DISSERTATIO ACADEMICA,

DE

FIGURA TELLURIS OPE PENDULORUM DETERMINANDA;

CUJUS

PART. I.

CONS. AMPL. FACULT. PHILOS. IN ACAD. ABOËNSI,

PRÆSIDE

M. GUST. GABR. HÅLLSTRÖM,

PHYS. PROFESS. PUBL. ORD., REG. ACAD. SCIENTIAR. STOCKHOLM. ET SOCIET. IMPER. OECON. FENNIÆ MEMBRO,

PRO GRADU PHILOSOPHICO

P. P.

ABRAHAMUS REILIN,

V. D. M. AUSTRALIS.

IN AUDIT. MATHEMAT. DIE XXX MAJI MDCCCX.

H. P. M. S.

ABOÆ, TYBIS FRENCKELLIANIS.

38.

De figura telluris pendulorum ope determinanda.

Famosa illa quæstio de figura & magnitudine Telluris cognoscenda, ab antiquissimis retro temporibus ventilata, nostro quoque ævo junctis summorum Mathematicorum viribus examinata est. Principia, quibus calculi hoc respectu necessarii superstruendi sunt, duo adhiberi posse judicarunt, quorum primum & præcipuum e mensuris graduum meridianorum terrestrium desumtum est, alterum vero in cognita longitudine penduli simplicis pro diversis terræ locis, tempore unius minuti secundi oscillationes peragentis, vel, quod eodem redit, in dato numero oscillationum invariati cujusdam penduli, dato temporis intervallo in diversis locis oscillantis, quæsitum. Pluribus nempe rationibus edocti id sibi persvasum habuerunt Mathematici, figuram telluris a sphærica parum aberrare, illamque ellipsoidicam compressam, revolutione ellipseos circa axin suum minorem ortam, proxime esse censendam statuerunt, quo facto e dimensis duobus arcubus ellipseos generatricis, axes illius, hoc est, ipsius telluris determinare potuerunt. Plures vero hujusmodi mensuræ inter se comparatæ diversam præbuerunt rationem diametri æquatoris & axis terrestris, unde conclusum est, aut figuram sphæroidicam revolutione ortam terræ non competere, aut etiam mensuras observatas arcuum meridianorum singulas adeo justas non fuisse, ut de diversa diversorum meridianorum ellipticitate ex illis separatim adhibitis deducta, aliquid certi concludere liceret. Auxit quoque dubium de ellipsoidica telluris figura, quod mensuræ ad eam determinandam hucusque sumtæ, in Europa præcipue & in America factæ sint, quæ quidem solæ quæstioni solvendæ vix sufficere videntur, desideratis nempe mensuris tam graduum meridianorum quorundam asiaticorum, quam etiam linearum æquatori telluris parallelarum. In eo tantum hucusque igitur fuit subsistendum, ut supposita figura terræ ellipsoidica, ex omnibus datis mensuris graduum meridianorum deduceretur maxime probabilis valor rationis axeos telluris ad diametrum æquatoris, qui quidem ab Illustr. *La Place* determinatur esse æqualis 311: 312 (*), & a Cel. *Svanberg*, mensuris Lapponicis recentioribus loco antiquiorum substitutis, æqualis 322,065: 323,065, vel etiam 323,28: 324,28 (**).

Altera

*) *Mechanik des Himmels von P. S. Laplace, aus d. Franz. übers. von J. C. Burckhardt, Berlin* 1802, 2 *Th. S.* 171.

**) *Exposition des operations faites en Lapponie pour la determination d' un arc du meridien, en* 1801 — 1803, *par J. Svanberg, Stockh.* 1805, *p.* 185.

