DISSERTATIO MATHEMATICA,

DE

CENTRO OSCILLATIONIS,

QUAM,

Conf. Ampl. Fac. Phil. Reg. Acad. Aboëns.

P. V. P.

MICHAËL AVELLAN,

&

MATTHIAS RENBERG,

Stip. Reg. Nylandus,

In Auditorio Min. die XII Decembr. A. MDCCXCVIII.

H. A. M. C.

PARS I.

ABOÆ,

Typis FRENCKELLIANIS.

3.

VIRO

PLURIMUM REVERENDO ATQUE PRÆCLARISSIMO

DOMINO

Mag. JOHANNI AVELLAN,

Paſtori Eccleſiarum in Tenala & Brofmarf vigilantisſimo,

Patri Indulgentisſimo,

Pagellas hasce offert

Patris Indulgentisſimi

filius obſequentiſſimus

MICHAËL AVELLAN.

§. I.

Quanti ſit momenti ea imprimis Theoriæ pendulorum pars, quæ de centro oſcillationis agit, nemini ignotum eſſe putamus. Nominaſſe ſufficiat, illam haud contemnenda nobis in ſcientia ſiderali præſtare commoda. Non igitur mirum, quod ſumma, quibus ſuperbit Mathematicorum cohors, ingenia dignam, quæ excoleretur, judicaverint. Res autem perdifficilis fuit explicatu, magnumque iis facesſivit negotium. Hinc prima centrum oſcillationis inveniſſe gloria nobilem Mathematicis obtulit certandi materiem. Varias ad ſcopum huncce perveniendi in re Mathematica verſatisſimi fruſtra tentarunt vias, donec tandem HUGENIUS adhuc juvenis, atque poſt illum plures metam propoſitam diverſis modis feliciter attingerent. Præcipua illorum pro hoc argumento tentamina digna, quæ ulterius cognoſcantur exiſtimavimus, eaque præſenti disſertatione explicare conſtituimus. Qui juveniles conatus, ſi minus, quod præter opinionem nobis non cadet, placuerint, veniæ ſpem in ætate ponimus. Quid ſit centrum oſcillationis, ut & oſcillatio in planum atque in latus, e Mechanicis notum ſupponimus.

Agemus autem in hac dissertatione de centro oscillationis pendulorum rigidorum.

§. II.

Quæstionem hancce de centro oscillationis, a P. MERSENNO propositam, solvere conati sunt CARTESIUS & ROBERVALLIUS, celebres suo tempore Geometræ. Falsis vero principiis suas superstruxerunt solutiones. Illorum igitur problema hocce solvendi methodos omittimus, ad CHRISTIANI HUGENII pergentes, cui prima problematis nostri enodandi reservata fuit gloria. Hujus centri oscillationis Theoria, quam in parte quarta egregii sui Tractatus de Horologio Oscillatorio aperuit, sequenti imprimis nititur fundamento. Si singulæ penduli compositi particulæ quamcunque oscillationis partem confecerint, & verticaliter deinde, vinculis solutis, velocitatibus acquisitis ascendant, centrum commune gravitatis ad eandem, ex qua delapsum erat, altitudinem perveniet. Quod ut demonstret, axiomatis instar hypothesi prima assumit, centrum gravitatis particularum penduli altius, quam unde descenderat, non posse ascendere. His principiis, de quibus in sequentibus plura dicemus, novam suam de centro oscillationis condidit Theoriam. In eo deinde omnis consistit difficultas, ut inveniatur tam altitudo a qua, peracta parte quadam vibrationis, decidit centrum gravitatis, quam etiam altitudo, quo sese elevaret, si penduli compositi

par-

partes, communi vinculo diffracto, velocitatibus descendendo comparatis assurgerent. Hæc altitudo, quum illi sit æqualis, æquationem offert, unde determinatio problematis facilis evadit *). Quæ omnia ex sequenti patent calculo.

