tuottavuuden heilahtelut ovat kuitenkin suuria 7,9 prosentista -15,9 prosenttiin.

Tuotoksen määrä ja panosten määrät sekä niiden prosentuaaliset muutokset edelliseen vuoteen verrattuna antaa taustatietoa myös tuottavuuden vaihtelulle ja sen syille. Taulukossa 3.2. on esitetty tuotoksen ja panosten määrät ja seuraavassa taulukossa 3.3. ovat määrien prosenttimuutoksen edelliseen vuoteen verrattuna.

Taulukko 3.2.

Vuosi	Tuotos	Miestyö 1000 h	Konetyö 1000 h	Kuljetukset 1000 h	Urakat 1000 mk 1)	Kok.kust 1000 mk 1)
72	116 390	8133	1667	2279	73 775	310 947
73	106 394	5257	1431	1976	74 456	290 488
74	76 321	4066	1007	1488	44 327	220 734
75	67 282	3661	1036	1372	29 483	180 392
76	64 257	2942	1007	1287	25 451	169 784
77	52 777	2029	756	949	24 467	129 917
78	59 352	2907	1152	1270	29 193	173 709
79	62 995	3040	1247	1412	27 255	188 397
80	60 644	2806	1117	1300	25 566	176 590
81	57 311	2325	1041	1183	20 868	155 144
82	55 972	2164	1010	1108	18 081	144 066

1) Urakoiden kustannukset korjattu samaan tasoon tienrakennuskustannusindeksillä.

Taulukko 3.3. Tuotoksen ja panosten määrien %-muutos edelliseen vuoteen verrattuna v:na 1972-82

Vuodet	Tuotos %	Miestyö %	Konetyö %	Kuljetukset %	Urakat %
72-73	- 8,6	-35,4	-14,2	-13,3	0,9
73-74	-28,3	-22,7	-29,6	-24,7	-40,5
74-75	-11,8	-10,0	2,8	- 7,8	-33,5
75-76	- 4,5	-19,6	- 2,8	- 6,2	-13,7
76-77	-17,7	-31,0	-24,9	-26,3	- 3,9
77-78	12,5	43,2	52,3	33,8	19,3
78-79	6,1	4,6	8,2	11,2	- 6,6
79-80	- 3,7	- 7,7	-10,4	- 7,9	- 6,2
80-81	- 5,5	-17,1	- 6,8	- 9,0	-18,4
81-82	- 2,3	- 6,9	- 3,0	- 6,4	-13,4
72-82 keskim.	- 6,4	-10,3	- 2,8	- 5,6	-11,6

Tuotos kasvoi vuodesta 77 vuoteen 78 12,5 %, mutta miestyötunnit 43 %, konetyötunnit 52 %, autotunnit 34 % ja urakoiden kustannukset 19 %. Huonosti onnistuneen koneiden käytön tuottavuutta heikentävä vaikutus vuonna 78 korostuu vielä siitä syystä, että kokonaispanosta laskettaessa yksittäisiä panoksia painotettiin niiden yksikkökustannuksilla.

Tuotoksen ja panosten mittaamiseen saattaa sisältyä virhettä, koska vuosien 1977 ja 1978 välillä tehtiin litteroinnin muutos. Kuitenkin rakentamiseen saatiin vuonna 1978 edellistä vuotta enemmän rahaa. Reaalihintaiset kokonaiskustannukset kasvoivat 34 % ja kokonaistuotos vain 12,5 %. Kokonaiskustannuksiin ei litteroinnin muutoksen pitäisi vaikuttaa. Parantunut rahoitustilanne saattoi tuoda toimintaan löysää rahaa, jota ei kyetty käyttämään kyllin tuottavalla tavalla hyväksi.

Panosten käyttömäärät vaihtelivat voimakkaasti koko tarkasteluvälillä.

4. TVL:N OMIEN TÖIDEN TUOTTAVUUS TUOTANTOFUNKTIOLLA MITATTUNA

Tuotantofunktiota hyväkseen käyttävä riippuvuustarkastelu perustuu lähtökohtaan, että laitoksen tuotoksen ja tuottamiseen käytettyjen panosten määrän välistä riippuvuutta voidaan kuvata riittävän tarkasti jonkin matemaattisen funktion avulla. Yleisessä muodossa esitettynä

(4.1.) $Q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

jossa Q = tuotoksen määrä ja

x_i = panoksen i määrä, $i = 1, \ldots, n$.

Seuraavaksi tarkastellaan tuotantofunktiota tapauksessa, jossa käytetään vain kahta panosta,

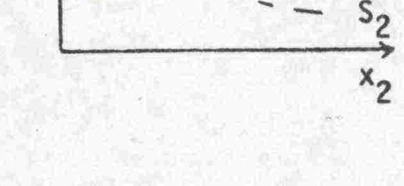
(4.2.) $Q = f(x_1, x_2)$.

Kokonaistuottavuuden kasvulla tarkoitetaan, että samalla määrällä panoksia tuotetaan ajankohtana t_2 suurempi tuotos kuin ajankohtana t_1:

(4.3.) $f(x_1, x_2; t_2) > f(x_1, x_2; t_1)$.

Vastaavasti sama tuotos pystytään tuottavuuden parantuessa tuottamaan pienemmällä panosten määrällä. Kokonaistuottavuuden kasvu voi olla seurausta teknisestä kehityksestä tai esim. työn organisoinnissa tapahtuneesta muutoksesta. Kuvassa 4.1. esitetään kokonaistuottavuuden parantuminen sellaisen kaksipanoksisen tuotantofunktion tapauksessa, jossa panoksia voidaan korvata toisillaan. Tätä korvaavuutta kuvataan samatuotoskäyrällä, joka muodostuu eri panosmäärien yhdistelmistä tuotoksen pysyessä vakiona. Kokonaistuottavuuden kasvun seurauksena samatuotoskäyrä (S) siirtyy lähemmäs origoa.

Kuva 4.1. Samatuotoskäyrät



Panosmäärien lisäämisestä riippumattoman tuotoksen kasvun mittaamiseksi pyritään muodostamaan eksplisiittisessä muodossa oleva tuotantofunktio. Tuotantoteoriaa ja tuotantofunktion muodon määrittelyn edellytyksiä selvitetään liitteessä 2.

4.1. Kokeilussa käytetyn funktion muoto: Cobb-Douglas-tuotantofunktio

TVL:n tienrakentamisen tuotantofunktion muodostamiseksi valittiin Cobb-Douglas-tyyppinen tuotantofunktio. Se on yksinkertainen ja siinä on suhteellisen vähän parametrejä monimutkaisempiin funktioihin verrattuna, mikä on etu aineiston pienen koon takia. Cobb-Douglas-tuotantofunktion taloudellinen tulkinta on helppo ja sitä on laajasti käytetty tuontantoa tutkittaessa. Liitteessä 2 sivuilla 12 ja 13 tehty testi ei tukenut, mutta ei myöskään antanut oikeutta hylätä Cobb-Douglas-tuotantofunktion käyttöä TVL:n tienrakentamisen omien töiden tuotantoprosessin kuvaamiseen. Cobb-Douglas-tuotantofunktiota käytettäessä oletetaan, että panosten korvaavuuden mittana käytettävän substituutiojouston arvo on yksi.[1)]

Cobb-Douglas-tuotantofunktio on muotoa

(4.4.) $Q = Ax_1^a x_2^b$,

jossa Q = tuotoksen määrä

A = tuotoksen ja panosten välisestä mittakaavasta riippuva kerroin

x_1 ja x_2 = panosten määrät

a = panoksen x_1 tuotosjousto

b = panoksen x_2 tuotosjousto

$a + b = v$ = skaalajousto

Panoksen tuotosjousto kertoo kuinka monta prosenttia tuotos muuttuu, kun kyseisen panoksen käytössä tapahtuu 1 % suuruinen muutos muiden panosten määrien pysyessä vakiona. Skaalajousto puolestaan ilmaisee prosenttimäärän, jolla tuotoksen määrä muuttuu, kun kaikkien panosten määrä muuttuu 1 %:lla.

Tuotantoprosessissa sanotaan vallitsevan:

- nousevat skaalatuotot, kun $v > 1$
- vakioiset skaalatuotot,kun $v = 1$
- laskevat skaalatuotot, kun $v < 1$.

Nousevien skaalatuottojen tapauksessa tuotoksen määrä kasvaa nopeammin kuin sen tuottamiseen käytettyjen panosten määrät, vakioisten skaalatuottojen tapauksessa sekä tuotoksen määrä että panosten määrät kasvavat yhtä nopeasti ja laskevien skaalatuottojen tapauksessa tuotoksen määrä kasvaa hitaammin kuin panosten määrät. Skaalajousto mittaa tuotannon lisäyksestä saatavaa etua tai haittaa.

---

1) Substituutiojouston kaava esitetään liitteessä 2 sivulla 6.

Kustannusten skaalajousto (r) mittaa tuotannon lisäyksen aiheuttamaa muutosta kustannuksissa toimittaessa minimikustannusperiaatteella. Minimikustannusperiaate tarkoittaa, että tuotannonharjoittaja valitsee panoksensa panosmarkkinoilta siten, että kustannukset minimoituvat tuotoksen määrän ja panosten hintojen pysyessä vakiona. TVL:n voi katsoa toimivan minimikustannusperiaatteella. Tuotannon skaalajouston (v) ja kustannusten skaalajouston (r) välillä on toimittaessa minimikustannusperiaatteella seuraava yhteys.

(4.5.) $r = 1/v.$

5. TUOTANTOFUNKTION ESTIMOINTIKOKEILUT

5.1. Skaalajouston arvioiminen

Tienrakentamisen skaalajouston (v) arvioimiseksi muodostettiin malli, jossa käytettiin hyväksi yhtälöä (4.5.), joka määritteli tuotannon ja kustannusten välisen skaalajouston välisen yhteyden. Kustannusten skaalajousto (r) estimoitiin yhtälöstä.

(5.1.) $C = AQ^{r}HM,$

jossa C = kokonaiskustannukset (1000-litterat) josta on vähennetty materiaalikustannukset

Q = tuotos

H = hintafunktio, jona käytettiin tienrakennuskustannusindeksiä

M = konetuntien ja konetonnituntien välinen suhde, jota käytettiin teknologian muutoksen mittarina, M = kh/kth.

Estimoinnin tuloksena saatiin kustannusten skaalajoustoksi r = 0,850, jonka t-arvo on 13.4. Saatu tulos viittaisi siihen, että tienrakentamisessa vallitsi kustannusten kannalta tarkasteltuna nousevat skaalatuotot. Tämä merkitsisi, että Cobb-Douglas-tuotantofunktion tuotosjoustojen summa olisi suurempi kuin yksi eli a + b = v = 1,177. Saatu tulos tukee sitä, että tuotantofunktiota estimoitaessa asetetaan ennakkoehdoksi a + b = 1.

5.2. Cobb-Douglas-tuotantofunktion estimoinnit

TVL:n omien töiden tienrakentamista kuvaavan funktion muodoksi valittiin Cobb-Douglas-tyyppinen tuotantofunktio. Kokeilua varten muodostettiin useita eri malleja, joissa käytettiin eri tavoilla määriteltyjä panoksia. Tuottavuuden kehityksen mittarina käytettiin tuotoksen määrässä tapahtunutta muutosta, jota ei voida selittää panosten käytön määrissä tapahtuneella muutoksella. Malliin tuottavuuden muutos sisällytettiin liittämällä siihen trendimuuttuja (T),

(5.2.) $T = e^{gt}$,

jossa e = luonnollisen logaritmin kantaluku
g = tuottavuuden keskimääräinen vuosimuutos tarkastellulta aikaväliltä
t = vuosimuuttuja, joka saa arvoja $72 = 0, 73 = 1, \ldots, 82 = 10$.

Estimoitavat funktiot ovat yleisessä muodossa

(5.3.) $Q_t = Ax_{1t}^a x_{2t}^b e^{gt}$,

jossa merkinnät samat kuin yhtälössä (4.4.) ja (5.2.). Alaindeksi (t) tuotoksessa ja panoksessa viittaa ajankohtaan. Mallit estimoidaan pienimmän neliösumman menetelmällä logaritmisessa muodossa

(5.4.) $\ln Q_t = \ln A + a \ln x_{1t} + b \ln x_{2t} + gt$.

Jatkossa jätetään mallien yhteydessä alaindeksi (t) merkitsemättä.

5.2.1. TVL:n omien töiden tuottavuus v. 1972-82

TVL:n tienrakentamisen omien töiden tuottavuuden mittaamiseksi muodostettiin Cobb-Douglas-tuotantofunktio, jossa oli kolme panostekijää. Työvoimapanos muodostui rakennusmiesten ja kuljettajien työtunneista. Pääomapanoksena käytettiin konetonni- ja autotonnituntien kertoimen avulla laskettua summaa, koska koneiden ja autojen koon suurenemisen vaikutus haluttiin poistaa tuottavuuden kehityksestä ja tutkia muista syistä kuin teknisistä peräisin olevaa tuottavuuden muutosta. Kolmantena panoksena oli urakoiden kustannukset muutettuna samaan hintatasoon tienrakennuskustannusindeksillä. Funktion muoto on

(5.4.) $Q = A\, L^a\, K^b\, U^c\, e^{gt}$

ja logaritmoidussa muodossa

(5.5.) $\ln Q = \ln A + a \ln L + b \ln K + c \ln U + gt$,

jossa Q = tuotos

A = mittakaavakerroin

L = työvoimapanos (miestyötunnit + koneen- ja autonkuljettajien tunnit)

K = pääomapanos (konetonnitunnit (kth) + autotonnitunnit (ath_2)

U = urakkakustannukset deflatoituna tienrakennuskustannusindeksillä

a = työpanoksen tuotosjousto

b = pääomapanoksen tuotosjousto

c = urakoiden tuotosjousto

g = tuottavuuden keskimääräinen muutos vuodessa

t saa arvoja: 72 = 0, 73 = 1,...,82 = 10

Parametrien estimoinnin tuloksena saatiin malli (kertoimen alla niiden t-arvot)

$$\begin{aligned} &(5.5.a) \quad \ln Q = \underset{(-0{,}244)}{-0{,}753} + \underset{(0{,}807)}{0{,}357} \ln L + \underset{(0{,}162)}{0{,}0964} \ln K + \\ &\qquad\qquad + \underset{(1{,}93)}{0{,}271} \ln U \underset{(-0{,}00627)}{-0{,}000178t} \; ; \; R^2 = 0{,}970 \end{aligned}$$

Panosjoustojen summa, skaalajousto (v) on 0,724, jonka t-arvo on 4,64. Tämä merkitsisi vähenevien skaalatuottojen tapausta eli tuotoksen määrä kasvaisi hitaammin kuin käytettyjen panosten määrät lisääntyisivät. Pääomapanoksen tuotosjouston pieni arvo 0,0964 tuntuu epäloogiselta. Tuottavuus pysyy käytännöllisesti katsoen vakiona tarkastellulla aikavälillä keskimääräisen vuosittaisen muutoksen ollessa -0,02 %.

Mallien parametrien (a,b,c,v,g) estimaattien tilastollista merkittävyyttä mitataan Studentin t-testisuureella. Jotta estimaatti poikkeaisi nollasta 95 % todennäköisyydellä tulisi sen t-arvon olla vähintään 2,5 (estimaatti on tällöin tilastollisesti merkittävä).

