4

D. D.

DISSERTATIO GRADUALIS,

DE

REDUCTIONE ANGULORUM, IN PLANIS INCLINATIS DATORUM, AD HORIZONTEM,

QUAM

Communi Suffragio Ampliss. Facult. Philos. in Regia Acad. Aboënsi

PRÆSIDE

VIRO Amplissimo atque Celeberrimo,

D:NO MAG. JACOBO GADOLIN,

OBS. ASTRON. Reg. & Philos. PROF. Extraord.

Nec non

Reg. Acad. Scient. MEMBRO,

Publicam voluit

MATTHIAS RUNGÉN,

OSTROB.

In Audit. Super. d. VI. Jun. MDCCLI.

ABOÆ, Impressit DIRECT. & Typogr. Reg. Magn. Duc. Finland. JACOB MERCKELL.

S:Æ R:Æ M:TIS
SUMMÆ FIDEI VIRO,
Celsissimo & Excellentissimo
COMITI AC DOMINO,
DN. CAROLO GUSTAVO TESSIN,
Regis Regnique Sveciæ SENATORI,
Cancellariæ Regiæ PRÆSIDI,
Supremo Aulæ MARESCHALLO,
Principis Hæreditarii GUSTAVI educationis
MODERATORI,
Ordinum S:Æ R:Æ M:TIS CANCELLARIO,
Ord. Seraphici & Aquilæ Nigræ
EQUITI,
Regiæ Academiæ Aboënsis
CANCELLARIO,

MÆCENATI ÆTERNUM SUSPICIENDO.

Excellentissime Celsissimeque

COMES,

DOMINE GRATIOSISSIME.

Te, Cancellarie Magne, *tot ac tantis pro REGE & universa PATRIA curis implicatum, non solum præsentis seculi fama admiratione celebrat, sed etiam sera prædicabit posteritas.* Tui *in publica commoda summi ardoris fructus, Svecica Tellus sentit uberrimos: sentiet & ventura ætas. Quam eximio amore litteras complectaris & quantum in* Te Mæcenatem *habeant earum cultores, Musæ Auraicæ plurimis documentis expertæ sunt. Hoc Excellentiam Personæ* Tuæ *illustras, illo salutem publicam gloriose promoves; His immortalitati* Nomen Tuum *commendas. Ut enim in litteris optime versatus es, ita & in Republica; hinc tam philosophorum scholis quam Regum consiliis præesse mereris. Nostra civitas Academica*

in

in umbra patrocinii Tui *vitam respirans felicissimam, æternitatis tabulis dudum insculpsit insignes virtutes, quibus animus* Tuus *exornatus est & merita supra nostram posita prædicationem. Præcipue in* Te, *cum gubernacula ejusdem tenere, non recusaveris*, Mæcenatem *veneratur* indulgentissimum, *qui illam eo dulcissimo fovet sinu, quo Musis his de perfectione olim triumphaturis omen præbetur exoptatissimum, certissimum. Societates litterariæ* Te, *veluti Solem in Arctoo eruditorum orbe splendidum intuentur; Camœnis Aboënsibus* Tuis *sub radiis ad jucundissimæ voluptatis fastigium adspirare licet. Non ergo miraberis* Celsissime COMES, *nec succenseas ad infimas Pindi radices hærenti, qui ad præluſtria* Celsitudinis Tuæ *limina accedit, & ad aram gratiæ* Tuæ *levissimum ingenii sui fœtum devotissime deponit. Patiaris, ut* Excellentissimi Nominis Tui *jubar nitorem illi conciliet. Vivas* Mæcenas Gratiosissime, *in annos humanæ ætatis terminum longissime superantes, in æternum seculi hujus ornamentum! Vigeas in universæ patriæ emolumentum maximum! Floreas Regis amor, Patriæ delicium, Mæcenatum Princeps & Heliconis ad Auram fulcrum! Ita vovet*

ILLUSTRISSIMÆ EXCELLENTIÆ
TUÆ

subjectissimus servus,
MATTHIAS RUNGÉN.

à

MONSIEUR

GUSTAVE BONEAUSCHIÖLD,

SECRETAIRE d' Etat & CHEVALIER de l'ordre de l' étoile du Nord.

TOus les Auteurs ont coutume d' orner d' Illuſtres noms la tête de leurs ouvrages pour en relever le mérite. Voici Monſieur, *un leger pinceau de mes travaux academiques, que je vais donner au Public & que je prens la hardieſſe de dédier à Votre illuſtre Perſonne. Je me croirois heureux, ſi Vous daigniez regarder d' un oeil favorable ce gage de mon zèle. Repaſſant dans mon eſprit la grace & la faveur toute particuliere, qu'il Vous a plu m' accorder & que j'ai le bonheur d' être*

être attaché à Votre Maison, je n'ai pû trouver une occasion plus favorable de Vous dévouer la vive reconnoissance, qui est gravée au fond de mon coeur. Votre generosité m' assure, que je puis toujours me glorifier, d' avoir part dans Vos bonnes graces tout le tems, que j'ai l' avantage de vivre à l' ombre de Votre Protection. Pourquoi donc, Monsieur, *des motifs si pressans, ne doivent-ils point me faire esperer, que la dissertation que j'ai l'honneur de Vous offrir sera reçüe favorablement, comme un hommage du dévoûment respectueux que je conserverai toujours pour Votre service. Si je suis assez heureux que d' avoir Votre aprobation, je m' estimerai au comble de mes voeux. Au reste soiez persuadé* Monsieur, *que je ne cesserai jamais de suplier le Tout-Puissant, pour la prosperité & la conservation de Votre Noble Personne & celle de Votre genereuse famille pendant de longues années. J'ai l' honneur d' être avec un profond respêt*

MONSIEUR

Votre très humble & très obéïssant serviteur

MATTH. RUNGÉN.

S:Æ R:Æ M:TIS

MAXIMÆ FIDEI VIRO,

Reverendissimo

PATRI ac DOMINO,

Dn. JOHANNI BROWALLIO,

S. S. Theologiæ DOCTORI,

Diœseceos Aboënsis EPISCOPO,

Academiæ ad Auram PRO-CANCELLARIO,

Reg. Acad Scient. MEMBRO,

MÆCENATI MAXIMO,

TUos *pro Ecclesia & Reipublicæ litterariæ incrementis concatenatos labores, non temere interpellandos, dum considero, retrahor, an dissertatiunculam huncce* Tibi *offerre audeam; sed invitor, ubi summum erga litterarum cultores favorem,* Tua*que in rempublicam litterariam merita, ad quæ prædicanda & verba & dies me deficerent, venerabunda mente recordor.* Tibi *enim imprimis debet Patria, quod scientiæ huma-*

humano generi utiles, in eadem magis magisque efflorescere incipiunt, quodque gens nostra, cum litteratissimis nationibus de palma contendere studet. Quæ Pindo quotidie accidunt, quantaque sollicitudine pro liberalium artium incolumitate & progressu ad Academiam hancce incumbis, celebrant omnes, qui lætos progressus Tuis *sub auspiciis faciunt. Hinc Musæ summa* Tua *beneficia collaudant privatimque Venerabile* Tuum Nomen *colunt. Si quid in hac mea opella est pretii, nemini potius quam* Tibi *id ipsum debeo. Respice modo*, Reverendissime Domine Episcope, *hocce munusculum, eo vultu sereno, quo serena & fausta clientibus* Tuis *promittis, qui* Te *adire & in re honesta sibi precari sustinent*

Ut spiret de Tuo lætus ab ore favor.