Altera methodus figuram telluris determinandi, in qua longitudo penduli ſimplicis elementum calculi conſtituit, ab Illuſtr. *La Place* quoque ſpeciatim eſt adhibita. Concludendum illi quidem ex examine menſuræ graduum meridianorum fuit, tellurem non esſe masſam homogeneam, ſed denſitatem illius a ſuperficie verſus centrum creſcere; asſumſit tamen incrementa longitudinis penduli ab æquatore verſus polos terræ rationem ſequi Sinus latitudinis duplicatam, quæ lex pro terra ellipſoidica proxime valet. Inde autem rationem quærens axeos terræ ad diametrum æquatoris veriſimillimam, quam datæ quindecim diverſæ penduli longitudines ſimul conſideratæ uti mediam præbent, hanc eruit proportionem 334,78: 335,78 (*). Nihil igitur in hac re examinandum reſtare videtur, ſi terræ talem figuram competere asſumimus, qualem illam plures obſervationes pendulorum calculum ſimul ingredientium oſtendunt, in qua methodo excesſus & defectus ellipticitatis terræ a diverſis obſervationibus penduli deducti ſe invicem compenſant. Si vero ad aberrationem figuræ terræ a ſphæroide elliptica diligentius attendere volumus, patet, longitudines pendulorum ſingulorum ſpeciatim esſe conſiderandas, cum in eo ipſo verſetur quæſtio, ut non ſupponatur omnes meridianos terreſtres inter ſe esſe

*) L. c. p. 182.

æquales & ſimiles, ſed examinetur an inæqualitas quædam ab obſervationibus pendulorum indicetur, adeoque ſi illud patet, ut in id inquiratur, qualem figuram meridianorum terreſtrium quævis earum indicent. Inſtituit quidem jam hoc reſpectu Cel. *Fredr. Mallet* comparationes, diverſa paria longitudinum pendulorum examinans (*). Cum vero datas ſibi obſervationes promiſcue ſumſerit, nulla inſtituta correctione ut comparabiles inter ſe redderentur, nulla quoque ejus rei habita ratione, quod ad diverſos, forte inæquales vel disſimiles, meridianos terræ hæ pertineant; determinata quædam figura telluris, præter ellipſoidicam revolutione ortam, inde non potuit cognoſci, ſed tantum ex ejus calculis ſequi videtur, aut aberrationem aliquam a ſphæroide tali, qualis revolutione meridiani oritur, exiſtere, aut etiam, ſi illud non conceditur, diſcrepantiam reſultantem ab erroribus in obſervationibus eſſe derivandam.

Operæ igitur pretium fore judicavimus, in quæſtione de figura telluris cognoſcenda ſpecialiorem adhuc inſtituere comparationem diverſorum

meri

*) *Svenſka Vetenſkaps Academiens Handl. för år* 1767, *Vol. XXVIII*, *p.* 158 &c, 193 &c. *Mathem. beſkrifning om jordklotet*, *af Fredr. Mallet*, *Upſala* 1772, 4 *Cap.* §. 24, *p.* 81, *&c.*

meridianorum terreſtrium, ut certe innoteſcat, an revera tanta ſeſe oſtendat inæqualitas et disſimilitudo, quæ non ſolum errori cuidam, in obſervationibus pendulorum inevitabili, debeatur, ſed etiam in tellure vere exiſtat. Ante omnia vero in hoc negotio illud eſt reſpiciendum, ut ad eundem calorem & eandem aëris presſionem reducantur obſervatæ pendulorum longitudines, quo hæ ad longitudines pro ſpatio aëre vacuo reduci posſint, atque quo ſimul effectus varius caloris in mutandam unitatem, qua menſurata eſt longitudo penduli, juſte æſtimetur. Primo nempe e cognitis legibus hydroſtaticis ſequitur, lentem penduli pondere illius aëris, cujus locum occupat, ſuſtentari, adeoque tardius delabi in aëre quam in vacuo, ita ut altitudo lapſus unius minuti ſecundi major ſit in vacuo quam in aëre. Facta igitur $1 : \mu$ proportione diametri circuli ad peripheriam, atque altitudine lapſus primi $1''$ in vacuo $= g$ & in aëre $= g'$, patet esſe, pro minori pendulorum oſcillatione & calore m graduum, longitudinem penduli ſimplicis in ſpatio aëre vacuo $p_{(m)} = \frac{2g}{\mu^2}$ & in aëre $p'_{(m)} = \frac{2g'}{\mu^2}$, adeoque $p_{(m)} : p'_{(m)} :: g : g'$ ſeu $p_{(m)} = \frac{g}{g'} \cdot p'_{(m)}$. Sunt vero g & g' in ratione presſionum corporis in vacuo & in aëre, hoc eſt, facto pondere corporis abſoluto in vacuo