Sint puncta gravia suspensa ab axe S in eodem plano sita. Sit F centrum commune gravitatis, $x =$ longitudini penduli simplicis, æque diuturnas cum composito absolventis vibrationes; $y =$ altitudini unde, peracta parte oscillationis, delapsum erat centrum oscillationis; Aa, Cr, Bp arcus eodem temporis intervallo descripti ponderibus A, C, B; fg sive altitudo a qua descendit centrum gravitatis eodem quoque tempore $= \frac{y.FS}{x}$ (ob $x : y :: FS : fg$). Quum vero velocitates sint in ratione directa distantiarum ponderum ab axe rotationis, altitudinesque, ad quas separatim velocitatibus acquisitis perpendiculariter ascenderent, in ratione duplicata celeritatum, invenitur altitudo quam centrum gravitatis ponderum obtinet $=$ $\frac{(A.SA^2 + B.SB^2 + C.SC^2)y}{(A+B+C)x^2}$, hinc $\frac{FSy}{x} = \frac{(A.SA^2 + B.SB^2 + C.SC^2)y}{(A+B+C)x^2}$

unde $x = \frac{A.SA^2 + B.SB^2 + C.SC^2}{(A+B+C)FS}$.

A 2 In-

*) Vid. MONTUCLA Hist. des Mathematiques, Tom. II. pag. 390.

Inventa hacce formula, centra oscillationis planorum Geometrice e proprietatibus quibusdam Cunei, super figuram a plano inclinato ad angulum semirectum abscissi, determinat HUGENIUS.

Sit plana quædam figura F, quam recta *L* in eodem plano sita, tangit. Ponamus quoque rectam *R* plano figuræ perpendiculariter per circumferentiam moveri. Quo facto, secetur figura hoc modo orta ab alio plano *L*, per tangentem *T* ducto. Solidum hoc artificio natum Cunei adeptum est nomen. Demittatur porro per centrum gravitatis cunei recta *D* ad planum figuræ *F* perpendicularis, occurratque simul plano *L*. Recta e puncto, ubi *D* figuram *F* secat, perpendiculariter ducta ad *T*, eandem figuram tangentem, vocatur subcentrica Cunei. Dicatur autem *S*. Consideremus jam figuram *F* e minutissimis particulis esse compositam, quarum singulæ $= p$. Sit $x =$ distantiæ particulæ cujusque a tangente; $a =$ distantiæ centri gravitatis a tangente; $C =$ Cuneo. Prisma illud, cujus basis p, altitudo D, æquale est $px = P$ (nam $x = D$ ob angulum semirectum quem formant plana F & L) quare soliditas cunei $= \int px$ unde $\int Px = \int px^2 = C.S = F.S.a$, (etenim $\int px = a\int p = F.a$) & ob $F = \int p$ obtinetur $S = \frac{\int x^2 p}{a\int p}$. Quæ formula eadem prorsus est ac illa quam pro centro oscillationis paullo superius invenimus, adeoque longitudo penduli simplicis in tali casu est ipsa subcentrica Cunei.

Si vero figura agitaretur circa axem ad planum F verticalem, res difficilior est. Sit y = distantiæ particularum p ab axe figuræ. Hoc posito, erunt quadrata distantiarum particularum ab axe suspensionis ducta in $p = \int px^2 + \int py^2$. Sed $\int px^2 = C.S$ sicut jam vidimus. $\int py^2$ = Cuneo, abscisso a plano supra dimidiam figuram per axem transeunte & angulum semirectum cum ipsa figura formante, ducto in suam subcentricam. Patet hinc Geometrice centrum oscillationis determinari posse. Longum esset, operosam Hugenii doctrinam quoad fundamenta sua plenius explicare. Laborem quoque minus necessariam duximus, quum calculo integrali ejus indolis problemata longe facilius solvi queant. Id solum circa principium Hugenii de æqualitate ascensus & descensus centri gravitatis supra memoratum observamus, quod demonstrationes suas haud firmis inedificaverit fundamentis. Sic hypothesis ejus prima, primo saltim intuitu, adeo clara minime videtur, ut axiomatis instar haberi possit. Demonstrationes ejus diligenter perlegenti patebit, rigorem illum, quo in plurimis suis scriptis eminet, Mathematicum, hic desiderari.

§. III.

Progredimur jam ad solutionem Jac. Bernoullii in Actis Acad. Reg. Paris. Scient. 1703 exhibitam ubi alio principio problema nostrum demonstrat. Quam ut, quantum fieri posſit, planam reddamus ſolutionem, ſequentia præmittenda ſunt. Ob vinculum illud commune, cum quo conjuncta ſunt pondera, clarum eſt, arcus quos deſcribunt, adeoque etiam celeritates ponderum, proportionales esſe ipſorum reſpectivis a Centro ſuſpenſionis diſtantiis. E contrario, gravitatis impulſus in ſingula corpora æqualis eſt, quare etiam eadem gravitate deſcendere, æqualiaque ſpatia percurrere conantur. Pondus vero, quod propius centrum ſuſpenſionis eſt ſuſpenſum, omnem gravitatis vim non conſumit, & quod ſupereſt virium, in pondus longius diſtans transferre ſtudet. Hæc causſa cur pondus hocce majus percurrat ſpatium, quam ſi ſola gravitatis vi agitatum fuisſet. Hinc, ob rationes deinceps explicandas, oritur æquilibrium, unde Centrum oſcillationis determinare posſumus.