In posterum Tuo *patrocinio frui, ut mihi permittas, & ut spes meas* Tibi *commendatas habeas, cernuus imploro. Sera sit illa dies, serisque nepotibus demum nota, qua* Te, *qui Parnassum adeo ornas & tantopere Ecclesiæ inservis, Patria, Respublica litteraria & Familia nobilissima lugeant.*

REVERENDISSIMI NOMINIS TUI

cliens devotissimus,
M. RUNGEN.

PRÆFATIO.

Solent quidem ſcriptores Mathematici Elementa Trigo: nometrica paucis comprehendere paginis; verum tamen ut indiſpenſabilis hujus ſcientiæ uſus patet latiſſime, ita ejusdem applicatio ad quaslibet res difficiliores ſubactum requirit judicium. Superſtruitur enim hæc fundamentis Geometricis, ab Arithmetica vero inſtrumenta mutuatur, quibus ceu clavibus reſeratur aditus ad cognoſcenda, quæ profunde abſcondita latent. Euectis autem Geometria atq; Arithmetica ad illud, quod hodie tenent faſtigium, non potuit non & Hæc ad idem culmen eleuari. Fateor itaque vel ſolum nomen hocce auguſtum facile abſterrere me potuiſſe ab edendo publicæ luci ſpecimine, quod ad ſublimem adeo atque a ſummis Geometris excultam ſcientiam ullatenus pertineret, niſi argumenti pulcherrimi dignitas, periculi, quod ſimul ſubeo, abunde compenſandi ſpem mihi feciſſet. Id igitur impenſius contendo, velis, B. L. juueniles hoſce conatus mitiori perſtringere cenſura, inq; meliorem partem interpretari; erit hoc, in quo Te æquum & benignum, me vero felicem lætus prædicabo.

ET antiquioribus & noſtro imprimis æuo adeo vexata eſt famoſa illa de magnitudine atque figura planetæ, quem incolimus, quæſtio, ut nemini facile de uſu atque neceſſitate problematis ejusdem, ſiue Aſtronomica ſiue Geographica ſiue Oeconomica ſpectes, ullum ſuboriri queat dubium. Vias autem, quibus ad cognitionem quæſiti peruenirent, varias excogitarunt atque inierunt Mathematici. Quam primum ad aſtrorum phænomena atque motus vel tantillum animum advertere cœperunt hujus ſcientiæ cultores primi, non potuit eos latere globi figuram telluri competere; hinc poſita terra ſphærica, perſpiciebant ductis ad centrum terræ radiis ex duobus in eodem meridiano locis, arcum meridiani in ſuperficie terræ, qui angulum ad centrum terræ poſitum atque ductis illis radiis comprehenſum ſubtendit, ſimilem eſſe arcui meridiani cœleſtis, quem puncta vertici utriusque loci imminentia terminant. Atque proinde cognoſci facile ambitum terræ, ſi menſuratione facta indagetur diſtantia inter loca ejusmodi bina atque ſimul inueniatur proportio arcus iſtius circuli cœleſtis ad circulum integrum (*a*). Quisque autem videt exacte non cognoſci ambitum terræ, niſi menſura utriusque arcus pari & quidem ſumma accuratione inſtituatur (*b*). Verum, uti ſolet, plura in ipſa praxi ſuborta ſunt incommoda, quam vel ipſimet prævidere poterant, qui manus operi huic admoverunt. Quod ad menſuram arcus cœleſtis attinet, ad noſtrum id non ſpectat ſcopum. De arcu terreſtri autem illud imprimis

primis notandum, non sufficere huic rei quamvis locorum distantiam exiguam, neque comprobari a terræ mensoribus minorem, quam qui uni fere gradui respondet. Itaque cum sit superficies terræ inæqualis & ubique fere si tantam distantiam in directum positam quis emetiri suscipiat, aut montes & valles superare, aut densas silvas penetrare, aut lacus & flumina torrentesque trajicere oporteret; peculiaris hinc exorta est difficultas, quæ accurationi justæ nimium quantum officit. Hocce incommodum ut tolleret alter ille Eratosthenes *Willebrord. Snellius*, Trigonometrica in subsidium vocavit principia (*c*), atque hoc ipso facto primus demonstravit, posse distantiam utcunque magnam & quidem in solo utcunque inæquali, multo minori laboris dispendio atque erroris periculo, ex mensurata minori quadam distantia juste proportionata, cognosci, quam si eandem immediate mensurandam Herculeis viribus quisquam adgrederetur. Quia autem postulat hæc methodus, ut vertices angulorum sumantur in obviis quibusvis montium summitatibus aut templorum turribus aut quibusvis aliis locis eminentibus, patet facile non posse absque erroris sensibilis periculo, in computandis distantiis supponi omnia ista triangula in eodem plano posita esse, ne dum singula triangula esse horizontalia. Hinc factum est, ut Mathematici Parisienses in figuram telluris maxima cura & sollicitudine inquisituri (*d*), dum *Snellium* in reliquis imitabantur, necessarium duxerint corrigere angulos observatos, ut nimirum habita ratione altitudinum singulogulorum locorum in quibus vertices triangulorum ponuntur, invenirent quantitates angulorum trianguli cujusvis, in subjecto plano horizontali. De hac re D. *Maupertuis* in discursu, quem præmisit libro, *la Figure de la Terre determinée par les observations faites au cercle Polaire: Sur chaque montagne on avoit soin d' observer la hauteur ou l' abbaisement des objets dont on se servoit pour prendre les angles; & c'est sur ces hauteurs, qu'est fondée la reduction des angles au plan de l horizon.* De methodo autem qua in inveniendis angulis horizontalibus ex istis datis usus est, nihil affert. D. *Cassinus* in tractatu *de la grandeur & de la figure de la Terre*, aggreditur quidem explicationem methodi reducendi istos observatos ad planum horizontale; seu ut ipsius verbis utar, ad libellam maris; verum plurimi sunt nævi, qui methodo ab hoc Auctore indigitatæ adhærescunt. Præterquam enim, quod nimis prolixa sit, & tædium calculationi adferat, per approximationem solummodo ista methodus ducit ad inveniendum quæsitum. Supponit namque plura calculi fundamenta, quæ neque per principia Geometriæ admitti queunt, neque contemnendum semper errorem producunt. Etiam illa ipsa data, quæ ad hancce methodum applicandam postulantur, in eundem veniunt sensum. Exempli gratia, quis concederet altitudines montium veras supra superficiem maris exacte inveniri ex observatis altitudinibus apparentibus eorundem in locis procul dissitis, absque correctione refractioni luminis conveniente; & quis non fatebitur hanc correctionem esse admodum difficilem imo desperandam, ob continuas, quibus obnoxius est aër, mutationes? Ad hanc igitur rem absque formidine erroris expediendam, excogitavimus formulas principiis Geometricis & figurarum proprietatibus superstructas, quas præsenti dissertatione demonstrationibus stabilivimus. Ut vero in ipsa praxi ad casum specialem quemvis applicari queant, illustrationes difficilioribus casibus adjecimus, secundum quas felicissime institui potest Calculus.