Seuraavaksi malli estimoitiin olettamalla, että tienrakentamisessa vallitsi vakioiset skaalatuotot. Tuotosjoustojen summaksi asetettiin yksi ja niiden arvot positiivisiksi. Estimoinnin tuloksena saatiin malli

$$\begin{aligned} &(5.5.b) \quad \ln Q = \underset{(-14{,}5)}{-5{,}61} + \underset{(1{,}16)}{0{,}281} \ln L + \underset{(1{,}69)}{0{,}424} \ln K + \\ &\qquad\qquad + \underset{(1{,}60)}{0{,}295} \ln U + \underset{(0{,}181)}{0{,}00393t} \; ; \; R^2 = 0{,}943. \end{aligned}$$

Panosjoustojen väliset suhteet mallissa tuntuvat loogisilta ja mallin mukaan tuottavuuden nousu oli vuodessa keskimäärin 0,4 %. mallin "t-arvot" on laskettu samojen periaatteiden mukaan kuin oikeatkin t-arvot. Edellisissä malleissa oli koneiden ja autojen keskimääräisen koon suurenemisen vaikutus poistettu. Seuraavassa mallissa käytettiin pääomapanoksena konetuntien ja autotuntien summaa. Tunnit laskettiin yhteen käyttämättä kerrointa. Malli vastaa muodoltaan mallia (5.5.) ja on logaritmoidussa muodossa, kun merkitään $\ln A = n$,

(5.6.) $$\ln Q = n + a \ln L + b \ln K_o + c \ln U + gt$$

jossa K_o = konetunnit + autotunnit, muuten merkinnät samat kuin yhtälössä (5.5.).

Estimoinnin tulokseksi saatiin malli

(5.6.a)
$$\begin{aligned} \ln Q = \underset{(-0,273)}{-0,455} &+ \underset{(0,703)}{0,336} \ln L + \underset{(0,196)}{0,119} \ln K_o + \\ &+ \underset{(1,83)}{0,267} \ln U + \underset{(2,79)}{0,000587}t \ ; \ R^2 = 0,970 \end{aligned}$$

Malli näyttää edelleenkin alenevia skaalatuottoja v = 0,721 (t-arvo on 5,63) ja pääoman tuotosjouston arvo on pieni 0,119. Tuottavuus parani hieman ja oli n. 0,06 % keskimäärin vuodessa.

Kun malli estimoitiin vakioskaalatuottojen ehdolla (v=1) saatiin

(5.6.b)
$$\begin{aligned} \ln Q = \underset{(-8,44)}{-4,68} &+ \underset{(1,19)}{0,297} \ln L + \underset{(1,53)}{0,401} \ln K_o + \\ &+ \underset{(1,58)}{0,301} \ln U + \underset{(0,752)}{0,0139}t \ ; \ R^2 = 0,935. \end{aligned}$$

Tässäkin tapauksessa sidotun mallin tuotosjoustojen parametrit käyttäytyivät loogisesti ja tuottavuuden nousu olisi 1,4 % vuodessa.

5.2.2. Kustannukset panoksina

Tienrakentamisen keskeisimmät toisiaan korvaavat panokset ovat urakat ja TVL:n omassa työnjohdossa tehtävät työt. Seuraavassa mallikokeilussa käytettiin tienrakentamisen panoksina omien töiden TVL:n miestyön, konetyön ja kuljetusten kustannusten summaa ja urakoiden kustannuksia, jotka muunnettiin vuoden 1972 hintatasoon tienrakennuskustannusindeksillä. Estimoitava malli oli

(5.7.) $$Q = A\, M^a\, U^b\, e^{gt},$$

joka logaritmoidussa muodossa on

(5.8.) $\ln Q = n + a \ln M + b \ln U + gt$,

jossa Q = tuotos

$n = \ln A$ = mallivakio

M = TVL:n omien tai vuokraamien panosten kustannukset deflatoituna trk:llä

U = urakkakustannukset deflatoituna trk:llä

g = tuottavuuden muutos

t saa arvot $72 = 0, \ldots, 82 = 10$.

Mallin (5.8) estimoinnin tuloksena saatiin

(5.8.a)
$$\underset{(-1,31)}{\ln Q = -2,48} \; \underset{(2,82)}{+ 0,500 \ln M} \; \underset{(1,77)}{+ 0,252 \ln U} \; \underset{(-0,706)}{- 0,0093t} \; ; \; R^2 = 0,966.$$

Mallin antama skaalajousto (v) on 0,753 , jonka t-arvo on 7,54. Malli osoittaa 1 % tuottavuuden vuosittaista laskua.

Sama malli estimoitiin ehdolla $a + b = 1$ ja $a, b \in (0,1)$ ja saatiin

(5.8.b)
$$\underset{(-27,7)}{\ln Q = -7,01} \; \underset{(3,22)}{+ 0,630 \ln M} \; \underset{(1,89)}{+ 0,370 \ln U} \; \underset{(0,612)}{+ 0,0113t} \; ; \; R^2 = 0,932.$$

Tuottavuuden vuosittaiseksi keksimääräiseksi nousuksi tuli mallin mukaan 1,13 %.

Urakoiden %-osuus kokonaiskustannuksista on laskenut koko ajan. Seuraavassa taulukossa 5.1. esitetään urakkakustannusten osuus kokonaiskustannuksista. Esitetyistä kokonaiskustannuksista on vähennetty materiaalikustannukset, koska ne eivät olleet mukana myöskään tuotantofunktiota estimoitaessa.

Taulukko 5.1. Urakkakustannusten %-osuuden kehitys

Vuodet	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
Urakkakustannusten %-osuus	27,5	30,6	24,3	19,6	18,4	23,3	19,9	17,5	17,6	15,8	14,8

Urakkakustannusten %-osuus oli vuosina 1972-82 keskimäärin 20,8 %. Urakoiden tuotosjouston arvo mallissa (5.8.b) oli 0,370, joka on huomattavasti suurempi kuin sen urakkakustannusten prosentuaalinen osuus TVL:n miestöiden, konetöiden ja kuljetusten kustannuksista. Tämä viittaisi siihen, että urakoiden tuottavuus tienrakentamisen omissa töissä olisi parempi kuin omassa työnjohdossa teetetyissä töissä.

5.2.3. Urakoiden kohdentaminen panoksiin

Malleissa (5.6.) käytettiin panoksina työvoimaa, pääomaa ja urakkakustannuksia. Jo aikaisemmin todettiin, että näin määriteltynä panokset ovat päällekkäisiä, mikä on tuotantoteorian kannalta selvä puute. Tämän puutteen korjaamiseksi urakat kohdennettiin työvoima- ja pääomapanoksiin olettamalla, että urakoissa käytettiin panoksia samoissa suhteissa kuin TVL:n omassa työnjohdossa tehdyissä töissä (kaadetut urakat, liite 1). Estimoitava malli on muotoa

$$Q = AL_k^a K_k^b e^{gt},$$

ja logaritmoidussa muodossa

(5.9.) $\ln Q = n + a \ln L_k + b \ln K_k + gt,$

jossa Q = tuotos

$n = \ln A$ = mallivakio

L_k = miestyötunnit ja koneen- ja autonkuljettajien työtunnit

K_k = konetonnitunnit (kth) ja autotonnitunnit (ath_2)

g = tuottavuuden muutos

t saa arvoja 72 = 0,...,82 = 10.

Mallin parametrien estimoinnin tuloksiksi saatiin

(5.9.a) $\ln Q = \underset{(-0,896)}{-3,09} + \underset{(0,424)}{0,198} \ln L_k + \underset{(1,09)}{0,652} \ln K_k - \underset{(-1,48)}{0,0341}t \; ; \; R^2 = 0,960.$

Panosten tuotosjoustojen summa v = 0,851, jonka t-arvo on 4,97. Tuotosjoustojen suhde näyttää loogiselta: työn suhteellisen pieni jouston arvo 0,198 ja pääoman 0,652. Tuottavuuden lasku sen sijaan on mallin mukaan suuri, -3,4 % keskimäärin vuodessa. Kun tuotosjoustojen summaksi asetettiin yksi ja niiden arvot oletettiin olevan positiivisia, saatiin malli

$$(5.9.b) \quad \ln Q = \underset{(-14,5)}{-5,47} + \underset{(1,42)}{0,353} \ln L_k + \underset{(2,60)}{0,646} \ln K_k - \underset{(-1,44)}{0,0226t} \; ; \; R^2 = 0,947.$$

Mallin antama tuottavuuden lasku on suuri, keskimäärin 2,3 % vuodessa.

Mallin antamaan tulokseen täytyy suhtautua varauksellisesti. Kuitenkin mallin mukaan näyttäisi siltä kuin urakoissa käytettäisiin panoksia tuottavammin kuin TVL:n omassa työnjohdossa tehdyissä töissä. Saadut keskimääräiset tuottavuusluvut ovat kolmisen prosenttiyksikköä huonommat kuin mallien (5.5.), joissa urakat olivat omana panoksenaan. Taulukossa 5.2. esitetään yhteenveto parametrien estimaateista.

5.2.4. Tuotantofunktion estimoiminen kustannusfunktion avulla

Kustannukset (C) muodostettiin vähentämällä kokonaiskustannuksista materiaalikustannukset. Työvoimapanoksen yksikkökustannus (p_L) saatiin jakamalla miestyön kustannukset miestyötuntien määrällä ja pääomapanoksen yksikkökustannus (p_K) jakamalla kone- ja kuljetuskustannukset yhdistetyllä konetonni- ja autotonnitunneilla. Urakoissa oletetaan vallitsevan samat yksikkökustannukset kuin TVL:n omassa työnjohdossa tehdyissä töissä. Tuotantofunktioksi valittiin edelleen Cobb-Douglas-tuotantofunktio ja sen parametrien estimoiseksi oletettiin tuotannonharjoittajan käyttäytyvän kahdella eri tavalla. Ensimmäisessä lähestymistavassa oletettiin TVL:n minimoivan kustannuksensa ja toisessa tapauksessa TVL maksimoi tuotoksensa annetulla budjetilla.

Määriteltiin kustannusidentiteetti (C_i)

$$(5.10.) \quad C_i = p_L L + p_K K$$

Tuotantofunktion muoto määrittelee kustannusfunktion muodon, kun kustannukset minimoidaan em. tuotantofunktio rajoitusehtona. CD-tuotantofunktiota vastaava minimikustannusfunktio on muotoa

$$(5.11.) \quad C = (Aa^a b^b)^{-1/v} \; v . a^{1/v} p_L^{a/v} p_K^{b/v} e^{-gt/v}$$

jossa C = minimikustannukset

p_L = työvoimapanoksen hinta

p_K = pääomapanoksen hinta

a = työvoimapanoksen tuotosjousto

b = pääomapanoksen tuotosjousto

a + b = v = skaalajousto

g = tuottavuuden muutos

t saa arvot 72 = 0,...,82 = 10.

Mallin (5.11.) estimoinnin tuloksena saatiin tuotantofunktion parametrien arvot, jotka sijoitettiin tuotantofunktioon, jolloin saatiin

(5.12.a) $$\ln Q = -3{,}54 + 0{,}138 \ln L + 0{,}741 \ln K - 0{,}0161\, t \;;\; R^2 = 0{,}960.$$

Malli antaa skaalajouston arvoksi 0,879 ja tuottavuuden laskuksi keskimäärin 1,6 % vuodessa. Panosten tuotosjoustojen suhde looginen. Tässä mallissa pääomapanoksena (K) käytettiin yhteenlaskettuja konetonni- ja autotonnitunteja. Seuraavassa mallissa pääomapanoksen yksikköhinta (p_{Ko}) laskettiin jakamalla kone- ja kuljetuskustannukset konetuntien ja autotuntien summalla. Tuotantofunktioksi saatiin

(5.12.b) $$\ln Q = -0{,}823 + 0{,}149 \ln L + 0{,}672 \ln K_o - 0{,}00438t \;;\; R^2 = 0{,}961,$$

jossa K_o on kone- ja autotuntien suora summa. Koneiden ja autojen koon suurenemista ei otettu huomioon ja mallin antama tuottavuuden lasku oli 0,4 % vuodessa. Skaalajousto oli 0,821.

Toisena lähestymistapana tuotannonharjoittajan käyttäytymiseen oletettiin, että TVL maksimoi tuotoksen määrän annetuilla määrärahoilla eli kustannusbudjetilla. Maksimoinnin jälkeen estimoitavaksi malliksi saatiin

(5.13.) $$Q = A\, a^a\, b^b\, v^{-v}\, p_L^{-a}\, p_K\, e^{gt},$$

merkinnät samat kuin edellisissä malleissa.

Estimoinnin tuloksesta saatiin tuotantofunktio

(5.13.a) $$\ln Q = -1{,}12 + \underset{(1,32)}{0{,}267} \ln L + \underset{(1,59)}{0{,}474} \ln K - \underset{(-1,94)}{0{,}017}\, t \;;\; R^2 = 0{,}972.$$

Tuotannon skaalajoustoksi saadaan 0,741, jonka t-arvo on 5,77 ja tuottavuuden vuosittaiseksi laskuksi 1,7 %. Käyttämällä pääomapanoksena (K_o) kone- ja autotunteja saadaan tuotantofunktio

$$(5.13.b) \quad \ln Q = \underset{}{0,419} + \underset{(1,23)}{0,254 \ln L} + \underset{(1,63)}{0,458 \ln K_o} - \underset{(-1,14)}{0,00953t} \; ; \; R^2 = 0,973.$$

Mallin antama tuottavuuden lasku aleni 1 %:iin verrattuna edelliseen malliin. Skaalajouston arvo on pieni 0,712 ja sen t-arvo on 6,36.

Sekä kustannusten minimointiin että tuotoksen maksimointiin perustuvat lähestymistavat antoivat tuottavuuden kehittymisestä samansuuntaisia tuloksia. Kustannusten minimointi antoi skaalajoustoksi (v) noin 0,1 verran suurempia arvoja kuin tuotoksen maksimointi. Tässä luvussa esitettyjen mallien parametrien estimaatit on koottu taulukkoon 5.3.

5.3. Tienrakentamisen tuotantofunktion estimointi vuosina 1972-77 ja 1979-82

TVL:n tuottavuutta mitattaessa suhdetarkastelun avulla huomattiin, että vuosi 1978 oli poikkeuksellinen. Tuottavuuden lasku oli romahdusmainen samalla kun käytetyt panosten määrät nousivat voimakkaasti. Tuotantofunktion estimoinnin kannalta on eduksi jos poikkeuksellinen havainto,tässä tapauksessa vuosi 78,poistetaan lähtöaineistosta. Seuraavassa on estimoitu jo esiintynyt malli (5.5) ilman vuotta 1978.

Malli on muotoa

$$Q = A\, L^a\, K^b\, U^c\, e^{gt},$$

joka logaritmimuunnoksen jälkeen

$$(5.14.) \quad \ln Q = n + a \ln L + b \ln K + c \ln U + gt,$$

jossa
- Q = tuotos
- L = miestyötuntien ja kuljettajien tuntien summa
- K = konetonnituntien (kth) ja autotonnituntien (ath_2) summa
- U = urakkakustannukset deflatoituna tienrakennuskustannusindeksillä
- g = tuottavuuden muutos
- t saa arvot 72 = 0,...,77 = 6,79 = 8,...,82 = 10

Estimoinnin tuloksena saatiin tuotantofunktio

$$(5.14.a) \quad \ln Q = \underset{(-0,854)}{-2,13} + \underset{(0,356)}{0,129 \ln L} + \underset{(0,800)}{0,386 \ln K} + \underset{(2,48)}{0,273 \ln U} - \underset{(-0,463)}{0,0105t} \; ; \; R^2 = 0,984.$$

Tuotannon skaalajoustoksi saatiin 0,788, jonka t-arvo on 6,27 ja tuottavuus laskisi 1 % keskimäärin vuodessa. Vapaasti estimoidussa mallissa (5.14.a) panosten tuotosjoustojen suhde on loogisesti oikea ja t-arvot suuremmat kuin vastaavassa mallissa (5.5.a), jossa vuosi 78 oli mukana. Kun tuotosjoustojen summa v asetettiin ykköseksi ja joustot oletettiin positiivisiksi, saatiin malli

$$\text{(5.14.b)} \quad \ln Q = \underset{(-14,6)}{-5,64} + \underset{(1,09)}{0,263} \ln L + \underset{(1,72)}{0,432} \ln K + \underset{(1,67)}{0,304} \ln U + \underset{(0,231)}{0,00495} t \; ; \; R = 0,958.$$

Mallin mukaan tuottavuus nousisi keskimäärin 0,5 % vuodessa. Tuottavuuden muutos on samaa suuruusluokkaa kuin tähän verrattavan mallin (5.5.b) osoittama 0,4 % tuottavuuden keskimääräinen lisäys vuodessa. Tuotosjoustojen suuruusluokat ovat myös samat maileissa (5.5.b) ja (5.14.b).