Asſumamus cum BERNOULLIO, duo pondera æqualia B, C in latus oſcillantia; $FC = FB$, adeoque F Centrum gravitatis. Sit porro M centrum oſcillationis, $Bb = Cc = Mm$ repræſentent vim gravitatis verticaliter in pondera agentem. Quibus viribus reſolutis in parallelas & perpendiculares, exprimant Bo, CR, MQ vires quæ ad penduli rotationem conferunt. Patet autem, arcu MQ a centro oſcillationis deſcripto, corpora B, C eodem temporis inſtanti arcus ei ſimiles Bp, Cr fecisſe. Conſiderare autem posſumus motum corporis B ex B in O ut compoſitum ex Bp, $- op$, parique ratione motum ex C in R ut compoſipositum ex Cr, rR. Jam vero corpora sumserunt motus Bp, Cr. Adeoque motus $-op$, rR nihil ad rotationem conferunt, & $B.BS.op = C.CS.rR$. Ductis e punctis B, M, C, F perpendicularibus, ad IS, erit, posito $Sin\ tot = R$, $Mm : MQ :: SF : LS$, $LS = \frac{MQ.SF}{Mm}$, $R : Sin\ LFC :: FC : LH$, $LH = \frac{FC.Sin\ LFC}{R}$, $SH = \frac{MQ.SF}{Mm} + \frac{FC.Sin\ LFC}{R}$, $ST = \frac{MQ.SF}{Mm} - \frac{FC.Sin\ LFC}{R}$, $RC : Cc :: SH : SC$, $RC = \frac{Cc}{SC}\left(\frac{MQ.SF}{Mm} + \frac{FC.Sin\ LFC}{R}\right)$, $Bo : Bb :: ST : SB$, $Bo = \frac{Bb}{SB}\left(\frac{MQ.SF}{Mm} - \frac{FC.Sin\ LFC}{R}\right)$. Demissa SV perpendiculari ad CV erit $SF : FV :: R : Sin\ FSV$, $FV = \frac{SF.Sin\ FSV}{R}$, $SC^2 = SF^2 + CF^2 + 2CF.FV = SF^2 + FC^2 + \frac{2CF.SF.Sin\ FSV}{R}$, $SB^2 = SF^2 + FC^2 - 2BF.FV = SF^2 + FC^2 - \frac{2BF.SF.Sin\ FSV}{R}$, $SM : MQ :: CS : Cr$, $Cr = \frac{MQ.CS}{SM}$, eodem modo $Bp = \frac{MQ.SB}{SM}$, $Rr = CR - Cr = \frac{Cc}{SC}\left(\frac{MQ.FS}{Mm} + \frac{FC.Sin\ LFC}{R}\right) - \frac{MQ.CS}{SM}$, $Op = Bp - Bo = \frac{MQ.SB}{SM} - \frac{Bb}{SB}\left(\frac{MQ.SF}{Mm} - \frac{FC.Sin\ LFC}{R}\right)$. Igitur

$$C.CS.Rr = C\left(\frac{Cc.MQ.SF}{Mm} + \frac{Cc.FC.Sin\,LFC}{R} - \frac{MQ.CS^2}{SM}\right)$$
$$= B.BS.op. = B\left(\frac{MQ.SB^2}{SM} - \frac{Bb.MQ.SF}{Mm} + \frac{Bb.Sin\,LFC.FC}{R}\right).$$

Hinc $(B + C)SF = \frac{B.SB^2 + C.SC^2}{SM}$ unde tandem $SM = \frac{B.SB^2 + C.SC^2}{(B + C)SF}$. Quæ formula amice cum Hugenii conſpirans ſuis tamen non caret incommodis. Gratis enim cum Hugenio ſupponit puncta M, F, S in eadem recta esſe ſita. Deinde non valet methodus hæc, niſi in eo caſu ubi numerus ponderum oſcillantium eſt par.