(*a*) Eratosthenes *telluris ambitum sequenti modo definivit: observabat solem Syenes, urbis Ægyptiacæ, ipso solstitii æstivi die perpendiculariter impendere, & eodem die gnomonis ope, invenit distantiam Solis, a vertice Alexandriæ urbis etiam Ægyptiacæ sub eodem fere meridiano sitæ; cognoscebat insuper, quot stadiis ab invicem distarent urbes istæ, atque hinc tandem circumferentiam terræ integram.* Posidonius *altitudinem Canopi culminantis observabat Alexandriæ & Rhodi, quorum locorum distantia antea erat perspecta & exinde ad quantitatem circuli maximi telluris argumentabatur. Mathematici Arabes, qui in definiendo ambitu terræ desudarunt, in planitie Sinear a loco quodam medio mensurarunt distantias versus austrum, alii versus aquilonem, donec utrique pertingerent ad locum, in quo altitudo poli integro gradu differret ab altitudine in intermedio isto loco observato, & ex hisce datis ad longitudinem circuli maximi concluserunt. Eodem fere modo* Fernelius, *Medicus & Mathematicus Henrici II:di Regis Galliæ, suam instituit mensuram; nimirum construi fecit rotam circularem ex cujus circumrotatione distantiam locorum, in quibus altitudines poli antea observatæ erant, determinabat.*

(*b*) *Post-*

(b) Postquam nostra ætate agitari cœpit quæstio, annon sphæroidica potius quam sphærica censenda sit figura telluris; nec non utrum depressior potius quam elevatior sub polis sit superficies terræ, quam sub æquatore, maxime omnino necessarium est censendum etiam eos, qui ceteroquin exigui videri potuissent, errores in mensurando, ne dicam etiam in computando evitare. Hinc D. Maupertuis*: nous avons cru ne pouvoir pousser trop loin cette exactitude dans une matiere, qui a eté disputé & qui est d' une si grande importance.*

(c) Videlicet integrum terræ tractum inter Alcmariam & Bergam ad Zomum in plura resolvebat triangula, quorum bina quævis proxima, latere communi erant inter se connexa; singulorum horum triangulorum duos ad minimum mensuravit angulos. Deinde ex mensurato unius trianguli latere, per calculum Trigonometricum invenit quantitatem laterum triangulorum omnium, itemque lineæ meridianæ, quam intercipiunt circuli æquatori paralleli per Alcmariam & Bergam ad Zomum ducti.

(d) Hi observationibus omni exactitudine habitis, deprehenderunt gradum ad polum mensuratum, collatum cum gradu in Gallia mensurato, Tellurem sphæroidem ad polos depressam reddere; & horum solutioni jure acquiescere possunt eruditi.

§. I.

HYPOTHESIS.

Radios luminis atmosphæram trajicientes, dum refringuntur, in eodem semper manere plano verticali.

§. II.

CASUS I.

Fig. 1. Sit C vertex anguli observati ad horizontem reducendi;

cendi; reliqua vero illa duo objecta B & K, quæ simul cum ipso C, singula exhibent singulos tres vertices angulorum trianguli observati KBC, conspiciantur ex puncto C elevata ad æquales angulos supra planum ICH, quod in puncto C supponitur horizontale. Sint præterea rectæ BH, KI verticales in locis B & K occurrentes plano horizontali ICH in punctis H & I. Quæritur quantus foret angulus C, si reliqua ista puncta B & K singula in suis lineis verticalibus deprimantur, adeo ut non super sed in ipso plano horizontali, nimirum in punctis H & I ex puncto C conspici & observari queant. Junctis videlicet punctis CH & CI, quæritur quantitas anguli HCI.

Demittatur ex B recta BE normalis ad planum horizontale HCI, occurrens huic plano in E, eritque punctum E, situm in recta linea CH. Cum enim BH per hypothes. sit linea verticalis, erit triangulum BCH situm in plano verticali, quod transit per B & C atque est ad angulos rectos plano horizontali: (per princip. Doctrinæ Sphæricæ). Igitur punctum E, in quo recta BE occurrit plano huic horizontali, non potest non esse situm in communi sectione horum planorum, verticalis nimirum atque horizontalis, hoc est in recta CH. (Prop. XXXVIII. libr. XI. Eucl.) Si itidem ex K demittatur recta normalis eidem plano horizontali, huic occurrens in L, pari ratione evincitur punctum L in recta CI situm esse. Rectæ KC, BC jam repræsentant illas rectas lineas, in quibus ex puncto C, vertice anguli reducendi, videntur reliqui duo vertices

angu-

angulorum trianguli propositi. Quod enim refractionem in via subeant radii luminis, qui ad visum nostrum deferunt puncta ista observata, patet facile nihil hoc facere ad rem, siquidem radii isti semper in iisdem manent planis verticalibus (§.1.). Secetur recta KC in A ita ut sit AC = BC ducaturq; per A recta AD ad planum horiz. ICH perpendicularis; cadet hæc in rectam CI (per. loc. cit.) eruntq; parallelæ rectæ AD & BE. (prop. VI. libr. XI. Eucl.). Verum in triangulis ADC, BEC ad E & D rectangulis, æquales per hypothesin sunt anguli BCE, ACD nec non per constructionem BC & AC; igitur æquales quoq; sunt rectæ BE & AD, itemq; rectæ DC & EC; junctis itaq; punctis D & E, parallelæ & æquales erunt rectæ AB & DE (prop. XXXIII. libr. I. Eucl.). Demittantur ex C rectæ normales CF ad AB & CG ad DE; bisecabunt hæ rectæ angulos ACB & DCE eritq; AF = FB & DG = GE (coroll. prop. III. libr. III. Eucl.) & per consequens erit AF = DG. Ponatur jam angulus observatus ACB = d; altitudo observata seu angulus BCE = ACD = e, sinus Totus = R. Quod si ulterius sumatur AC in triangulis rectangulis AFC, ADC pro sinu toto; erit per principia Trigonom. Planæ DG (= AF) = S. ½ d, & DC = cos. e. Si autem denuo in triangulo rectangulo DGC habeatur DC pro sinu toto, erit DG sinus dimidii anguli quæsiti. Itaque si inferatur, $DC : DG = \text{cos. } e : S. \tfrac{1}{2} d = R : \dfrac{S. \tfrac{1}{2} d \times R}{\text{cos. } e}$; exhibebit quartus in hac analogia terminus sinum dimidii anguli quæsiti. Hinc ergo fluit theorema: *Si ex loco quo-*

dam

dam per obſervationem detegatur angulus inter duo puncta, æqualem in eodem loco habentia altitudinem apparentem ſupra horizontem; erit coſinus altitudinis apparentis ad ſinum dimidii anguli obſervati, ut ſinus totus ad ſinum dimidii anguli ad horizontem reducti.

ILLUSTRATIO.

Sit ACB = d = 45°, ideoque $\frac{1}{2}$ d = 22°, 30′; & ACD = e = 3°.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Logar. ſinus } \tfrac{1}{2}\text{ d} = & 9.5828397 \\
+\text{Log. ſinus totius} = & 10.0000000 \\
\hline
 & 19.5828397 \\
-\text{Log. coſinus ang. e} = & 9.9994044 \\
\hline
\text{Log. dimid. ang. horiz.} = & 9.5834353
\end{array}
$$

Unde habetur dimidius angulus horizontalis quæſitus = 22°; 31′: 57″, 27 ideoque integer angulus horizontalis quæſitus = 45: 3: 54, 5.