Samat mallit kuin edellisessä luvussa estimoitiin ilman vuotta 1978 ja tulokset esitetään seuraavissa taulukoissa 5.4. ja 5.5. Kaikissa tapauksissa tuotannon skaalajoustot nousivat jonkin verran, mutta vapaan estimoinnin ja toisaalta vakioisten skaalatuottojen tapauksissa saatu tuottavuuden muutosten ero kasvoi.

Taulukko 5.2. Tuotantofunktioiden parametrien estimaatteja havainnot vuosilta 1972-82

malli	mallivakio n=lnA	tuotosjoustot a	b	c	skaalajousto v	tuottavuuden muutos g	jäännöshajonta	R^2	rajoitus	yhteensopivuus
$Q=AL^aK^bU^ce^{gt}$	-0.753	0.357	0.0964	0.271	0.724	-0.0178 %	0.0578	0.970	-	
(5.5a)	(-0.244)	(0.807)	(0.162)	(1.93)	(4.64)	(-0.00627)				
(5.5b)	-5.61	0.281	0.424	0.295	1	0.393 %	0.0997	0.943	a+b+c=1	
	(-14.5)	(1.16)	(1.69)	(1.60)		(0.181)			a,b,c∈(0,1)	0.587
$Q=AL^aK_o^bU^ce^{gt}$	-0.455	0.336	0.119	0.267	0.721	0.0587 %	0.0578	0.970	-	
(5.6a)	(-0.273)	(0.703)	(0.196)	(1.83)	(5.63)	(2.79)				
(5.6b)	-4.68	0.297	0.401	0.301	1	1.39 %	0.105	0.935	a+b+c=1	0.531
	(-8.44)	(1.19)	(1.53)	(1.58)		(0.752)			a,b,c∈(0,1)	
$Q=AM^aU^be^{gt}$	-2.48	0.500	0.252	-	0.753	-0.930 %	0.0573	0.966	-	
(5.8a)	(-1.31)	(2.82)	(1.77)		(7.54)	(-0.706)				
(5.8b)	-7.01	0.630	0.370	-	1	1.13 %	0.106	0.932	a+b=1	
	(-27.7)	(3.22)	(1.89)			(0.612)			a,b,c∈(0,1)	0.327
$Q=AL_k^aK_k^be^{gt}$	-3.09	0.198	0.652	-	0.851	-3.41 %	0.0196	0.960	-	
(5.9a)	(-0.896)	(0.424)	(1.09)		(4.97)	(-1.48)				
(5.9b)	-5.47	0.353	0.646	-	1	-2.26 %	0.0880	0.947	a+b=1	0.493
	(-14.5)	(1.42)	(2.60)			(-1.44)			a,b,c∈(0,1)	

Taulukko 5.3. Kustannusfunktion avulla estimoituja tuotantofunktioiden parametrejä havainnot vuosilta 1972-82

malli	mallivakio $n=\ln A$	tuotosjoustos a	tuotosjoustos b	skaalajousto v	tuottavuuden muutos g	jäännöshajonta	R^2
$C=(Aa^a b^b)^{-\frac{1}{v}} vQ^{\frac{1}{v}} p_L^{\frac{a}{v}} p_K^{\frac{b}{v}} e^{-\frac{gt}{v}}$ (5.12a)	-3.54	0.138	0.741	0.879	-1.61 %	0.0677	0.960
$C=(Aa^a b^b)^{-\frac{1}{v}} vQ^{\frac{1}{v}} p_L^{\frac{a}{v}} p_{K_o}^{\frac{b}{v}} e^{-\frac{gt}{v}}$ (5.12b)	-0.823	0.149	0.672	0.821	-0.438 %	0.0705	0.961
$Q=Aa^a b^b v^{-v} C^v p_L^{-a} p_K^{-b} e^{gt}$ (5.13a)	-1.12	0.267 (1.32)	0.474 (1.59)	0.741 (5.77)	-1.71 % (-1.94)	0.0550	0.972
$Q=Aa^a b^b v^{-v} C^v p_L^{-a} p_{K_o}^{-b} e^{gt}$ (5.13b)	0.419	0.254 (1.23)	0.458 (1.63)	0.712 (6.36)	-0.953 % (-1.14)	0.0547	0.973

Taulukko 5.4. Tuotantofunktioiden parametrien estimaatteja havainnot vuosilta 1972-77 ja 1979-82

malli	mallivakio n=lnA	tuotosjoustot			skaalajousto v	tuottavuuden muutos g	jäännöshajonta	R^2	rajoitus	yhteensopivuus
		a	b	c						
$Q=AL^aK^bU^ce^{gt}$	-2.13	0.129	0.386	0.273	0.788	-1.05 %	0.0453	0.984	-	
(5.14a)	(-0.854)	(0.356)	(0.800)	(2.48)	(6.27)	(-0.463)				
(5.14b)	-5.64	0.263	0.432	0.304	1	0.495 %	0.0965	0.958	a+b+c=1	0.591
	(-14.6)	(1.09)	(1.72)	(1.67)		(0.231)			$a,b,c\in(0,1)$	
$Q=AL^aK_o^bU^ce^{gt}$	-0.718	0.184	0.292	0.273	0.748	-0.222 %	0.0471	0.983	-	
	(-0.532)	(0.469)	(0.588)	(2.32)	(7.20)	(-0.131)				
	-4.70	0.287	0.400	0.313	1	1.54 %	0.105	0.948	a+b+c=1	0.546
	(-8.44)	(1.15)	(1.53)	(1.63)		(0.832)			$a,b,c\in(0,1)$	
$Q=AM^aU^be^{gt}$	-2.40	0.471	0.297	-	0.750	-0.642 %	0.0491	0.978	-	
	(-1.48)	(3.08)	(2.27)		(8.76)	(-0.563)				
	-6.99	0.610	0.389	-	1	1.38 %	0.109	0.942	a+b=1	0.351
	(-27.2)	(3.06)	(1.95)			(0.727)			$a,b\in(0,1)$	
$Q=AL_k^aK^be^{gt}$	-4.37	-0.00508	0.914	-	0.909	-4.26 %	0.0537	0.973	-	
	(-1.43)	(-0.0121)	(1.70)		(5.99)	(-2.07)				
	-5.51	0.320	0.679	-	1	-2.34 %	0.0853	0.960	a+b=1	0.446
	(-14.7)	(1.29)	(2.74)			(-1.52)			$a,b,c\in(0,1)$	

Taulukko 5.5. Kustannusfunktioiden avulla estimoituja tuotantofunktioiden parametrien estimaatteja havainnot vuosilta 1972-77 ja 1979-82

malli	mallivakio	tuotosjoustot		skaalajousto	tuottavuuden muutos	jäännöshajonta	R^2
	n=lnA	a	b	v	g		
$C=(Aa^a b^b)^{-\frac{1}{v}} vQ^{\frac{1}{v}} p_L^{\frac{a}{v}} p_K^{\frac{b}{v}} e^{-\frac{gt}{v}}$	-2.44	0.174	0.654	0.828	-1.60 %	0.0529	0.979
$C=(Aa^a b^b)^{-\frac{1}{v}} vQ^{\frac{1}{v}} p_L^{\frac{a}{v}} p_{K_o}^{\frac{b}{v}} e^{-\frac{gt}{v}}$	-0.0781	0.187	0.591	0.778	-0.564 %	0.0597	0.977
$Q=Aa^a b^b v^{-v} C^v p_L^{-a} p_K^{-b} e^{gt}$	-1.46	0.239	0.519	0.759	-1.66 %	0.0436	0.985
		(1.48)	(2.19)	(7.41)	(2.37)		
$Q=Aa^a b^b v^{-v} C^v p_L^{-a} p_{K_o}^{-b} e^{gt}$	0.353	0.245	0.472	0.717	-0.850 %	0.0450	0.984
		(1.44)	(2.03)	(7.78)	(-1.23)		

Taulukoissa 5.2.- 5.5.esiintyvät kirjainlyhenteet:

Q	=	laskennallinen tuotos
L	=	yhteenlasketut mies-, kone- ja kuljetustunnit
K	=	yhteenlasketut kone- ja kuljetustonnitunnit
K_o	=	yhteenlasketut kone- ja kuljetustunnit
U	=	urakoista maksettu rahamäärä tienrakennuskustannusindeksillä deflatoituna vuoden 1972 tasoon
M	=	mies-, kone- ja kuljetustyön kustannukset deflatoituna kuten urakat
L_K	=	mies-, kone- ja kuljetustunnit yhteensä omista töistä ja urakoista
K_K	=	kone- ja kuljetustonnitunnit yhteensä omista töistä ja urakoista
C	=	M + U
p_K	=	kone- ja kuljetustöiden kustannukset jaettuina K:lla ja deflatoituna kuten urakat eli kone- ja kuljetustonnituntien yksikköhinta
P_{K_o}	=	Kone- ja kuljetustöiden kustannukset jaettuina K_o:lla ja deflatoituna kuten urakat eli kone- ja kuljetustuntien yksikköhinta
t	=	vuosi-indeksi: 0 = 1972,..., 10 = 1982.

Mallit, joissa ei ole rajoitusta, on estimoitu tavallisella regressioanalyysillä. Mallit saadaan lineaarisiksi logaritmimuunnoksella.

Rajoitetut mallit on estimoitu liitteessä 3 selostetulla menetelmällä. Parametri v = a+b tai v = a+b+c jos c esiintyy mallissa.

Estimaattien alla suluissa olevat testisuureet kertovat estimaattien tarkkuudesta ja ovat lasketut kaavalla

testisuure = kertoimen arvo/kertoimen keskivirhe.

Rajoittamattomissa malleissa nämä testisuureet ovat Studentin t-testisuureita, joiden on oltava vähintään 2.5 jotta estimaatti poikkeaisi nollasta 95 % todennäköisyydellä (estimaatti olisi merkitsevä). Rajoitetuissa malleissa testisuureen jakaumaa ei tunneta, mutta luvut ovat silti keskenään vertailukelpoisia. Toisin sanoen mitä suurempi testisuureen arvo on sitä tarkempi on estimaatti.

Sarakkeessa "yhteensopivuus" esitetty luku kertoo kuinka todennäköisesti mallille asetettu rajoitus ($v \approx 1$; $a,b,c \in (0,1)$) on sopusoinnussa havaintoaineiston kanssa (katso liite 3, sivu 4). Jos luku on = 1, aineisto sopii täysin yhteen rajoituksen kanssa, jos taas se on = 0, ovat havainnot ja rajoitus ristiriidassa keskenään.

5.4. Yhteenveto mallikokeilusta

Malleista parhaana voi pitää ensimmäistä malliryhmää, jossa panoksina olivat työvoima, pääoma ja urakat. Se kuvaa luonnollisella tavalla tuotantoprosessia ja lähtötiedot ovat mahdollisimman alkuperäisessä muodossa. Mallien antamat parametrien estimaatit tuntuvat loogisilta varsinkin malleissa, joista on jätetty vuosi 1978 pois. Mallit, joissa käytettiin panoksina kustannuksia kuvaa paremminkin ko. kustannusten vaihteluista aiheutuvaa tuotoksen muutosta kuin panosten käyttömäärissä tapahtuneen muutoksen seurausta. Urakoiden käsittely oli ongelmallista eikä ongelmia tämän kokeilun puitteissa ilmeisesti kyetty ratkaisemaan. Olettamukset, joihin perustuen urakoiden kaato tehtiin, eivät näytä pitävän paikkaansa ainakaan koko tarkasteluvälillä, sikäli suurta tuottavuuden laskua mallit osoittivat.

Mallien parametrien testisuureiden itseisarvot olivat alle merkitsevyysrajan 2,5. Huonot t-arvot ovat luonnollinen seuraus havaintojen pienestä lukumäärästä aiheutuvasta vapausasteiden vähäisyydestä. Kaikissa mallikokeiluissa tuotannon skaalajouston (v) arvo oli alle 1 ja vaihteli 0,7 ja 0,9 välillä. Tämä merkitsisi, että tuotannon laajentuessa lisääntyisi panosten määrä nopeammin kuin tuotoksen määrä. Tuotantofunktioiden antama tulos on ristiriidassa kustannusten skaalajouston (r) estimoinnin antaman tuloksen kanssa, jonka mukaan TVL:n tienrakentamisen omissa töissä vallitsisi nousevat skaalatuotot eli v olisi suurempi kuin 1. Kustannusten skaalajoustoa arvioitaessa käytettiin kokonaiskustannuksia. Tuotantofunktiota estimoitaessa kokonaispanos jaettiin osatekijöihin litteroittain. Jos panosten kohdistamisessa litteroihin on virheitä, se heijastuu suoraan sekä selittäviin muuttujiin että tuotokseen. Tuotos muodostettiin painottamalla litteroiden suoritteita niiden yksikkökustannusten osuudella. Mikäli litterointiin liittyy systemaattista virhettä tulos näkyy heti mallikokeiluissa. Kustannusten skaalajouston ja tuotannon skaalajouston välinen ristiriita antaa aiheen epäillä, että tuotosta laskettaessa aliarvioitaisiin jotakin tai joitakin litteroita.

Kun malleihin lisättiin ehdoiksi vakioiset skaalatuotot $v = 1$ ja tuotosjoustojen positiivisuus paranivat mallien tilastolliset ominaisuudet. Asettamalla parametrien estimoinnin ehdoksi $a + b = 1$ vähennetään estimoitavien parametrien lukumäärää yhdellä ja saadaan näin arvokas vapausaste lisää.

Ehdon asettaminen lisää myös kerroinestimaattien tarkkuutta ja vähentää tällä tavalla multikollineaarisuuden vaikutusta. Useissa vastaavissa tarkasteluissa käytetään myös vakioisten skaalatuottojen ehtoa. Vakioiset skaalatuotot tekevät tuotantofunktion estimoinnin antamat tuottavuuden kehittymistä kuvaavat luvut vertailukelpoisiksi suhdetarkastelun kanssa.

Tuottavuuden tarkasteluun vuosina 1972-82 suositellaan käytettäväksi mallia (5.5.b)

(5.5.b) $$\ln Q = -5{,}61 + 0{,}281 \ln L + 0{,}424 \ln K + \\ +0{,}295 \ln U + 0{,}00393t.$$

Mikäli halutaan ennustaa panosten määrien avulla tuotoksen määrän kehitystä suositellaan käytettäväksi vastaavaa mallia, josta on jätetty vuosi 1978 pois.

(5.14.b) $$\ln Q = -4{,}70 + 0{,}287 \ln L + 0{,}400 \ln K \\ +0{,}313 \ln U + 0{,}00495t.$$

Mallien kirjainmerkinnät ovat

Q = tuotos

L = miestyötuntien, konetuntien ja autotuntien (kuljettajien työtunnit) summa

K = konetonni- ja autotonnitunnit

U = urakkakustannukset muutettuna vuoden 72 hintatasoon tienrakennuskustannusindeksillä.