§. IV.

Adeo elegans eſt & ingenioſa Theoria Centri Oſcillationis a Joh. Bernoullio inventa, ut præ ceteris haud parum ſeſe commendet. In eo præcipue a præcedenti differt, quod diverſas corporibus inesſe ſupponat gravitates. Hinc ſequitur ut pendula magis vel minus accelerentur, prout majori minorive gravitatis vi agitentur. Unde vis motum penduli producens componenda e masſa, gravitate nec non diſtantia corporis a centro rotationis. Hoc artificio pendulum compoſitum ut pluribus conſtans ſimplicibus, ficta gravitate eodem tempore vibrationes abſolventibus, conſiderare licet. Quid? quod conſervato ſynchroniſmo, pro arbitrio pendulorum longitudines variare posſumus. Quibus intellectis, facile quoque indoles ſolutionis Bernoullii perſpicitur. Eoque redit, ut, in inſtanti omnibus ponderibus

bus annihilatis, in puncto communi, ad arbitrium ſumto, conſtituatur maſſa & gravitas, eosdem ibi producens effectus, ac ſi omnia pondera ſua loca retinuisſent. Deinde vis acceleratrix totius maſſæ concentratæ inveſtiganda, ducendo maſſas ſingulas in ſuas gravitates (unde innoteſcunt vires motrices *) & dividendo ſummam productorum per maſſam concentratam. Hoc modo obtinuimus pendulum fictum ſimplexque, æque diuturnas, ac compoſitum, abſolvens vibrationes. Hinc, quum pateat pendula ſimplicia, quorum longitudines ſunt ut vires, quibus feruntur, acceleratrices, esſe iſochrona, problema propoſitum ſolvi poteſt quærendo aliud pendulum ſimplex iſochronum & compoſito & ficto illo, cujus inveniendi modum jam oſtendimus. Calculus hac ratione peragitur.

Sint ponduſcula A, B, C eidem plano affixa atque circa axem in S eidem plano perpendicularem oſcillantia; gravitates quibus agitantur p, q, r. Sit porro gravitas naturalis g, longitudo penduli ſimplicis quæſitæ $= x$; P, Q, R maſſæ; v, m, n vires motrices corporum A, B, C in M translatæ Ducantur denique AD, CE, BG perpendiculares ad SN.

Jam conſtat, vim motricem, ſeu maſſam in gravitatem corporis, conſiderari posſe tanquam vim ab ipſo

 cor-

*) Monere in antecesſum convenit, nos in ſequenti calculo viam hancce, vires motrices ex uno loco in alium transferendas inveſtigandi, non ſecutos fuisſe, ſed illas unica analogia e natura vectis determinasſe.

corpore ſeparatam, in id agentem. Adeoque eſt ut potentia vecti applicata, cujus hypomochlium eſt S. Eſt igitur per naturam vectis, vis motrix corporum ad vim motricem in M transferendam, inverſe ut diſtantia a puncto S. Igitur (reſolutis viribus verticalibus pA, qB, rC, v, m, n ſumtisque perpendiculariter in recta SA, SB, SC, SM, agentibus) habetur $\frac{p.A.AD}{SA} : \frac{vMN}{SM} :: MS : SA$, $v = \frac{p.A.AD}{MN}$: pari ratione $m = \frac{q.B.BG}{MN}$, $n = \frac{r.C.CE}{MN}$. Tota igitur vis motrix in A translata $= \frac{p.A.AD + q.B.BG + r.C.CE}{MN}$. Sunt vero vires acceleratrices $=$ viribus motricibus diviſis per masſas, adeoque quum etiam ſint ut diſtantiæ a centro rotationis, erit $\frac{p.AD}{SA} : \frac{p.A.AD}{P.SM} :: SA : SM$, $P = \frac{A.SA^2}{SM^2}$. Eadem via invenitur $Q = \frac{B.SB^2}{SM}$, $R = \frac{C.CS^2}{MS^2}$. Tota igitur masſa in M concentrata $= \frac{A.SA^2 + B.SB^2 + C.SC^2}{SM}$ visque ejus acceleratrix $= \frac{SM^2(p.A.AD + q.B.GB + r.C.EC)}{MN(A.SA^2 + B.SB^2 + C.SC^2)}$ & tandem $\frac{SM^2(p.A.AD + q.B.BG + r.C.EC)}{MN(A.SA^2 + B.SB^2 + C.SC^2)} : SM :: g : x$ quare $x = \frac{g.MN(A.SA^2 + B.SB^2 + C.SC^2)}{SM(p.A.AD + q.B.BG + r.C.CE)} =$ (Si F Centrum gravitatis) $\frac{g.MN(A.SA^2 + B.SB^2 + C.SC^2)}{SM.FO(p.A + q.B + r.C)}$, & quia $FO.SM = FS.MN$ (ob parallelas FO, MN) formula præ-