$= v$

$= v$ & pondere aëris sub eodem volumine $= \frac{v}{r}$, in ratione $v : v - \frac{v}{r}$, unde eruitur $\frac{g}{g'} = \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{r}{r-1}$, & $p_{(m)} = \frac{rp'_{(m)}}{r-1}$. Facto vero pondere specifico lentis penduli $= s$ & aëris $= t$, erit $r = \frac{s}{t}$, atque $p_{(m)} = \frac{s}{s-t} \cdot p'_{(m)} = (1 + \frac{t}{s})\, p'_{(m)}$ proxime, ob quantitatem $\frac{t}{s}$ admodum parvam. Est vero t pro calore diverso & pro diversa altitudine Barometri sensibiliter variabilis, cum e contrario s constans hic posit assumi. Fieri ergo debet, pro caloris gradu $= m$ in Thermometro centigrado & Barometri altitudine $= h$ pollic. geom. Svecan., $t = \frac{0{,}0000507 \cdot h}{1 + 0{,}00375 \cdot m}$ (*) & peracta correctione, longitudo penduli in vacuo $p_{(m)} = \left(1 + \frac{0{,}0000507 \cdot h}{(1 + 0{,}00375 \cdot m)\, s}\right) \cdot p'_{(m)}$. Quantitas quæ hic obvenit corrigens, pro variatione altitudinis h a 25 ad 26

*) Cfr. *Dissert. Acad. de pondere corporum specifico ad normalem gradum caloris reducendo*, Præs. G. G. Hällström & Resp. Joh. Dan. Alcenio, Aboæ 1809, p. 16.

ad *26,5* pollices, caloris m a $0°$ ad $+30°$, atque longitudinis $p'(m)$ a *439* ad *441,5* lineas Parisinas, intra limites *0,076* & *0,064* continetur existente lente penduli cuprea, sed intra limites *0,052* & *0,044* pro lente plumbea. Universaliter igitur non potest adhiberi correctio illa additiva *0,063*, quam hoc respectu proposuit *Cel. Hube* (*).

Quod deinde vim attinet caloris ad mutandam longitudinem tam penduli quam etiam mensuræ ad quam illa refertur, facile patet, utriusque dilatationes vel condensationes simul esse considerandas ut vera habeatur longitudo penduli reducta ad calorem quendam normalem, pro quo temperatura congelationis aquæ commodissime sumi potest. Facta scilicet mensura, quæ in calore $0°$ est $= 1$, pro calore m graduum $= 1 + \psi(m)$, & penduli in vacuo oscillantis longitudine in calore $0° = p(0)$ nec non in calore m graduum $= (1 + \varphi(m))\, p(0)$, utrisque scilicet mensura, quæ est $= 1$, dimensis, erit hæc longitudo, pro m gradu caloris, ad unitatem $1 + \psi(m)$ relata $p(m) = \frac{1 + \varphi(m)}{1 + \psi(m)} \cdot p(0)$. Si jam duo allati quantitatis $p(m)$ valores inter se comparantur, habetur $\frac{1 + \varphi(m)}{1 + \psi(m)} \cdot p(0) = \left(1 + \frac{0,0000507 \cdot h}{(1 + 0,00375 \cdot m)s}\right) \cdot p'(m)$, & longitu-

(*) In libro suo *de Telluris forma*, *Varsaviæ* 1780 *p.* 26.

gitudo penduli simplicis pro calore o° in spatio aëre vacuo oscillationes tempore $1''$ peragentis $p_{(o)} = \left(\frac{1+\psi_{(m)}}{1+\varphi_{(m)}}\right)\left(1+\frac{0{,}0000507\ h}{(1+0{,}00375.m)s}\right).\ p'_{(m)}$.