SCHOLION I.

Patet facile hanc eandem obtinere regulam, ſi duo illa puncta B & K infra horizontem puncti C æqualiter depreſſa in C appareant.

SCHOLION II.

Quæ de poſitione punctorum L & D in recta CI atque puncti E in recta CH ad hunc caſum primum dicta ſunt, ea de punctis & rectis cognominibus in Caſibus reliquis quoque ſunt intelligenda.

§. III.

CASUS II.

Sit rurſus KCB angulus obſervatus & objectum K *Fig. 2*

 appa-

appareat ſupra horizontem BCI, qui ad punctum C pertinet, quemadmodum in Caſu I:mo ſuppoſitum eſt. Alterum vero objectum B ſitum ſit in ipſo hoc plano horizontali. Quæritur quantitas anguli horizontalis BCL.

Secetur recta KC in A ut ſit AC = CB; ex A demittatur ad horizontem normalis AD. Sit quoque CF normalis lineæ AB, dicaturque ACB = d; ACD = e; ſinus Totus = R. Hinc per princip. Trigonom. Plan. ſi in triangulis rectangulis AFC, ADC, AC ſumatur pro unitate, erit $AD = \frac{S.e}{R}$, $DC = \frac{coſ.e}{R}$, $AF = \frac{S.\frac{1}{2}d.}{R}$

Cum autem ſit $AF = \frac{1}{2}AB$ (coroll. prop. III. lib. III. Eucl.) erit $AB = \frac{2\,Sin.\frac{1}{2}d}{R}$, ideoque ob angulum ADB rectum erit $DB = \frac{1}{R}\sqrt{\overline{2S.\frac{1}{2}d}^2 - \overline{S.e}^2}$. Inventa itaque jam eſt ſpecies trianguli DBC ob determinatam rationem ſingulorum laterum ad ſe invicem, unde per princip. Trigonom. Plan. cognoſcitur facile quantitas anguli quæſiti DCB.

Hinc enaſcitur theorema: *Si objectorum obſervatorum alterum in ipſo plano horizontali, alterum vero ſupra idem planum appareat, erit angulus inter eadem objecta obſervatus ad horizontem reductus, æqualis angulo trianguli plani illi, quem comprehendunt latera, quorum unum eſt unitas, alterum vero tertia proportionalis ad ſinum totum, coſinum altitudinis illius apparentis atq; unitatem; ſubtendit vero latus æquale mediæ proportionali inter ſummam & diffe-*

differentiam linearum, quæ ſunt tertiæ proportionales ad ſinum totum, ſinum dimidii anguli obſervati & unitatem bis ſumtam, atq; ad ſinum totum, ſinum altitudinis & unitatem eandem aſſumtam.

Quo autem paulo expeditior in praxi fiat calculus, præſtat valorem rectæ DB angulum quæſitum ſubtendentis aliter exprimere. Scilicet in triangulo ADB habeatur AB pro ſinu toto, ponaturque ABD = l; erit hujus ſinus $= \frac{S.e. \times R}{2 S. \frac{1}{2} d}$; quo angulo invento cognoſcitur valor lineæ DB, quæ jam repræſentat coſinum ang. l, eſtque DB $= \frac{\text{coſ.}\, l \times 2 S. \frac{1}{2} d}{R^2}$.

ILLUSTRATIO.

Sit D = 45°; $\frac{1}{2}$ d = 22° 30′; e = 3°

Log. Coſ. e =	9.9994044
− Log. ſin. tot. =	10.0000000
Log. DC = −	1.9994044
Log. ſin. e. † Log. ſin. tot =	18,7188002
Log. ſin. $\frac{1}{2}$ d =	9.5828397
† Log. 2. =	0.3010300
	9.8838697
Log. ſin. l =	8,8349305
Log. coſ. l =	9.99898 22, 8
Log. 2 † l. S. $\frac{1}{2}$ d =	9.8838697
	19.88285 19,8
− Log. R² =	20.0000000,0
Log. DB = −	1.88285 19.8

Cognitis itaque hoc calculo ſingulis lateribus trianguli DBC invenitur angulus quæſitus DCB = 44°: 55′: 16″7.

SCHOLION. I.

Ceteris paribus, ſi objectum K non ſupra horizontem elevatum ſed infra eundem depreſſum appareat in C, evidens eſt, eadem quæ ad hunc caſum 2:dum dicta ſunt, etiam ad illum caſum pertinere.

SCHOLION. II.

Per eandem hanc methodum reduci poteſt angulus obſervatus ad horizontem, etiamſi neutrum objectorum in horizontali plano appareat, ſi modo ita ſint comparata, ut alterum tantundem emineat ſupra horizontem, quantum alterum infra demerſum conſpicitur. *Fig.4.* Etenim ſi ſit punctum B infra planum horizontale, rectaque BE ad hoc normalis; cum æquales per hypotheſ. ſint anguli ACD, BCE, itemque CB = CA, & præterea anguli ADC, CEB recti; erit AD = BE, atque DC = CE. Demittatur ex C ad rectam DE normalis CF, erit DF = FE (coroll. prop. 3. libr. III. Eucl.) Juncta rectis concipiantur puncta A, F, & B, F, eritque in triangulis ADF & FEB ad D & E rectangulis AF = FB, nec non AFD = BFE (prop. IV. libr. I. Eucl.) ideoque cum ſint ambo triangula ADF, BEF ſita in eodem plano ob rectam DE adjunctam ad duo puncta D & E ſumta in rectis parallelis BE & AD. (prop. VII. libr. XI. Eucl.) erit punctum F ſitum in recta AB (Coroll. prop. XV. libr. I.) & per conſequens erit recta

recta CF sita in plano anguli observati ACB. Itaque in triangulo ACF singula tria latera æqualia sunt singulis tribus trianguli BCF. Ideoque bisecat recta CF angulum observatum ACB. Cum igitur punctum F, sit in horizontali plano, patet utramque partem dimidii anguli observati reduci ad horizontem per ea, quæ ad Casum 2:dum sunt allata.

§. IV.

CASUS III.

Fig. 3.

Si puncta observata K & B ad eandem partem plani horizontalis sive supra sive infra inæquales habeant altitudines apparentes in puncto C.

Sume CB = AC, demitte ad horizontem normales rectas BE, DA, uti antea; quæritur angulus horizontalis DCE. Ponatur altitudo apparens major ACD = a, minor BCE = e, angulus observatus ACB = d, AC = BC. Itaque dum AC repræsentat sinum totum per principia Trigonom. Plan. erit DC = cos. a, EC = cos. e. AD = S. a, BE = S. e, AB = 2 S. $\frac{1}{2}$ d. Per punctum B duc rectæ ED parallelam rectam BM quæ secat rectam DA in M, eritque MB = DE, DM = EB (prop. XXXIV. lib. I. Eucl.) nec non AM = AD − BE = sin. a − sin. e. Porro est angulus AMB rectus (prop. XXIV. libr. I.) ideoq; MB = DE = $\sqrt{(2 S. \frac{1}{2} d)^2 - (S. a - S. e)^2}$. Inventis igitur singulis trianguli lateribus DE, DC & EC, quorum primum subtendit, duo posteriora autem comprehendunt angulum, cognoscitur facile hujus quantitas.