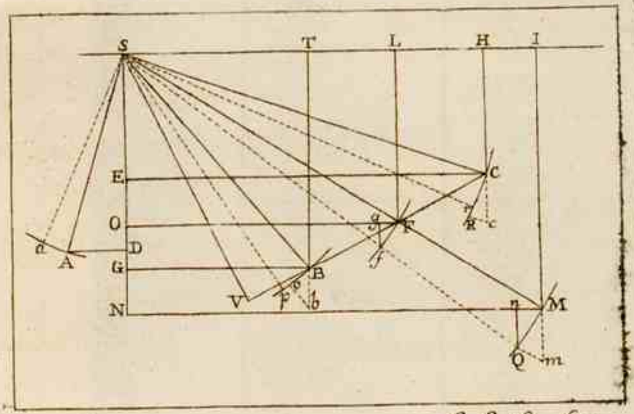
præcedens mutatur in sequentem $\frac{g.(A.SA^2 + B.SB^2 + C.SC^2)}{FS\,(p.A + q.B + r.C)}$.
Si pondera eidem virgae essent alligata, ex. gr. virgæ SN, punctis D, G, E, cuique patet, fore $x =$ $\frac{g.(A.SA^2 + B.SB^2 + C.SC^2)}{SO\,(p.A + q.B + r.C)}$. Plures hinc deduci possunt consequentiæ, quarum singulas afferre brevitatis prohibet studium. Id commodi præ reliquis habet hæc methodus, quod sese etiam extendat ad corpora diversæ gravitatis specificæ in fluidis oscillantia.

§. V.

Sequitur ut explicemus principium HERMANNI in Commentariis Acad. Scient. Petrop. Tom. III. traditum. In eo occupatus est, ut tempora descensus tam penduli compositi quam simplicis inveniat.

Sit M Centrum Oscillationis; $MS = l$; Centrum gravitatis corporum B, C in latus circa S oscillantium F; $FS = a$, $FL = y$, $IM = x$, M massa corporis in Centro Oscillationis; celeritas puncti M acquisita tempore t, quo SM e situ horizontali ad M pervenit $= h$; $MQ = dv$; $Qn = dx$, $fg = dy$ perpendiculares ad MN, FO. Exprimente Ml sollicitationem in directionem verticalem, erit Ml : sollicitationem versus MQ :: $dv : dx$. Quare sollicitatio versus $MQ =$ $\frac{M.l.dx}{dv}$, effectusque tempore dt, $\frac{M.l.dx.dt}{dv} = \frac{M.l.dx}{h}$

 (quia



C L S sc:

(quia $dt = \frac{dv}{b}$), quæ quantitas æqualis $lMdh$, $dx = hdh$, sumtisque integralibus $\sqrt{2x} = h$, valor vero ipsius arcus $dv = \frac{ldx}{\sqrt{l^2 - x^2}}$, hinc $t = \int \frac{dv}{b} = \int \frac{ldx}{\sqrt{2l^2x - 2x^3}} = \sqrt{\frac{al}{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{a^2y - y^3}}$ (ob $x : y :: l : a$). Pari modo obtineri potest tempus descensus penduli compositi $= \int \frac{dy}{\sqrt{a^2y - y^3}} . \sqrt{\frac{B.BS^2 + C\,CS^2}{2P}}$, significante P summam ponderum. Sunt vero (per hyp.) tempora descensus æqualia, quare $\sqrt{\frac{al}{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{a^2y - y^3}} = \int \frac{dy}{\sqrt{a^2y - y^3}} . \sqrt{\frac{B.BS^2 + C.CS^2}{2P}}$ unde tandem $l = \frac{B.BS^2 + C.CS^2}{aP}$. Methodus allata, quam particularem esse primo jam patet intuitu, omnis minime expers est difficultatis. Hujus vero rei enodationem, ut & plurium, quas explicare constituimus methodorum examen, hac occasione omittere cogimur.