Quando ratio longitudinis penduli simplicis pro diversis locis ope invariati cujusdam penduli quaeritur, reductione aliqua etiam opus est. Pro calore m graduum sit longitudo dati penduli invariata $= q_{(m)}$, hocque pendulum tempore $1''$ in aëre caloris m graduum perficiat oscillationes numero $= M'_{(m)}$, ut e theoria pendulorum habeatur longitudo penduli simplicis in hoc aëre $p'_{(m)} = q_{(m)}\ (M'_{(m)})^2$. Si numerus oscillationum hujus penduli in vacuo & eodem calore m est $= M_{(m)}$, erit penduli simplicis in vacuo oscillantis longitudo $p_{(m)} = q_{(m)}\ (M_{(m)})^2$, adeoque $(M'_{(m)})^2 : (M_{(m)})^2 :: p'_{(m)} : p_{(m)}$, seu $(M_{(m)})^2 = \frac{p_{(m)}}{p'_{(m)}}(M'_{(m)})^2$. Facta igitur substitutione valoris $\frac{p_{(m)}}{p'_{(m)}} = 1 + \frac{0.0000507\ h}{(1+0{,}00375.m)s}$, qualis ex iis, quae supra allata sunt, deducitur, oritur valor $(M_{(m)})^2 = \left(1+\frac{0{,}0000507.\ h}{(1+0{,}00375.m)s}\right)(M'_{(m)})^2$. Simili ratiocinio in alio loco superficiei terrae, ubi tempore $1''$ hocce pendulum in aëre m' graduum calido vibrationes numero $= N'_{(m')}$ peragit, in vacuo vero oscillationes numero $= N_{(m')}$, erit, pro altitudine Barome-

tri

tri $= h'$, $(N_{(m')})^2 = \left(1 + \frac{0,0000507.\, h'}{(1 + 0,00375.\, m')s}\right)(N'_{(m')})^2$:
Sicut vero pro calore m graduum est in vacuo $p_{(m)} = q_{(m)} (M_{(m)})^2$, habetur quoque in calore o graduum $p_{(o)} = q_{(o)} (M_{(o)})^2$; cumque esse debeat $p_{(m)} = p_{(o)}$, erit quoque $q_{(m)} (M_{(m)})^2 = q_{(o)} (M_{(o)})^2$, adeoque $(M_{(m)})^2 : (M_{(o)})^2 :: q_{(o)} : q_{(m)}$. Ratio deinde $q_{(o)} : q_{(m)}$ e præcedentibus est æqualis rationi $1 : 1 + \varphi_{(m)}$, quare patet esse $(M_{(o)})^2 = (1 + \varphi_{(m)}) (M_{(m)})^2$, atque valore $(M_{(m)})^2$, qualis nuper determinabatur, substituto, habetur tandem invariati penduli ad spatium aëre vacuum & calorem $o°$ reductus oscillationum numerus $(M_{(o)})^2 = (1 + \varphi_{(m)}) \left(1 + \frac{0,0000507.\, h}{(1 + 0,00375.\, m)s}\right) (M'_{(m)})^2$. Simili modo evincitur pro alio calore m' & Barometri altitudine $= h'$ esse numerum oscillationum in vacuo $o°$ caloris
$$(N_{(o)})^2 = (1 + \varphi_{(m')}) \left(1 + \frac{0,0000507.\, h'}{(1 + 0,00375.\, m')s}\right)(N'_{(m')})^2.$$
Denotantibus igitur $p_{(o)}$ & $\pi_{(o)}$ longitudinibus penduli simplicis pro allatis duobus locis in spatio aëre vacuo & in calore $o°$, erit $p_{(o)} : \pi_{(o)} :: (M_{(o)})^2 : (N_{(o)})^2$, atque $\pi_{(o)} = p_{(o)} \left(\frac{N'_{(m')}}{M'_{(m)}}\right) \left(\frac{1 + \varphi_{(m')}}{1 + \varphi_{(m)}}\right) \left(1 + \frac{0,0000507.\, h'}{(1 + 0,00375.\, m')s}\right) : \left(1 + \frac{0,0000507.\, h}{(1 + 0,00375.\, m)s}\right)$.