Eodem

Eodem fere modo, quo in casu secundo, sub alia forma exhiberi hic quoque potest valor rectæ DE. Nimirum ponatur angulus ABM = l, sinus totus = R, erit sinus anguli $l = \frac{R \times \overline{Sa - Se}}{2S. \frac{1}{2} d}$, ideoq; $DE = \frac{\text{cos.} l \times 2S. \frac{1}{2} d.}{R}$

§. V.

CASUS IV.

Fig. 4. Si unum punctorum observatorum appareat supra horizontem in K, alterum infra in B, sintque altitudines apparentes inæquales; quæritur angulus horizontalis DCE.

Pone rursus secari rectam KC in A ut sit AC = BC; demitte ad planum horizontale normales AD & BE, adjunge ad puncta D, E & A, B rectas DE, AB. Parallelæ sunt rectæ AD, BE (prop. VI. Libr. XI. Eucl.), ideoque in eodem cum illis plano sitæ sunt AB, ED rectæ. (prop. VII. loc. cit.) Per punctum B ducatur recta BM parallela rectæ ED, quæ secabit rectam AD in M, eritque EB = DM, ED = MB (pr. XXXIV. libr. I. Eucl.) Ponatur jam Angulus observatus = d, altitudines apparentes ACD = a, BCE = e sinus totus = R. Est per princ. Trig. Pl. DC = cos. a, CE = cos. e, EB = S. e. AD = S. a, AB = 2 S. $\frac{1}{2}$ d, AM = Sin. e + Sin. a atque ob rectum angulum AMB, DE (= MB) = $\sqrt{(2. S. \frac{1}{2} d)^2 - (S. e + S. a)^2}$. Patet ex antecedentibus valorem rectæ DE etiam sic exprimi posse, nimirum $ED = \frac{2. S. \frac{1}{2} d \times \text{cos.} l}{R}$, posito sinu anguli $l = \frac{R \times \overline{S. a + S. e.}}{2. S. \frac{1}{2} d.}$

§. VI.

§. VI.

Hinc enascitur regula duobus hisce ultimis casibus communis. Ut habeatur angulus horizontalis quæsitus, investigandus est ille trianguli plani angulus, quem comprehendunt latera, quorum unum æquale est cosinui altitudinis puncti observati unius, alterum vero cosinui altitudinis puncti observati alterius, cuiq; opponitur tertium latus, pro quo inveniendo inferatur primo; ut duplum sinus dimidii anguli observati ad sinum totum, ita differentia sinuum altitudinum in Casu 3, & summa eorundem in Casu 4. ad sinum anguli cujusdam quem diximus l; deinde autem ulterius inferatur, ut sinus totus ad duplum sinus dimidii anguli observati ita cosinus anguli inventi l, ad latus tertium illud, quod angulum quæsitum subtendit.

§. VII.

Quanquam hæc ratio calculum subducendi, multum omnino præstet illi, quam indigitavit Celeb. *Cassini* loco supra citato; valde tamen quod ad tres casus posteriores attinet, prolixa merito censenda est, si comparetur cum illa, quæ sequitur.

CASUS II:dus confer. §. 3.

Removeamus illam hypothesin assumtam, esse videlicet æquales rectas AC, BC & ponamus potius rectas AB & DB esse normales ipsi CB, atque secare rectas KC & IC, si opus fuerit productas, in punctis A & D. Igitur recta CB est ad angulos rectos plano ducto per rectas AB, DB (prop. IV. libr. XI. Eucl.) & propterea planum horizontale ICB, quod per rectam CB, ad angulos rectos est plano ADB (prop. XVIII. lib. cit.) Fig. 2.

Est

Eſt etiam planum KIC plano horizontali normale, adeoque (prop. XIX. l. c.) rectus erit angulus ADC. Habeatur AC pro ſinu toto, eritque CB coſinus anguli obſervati ACB & DC erit coſinus altitudinis ACD. Per conſtructionem rectus eſt angulus DBC, ideoque per princ. Trig. Pl. eſt DC ad CB, ut ſinus totus ad coſinum anguli quæſiti DCB; & per demonſtrata, ut coſinus altitudinis ad coſinum anguli obſervati. Patet igitur coſinum anguli horizontalis quæſiti eſſe $= \frac{\text{coſ. d} \times \text{R.}}{\text{coſ. e.}}$

Patet juxta per hanc formulam calculo breviſſimo angulum obſervatum ad horizontem reduci.

ILLUSTRATIO.

Sit d $= 45^{\circ}$, e $= 3^{\circ}$.

Log. coſ, d † Log. ſin. tot. =	19,8494850
Log. coſ. e =	9.9994044
Log. Sinus ang. horizont. =	9.8500806
Angulus horizontalis quæſitus =	$44^{\circ}:55':16.''7.$

COROLLARIUM.

Si coſinus anguli d fiat æqualis nihilo, etiam $\frac{\text{coſ. d} \times \text{R}}{\text{coſ. e}}$ erit nihilo æqualis; ideoque ſi angulus obſervatus æqualis eſt angulo recto, etiam ei correſpondens angulus horizontalis rectus erit. Hoc ipſum Geometrice ſic demonſtratur. Fig. 2. Ducatur in plano horizontali recta DC normalis rectæ CB. Cum autem per hypotheſin recta AC ſit ad angulum rectum eidem CB, erit recta CB ad angulos rectos plano ADC (prop. IV. libr. XI.)

ergo

ergo & planum horizontale, quod per CB, plano ADC ad rectos angulos erit. (prop. XVIII. lib. cit.) atque per consequens erit planum ADC verticale atque recta DC transibit per puncta L, l.

§. VIII.

Eodem fere compendio resolvitur, Casus tertius. Fig. 3. Præmissa eadem qua supra usi sumus præparatione, producantur rectæ AB, DE, donec sibi mutuo occurrant in F. Jungantur puncta C & F; patet rectam CF esse communem intersectionem plani horizontalis DCE atque plani ACB, in quo est angulus observatus. Angulus rectus sit = r. Ob AC = est angulus ABC = $\frac{2r-d}{2}$, ideoque CBF = r × ½ d (prop. V. & XXXII. lib. I.) Deinde ob similia triangula AMB, BEF invenitur BF inferendo AM : AB = BE : BF seu per superius demonstrata S. a = S. e : 2 S. ½ d = S. e; $\frac{2 S.\frac{1}{2} d \times S.e}{S.a - S.e.}$ = BF. Igitur in triangulo CBF datur & angulus B & ratio laterum datum angulum comprehendentium, unde invenitur per principia Trig. Pl. vulgaria, angulus BCF lateri BF oppositum. Angulus hic inventus addatur angulo observato ACB, ut habeatur angulus ACF, qui proinde jam cognoscitur. Itaque manifestum est, hocce artificio reduci quæstionem de inveniendo angulo horizontali DCE, ad casum secundum, cujus resolutionem compendiosissimam § præced. tradidi; scilicet ex datis ACF & ACD inveniatur primo angulus horizontalis DCF; deinde ex datis BCF

C & BCE

& BCE similiter inveniatur angulus horizontalis ECF, qui subtractus a priori DCF dabit angulum quæsitum DCE.

§. IX.