6. KOKEILUN YHTEENVETO

Kokeilussa tarkasteltiin TVL:n tienrakentamisen omien töiden tuottavuuden kehittymistä tuotantofunktion avulla. Siinä käytettiin Cobb-Douglas-tyyppistä tuotantofunktiota. Panostekijöinä olivat työpanos, pääomapanos (koneet ja autot) ja urakat. Tuotos muodostettiin samalla tavoin kuin panos/tuotos-menetelmässä. Eräissä malleissa eliminoitiin koneiden ja autojen keskimääräisen koon aiheuttama tuottavuuden nousu. Tuotantofunktion mukaan TVL:n tienrakentamisen omien töiden tuottavuus nousi keskimäärin 0,4 % vuodessa vuosien 1972-82 välisenä aikana (malli 5.5.b). Suhdetarkastelussa käytettiin samaa tuotosta kuin tuotantofunktiota määriteltäessä. Kokonaispanoksena käytettiin tienrakennuskustannusindeksillä vuoden 1972 hintatasoon korjattuja tielitteroiden kustannuksia. Suurempien koneiden aiheuttama tuottavuuden nousu eliminoitiin myös tässä tapauksessa, koska panokset painotettiin niiden yksikkökustannuksilla. Suhdetarkastelu osoitti omien töiden tuottavuuden nousuksi keskimäärin 0,6 % vuodessa tarkastellulla aikavälillä.

Erään tutkimuksen mukaan Suomen kansantalouden tuottavuus nousi vuosina 1969-79 keskimäärin 1,4 % vuodessa.[1)] Tuottavuuden nousu sisälsi myös teknisen kehityksen vaikutuksen tuottavuuteen. Vastaavalla tavalla mitattuna TVL:n omien töiden keskimääräinen vuosittainen tuottavuuden nousu oli 1,39 % (malli (5.6.b). Tämän mukaan TVL:n tuottavuuden kehitys olisi sama kuin koko kansantalouden tuottavuuden nousu.

Kokeilussa estimoidut mallit eivät kuitenkaan ole riittävän hyviä TVL:n omien töiden tuotantofunktioksi. Parametrien estimaattien arvot eivät olleet tilastollisesti merkitseviä: testisuureiden arvot jäivät alle 2,5, joka on rajana, jotta estimaatti poikkeaisi 95 % todennäköisyydellä nollasta. Keskeisin syy mallien huonoihin tilastollisiin ominaisuuksiin oli havaintoaineiston pieni koko. Havainnot saatiin yhdentoista vuoden ajalta. Kunnolliset tilastolliset ominaisuudet edellyttäisivät vähintään kaksinkertaista havaintojen määrää. Tarkastellulla aikavälillä muuttui litterointijärjestelmä, mikä antaa aihetta epäillä havaintoaineiston luotettavuutta. Panokset ja erityisesti tuotos saattavat olla vuosien 1972-77 välillä erilailla mitattuja kuin vuosina 78-82. Jos näin on, olisi kokeilun havaintoaineistona ollut kaksi eri sarjaa. Sarjojen epäonnistunut

---

1) Ilkka Salonen: Teknisen kehityksen mittaamisesta tuotantofunktion avulla, Suomen Pankki, D-sarja.

yhdistely selittäisi osaksi vuoden 78 suuren tuottavuuden laskun ja mallien tuotosjoustojen summan, skaalajouston pienet arvot. Kokeilussa käytetty menetelmä aikasarja-analyysi on erittäin herkkä havaintoaineistoon sisältyville mittavirheille.

Kaikissa taloudellisissa tutkimuksissa aikasarjoihin liittyy selittävien muuttujien välillä suurta korrelaatiota ns. multikollineaarisuutta, tässä tapauksessa panosten välistä korrelaatiota. Multikollineaarisuuden haitat korostuvat aineiston koon ollessa pieni. Kokeilun yhteydessä kehitettiin tilastollinen menetelmä multikollineaarisuuden haittojen vähentämiseksi ennakkotiedon avulla. Menetelmän selostus on liitteenä 3.

Kokeilun yhteydessä paljastui, että laitoksessa kiinnitetään liian vähän huomiota tarpeeksi pitkien tilastosarjojen keräämiseen. Eriaikaisten tietojen vertailtavuus kärsii. Suositeltavaa olisikin ryhtyä keräämään perustilastoista sarjoja, joissa tietojen perusteet säilyisivät. Tämä antaisi mahdollisuuden tehdä muutamaa vuotta pidempiä ajanjaksoja käsittäviä analyysejä.

Tuotantofunktiokokeilun jatkamiseksi olisi mahdollista siirtyä hankekohtaiseen tarkasteluun. Havaintoaineiston koko suurenisi ja tilastollinen analyysi tulisi luotettavammaksi. Mittaustapojen muutoksia olisi vähemmän, koska tarkasteltava havaintoaineisto olisi lyhyemmältä ajalta. Riskit mittausvirheisiin pienenisivät samoin kuin multikollineaarisuuden aiheuttamat haitat vähenisivät. Tehdyssä kokeilussa skaalatuotot mittasivat toiminnon laajuudeen vaikutusta tuottavuuteen. Hankeperustainen tarkastelu mittaisi hankkeen koon aiheuttamia skaalavaikutuksia.

Tuotantofunktion käytön soveltuvuus esimerkiksi kunnossapidon toiminnan kuvaamiseen saattaisi olla mahdollista. Kunnossapidon tilastoja on kerätty sen verran lyhyen ajan, että tässä kokeilussa käytettyyn aikasarja-analyysiin ei liene edellytyksiä. Kokeilu tulisikin tehdä kahdessa vaiheessa: ensin kerätä luotettava havaintoaineisto ja sen jälkeen analysoida se. Havaintoaineistona voisi olla tiemestaripiireittäin kerätyt panostiedot ja tuotoksena kunnossapidetyt tiekilometrit painotettuina kunnossapitoluokilla. Tilastollisena menetelmänä voisi käyttää poikkileikkausanalyysiä.

LIITTEET

Tienrakentamisen panokset ja tuotokset vuosina 1972-82

1. Panokset

Tienrakentamisen panokset jaetaan mies-, kone- ja kuljetustyöhön, materiaaliin, urakoihin ja muihin kustannuksiin. Mies-, kone- ja kuljetustyö on mitattu tunteina (mh, kh, ah); lisäksi kone- ja kuljetustyö myös tonnitunteina (kth, ath). Muut kustannukset on mitattu vain markkoina.

1.1. Mies-, kone- ja kuljetustyö

Taulukko 1. Mies-, kone- ja kuljetustyötunnit (milj.tunteja)

	Miestyö	Konetyö	Kuljetukset	Yhteensä
1972	8.1330	1.6665	2.2787	12.0782
1973	5.2567	1.4307	1.9761	8.6635
1974	4.0659	1.0069	1.4883	6.5611
1975	3.6613	1.0356	1.3715	6.0684
1976	2.9420	1.0069	1.2869	5.2358
1977	2.0294	.7566	.9488	3.7349
1978	2.9068	1.1524	1.2699	5.3292
1979	3.0400	1.2469	1.4122	5.6991
1980	2.8056	1.1171	1.3002	5.2230
1981	2.3250	1.0414	1.1834	4.5498
1982	2.1643	1.0103	1.1080	4.2827

Taulukko 2. Kone- ja kuljetustonnitunnit (milj.tunteja)

	Konetonni-tunnit	Kuljetuston-nitunnit*	Yhteensä
1972	16.7031	21.2874	37.9905
1973	14.4649	19.3273	33.7922
1974	10.7526	15.1733	25.9259
1975	10.8329	14.5674	25.4003
1976	10.7526	14.2177	24.9703
1977	8.1033	10.8865	18.9898
1978	12.1556	15.1127	27.2683
1979	13.2486	16.7400	29.9886
1980	11.9809	15.6381	27.6190
1981	11.3195	14.7088	26.0283
1982	11.9338	13.9255	25.8592

* Nämä on muutettu yhteismitallisiksi konetonnituntien kanssa mk/ath- ja mk/kth- suhteella.

1.2. Kaadetut urakat

Panoslaji urakat sisältää samoja komponentteja kuin omassa työnjohdossa tehdyt työt eli mies-, kone- ja kuljetustyötä ja materiaalia. Jotta koko tienrakentamisessa käytetty työ saataisiin esille, on suoritettu ns. urakoiden kaato. Se on suoritettu seuraavasti:

Jakoperusteena on ollut tietyillä littereillä (ks. s. 4) tieto urakan sisällöstä ja muilla littereillä on oletettu, että urakka sisältää kutakin kustannuslajia samassa suhteessa kuin keskimääräinen toteutuma vuosina 1979-81. Tämä jako tehdään markoilla. Markat muutetaan sen jälkeen tunneiksi siten, että mk/panos- suhde säilyy ennallaan. Vuosien 1972-77 urakoita ei pystytty jakamaan näin, vaan jouduttiin tekemään oletus, ettei kustannuslajin urakka sisältö ole muuttunut vuosina 1972-81, ja käyttämään näille vuosille vuosien 1978-81 tiedoista laskettua "kasvatuskerrointa".

Urakoiden kaadosta johtuvat lisäykset yhteenlaskettuihin mies-, kone- ja kuljetustunteihin (lis(mh+kh+ah)) ja kone- ja kuljetustunteihin (lis($kth+ath_2$)) ovat (milj.tunteja):

	lis(mh+kh+ah)	lis($kth+ath_2$)
1972	1.0399	7.2027
1973	.9073	7.3278
1974	.6848	5.5800
1975	.5929	4.9106
1976	.5399	4.7985
1977	.5104	4.3398
1978	.5671	5.2111
1979	.5812	5.3751
1980	.5772	5.3444
1981	.5302	5.1134
1982	.5140	4.9498

1.3. Markkamääräiset panokset

Taulukossa 3 on tienrakentamisen kustannukset esitetty nimellisinä ja taulukossa 4 vuoden 1972 hintatasossa deflatoituina tienrakennuskustannusindeksillä (perusvuosi 1972).

Taulukko 3. Tienrakentamisen kustannukset vuosina 1972-1982 (milj.mk)

	Yhteensä	Miestyö	Konetyö	Kuljetus	Urakat	Materiaali	Muut
1972	310.947	46.027	64.437	77.307	73.775	42.236	7.165
1973	331.156	46.191	60.938	76.189	84.880	53.614	9.343
1974	317.857	45.691	67.968	74.484	63.830	55.037	10.846
1975	312.078	52.422	63.234	81.774	51.005	51.225	12.417
1976	331.079	47.743	67.968	90.987	49.629	62.079	12.672
1977	278.021	36.354	57.526	71.104	52.360	53.311	7.367
1978	387.371	53.061	88.643	107.744	65.101	60.402	12.420
1979	437.081	60.407	105.442	118.955	63.232	75.155	13.890
1980	471.496	64.174	105.994	133.386	68.262	84.727	14.953
1981	470.085	61.280	112.234	148.978	63.229	69.558	14.806
1982	485.504	63.649	121.019	149.431	60.934	75.095	15.376

Taulukko 4. Tienrakentamisen kustannukset vuosina 1972-1982 (milj.mk) vuoden 1972 tasossa

	Yhteensä	Miestyö	Konetyö	Kuljetus	Urakat	Materiaali	Muut
1972	310.947	46.027	64.437	77.307	73.775	42.236	7.165
1973	290.488	40.519	53.455	66.832	74.456	47.030	8.196
1974	220.734	31.730	47.200	51.725	44.327	38.220	7.532
1975	180.392	30.302	36.552	47.268	29.483	29.610	7.177
1976	169.784	24.484	34.856	46.660	25.451	31.835	6.499
1977	129.917	16.988	26.881	33.226	24.467	24.912	3.442
1978	173.709	23.794	39.750	48.316	29.193	27.086	5.570
1979	188.397	26.037	45.449	51.274	27.255	32.394	5.987
1980	176.590	24.035	39.698	49.957	25.566	31.733	5.600
1981	155.144	20.224	37.041	49.168	20.868	22.956	4.886
1982	144.066	18.887	35.911	44.342	18.081	22.283	4.563

2. Tuotos

Tienrakentamisen tuotos on määritelty ns. laskennallisena tuotoksena jossa on sopivilla muuntokertoimilla laskettu yhteen erilaiset osatuotokset:

1) On valittu litterat i, i = 1,..., J, jotka kattavat hyvin tienrakentamisen. Litterat ovat 1121, 1122, 1123, 1311, 1312, 1321, 1322, 1331, 1334, 1410, 1510, 1520, 1530, 1610, 1621, 1622, 1632, 1633, 1811, 1812, 1821, 1861, 1864, 1866, 1880. Merkitään litteran i yksikköhintaa p_{it}:llä ja suoritemäärää s_{it}:lä vuonna t, t = 1979, 1980, 1981.

2) Litteran i muuntokerroin k_{it} vuonna t lasketaan kaavalla

$$k_{it} = p_{it}/(\sum_i p_{it}) \qquad \forall i, t.$$

3) Litteran keskimääräinen muuntokerroin h_i lasketaan suoritteilla painotettuna keskiarvona kertoimista k_{it}:

