

Sluta räkna – börja SE!

En läromedelsanalys

Tove Monnberg

Magisteravhandling i pedagogik
Fakulteten för pedagogik och välfärdsstudier
Åbo Akademi
Vasa, 2024

Abstrakt

Författare	Årtal
Monnberg, Tove	2024
Arbetets titel	
Sluta räkna – börja SE!	
En läromedelsanalys	
Opublicerad avhandling för magisterexamen i pedagogik	Sidantal (tot.)
Vasa: Åbo Akademi. Fakulteten för pedagogik och välfärdsstudier	52
Abstrakt	
<p>Matematikundervisningen och dess uppläggning är ett regelbundet återkommande diskussionsämne. Vanligen undervisas matematik på traditionellt sätt med lärargenomgång av stoffet följt av elevernas arbete i elevböckerna. Ett annat sätt att undervisa matematik är att göra det genom problemlösning. Denna avhandling är en innehållsanalys av lärarhandböckerna <i>Sluta räkna – börja SE!</i> och <i>Sluta räkna – SE mer!</i> Syftet är att analysera de arbetsområden i böckerna som behandlar de fyra fundamentala räknesätten och genom analysen belysa möjligheter och utmaningar vid användandet av läromedlet inom matematikundervisning i åk 1–2. Analysen är gjord dels mot bakgrund av forskning om undervisning genom problemlösning samt de kännetecken på fruktbara problem som olika forskare lyfter fram och dels mot de principer för lärarpedagogiska lärarhandledningar som presenteras av Brehmer (2023). Ur syftet har jag formulerat följande forskningsfrågor:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Möjliggör <i>Sluta räkna – börja SE!</i> undervisning genom problemlösning och i så fall hur? 2. Uppfyller <i>Sluta räkna – börja SE!</i> förväntningarna på lärarpedagogiska lärarhandledningar och i så fall hur? <p>För att få svar på frågorna har jag formulerat sex kännetecken för fruktbara problem samt använt Brehmers (2023) designprinciper för lärarpedagogiska lärarhandledningar.</p> <p>Resultatet visar att problemen i lärarhandböckerna är konstruerade så att de fyller de flesta kännetecken på fruktbara problem som används vid undervisning genom problemlösning.</p>	

De utgörs till stor del av öppna frågor och har inga givna lösningsstrategier utan motiverar eleverna att själva genom bl.a. diskussioner komma fram till fungerande lösningsmodeller. Lärarhandböckerna är till sin struktur inte typiska lärarpedagogiska lärarhandledningar men fyller innehållsmässigt till stor del de förväntningar man kan ha på dylika handledningar. Böckerna fungerar därför väl som stöd och handledning vid undervisning genom problemlösning.

Sökord / indexord

matematikundervisning genom problemlösning, lärarpedagogisk lärarhandledning, designprinciper, fruktbara problem

teaching mathematics through problem solving, educative curriculum materials, design principles, worthwhile problems

Innehållsförteckning

Abstrakt.....	2
1. Inledning	6
1.1. Syfte och forskningsfrågor	7
1.2. Disposition.....	7
2. Teoretisk referensram.....	9
2.1. Läroplan, läromedel, lärarhandledning och lärobok	9
2.2. Problemlösning i undervisningen.....	11
2.3. Matematikundervisning genom problemlösning.....	12
2.3.1. <i>Kännetecken på fruktbara problem</i>	13
2.3.2. <i>Läraren och undervisning genom problemlösning</i>	15
2.3.3. <i>Eleven och undervisning genom problemlösning</i>	18
2.4. Lärarpedagogiska lärarhandledningar	19
2.4.1. <i>Designprincipen ämneskunskap</i>	21
2.4.2. <i>Designprincipen elevkunskap</i>	22
2.4.3. <i>Designprincipen undervisningskunskap</i>	23
3. Metod	25
3.1. Materialpresentation.....	25
3.2. Innehållsanalys	26
3.3. Forskningsetiska aspekter.....	27
4. Resultat.....	29
4.1. Fruktbara problem	29
4.2. Designprinciper för lärarpedagogiska lärarhandledningar	35
4.2.1. <i>Designprincipen Ämneskunskap</i>	35
4.2.2. <i>Designprincipen Elevkunskap</i>	38
4.2.3. <i>Designprincipen Undervisningskunskap</i>	41
5. Diskussion och slutsatser	45
5.1. Resultatdiskussion.....	45
5.2. Metoddiskussion.....	47
5.3. Förslag på fortsatt forskning.....	48
Referenser	49