Fig. 4. Casus quartus eadem facilitate resolvi potest. Præmissa rursus præparatione superiori, ductæ rectæ AB, DE se invicem secant in F. Ponatur angulus rectus $= r$ & recta $AC = CB$, quæ habeatur pro sinu toto. Hinc erit angulus $CAF = CBF = r - \frac{1}{2}d$. $AB = 2.S.\frac{1}{2}d$, $AD = S.a$, $EB = DM = S.e$. Inferatur $AM : AB = AD : AF = EB : BF$. hoc est $S.a + S.e : 2.S.\frac{1}{2}d = S.a : AF = S.e : BF$, unde est $AF = \frac{2.S.\frac{1}{2}d \times S.a}{S.a + S.e}$, $BF = \frac{2.S.\frac{1}{2}d \times S.e}{S.a + S.e}$. Igitur in triangulis CAF, CBF præter angulos ad A & B datur ratio laterum, quæ sunt circum angulos datos & proinde investigari possunt facile anguli quicunque lateribus oppositi. Itaque invento alterutro eorum, quæ sunt ad punctum C, eoque demto de angulo observato ACB, etiam reliqvus innotescet. Dantur ergo anguli ACF, BCF. Adeoque cum sit CF in plano horizontali, quæstio de inveniendo angulo horizontali redit ad Casum secundum. Nimirum ex datis ACF & ACD itemque BCF & BCE inveniantur per resolutionem Casus 2:di §. 7. anguli correspondentes horizontales DCF & ECF, quorum summa dabit integrum angulum horizontalem quæsitum DCE.

§. X.

Vel ex iis, quæ hactenus attulimus, patet fœcunda esse Mathemata principiorum heuristicorum. Constabit

ſtabit idem uberius ex ſequentibus, quæ generaliſſimam ob oculos ponent regulam, inveniendi quæſitum illum angulum horizontalem, omnibus caſibus ſufficientem. Sint KC, EC illæ rectæ lineæ, inter quas *Fig. 5.* obſervatur angulus KCB; perinde erit ſive alterutra harum linearum, ſit in ipſo horizontali plano, quod per punctum C tranſit, ſive ambæ ſint ad easdem aut diverſas partes plani horizontalis, ad æquales vel inæquales altitudines apparentes obſervatas. Ducatur recta CZ normalis plano horizontali in puncto C. In rectis CK, CZ & CB, fiant CA = CB = CZ; centro C ducantur arcus circuli BA, AZ, BZ, patet AZB eſſe triangulum ſphæricum, & ZA, ZB eſſe arcus circulorum verticalium in loco C. Hi circulorum verticalium arcus, producti ſi opus fuerit, occurrant plano horizontali ſubjecto & quidem ZB in E, ZA in D. Quod ſi alterutrum punctorum obſervatorum in ipſo plano horizontali conſpectum fuerit, evidens eſt, arcum circuli verticalis, per illud punctum ducti, in eodem illo puncto inſiſtere horizontali plano, adeoque duplici nomine idem punctum jam inſigniri. Æquales ſunt rectæ CE, CD & CB. Ducatur centro C per puncta E & D arcus circuli ED. Eſt hic arcus menſura anguli quæſiti ECD. Verum eſt idem hic arcus ED menſura anguli AZB, in ſphærico iſto triangulo. Etiam arcus BE & AD ſunt menſuræ altitudinum obſervatarum; ad quas videntur puncta obſervata B & K, ſive ſupra ſive infra planum horizontale, quorum proinde ſitus & quantitas aut ratio ad totam peripheriam circuli eſt cognita. Igitur cum arcus ZE, ZD ſint quadrantes, (ſunt namque arcus circulorum verticalium a puncto Z in recta verticali ſumto, ad planum horizontale ducti,) cogniti erunt quoque arcus ZB & ZD; prout enim puncta B & K appareant ſupra vel infra planum horizontis, ſubtrahendi ſunt arcus BE & AD a Quadrantibus vel addendi iisdem, ut habeantur arcus ZB & ZA. Igitur cognita ſunt per factas obſervationes ſingula tria latera trianguli ſphærici ZBA, ideoque per principia Trigonometriæ ſphæricæ invenietur quantitas anguli BZA in hocce triangulo. Poteſt nimirum inferri, ut rectangulum ſub ſinibus crurum quæ ſunt circum angulum quæſitum, ad quadratum ſinus totius, ita rectangulum ſub ſinibus differentiarum crurum a ſemiſumma omnium laterum, ad quadratum ſinus dimidii anguli quæſiti.

ILLUSTRATIO.

Sint ZB	$= 88^{\circ}:46':34'',5$	9.4760239,27
ZA	$= 87:\ 23:\ 6.\ 9$	9.5082839,47
BCA	$= 36:\ 36:12\ 55.$	000990,75
		004524, 1
	212, 22: 36, 4.	18.9848593, 59
	106: 11: 18, 2	9.4924296, 79
	17: 24: 43, 7	
	18: 48: 11, 3	

Huic numero ultimo, in tabulis reſpondent $18^{\circ}:6':18'':84$ = dimidius angulus horizontalis; hinc ZCD $= 36:12:37,68$ = ang. horizont. quæſitus.

§. XI.

§. XI.

Abſolvimus itaque jam rem omnem, hiſce caſibus reſolutis, adeo ut nullus omnino ſuperſit dubitationi locus, quin ex hiſce principiis poſſit ſeries triangulorum, in montoſis & utcunque inæqualibus in ſublime elevatis atque in infimas valles depreſſis locis obſervatorum, ad æquabilem ſuperficiem terræ, qualis eſſe ſolet maris in tempeſtate tranquilla, reduci. Hinc etiam omnium punctorum obſervatorum diſtantiæ, a ſe invicem & ſitus perinde poſſunt inveniri, ac ſi in ipſa æquabili ejuscemodi ſuperficie capti fuiſſent triangulorum anguli. Diximus in antecedentibus, fuiſſe *Caſſinum* de hac ipſa reductione angulorum ſollicitum, dum pro determinanda & producenda linea meridiana obſervatorii Reg. Pariſ. per univerſam Galliam triangulorum analyſin inſtituebat. Conſignavit ille hunc in finem integrum, quod eſt undecimum part. 1. libri ſupra citati, caput, ſub hoc titulo. *Methode dont l'on s'eſt ſervi, pour reduire au niveau de la Mer, les angles obſervés ſur des montagnes dans des plans differens.* In hoc capite methodum ipſam traditurus, hunc in modum verba facit. *Comme la diviſion des inſtrumens dont on s'eſt ſervi pour obſerver les angles de poſition, n' etoit que d' environ 90 degres; Lorsqu'on avoit beſoin pour former un triangle, d' obſerver un angle qui excedoit le nombre de ces dagres, l' on etoit obligé de ſe ſervir de deux angles pris avec quelque objet, qui fut entre deux, pour pouvoir les unir enſemble. Voici la Methode que l'on a pratiquée pour determiner les reductions qui conviennent à ſes angles.*