$$h_i = (\sum_t k_{it}\, s_{it})/(\sum_t s_{it}) \qquad \forall i.$$

4) Laskennallinen tuotos T_t vuodelle t, t = 1972,..., 1982, lasketaan summana

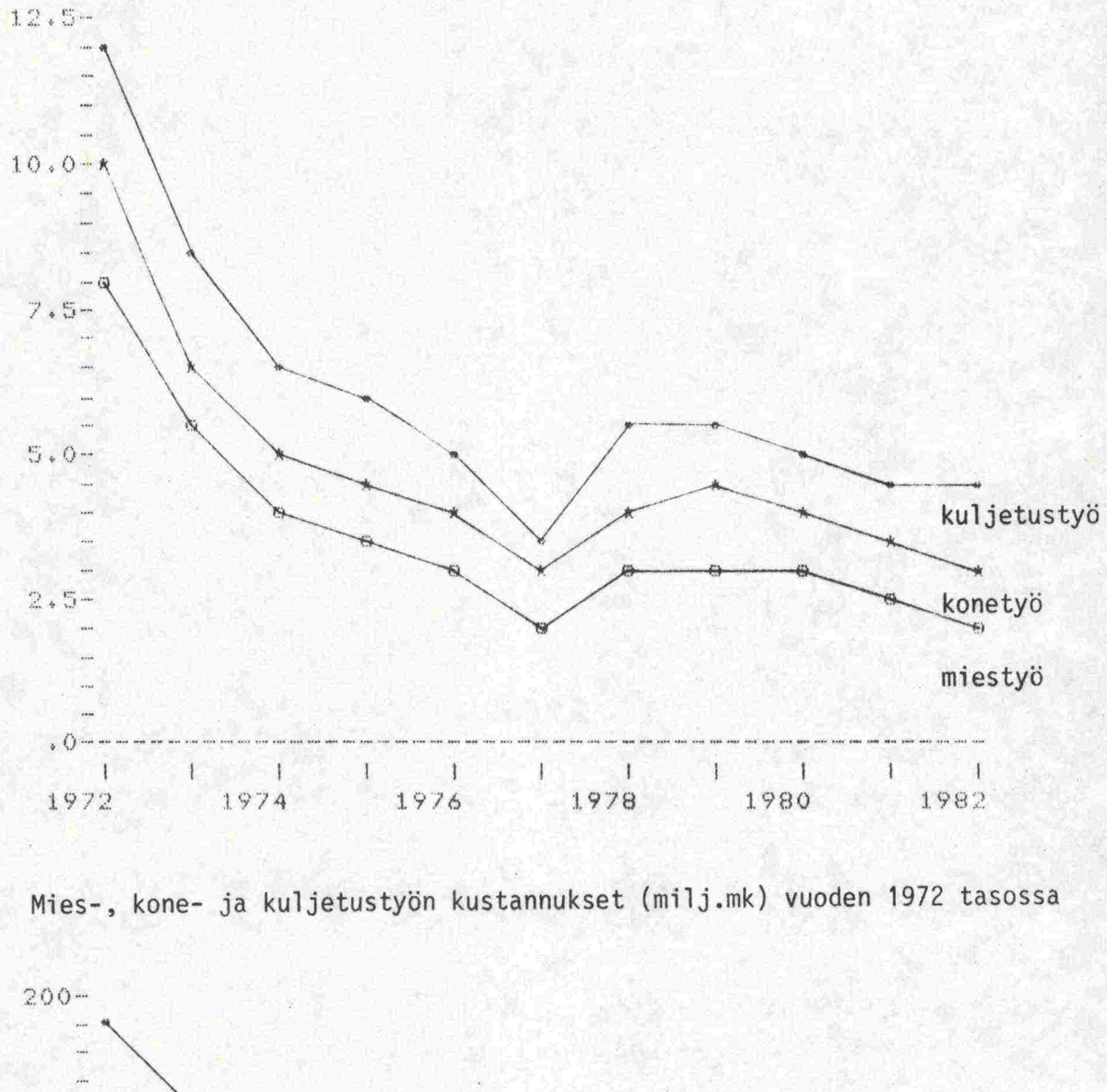
$$T_t = \sum_i h_i\, s_{it}.$$

Tuotokset vuosille 1972-1982 ovat

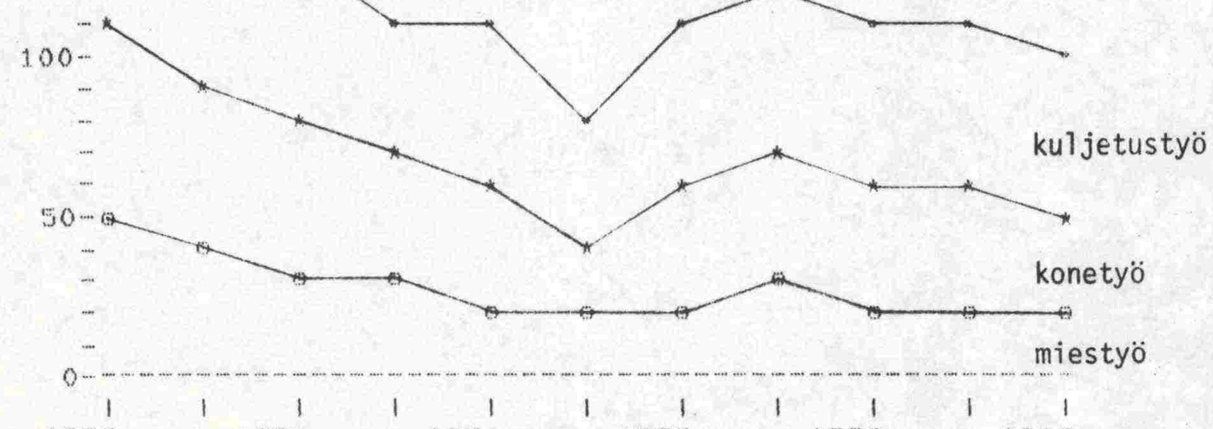
1972	116390
1973	106394.2
1974	76320.8
1975	67281.9
1976	64256.6
1977	52777.4
1978	59351.7
1979	62994.5
1980	60644
1981	57310.7
1982	55971.5

Panokset

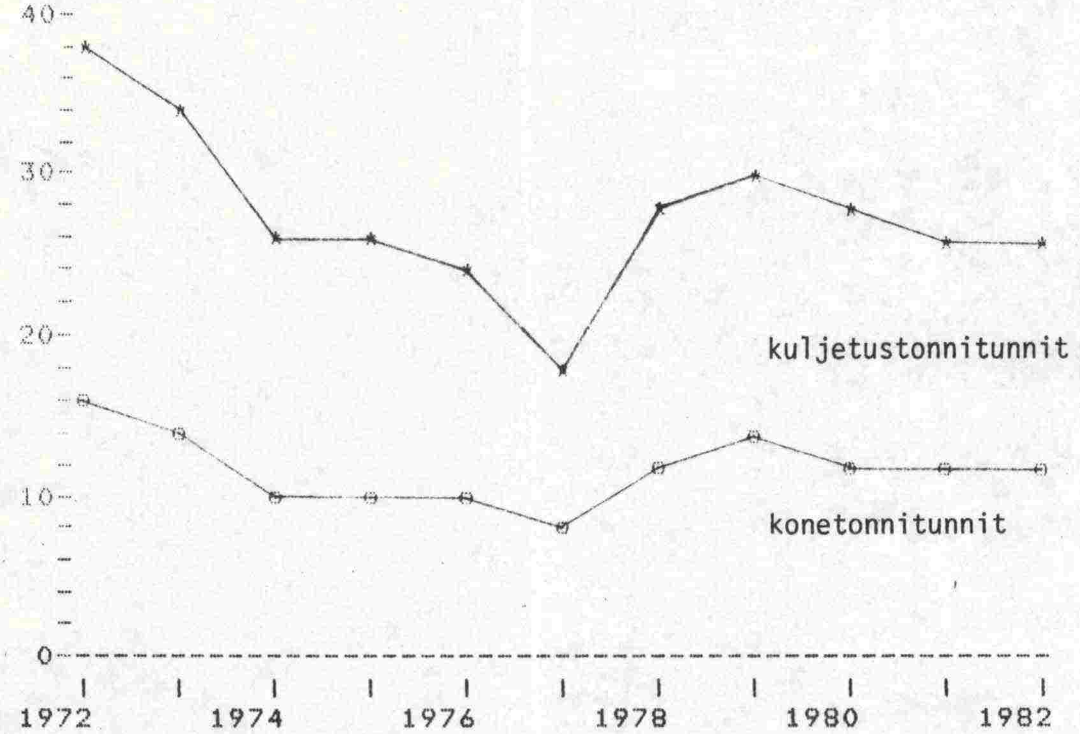
Mies-, kone- ja kuljetustyö (milj.tunteja)



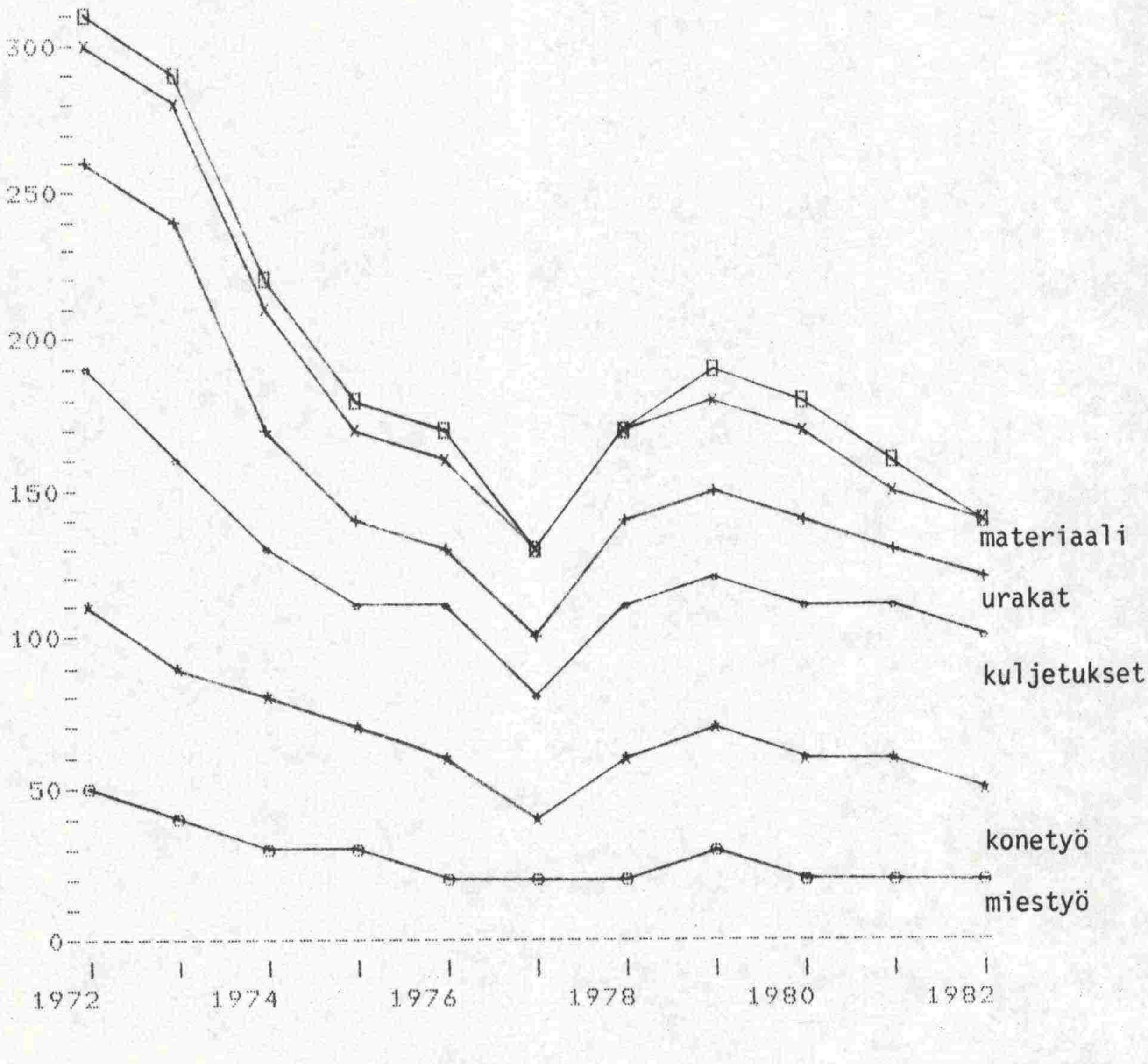
Mies-, kone- ja kuljetustyön kustannukset (milj.mk) vuoden 1972 tasossa



Kone- ja kuljetustonnitunnit (milj. tunteja)