Tabeller

Tabell 1: <i>Designprinciper för lärarpedagogiska lärarhandledningar i matematik samt till dem hörande underteman</i>	21
Tabell 2: <i>Kategorier för fruktbara problem, åk 1</i>	29
Tabell 3: <i>Kategorier för fruktbara problem, åk 2</i>	30
Tabell 4: <i>Antalet analyserade AO per bok som fyller kriterier för kategorierna för fruktbara problem</i>	30
Tabell 5: <i>Designprincipen Ämneskunskap med underteman, åk 1</i>	35
Tabell 6: <i>Designprincipen Ämneskunskap med underteman, åk 2</i>	36
Tabell 7: <i>Designprincipen Elevkunskap med underteman, åk 1</i>	38
Tabell 8: <i>Designprincipen Elevkunskap med underteman, åk 2</i>	39
Tabell 9: <i>Designprincipen Undervisningskunskap med underteman, åk 1</i>	41
Tabell 10: <i>Designprincipen Undervisningskunskap med underteman, åk 2</i>	42

Figurer

Figur 1: <i>SR1, Ett ska bort/vilka tre hör ihop - varför?</i>	30
Figur 2: <i>Talmoln</i>	32
Figur 3: <i>Elevens egna uttryck</i>	32
Figur 4: <i>Additionsstrategier, SR 2 AO 13, s. 55</i>	36

1. Inledning

Matematik är ett av de områden där skolelevs kunnande regelbundet undersöks internationellt genom de två undersökningarna PISA (Programme for International Student Assessment) och TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study). Finland har under flera år legat i topp i PISA-undersökningarna, vilket väckt internationellt intresse för den finska skolan, men under senare år kan en tydlig nedgång skönjas. En översikt över resultaten från åren 2000–2018 visar att finländska elevers matematikkunskaper under åren 2000–2006 ökade från 536 poäng till 547 poäng men sedan stadigt har minskat så att de år 2018 låg på endast 507 poäng (Ahonen, 2020). Även om resultaten i PISA (484 poäng) enligt mätningen från 2022 (Hiltunen m.fl., 2023) fortsättningsvis ligger över medeltalet (472 poäng) för de deltagande OECD-länderna är TIMSS- resultaten mer modesta (Andrews m.fl., 2014). Skillnaden i resultaten kan till en del förklaras med att undersökningarna delvis fokuserar på olika matematiska färdigheter. Mycket generaliserat kan man konstatera att uppgifterna i PISA främst utvärderar elevernas förmåga att, då det gäller matematiska färdigheter, fungera i vardagliga situationer i det samhälle de lever i medan uppgifterna i TIMSS lägger större fokus på förmågan att tillämpa matematiskt kunnande och föra matematiska resonemang (Sollerman, 2019). En av Utbildningsstyrelsen gjord långtidsstudie för åren 2005–2012 gällande elevers attityd till matematikundervisningen visar en allt mer negativ inställning till ämnet ju högre upp i åldern eleverna kommer (Metsämuuronen, 2013). Tillsammans med de försämrade resultaten väcker detta naturligt nog frågor kring vilka orsakerna till denna nedgång kan vara och vad som kan göras för att vända trenden.