angles. On a jugé a propos d'en rapporter un exemple, pour pouvoir s'en servir dans une occasion semblable, & faire voir de quelle importance il' etoit pour l' exactitude des triangles de la Meridienne de connoitre la hauteur des montagnes, sur le niveau de la Mer, que etoit necessaire à cette reduction. Circa hoc ipsum notamus gratis omnino asseri, montium in quibus posita sunt puncta observata, necessario cognosci debere altitudinem supra superficiem maris. Intelligit namque Auctor hoc loco altitudines hexapedis mensuratas, prout ex subjecto ejus calculo patet. In superioribus enim a nobis evictum est, sufficere, si cognoscantur solummodo, gradibus circuli dimensæ altitudines apparentes supra horizontem, qui ad verticem anguli pertinet. Deinde illud imprimis observandum, in isto allato exemplo, quod instar regulæ in aliis casibus imitandæ proponit, nec non integro hocce capite, dilabi Auctorem a scopo isto, quem titulus capiti præfixus innuit. Non enim eo dirigitur calculus, ut inveniatur angulus horizontalis, sed ut ab uno plano ad illud horizontale inclinato reducatur angulus observatus, ad aliud, quod æqualiter, sive magis aut minus pro re nata, ad horizontem inclinatur. Hæc reductio anguli observati ab uno obliquo ad aliud obliqvum planum, in calculo triangulorum in inveniendo gradu meridiani & situ locorum in superficie terræ, æque est, nostro quidem judicio, supervacanea, atque illa altera, qua angulus horizontalis indagatur, est necessaria. Cum tamen in aliis calculis instituendis usui esse queat, a re proposita non alie-

alienum judicamus brevibus monstrare, quam facile per principia supra explicata expediri queat hæc reductio; unde simul patescit differentia inter utrasque methodos, & quantum altera alteri præstat. Sint tria puncta B, K, P sive in montium cacuminibus sive in locis humilibus utcunque inæqualiter sita, in relatione ad planum horizontale quarti puncti C, ex quo observantur. In rectis lineis CB, CK, CP in quibus ex C videntur puncta ista, fiant CB = CA = CG. Concipiantur centro C ducti arcus circulorum BA, AG, BG. Ex factis observationibus, cognitæ sunt altitudines apparentes singulorum istorum trium punctorum supra vel infra horizontem ipsius C, nec non bini quilibet anguli v. g. BCA & ACG seu arcus BA & AG. Posito punctum intermedium A non esse in plano, quod per puncta B, C, G ducitur; quæritur jam, quomodo duo arcus cogniti BA, AG reducendi sunt ad planum BGC, ita ut cognoscatur non solum integer arcus BG, verum etiam binæ ejus partes BH & HG illis arcubus correspondentes, posito nimirum puncto H in plano verticali, quod per puncta A & C. Erigatur in C linea verticalis CZ = CB & ducantur circuli verticales ZB, ZA, ZG. Per principia supra explicata, ex datis altitudinibus apparentibus punctorum G, B & A atque arcubus BA, AG inveniuntur triangulorum sphæricorum BAZ & GAZ anguli ad Z, ideoque & summa horum angulorum BZG. Igitur in triangulo sphærico BGZ dantur latera BZ, GZ cum angulo intercepto & proinde cognoscitur latus reliqvum BG, huic angulo oppositum. Fig. 5

Quod

Quod erat primum. Deinde cum ſit punctum H in interſectione arcuum ZA & BG, inveniuntur arcus BH & HG, ſi in triangulo BGZ ex tribus iſtis datis ulterius quæratur angulus HBZ. Hoc enim cognito, dantur in triangulo ſphærico BZH, duo anguli ad B & Z cum latere intercepto ZB, adeoque inveniri poteſt latus uni horum angulorum oppoſitum HB. Quod ſi denique BH ſubtrahatur ab antea invento BG, cognoſcitur quoque HG. Quod erat alterum.

SCHOLION.

Patet punctum extremum G eadem methodo poſſe reduci ad planum BCA; immo ſi plura fuerint puncta obſervatis arcubus inter ſe connexa, quorumque altitudines apparentes ſint obſervatæ; patet quoq; ſimili ratione inveniri quantitatem arcus inter duo quælibet illorum, quæ arcu per obſervationem cognito juncta non ſunt, nec non poſſe reliqua ſingula reduci ad arcum circuli ejusdem.

§. XII.

Qui propius examinare inſtituerunt, unde eſſet illa disconvenientia inter gradus meridiani terreſtris a *Caſſino* ſtabilitos, atque illum in *Lapponia* noſtra menſuratum, præter alia deſiderarunt magis ſpecialem hiſtoriam obſervationum *Caſſini*: ex. gr. quanti fuerint ſinguli anguli non correcti, qualem quidem hiſtoriam omnium obſervationum cum non tradiderit *Caſſinus*, correctiones ab ipſo factæ neque examinatæ ſunt. Verum tamen in exemplo iſto, quod loco regulæ propoſuit D. *Caſſinus*, duos indicavit angulos immediate obſervatos;

horum

horum itaque correctiones ad regulas reductionum nostras examinabimus. Videlicet in extremitate boreali baseos, quam in planitie *Ruscinonensi* mensuravit *D. Cassinus* observatus est angulus = 58°: 12': 15". Inter signum erectum in extremitate hujus baseos meridionali atque summitatem montis *Canigou*, itemque angulus inter eandem summitatem montis *Canigou* atque Turrem in *Tautavel* = 36°: 12': 55". Est mons *Canigou* intermedius inter duo ista reliqua puncta observata. Exigebat necessitas rei, ut posito calculo investigaret *D. Cassinus* angulum, & quidem horizontalem, inter extrema duo puncta in meridionali termino baseos atque *Tautavel*; cum enim singula bina puncta observata in diversis, iisque ad horizontale planum loci observationis inclinatis planis, sita essent, facile perspiciebat *D. Cassinus* simplici additione duorum angulorum in unam summam exacte prouti oportebat, non inveniri angulum quæsitum. Observavit in eodem hocce loco, *D. Cassinus* altitudinem apparentem montis *Canigou* = 2°: 37'0" quod ipsum in Cap. X. l. c. legitur. Reliquorum autem punctorum altitudines apparentes ab ipso observatæ non reperiuntur. Igitur supplendus est hic defectus ex principiis a *D. Cassino* traditis. Ipsemet in suo calculo supponit altitudinem loci observati in *Tautavel* supra superficiem maris esse 258. hexap. distantiam, a loco observationis 11200 hexap., altitudinem puncti istius in *Canigou* 1441 hexap., & distantiam mensuratam gradibus circuli sphæræ maximi in ſuperficie terræ = 30′: 14″. Altitudinem ſigni in meridionali termino baſeos erecti 40 pedum; (vid. Cap. VIII.) cumque aſſerat Auctor altitudinem ſoli ſupra ſuperficiem maris heic fuiſſe adeo exiguam, ut in calculo ducendo negligenda fere ſit, patet altitudinem hujus ſigni poni poſſe 7 hexaped.; diſtantia hujus ſigni ſeu longitudo baſeos, quæ in planitie ſuperficiei maris parallela menſurata eſt, erat 7246, 03 hexaped. quæ ſubtendit ad centrum terræ poſitum angulum = 7′: 37″.

Fig. 6. Sit jam VA arcus circuli maximi in ſuperficie terræ, VC ſemidiameter terræ, quem Auctor ſupponit 3271420 hexaped. VH linea horizontalis loci V. Producatur ſemidiameter CA ſecans lineam horizontalem in H. Patet ex datis altitudinibus TA aut tA punctorum T & t ſupra ſuperficiem maris, itemque diſtantiis VT aut Vt, vel pro re nata angulo VCA, vel denique longitudine ipſius arcus VA, inveniri angulos TVH aut tVH, qui ſunt altitudines apparentes punctorum T aut t ſupra vel infra horizontem loci V, ſi nimirum per lineas rectas propagetur lumen, ex T aut t in locum V.