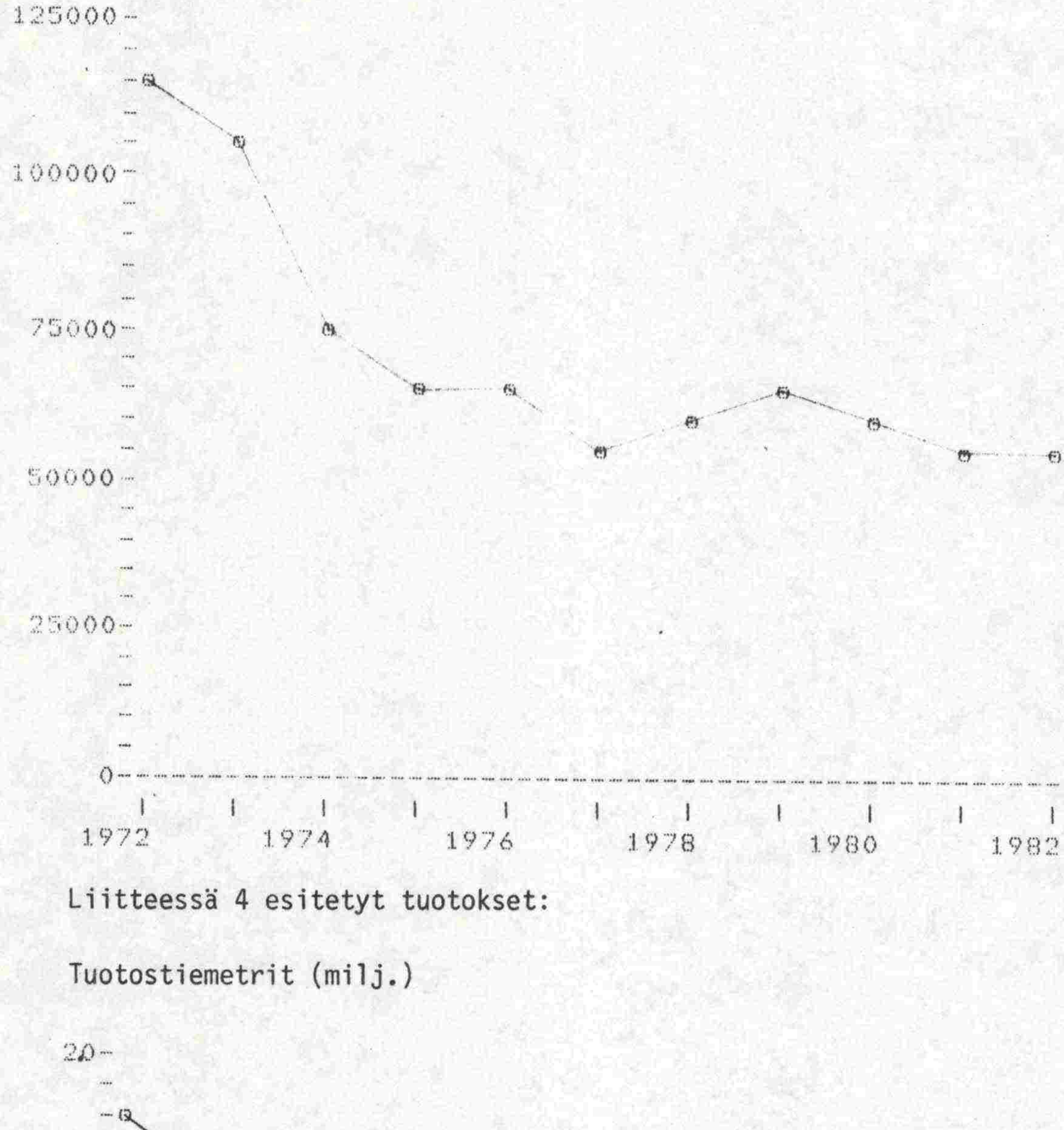


Tienrakentamisen kustannukset (milj.mk) vuoden 1972 tasossa



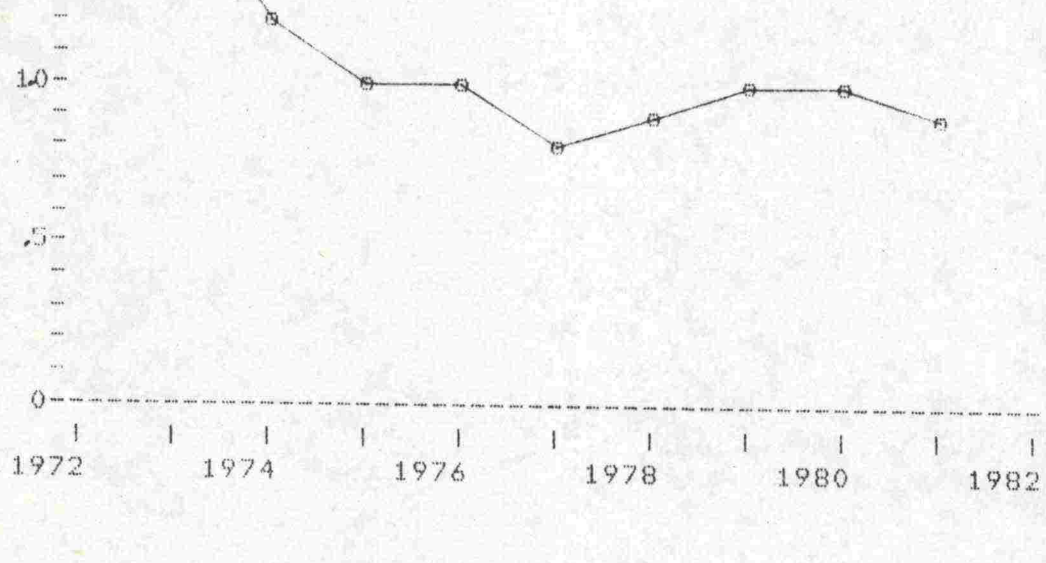
Tuotokset

Laskennallinen tuotos

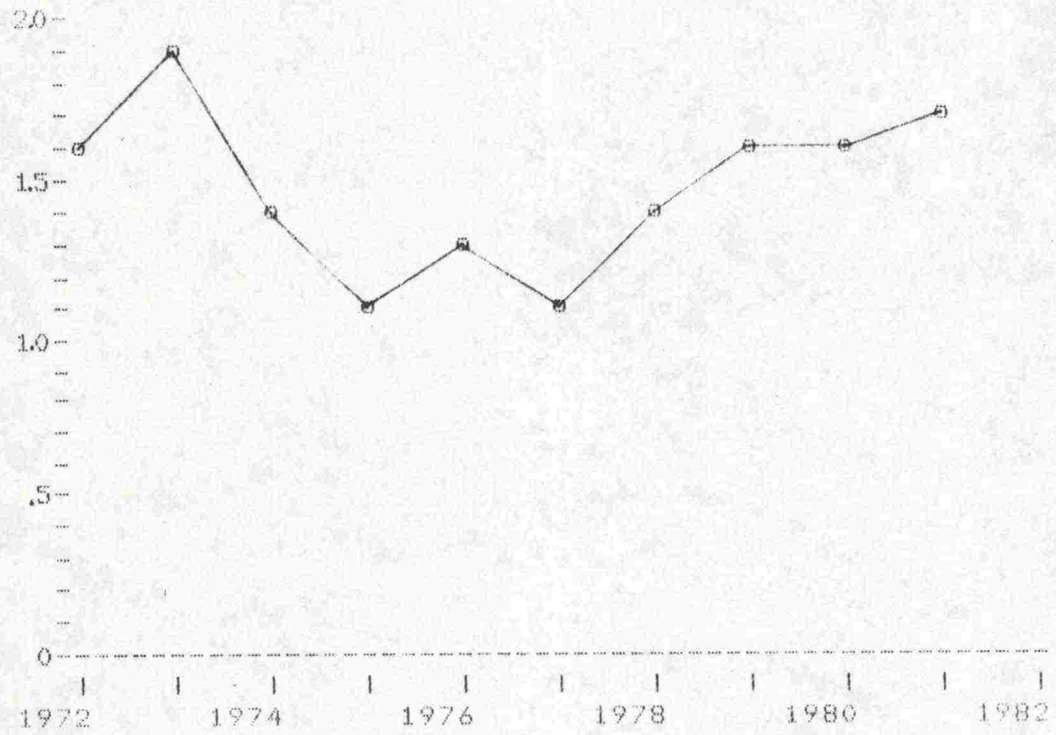


Liitteessä 4 esitetyt tuotokset:

Tuotostiemetrit (milj.)



Kantavan kerroksen kuutiot (milj.)



T U O T A N T O T E O R I A A

SISÄLLYSLUETTELO

TUOTANTOTEORIAA

1. Tuotantofunktio

Esitys perustuu neoklassiseen tuotantoteoriaan, jonka lähtökohtina ovat tietyt matemaattiset aksioomat ja oletukset tuotantoa harjoittavan yksikön käyttäytymisestä.

Määritellään aluksi, että vektori x on tuotantoa harjoittavan yksikön tuotannontekijä eli panosvaranto.
Tuottaakseen on tuottajan valittava varantovektorinsa eräästä varantoavaruudesta ja kyettävä muuttamaan se panosvektoriksi x, joka kuuluu kaikkien mahdollisten panosvektoreiden muodostamaan panosavaruuteen

(1.1.) $I = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)' \mid x_j \geq 0 \;, \; j = 1, 2, \ldots, n\}.$

Jokaista panosavaruuden pistettä vastaa yksikäsitteinen tuotos, josta jatkossa oletetaan, että se on mitattavissa ja joko yksi hyödyke tai muuten sisäisesti homogeeninen. Tuotoksesta käytetään symboolia Q.

Teknistä relaatiota tuotoksen ja panoksen välillä kutsutaan tuotantofunktioksi

(1.2.) $Q = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$

Tuotanto on kuvaus joltakin panosavaruuden pisteeltä tälle vastaavalle yksikäsitteiselle ei-negatiiviselle reaaliluvulle - sille tuotokselle, joka voidaan tuottaa ko. panosvektorilla.

Tuotantofunktio ilmaisee sen teknologian, jolla tuotannonharjoittaja valitsemallaan panoskombinaatiolla saa aikaan tietyn suuruisen tuotoksen. Teknologia, joka annettuna aikana vallitsee, määrää panosten ja tuotoksen väliset suhteet. Teknologia voidaan ilmaista tuotantofunktion termein. Tuotantofunktion muodon ollessa annettu tuotantofunktion parametrit osoittavat tuotannon teknologian. Teknologinen muutos on muutosta näissä parametreissä, ja näiden parametrien muutos on muutos jonkin tai joidenkin panosten tuottavuudessa.

Teknologian muutos voi olla joko neutraalia tai ei-neutraalia. Neutraali teknologian muutos vaikuttaa panoksiin yhtäläisesti, kun taas ei-neutraalilla on erilaistava vaikutus tuotannontekijöihin.

Tuotantofunktioon liitetään teknologinen tehokkuusominaisuus, mikä tarkoittaa, että annetulla panoskombinaatiolla tuotantofunktio antaa maksimaalisen tuotoksen. Tehokkuusominaisuus kuvaa vain panosten ja tuotoksen välisiä suhteita, ei panosten välisiä suhteita. Tuotannon tehokkuus on riippuvainen sen skaalasta, jota puolestaan rajoittaa markkinoiden koko tai TVL:n tapauksessa ulkopuolelta määrätty kustannusbudjetti. Tuotannon skaalalla on omat vaikutuksensa tuotantoprosessiin. Tällöin puhutaan skaalaeduista ja -haitoista.

2. Neoklassisen tuotantoteorian perusaksioomat

Määritellään panoksen x_i rajatuottavuus kaavalla

$$(2.1.)\quad \frac{\partial Q}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

joka kuvaa panoksen x_i aikaansaamaa tuotoksen lisäystä muiden panosten määrän pysyessä muuttumattomana.

Tuotantofunktion oletetaan täyttävän kaksi neoklassisen tuotantoteorian perusaksioomaa.

Aksiooma I:

Tuotantofunktiolla on ei-negatiiviset rajatuottavuudet. Matemaattisesti ilmaistuna, sellaista panosavaruuden osajoukkoa E, jossa panosten rajatuottavuudet ovat ei-negatiivisia

$$(2.2.)\quad E = \{ x \in I \mid \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \geq 0 \},$$

kutsutaan taloudelliseksi alueeksi. Minkä tahansa panoksen lisääminen panosavaruuden tässä osassa ei vähennä tuotosta. Tällaisen panosavaruuden osajoukon E kuvaa kutsutaan taloudelliseksi tuotokseksi.

Aksiooma II

Rajatuottavuudet ovat laskevia.

Tämän aksiooman mukaan taloudellisella alueella on olemassa relevantti alue R, jolla tuotantofunktion Hessin matriisi on negatiivisesti definiitti eli

(2.3.) $H = H(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} < 0$ ts.

(2.4.) $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j^2} < 0 \quad \forall_j = 1, 2, \ldots, n$ ja $x \neq 0$.

Relevantti alue on konveksi, jos vektorit x^1 ja x^2 εR, niin $sx^1 + (1-s)x^2 \ \varepsilon R$, kun skalaari s on sellainen, että $0 < s < 1$. Tällä alueella tuotosjoukot

(2.5.) $\{ x \varepsilon I \mid f(x) \geq Q_o \}$

ovat konvekseja $\forall Q_o \geq 0$ eli $f(x^1) - f(x^2) \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} (x_j^1 - x_j^2)$.

Tämä on vähenevän rajatuottavuuden laki. Sen mukaan lisättäessä jonkun panoksen määrää muiden panosten määrän pysyessä vakiona ko. panoksen rajatuottavuus pienenee.

Relevantti alue

(2.6.) $R = \{ x \varepsilon I \mid \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \geq 0$ ja $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j^2} < 0, \ \forall_j = 1, 2, \ldots, n \}$

luonnehtii tuotannon skaalaetuja ja panosten välisiä substituutiomahdollisuuksia.

Määritellään funktion homoteettisuus seuraavasti:
funktio f(x) on homoteettinen jos ja vain jos sillä on ominaisuus

(2.7.) $g\left[f(hx)\right] = hg\left[f(x)\right]$,

jossa h(>0) on skalaari ja funktio g sellainen, että

- se on erään argumenttinsa $x_j > 0$ arvoilla aidosti kasvava,

- $g\,[f(x)]$ on jatkuvasti derivoituva ja
$g\,[f(x)] = 0$, kun $f(x) = 0$ eli $x = 0$ sekä
$g'\,[f(x)] > 0, \forall x > 0$.

Tällöin $Q = f(x)$ on yksikäsitteinen ja monotoninen sekä $g\,[f(x)]$ lineaarinen ja homogeeninen x:n suhteen.

Funktio on $f(x)$ v:nnen asteen homogeeninen funktio jos ja vain jos sillä on ominaisuus

(2.8.) $f(hx) = h^v f(x)$.

Tuotannonharjoittajan käyttäytyminen

Tuotannonharjoittajan kustannuskäyttäytymisellä tarkoitetaan tapaa, jolla tämä valitsee panoksensa. Tunnetuimmat kustannuskäyttäytymisen muodot ovat voiton maksimointi ja kustannusten minimointi. TVL:n rakentamisen voidaan olettaa valitsevan panoksensa minimikustannuksin ja maksimoivan tuotostaan sille myönnettyjen määrärahojen, kustannusbudjetin, mukaisesti. Päätökset panosten hankinnasta tehdään joka kerta erikseen, jolloin aikaisemmin tehdyt päätökset panoskombinaatioista ja panosten määristä eivät sido päätöksentekoa.

3. Rajasubstituutiosuhde, tekninen substituutio ja skaalajousto

Rajasubstituutiosuhde

Tarkastellaan kahden panoksen x_i ja x_j välistä substituutiota eli niiden korvattavuutta muiden panosten määrän ja tuotoksen tason pysyessä muuttumattomana eli pitkin samatuotoskäyrää. Tällöin rajasubstituutiosuhde s_{ij} panosten x_i ja x_j välillä määritellään lausekkeella

(3.1.) $$s_{ij} = -\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\ .$$

Se ilmaisee kuinka paljon panoksen x_i määrää on lisättävä tuotoksen tason pitämiseksi muuttumattomana, kun panoksen x_j määrää vähennetään yhdellä yksiköllä. Panosten x_i ja x_j rajasubstituutiosuhde on sama kuin niiden rajatuottavuuksien suhde.

Substituutioalue on sellainen, jossa $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0$ ja $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} > 0$.

Substituutioalueen rajoilla $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0$, jolloin $s_{ji} = 0$ ja $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0$, jolloin $s_{ij} = 0$. Suljettua relevanttia aluetta sanotaan substituutioalueeksi. Suljetulla relevantilla alueella kaikki rajatuottavuudet ovat ei-negatiivisia.

Sellaista geometrista uraa, jolla kahden panoksen rajasubstituutiosuhde on vakio kutsutaan isokliiniksi eli tuotoksen tason vaihdellessa kahden panoksen rajatuottavuuksien suhde pysyy muuttumattomana pitkin tällaista uraa

Kuvio 3.1: Samatuotoskäyriä ja isokliini tuotoksentason muuttuessa

Samatuotoskäyrät, joiden tuotokset ovat $Q_1 < Q_2 < Q_3$. Panosten välinen rajasubstituutiosuhde on geometrisesti tulkittuna sen pisteen kautta piirretyn samatuotoskäyrän tangentin kulmakerroin.

Tekninen substituutio, substituutiojousto

Tarkastellaan panosten välistä keskinäistä korvattavuutta kiinteällä tuotoksella ts. liikutaan pitkin samatuotoskäyrää $Q = Q_0$. Paikallinen substituutiomitta panoksien x_j ja x_k välillä, kun kaikki muut panokset ovat kiinteitä, määritellään relevantin alueen tietyssä pisteessä kaavalla

$$(3.2.)\quad \sigma_{j\,k}(x) = -\frac{\frac{x_k}{x_j}\, d\left[\frac{x_j}{x_k}\right]}{\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\Big/\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right] d\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\Big/\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right]}$$

$$= -\frac{d\ \ln\left[x_j / x_k\right]}{d\ \ln\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\Big/\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right]},$$

$$j,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Mittaa kutsutaan substituutiojoustoksi pisteessä x panosten x_j ja x_k välillä ja se ilmaisee tässä pisteessä panosten suhteen prosenttisen muutoksen jaettuna samojen panosten rajatuottavuuksien suhteen prosenttisella muutoksella.

Substituutiojouston geometrinen tulkinta: se ilmaisee samatuotoskäyrän kaarevuuden pisteissä

$$\{\ x \varepsilon I \mid f(x) = Q_o\ \}$$

Normaalitapauksissa substituutiojousto halutaan positiiviseksi ja miinusmerkki sen edessä varmistaa sen, että samatuotoskäyrät aukeavat poispäin origosta.

Tällöin operoidaan relevantilla alueella. Substituutiojousto on symmetrinen l. $\sigma_{j\,k} = \sigma_{k\,j}$.

Mikäli substituutiojousto on vakio kaikilla samatuotoskäyrillä $\{x \varepsilon I \mid f(x) = Q_o\}$ on tuotantofunktio homoteettinen. Tällöin rajasubstituutiosuhde $s_{jik} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \Big/ \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ riippuu vain panosten suhteesta x_k/x_j, mutta ei tuotannon skaalasta. Samatuotoskäyrillä on sama kaarevuus kaikissa panosavaruuden pisteissä.

Tuotannon skaala, tuotosjousto ja skaalajousto

Tuotannon skaalalla tarkoitetaan tuotoksen tasoa eli toiminnan laajuutta.

Panoksen x_j tuotosjoustolla ymmärretään tuotoksen Q suhteellisen muutoksen suhdetta panoksen x_j suhteelliseen muutokseen. Tuotosjousto ilmaisee esim. kuinka monta prosenttia tuotos muuttuu, kun jonkin panoksen käytössä tapahtuu 1 %:n suuruinen muutos. Tuotantofunktion $Q = f(x)$ panoksen x_j tuotosjouston ilmoittaa kaava

$$(3.3.)\quad a_j(x) = \frac{\partial f(x)/f(x)}{\partial x_j/x_j}$$

Tuotosjousto voidaan määritellä myös panoksen rajatuottavuuden ja keskituottavuuden suhteena, jolloin

$$(3.4.)\quad a_j(x) = \frac{\partial f(x)/\partial x_j}{f(x)/x_j} = \frac{x_j}{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \quad .$$

Tuotantofunktion skaalajousto ilmaisee prosenttimäärän jolla tuotos kasvaa kun kaikkien panosten määrää nostetaan prosentin verran. Määritellään skaalajousto (v) lausekkeella

$$(3.5.)\quad v = \frac{dQ/Q}{dh/h} = \frac{h \cdot dQ}{Q \cdot dh}$$

jossa h:n määrittelee tuotoksen kasvukerroin $Q^+ = hQ$ (Q vanha tuotoksen määrä).

Tuotosjoustoilla ja skaalajoustolla on suora yhteys. Koska $Q = f(x)$ saadaan f(x):n kokonaisdifferentiaali

$$(3.6.)\quad dQ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\, dx_i \ .$$

Oletetaan, että kaikki panokset kasvavat suhteellisella määrällä $\frac{d\,h}{h} = \frac{dx_j}{x_j}$ s.e. $\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{x_i}{x_j}$, jolloin kokonaisdifferentiaali dQ voidaan kirjoittaa muotoon $dQ = \frac{d\,h}{h} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x)}{x_i}\right)$, josta hyväksikäyttäen tietoa $Q = f(x)$ saadaan

(3.7.) $$Qv = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} x_i .$$

Jakamalla yhtälö (3.7.) Q:lla ja soveltamalla tuotosjouston yhtälöä (3.4.) saadaan skaalajouston ja tuotosjoustojen välinen yhteys

(3.8.) $$v = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Tuotantofunktion skaalajousto on sen panosten tuotosjoustojen summa.

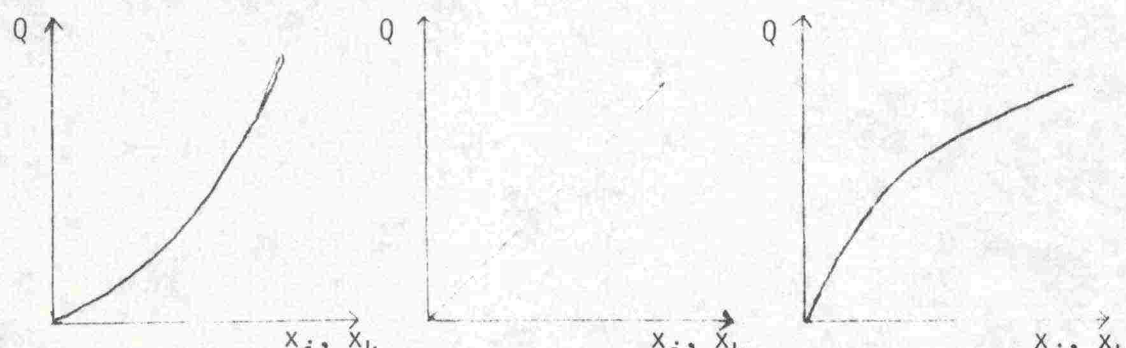
Sanotaan, että tuotannossa vallitsevat:

- nousevat skaalatuotot kun $v(x) > 1$
- vakioiset skaalatuotot kun $v(x) = 1$
- laskevat skaalatuotot kun $v(x) < 1$

Graafisesti kuvattuna tuotantofunktion käytös esitetään kahden panoksen x_j, x_k tapauksessa näiden suhteen pysyessä vakiona.

Kuvio 3.2: Skaalatuottojen vaikutus

Nousevat skaalatuotot v > 1 | Vakio skaalatuotot v = 1 | Laskevat skaalatuotot v < 1



Mielessä on pidettävä erillään skaalajouston (v) vakioisuus ja skaalatuottojen vakioisuus.

Edellä esitetyt joustot ja niihin liittyvät tiedot ja oletukset ovat keskeisiä tekijöitä tuotantofunktion muotoa valittaessa.

4. Tuotantofunktioina käytettyjä funktioita

CES-tuotantofunktioiden joukko

CES-tuotantofunktioiden[1] ryhmää luonnehtii se, että edellä yhtälöllä (3.2.) määritelty substituutiojousto on vakio. Vakiosubstituutiojoustoisille tuotantofunktioille voidaan johtaa yleinen muoto kahden panoksen x_1 ja x_2 tapauksessa lähtemällä liikkeelle seuraavasta kvasilineaarisesta osittaisdifferentiaaliyhtälöstä

(4.1.) $$s_{1,2} = A(f)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/\sigma_{1,2}}$$

Oletetaan substituutiojousto vakioksi jonka ratkaisu on implisiittiesitys

(4.2.) $$F(x_1, x_2, f) = A_1(f)x_1 + A_2(f)x_2 + H(f) = 0.$$

Riippuen funktioiden $A_1(f)$ ja $A_2(f)$ ja $H(f)$ välisistä riippuvuuksista ratkaisut luokitellaan joko homoteettisiin tai epähomoteettisiin ratkaisuihin. Tässä x_i (1=1,2) on joko muotoa

- $b_i x_i^{-c} + a_i$, kun $\sigma_{1,2} = b \neq 1$ tai
- $b_i \log x_i + a_i$, kun $\sigma = 0$ $(c = (1-\sigma)/\sigma.)$

kun $dA_i/df = 0$, i=1,2 ja $dH/df \neq 0$, esittää yhtälö (4.2.) homoteettisten "tavallisten" CES-funktioiden luokkaa[2] ja sillä on eksplisiittiesitys

(4.3.) $$Q = A\left[sx_1^{-c} + (1-s)x_2^{-c}\right]^{-v/c} ,$$

jossa Q = tuotoksen määrä

A = panoksien ja tuotoksen mittakaavasta riippuva neutraali tehokkuusparametri

1) Kirjainlyhennys CES tulee sanoista constant elasticity of substifution

2) Jatkossa rajoitutaan vain homoteettisiin CES-funktioihin

s = distribuutioparametri, joka ilmoittaa panosten suhteelliset osuudet tuotannon arvosta ja riippuu mittayksiköistä

c = substituutioparametri, joka ilmoittaa panosten keskinäisen korvaavuuden asteen ja voidaan kirjoittaa muotoon $(1/\sigma)-1$ ja substituutiojouston ilmaisee lause $\sigma = 1/(1+c)$ jossa $c > -1$.

v = funktion asteluku, joka mittaa skaalatuottoja l. skaalajousto.

CES-tuotantofunktiota voidaan laajentaa kahden panoksen tapauksesta n:n panoksen tapaukseen

(4.4.) $$Q = A(\Sigma s_i\, x_i^{-c})^{-v/c},$$

jossa $\Sigma s_i = 1$ ja $s_i > 0$. Tällöin substituutiojousto on sama vakioluku kaikkien panosten välillä. Substituutiojousto voi olla myös eri vakio eri panospareille. Tällöin funktio on muotoa

(4.5.) $$Q = A(\Sigma s_i x_i^{-c_i})^{-v/c},$$

jossa $\Sigma s_i = 1$, $s_i > 0$, c_i ja $c > -1$.

CES-tuotantofunktio käsittää erikoistapauksenaan Cobb-Douglas-tuotantofunktiot, kun substituutiojousto $\sigma = 1$. Ne ovat muotoa

(4.6.) $$Q = Ax_1^a x_2^b,$$

jossa Q = tuotos

A = panosten ja tuotoksen mittakorvasta riippuu parametri

x_1 ja x_2 = panosten määrät

a = panoksen x_1 tuotosjousto

b = panoksen x_2 tuotosjousto.

Vastaavanlaisia CES-tuotantofunktion erityistapauksia ovat:

- $\sigma = 0$, jolloin panoksia ei voi korvata toisillaan ja saadaan Leontief-funktio

(4.7.) $$Q^{\frac{1}{v}} = A \min \left[sx_1, 1-s\ x_2 \right]$$

- $\sigma = \infty$, skaalajoustoa lukuunottamatta lineaarinen tuotantofunktio

(4.8.) $$Q^{\frac{1}{v}} = A(sx_1+(1-s)x_2).$$

CES-tuotantofunktiot täyttävät neoklassisen tuotantoteorian aksioomat I ja II.

Translog-funktio

Tarkastellaan mielivaltaista funktiota logaritmimuodossa

(4.10.) $$\ln Q = f(\ln x),\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Funktio sopii tuotantofunktioksi, mikäli se täyttää neoklassisen tuotantofunktion ominaisuudet:

- $f(x) = 0$, kun $x = 0$
- $f(x)$ ja sen ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatot ovat jatkuvia
- $f(x)$ ja sen rajatuottavuudet ovat suurempia kuin nolla
- $f(x)$ on sellainen, että $\partial^2 f(x)/\partial x^2$ on negatiivisesti definiitti (vähenevien rajatuottavuuksien laki).

Funktio f kehitetään Taylor-sarjaksi muuttujien $\ln x_i$, $i=1, \dots, n$ suhteen pisteessä ($\ln x_1^o$, $\ln x_2^o$, ..., $\ln x_n^o$). Tämän jälkeen tehdään seuraavat yksinkertaistavat oletukset:

- jätetään toista astetta korkeammat termit pois
- oletetaan, että funktio $Q = Q(x)$ on v:nnen asteen homogeeninen funktio x_i:n suhteen
- kehitetään näin saatu funktio edelleen Taylor-sarjaksi pisteessä $\ln x_i^o = 0$.

Tällöin päädytään funktioon

(4.11.) $$\ln Q = \ln a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \ln x_i \ln x_j,$$

jossa $\ln a_o = f(0)$, $a_i = \frac{\partial f}{\partial \ln x_i}$, $b_{ij} = b_{ji} = \frac{\partial 2f}{\partial \ln x_i \partial \ln x_j}$

Funktiota (4.11.) kutsutaan translog-tuotantofunktioksi.

Tuotantofunktion muodon määrittelyä auttaa se, että voidaan osoittaa translog-tuotantofunktion, n:n panoksen CES-tuotantofunktion ja n:n panoksen Cobb-Douglas-tuotantofunktion toisen kertaluvun Taylor-approksimaatioiden kertoimien välillä tietyt approksimoidut yhteydet. Näistä yhteyksistä voidaan päätellä, että Cobb-Douglas-tuotantofunktio on CES-funktion approksimaatio, kun substituutiojousto on lähellä ykköstä. Toisaalta CES-funktio approksimoi vielä yleisempää translog-tuotantofunktiota. Cobb-Douglas-, CES- ja translog-tuotantofunktion hierarkiaan perustuen voidaan Taylor-approksimaatioiden avulla testata minkä tyyppistä tuotantofunktion muotoa havaintoaineisto tukee.

Esimerkki : Testattiin tuotantofunktion muotoa tapauksessa jossa havaintoaineistona olivat TVL:n omien töiden panokset ja tuotokset vuosina 1972-81. Tuotoksena Q käytettiin laskennallista tuotosta (ns. kahmalo), työpanoksena L mies-, kone- ja kuljetustyötuntien yhteismäärää ja pääomapanoksena K yhdistettyjä auto- ja konetonnitunteja. Panoksissa on mukana urakat (ns. kaadetut urakat). CES-funktiota (4.3.) voidaan approksimoida Taylor-kehitelmällään

$$\ln Q = a_o + a_1 \ln K + a_2 \ln L + a_3 (\ln(K/L))^2.$$

Parametrien a_i estimoimiseksi kirjoitetaan tämä yhtälö regressiomallin muotoon

$$\ln Q = a_o + a_1 \ln K + a_2 \ln L + a_3 (\ln(K/L))^2 + u, \tag{4.12.}$$

jossa virhetermistä u oletetaan, että u jakautuu $N(0, \sigma^2 I)$-jakauman mukaisesti eikä korreloi selittäjien kanssa.
Asetetaan nollahypoteesi, että aineisto tukee yksinkertaisemman Cobb-Douglas-funktion käyttöä. Näin on jos parametri $a_3 = 0$ ja $a_1, a_2 \neq 0$.
Parametrien estimoidut arvot ja niiden keskivirheet olivat

$$\hat{a}_o = -1.17 \pm 4.70$$

$$\hat{a}_1 = 1.30 \pm 2.85$$

$$\hat{a}_2 = -0.568 \pm 2.76$$

$$\hat{a}_3 = -0.474 \pm 0.880.$$

Kaikkien parametrien keskivirheet ovat niin suuria ettei niistä minkään voida katsoa poikkeavan nollasta. Toisaalta mallin selitysaste R^2 oli lähes yksi. Tämä osoittaa vahvaa multikollineaarisuutta selittäjien välillä.

Tulokset eivät suoraan tue asetettua nollahypoteesia (koska a_1 ja a_2 eivät poikkea nollasta) mutta toisaalta eivät ole myöskään ristiriidassa sen kanssa, koska $a_3 = 0$ todennäköisyydellä 0.61.

Aineiston homoteettisuutta voidaan testata mallilla (4.12.) kun kirjoitetaan termi $a_3(\ln(K/L))^2$ muotoon

$$a_{31}(\ln K)^2 - a_{32}\ln K \ln L + a_{33}(\ln L)^2,$$

ja estimoimalla malli

$$\ln Q = a_o + a_1 \ln K + a_2 \ln L + a_{31}(\ln K)^2 - a_{32}\ln K \ln L + a_{33}(\ln L)^2 + u.$$

Jos tässä mallissa $a_{32} = -2a_{31} = -2a_{33}$, voidaan skaalajoustoa pitää vakiona. Suoritettu testaus osoitti että hypoteesi $a_{32} = -2a_{31} = 2a_{33}$ pitää paikkansa todennäköisyydellä 0.39, joten tässä tapauksessa skaalajoustoja voidaan pitää vakiona panosten tason suhteen.

5. Tuotantofunktion ja kustannusfunktion välisistä yhteyksistä minimikustannusperiaatteella

Ensimmäisessä kappaleessa mainittiin neoklassisessa tuotantoteoriassa tehtävän oletuksia myös tuotannonharjoittajan käyttäytymisestä. Tuotannonharjoittaja käyttäytyy minimikustannusperiaatteen mukaisesti, jos hän pyrkii minimoimaan tuotannontekijöille maksamansa korvaukset annetulla tuotoksen tasolla ja annetuilla panosten hinnoilla sekä noudatettavalla tuotantotekniikalla.

Oletetaan, että panokset

(5.1.) $$x = (x_1, x_2, \dots , x_n)'$$

hankitaan tuotannontekijäin markkinoilta hintoihin

(5.2.) $$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)',$$

joihin tuotannonharjoittaja ei voi vaikuttaa.

Minimikustannusperiaate merkitsee mallia

(5.3.a) $$\min_{X \in R} C = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

ehdolla

(5.3.b) $$Q = f(x_i),$$

jossa ensimmäinen yhtälö (5.3.a) on kustannusidentiteetti ja toinen (5.3.b) tuotantofunktio.

Malli voidaan ratkaista Lagrangen menetelmällä. Ratkaisuksi saadaan optimaaliset panosmäärät ja minimikustannukset.

(5.4.) $$C^* = C^*(Q, p_i)$$
$$x_i^* = x_i^*(Q, p_i), \quad i=1, \dots, n,$$

jossa C^* on minimikustannusfunktio ja x_i^*:t ovat tuotannonharjoittajan valitsemien panosten kysyntäfunktiot.

Voidaan "väljin" oletuksin todistaa, että teknologia voidaan yhtäpitävästi ilmaista joko tuotantofunktion tai kustannusfunktion avulla tuotannonharjoittajan minimoidessa kustannuksiaan.

Esimerkiksi Cobb-Douglas-tuotantofunktiota vastaava minimikustannusfunktio kahden panoksen tapauksessa saadaan seuraavasti. Kustannukset muodostuvat

(5.5.) $$C = p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad , p_i = \text{panosten } x_i \text{ hinnat}$$

ja tuotantofunktio on muotoa

(5.6.) $$Q = A\, x_1^a\, x_2^b\,.$$

Minimikustannusfunktio saadaan seuraavasti

(5.7.) $$\min_{x_i} C = p_1x_1 + p_2x_2$$
$$\text{ehdolla } Q = Ax_1^a x_2^b \quad , \quad a + b = v.$$

Ratkaisuksi tulee

$$C^* = v\,(Aa^ab^b)^{-1/v}\,Q^{1/v}\,p_1^{a/v}\,p_2^{b/v}$$

(5.8.) $$x_1^* = (A(\tfrac{b}{a})^b)^{-1/v}\,Q^{1/v}\,(p_1/p_2)^{b/v}$$

$$x_2^* = (A(\tfrac{a}{b})^a)^{-1/v}\,Q^{1/v}\,(p_2/p_1)^{a/v}.$$

C^* on kaksipanoksisen Cobb-Douglas-tuotantofunktion minimikustannusfunktio.