Hac itaque ratione invenimus ſignum in *Tautavel* elevatum eſſe ſupra horizontem 1°: 13′: 25″, 5; illud in *Canigou* itidem ſupra horizontem 2: 36: 53, 1; ſignum autem in meridionali baſeos termino infra planum horizontale 29″, 3.

Exemplum §. 10. ſubjectum commonſtrat ex hiſce

hisce datis inveniri angulos horizontales inter *Tautavel* & *Canigou* $= 36^\circ: 12': 37'': 3$, inter *Canigou* & baseos terminum meridionalem $= 58^\circ: 10': 00'', 1$. Quorum proinde summa est angulus horizontalis inter *Tautavel* & baseos terminum istum $= 94^\circ: 22': 37'', 8$. Horum angulorum primus differt $17'', 3$ ab illo quem *D. Cassinus* calculo triangulorum inseruit, adeoque ipsa praxi ceu correctos comprobavit; secundus pariter differt $2': 14'', 9$ quæ quidem differentia admodum est enormis; tertius differt ab angulo *D. Cassini* ibidem assumto $47'', 8$: Igitur Geometrica demonstratione evicimus, multo majores errores angulorum in triangulis a *D. Cassino* computatis latere, quam quos probabili argumento persvasus, iisdem tribuebat Celeb. Astron. Prof. *AND. CELSIUS in disquisitione de observationibus pro figura telluris determinanda, in Gallia habitis*; edita Ups. 1738. Verum instituti nostri non est, hæc ipsa ulterius prosequi, ideoque manum de tabula.

SOLI DEO GLORIA.

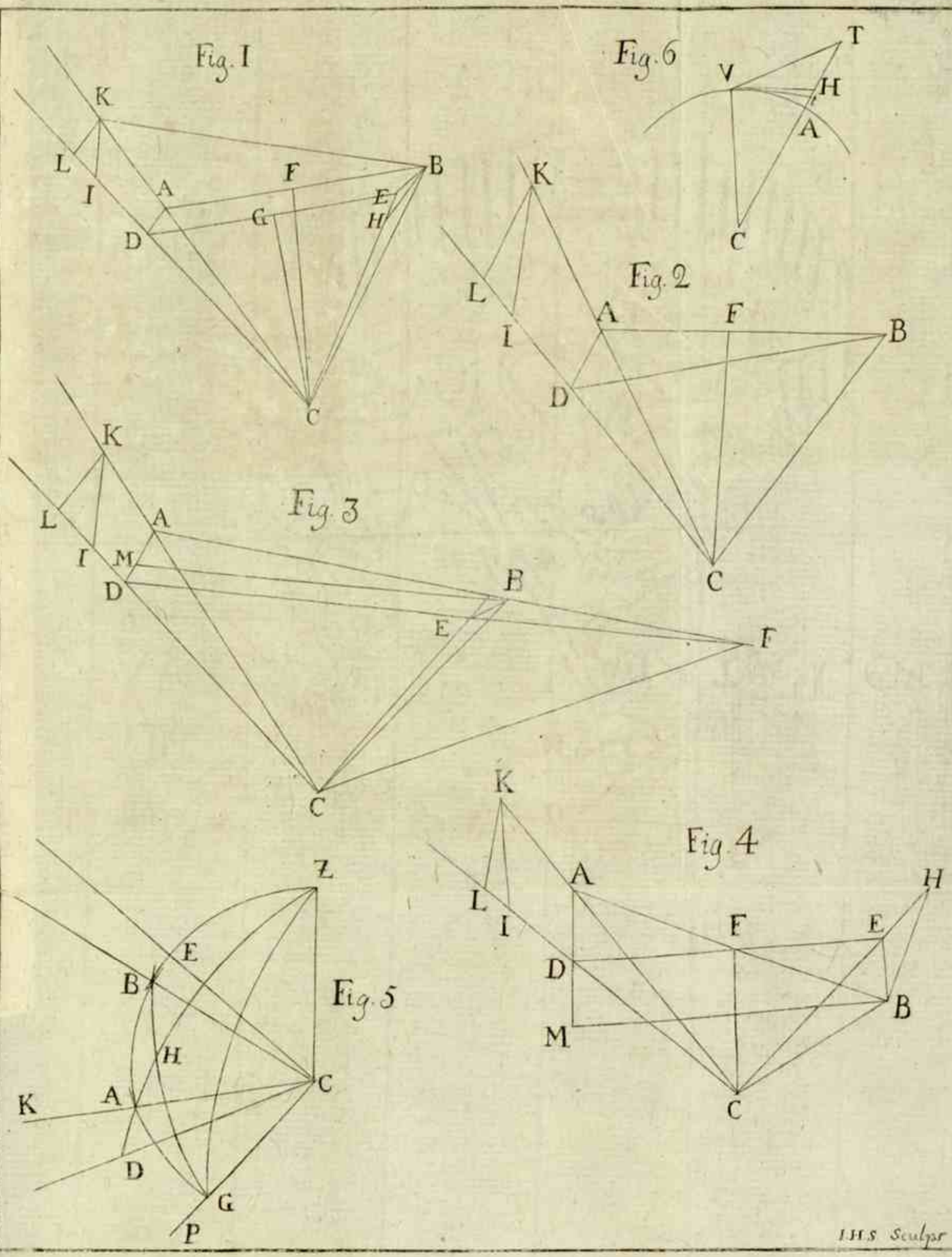
Fig. 1
K L I A D F G E H B C
Fig. 6
T V H A C
Fig. 2
K L I A F B D C
Fig. 3
K L A I M D B E F C
Fig. 4
K A L I F E H D B M C
Fig. 5
Z E B H K A C D G P
IHS Sculpr

CLARISSIMO

Domino CANDIDATO,

Τὴν μὲν δευτέραν, ὦ Φιλότης, τῆς περὶ τὰ κράτιστα τῶν μαθημάτων σπουδῆς ἀπόδειξιν δοῦναι μέλλεις πάνυ ἐπίλαμπον· Εγκωμιάσουσι δὲ πάντες ἀγαθοὶ ταύτην τὴν διατριβὴν ὡς κάλλιστα συγγεγραμμένην, συνηδόμενοίσοι οὐ μόνον τῆς πολυμαθείας ἀλλὰ καὶ τῆσδε τῶν ἀνωφερῶν καὶ μεγάλων πείρας. Εικότως οὖν τὸν αὐτὸν τρόπον κἀγω, ἐκ πολλοῦ, ὦ Φίλτατε, φιλίᾳ σοι προσήκων, ἐν δέοντι τῷ δέοντι χρῆσθαι δοκῶ, συγχαίρων τῆς τε τῶν τρόπων καλοκἀγαθίας, καὶ τῆς ἀγχινοίας καὶ τῆς διαρκοῦς φροντίδος, καὶ τῆς σπουδῆς τῆς ἀνελλιποῦς, δι' ὧν ἀκμῆς τῶν δυσχερεστέρων τῆς φιλοσοφίας περιγενόμενον πολλὰς ἔχω ἐλπίδας ἐντὸς ὀλίγου ἄθλων Σε τεύξεσθαι πολυεύκτων. Ἔρρωσο, ὦ Φιλτάτη ἐμοὶ κεφαλή, διαπαντὸς τρισευδαίμων καὶ τῆς ἐμοὶ πρός Σε φιλίας οὐδένα χρόνον ἐπιλαθόμενος.

His gratulari voluit,
JOHANNES SALMENIUS.