Tuotosjoustoilla ja skaalajoustolla on aikaisemmin esitetyn teknisen tulkinnan lisäksi myös taloudellinen tulkinta:

- jos skaalatuotot ovat kasvavat ($v > 1$), niin nostettaessa tuotoksen määrää kustannukset kasvavat hitaammin kuin tuotoksen taso
- jos skaalatuotot ovat vakioiset ($v = 1$), niin kustannukset nousevat yhtä nopeasti kuin tuotos
- jos skaalatuotot ovat laskevat ($v < 1$), niin kustannukset nousevat nopeammin kuin tuotos.

Tuotannon skaalajouston (v) ja kustannusten skaalajouston (r) välillä vallitsee yhteys

(5.9.) $$r = \frac{1}{v} \; .$$

6. Teknisestä kehityksestä, tuottavuudesta ja niiden mittaamisesta

Tarkasteltaessa tuotoksen ja panoksen määrällistä muutosta ajassa voidaan usein havaita, että tuotoksen määrällinen muutos ei ole yhtä nopeaa kuin jonkin panoksen tai panosten määrissä tapahtunut. Osa tästä muutosten suhteessa tapahtuvista eroista johtuu panosten ominaisuuksissa tapahtuneissa muutoksissa. Tällöin sanotaan panostehokkuuksien kasvaneen. Tämä panosten paraneminen on teknologian muutosta eli teknistä kehitystä. Eräs teknisen kehityksen käytännön ilmentymä on tuottavuuden nousu. Tuottavuuden muutos voi olla seurausta, joko periodilla tapahtuneista investoinneista tai työn organisoinnissa, innovointikyvyssä tapahtuneissa muutoksista sekä ns. ulkoisista tekijöistä. Koska tuottavuus on mitattava tuotantofunktiosta, on teknisen kehityksen operationalisoiminen ja mittaaminen keskeinen tehtävä tuotantofunktiota muodostettaessa.

Kun teknisen muutoksen aiheuttavat bruttoinvestoinnit fyysiseen tuotantoprosessiin, sanotaan teknisen kehityksen "ruumiillistuneen" pääomaan. Myös osan teknisestä kehityksestä voidaan ajatella ruumiillistuneen työpanokseen, lisääntyneen tiedon ja kokemuksen kautta. Teknistä kehitystä operationalisoitaessa tuotantofunktioon, täytyisi panosten muuttuneet ominaisuudet ilmentyä panosmuuttujissa. Tällöin myös panosten mittaamisen tulisi tapahtua tuottavuusyksiköissä ts. panosten määrät ilmaista perusvuoden tehollisina yksiköinä.

Toisena ratkaisuna tuotantofunktion konstruoinnissa voidaan lähteä siitä, että hyväksytään panosten tavanomaiset korvikemuuttujat, ja selittämätöntä osaa pyritään hajoittamaan analyyttisesti tarkoituksenmukaisella tavalla. Tällöin tuotantofunktioon lisätään tuotoksen määrän muutoksia selittäviä muuttujia kuten esim. yrityskoko, resurssien käytön asteen vaihtelu ja suhdannetilanne.

20.10.1982 LIITE 3

RK/MSa

Epävarman ennakkoinformaation klassinen hyväksikäyttö regressiomallissa

Halutaan estimoida regressiomalli

$$y = X\beta + e,$$

jossa y ja e ovat $n\mathrm{x}1$-vektoreita, X on $n\mathrm{x}p$-matriisi, β on $p\mathrm{x}1$-vektori ja $e \sim (0, \sigma^2 I)$. Parametrille β asetetaan stokastinen rajoitus

$$r = R\beta + v,$$

jossa r ja v ovat $s\mathrm{x}1$-vektoreita, R $s\mathrm{x}p$-matriisi ja $v \sim (0, V)$ (V on positiivisesti definiitti ja tunnettu) ja lisäksi $E\,(ve') = 0$.

Kun merkitään

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} X \\ R \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \tilde{e} = \begin{bmatrix} e \\ v \end{bmatrix},$$

voidaan malli rajoituksineen kirjoittaa muotoon

$$\tilde{y} = \tilde{X} \; + \tilde{e},$$

jossa $\tilde{e} \sim (0, \sigma^2 W)$, $W = \mathrm{diag}\,(I, \sigma^{-2} V)$.

Mallille etsitään estimaatti, joka minimoi neliösumman

$$(\tilde{y} - \tilde{X}\beta)'\, W^{-1}\, (\tilde{y} - \tilde{X}\beta).$$

Asettamalla tämän neliösumman derivaatta β:n suhteen nollaksi saadaan estimaattori

$$b = (\tilde{X}'\, W^{-1}\, \tilde{X})^{-1}\, \tilde{X}'\, W^{-1}\, \tilde{y}$$

$$= (X'X + \sigma^2\, R'V^{-1}R)^{-1}\, (X'y + \sigma^2\, R'V^{-1}r).$$

Tämän estimaattorin käyttöä rajoittaa se, että σ^2 on yleensä tuntematon ja se täytyy myös estimoida.
Eräs tapa päästä käyttökelpoiseen estimaattoriin on korvata σ^2 positiivisella luvulla c, jolloin

$$b_c = S_c^{-1} (X'y + c R' V^{-1} r),$$

$$S_c = X'X + c R' V^{-1} R.$$

Luku c valitaan siten, että estimaattorilla b_c on pienin mahdollinen riski estimaattorien $\{b_c | c > 0\}$ joukossa. Riskifunktiona käytetään funktiota

$$R(b_c, A) = E(b_c - \beta)' A(b_c - \beta),$$

jossa A on positiivisesti definiitti pxp-matriisi.
Koska

$$b_c = S_c^{-1} (X'(X\beta + e) + c R' V^{-1} (R\beta + v))$$

$$= \beta + S_c^{-1} (X'e + c R' V^{-1} v),$$

on

$$E(b_c) = \beta,$$

eli b_c on harhaton kaikilla c:n arvoilla.
Varianssi on

$$\text{var}(b_c) = E(b_c - \beta)(b_c - \beta)'$$

$$= S_c^{-1} (X'e + c R' V^{-1} v)(e'X + c v' V^{-1} R)S_c^{-1}$$

$$= S_c^{-1} (\sigma^2 X'X + c^2 R' V^{-1} R) S_c^{-1} ,$$

ja riskifunktio

$$R(b_c, A) = \text{tr } A \text{ var } (b_c).$$

Varianssissa ja riskifunktiossa esiintyy jälleen tuntematon σ^2. Kullekin c:lle voidaan estimoida σ_c^2 seuraavalla tavalla: Mallin residuaalivektori on

$$\begin{aligned}\hat{e}_c &= y - X\, b_c \\ &= X\beta + e - X\beta - X\, S_c^{-1}\, (X'e + c\, R'\, V^{-1}\, v) \\ &= (I - XS_c^{-1}\, X')\, e - c\, XS_c^{-1}\, R'\, V^{-1}\, v.\end{aligned}$$

Kun merkitään $A_c = I - XS_c^{-1}\, X'$ ja $B_c = -\, c\, XS_c^{-1}\, R'\, V^{-1}$, on jäännösneliösumman odotusarvo

$$\begin{aligned}E\, \hat{e}'\hat{e} &= E(e'\, A_c' + v'\, B_c')(A_c\, e + B_c\, v) \\ &= \sigma^2\, \text{tr } A_c\, A_c' + \text{tr } B_c\, V\, B_c' \\ &= \sigma^2\, \text{tr } (I - 2\, X'X\, S_c^{-1} + X'X\, S_c^{-1}\, X'X\, S_c^{-1}) \\ &\quad + c^2\, \text{tr } R'\, V^{-1}\, R\, S_c^{-1}\, X'X\, S_c^{-1}.\end{aligned}$$

Tästä saadaan σ_c^2:lle harhaton estimaattori

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{\hat{e}'\hat{e} - c^2\, \text{tr } R'\, V^{-1}\, R\, S_c^{-1}\, X'X\, S_c^{-1}}{\text{tr } (I - 2\, X'X\, S_c^{-1} + X'X\, S_c^{-1}\, X'X\, S_c^{-1})}\ .$$

Jos havaintoaineisto ja ennakkotieto ovat sopusoinnussa keskenään, on tavallinen regressioestimaattori $b = (X'X)^{-1} X'y$ lähellä ennalta arvioitua β:n arvoa, jolle $R\beta = r$. Tällöin erotus

$$d = r - Rb = r - R(X'X)^{-1} X'y$$

on lähellä nollaa. Hypoteesia $H: d = 0$ voidaan testata χ_s^2-jakautuneella testitunnusluvulla

$$\gamma = (r - Rb)'(V + \sigma^2 R(X'X)^{-1} R^{-1})(r - Rb).$$

Tällöin oletetaan e ja v normaalisti jakautuneiksi.
Voidaan myös laskea kuinka suurella painolla ennakko- ja havaintotieto vaikuttaa lopullisessa mallissa. Painot saadaan b_c:ssä esiintyvästä matriisista $S_c = X'X + c\,R'\,V^{-1}\,R$ ja ne ovat

$$\theta_H = \frac{1}{p} \operatorname{tr} X'X\, S_c^{-1}$$

$$\theta_E = \frac{1}{p} \operatorname{tr} c\, R'\, V^{-1}\, R\, S_c^{-1} ,$$

josta nähdään että $\theta_H + \theta_E = 1$.

Tuotantofunktion estimointi

Cobb-Douglasin tuotantofunktio voidaan esittää muodossa

$$y = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} X_3^{\beta_3} e^{\beta_4 t},$$

jossa y on tuotos, X_1 ja X_2 ovat panoksia, X_3 selittävä muuttuja ja t aika. Parametrit β_1 ja β_2 oletetaan olevan positiivisia ja $\beta_1 + \beta_2 = 1$. Nyt käsiteltävässä mallissa on aineistona TVL:n rakennustöissä vuosina 1972-1981 käytetyt panokset ja saadut tuotokset. Tuotokseksi on valittu tuotettujen päällystenеliöiden määrä, panoksina X_1 on vuosittaiset miestyötunnit ja X_2 on konetyötunnit. Selittäjänä X_3 on urakoista maksettu rahamäärä deflatoituna tukkuhintaindeksillä vuoden 1972 tasoon.

Malliin valitut muuttujat korreloivat vahvasti keskenään. Tämä merkitsee käytännössä sitä, että parametrien estimaatit tulevat olemaan epätarkkoja. Toisaalta aineisto saattaa antaa hyvää informaatiota parametrien lineaarikombinaatioista. Miten tämä informaatio sijoitetaan yksittäisille parametreille, tulee ratkaista käyttämällä hyväksi ennakkotietoa parametreistä.

CB-funktion kertoimilla on rajoitus $\beta_1 + \beta_2 = 1$ ja $\beta_1, \beta_2 > 0$. Toisin sanoen tiedetään, että $\beta_1, \beta_2 \in (0,1)$. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$0.5 = \beta_i + v, \qquad i = 1, 2$$

jossa $v \sim (0, V)$. Tämä voidaan esittää matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \beta + v.$$

Valittaessa kertoimien β_1 ja β_2 välistä kovarianssimatriisia V asetetaan varianssit niin suuriksi, että β:t ovat välillä (0, 1) suurella todennäköisyydellä mutta sen ulkopuolella pienellä todennäköisyydellä.

Jos oletetaan, että β_i on jakautunut tasaisesti välille (0, 1), on var $(\beta_i) = \frac{1}{12}$, i = 1, 2. Side-ehto $\beta_1 + \beta_2 = 1$ otetaan huomioon asettamalla cov (β_1, β_2) erittäin lähelle lukua -1. Tämä johtaa valintaan

$$V = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & -0.99995 \\ -0.9995 & 1 \end{bmatrix}.$$

Riskifunktiossa esiintyvä matriisi A on myös valittava. Valinta A = I johtaa riskifunktioon, joka on yhtä kuin kertoimien varianssien summa. Toisin sanoen tällä riskifunktiolla valitaan se b_c, jonka komponenttien varianssit yhteensä ovat mahdollisimman pieniä.

Toinen mahdollisuus on valita $A = X'X$.
Tällöin on

$$R\,(b_c, X'X) = E(b_c - \beta)'\,X'X(b_c - \beta)$$

$$= E(Xb_c - X\beta)'(Xb_c - X\beta).$$

Minimoitaessa tämä riskifunktio saatetaan estimoitu tuotos Xb_c mahdollisimman lähelle teoreettisesti oikeaa arvoa $X\beta$.
Myös muut matriisin A valinnat ovat mahdollisia.
Voisi myös ajatella että, koska c valittiin korvaamaan tuntematonta jäännösvarianssia σ^2, valittaisiin c siten, että $c = \hat{\sigma}_c^2$. Tämä valinta ei minimoi riskifunktiota $R(b_c, A)$.

Tuotantofunktiokokeiluja muilla tuotoksilla

Liitteessä 1 esitetyn tuotoksen (laskennallisen tuotoksen) lisäksi on olemassa myös muita tuotoksen mittareita, jotka on jätetty tarkastelusta pois, koska em. tuotosta on pidetty parhaana. Näitä muita tuotoksia ovat tuotostiemetrit (Q_1) ja kantavan kerroksen kuutiot (Q_2):

	Q_1	Q_2
1972	1758580	1601309
1973	1604700	1908559
1974	1172810	1438830
1975	1025880	1097822
1976	1007960	1326379
1977	826820	1083325
1978	879260	1419000
1979	997355	1556000
1980	960523	1579000
1981	890721	1697100

Näitä tuotoksia käyttäen on estimoitu vastaavat mallit kuin 5.5a ja 5.5b ja ne on esitetty oheisessa taulukossa. Malleja vertailtaessa on huomattava, että näissä malleissa on ollut käytettävissä havainnot vuosilta 1972-81 kun taas malleissa 5.5a ja 5.5b on myös vuosi 1982 mukana.

Taulukko Tuotantofunktioiden parametrien estimaatteja tuotoksena Q_1 = tuotostiemetrit ja Q_2 = kantavan kerroksen kuutiot, havainnot vuosilta 1972-81

malli	mallivakio n=lnA	tuotosjoustot a	b	c	skaalajousto v	tuottavuuden muutos g	jäännöshajonta	R^2	rajoitus	yhteensopivuus
$Q_1=AL^aK^bU^ce^{gt}$	2.12	0.333	0.127	0.255	0.715	-0.377 %	0.0707	0.957	-	
	(0.566)	(0.606)	(0.171)	(1.31)	(3.79)	(-0.0991)				
	-2.90	0.285	0.393	0.322	1	0.758 %	0.118	0.922	a+b+c=1	0.680
	(-6.99)	(1.13)	(1.48)	(1.51)		(0.298)			a,b,c∈(0,1)	
$Q_2=AL^aK^bU^ce^{gt}$	-4.52	-0.657	1.15	0.525	1.02	4.31 %	0.0969	0.840	-	
	(-0.880)	(-0.874)	(1.13)	(1.96)	(3.93)	(0.827)				
	-3.08	0.213	0.352	0.435	1	8.40 %	0.144	0.759	a+b+c=1	
	(-7.03)	(0.819)	(1.30)	(1.89)		(3.02)			a,b,c∈(0,1)	0.720