Jag har i ca 20 år undervisat matematik i åk 1–2. Under åren har jag stött på olika utmaningar där jag inte i lärarhandledningarna till de läroboksserier som varit i användning fått det stöd jag har behövt. Det har bl.a. gällt differentiering både uppåt och nedåt, metoder för att stöda utvecklande och verbaliserande av matematiskt tänkande samt sätt att göra matematiken både rolig och utmanande. Under åren har jag diskuterat dessa frågor med kolleger och via dessa diskussioner hört om hur en del matematiklärare i Sverige arbetar. När jag så hösten 2020 fick möjligheten att prova ut den under arbete varande lärarhandboken för åk 1, *Sluta räkna – börja SE!*, var jag inte sen att tacka ja. Följande läsår fortsatte jag med boken för åk 2, *Sluta räkna – SE mer!* och året därpå med den tredje boken, *Sluta räkna – SE vidare!*. Lärarhandböckerna är skrivna av Ulla Öberg och består av arbetsområden som innefattar aktuell teori, praktisk tillämpning och beskrivning av användning av konkret material för ifrågavarande tema.

Eleverna gör sina egna matematikböcker utgående från de matematiska resonemang som förs under lektionerna.

Efter att ha fått vara med och prova ut *Sluta räkna*-boken även för åk 3 väcktes mitt intresse för att undersöka om sättet att arbeta finner stöd i aktuell forskning kring undervisning i matematik. Som ovan konstaterats kan man se en tydlig nedgång i finländska elevers matematiska färdigheter. Därför är det av intresse att undersöka vad forskningen säger om effektiva matematikundervisningsmetoder och i detta fall specifikt undervisning genom problemlösning. Eftersom undervisningsupplägget i *Sluta räkna*-böckerna långt bygger på att eleverna genom diskussioner och konkret material löser olika verklighetsanknutna matematiska problem har jag valt att göra en analys av böckerna i förhållande till vad forskningen säger om matematikundervisning genom problemlösning.

1.1. Syfte och forskningsfrågor

Syftet med min avhandling är att mot bakgrunden av forskning om undervisning genom problemlösning och kännetecken på för sådan undervisning fruktbara problem samt i förhållande till Brehmers (2023) principer för en lärarpedagogisk lärarhandledning analysera lärarhandboken *Sluta räkna – börja SE!//SE mer!* för att belysa möjligheter och utmaningar vid användandet av läromedlet inom matematikundervisning i åk 1–6. Utgående från detta syfte har jag formulerat följande forskningsfrågor:

1. Möjliggör *Sluta räkna – börja SE!//SE mer!* undervisning genom problemlösning och i så fall hur?
2. Uppfyller *Sluta räkna – börja SE!//SE mer!* förväntningarna på lärarpedagogiska handledningar och i så fall hur?

1.2. Disposition

Denna avhandling är uppdelad i fem kapitel. I det första kapitlet, inledningen, presenteras bakgrund till forskningen, syfte och forskningsfrågor samt avhandlingens relevans. I kapitel två redogörs för forskning inom området undervisning genom problemlösning, kriterier för uppbyggande av fruktbara problem samt kriterier för en lärarpedagogisk lärarhandledning.

Forskningsansats, avgränsningar och bearbetning av data behandlas i kapitel tre medan resultaten av analysen presenteras i kapitel fyra. I kapitel fem förs diskussion om resultaten och deras relevans samt slutsatser, tankar och eventuell fortsatt forskning presenteras.

2. Teoretisk referensram

I detta kapitel behandlas läroplan, läromedel, lärarhandledning och lärobok och samspelet mellan dessa diskuteras. Dessutom presenteras forskning om problemlösning som undervisningsmetod samt principer för uppgörande av lärarpedagogiska lärarhandledningar. Inledningsvis, i avsnitt 2.1., behandlas läromedel, lärarhandledning och lärobok. I avsnitt 2.2. redogörs för tre olika sätt att använda problemlösning i undervisningen. I avsnitt 2.3. går jag in på vad forskningen säger om att undervisa genom problemlösning, vilka möjligheter och utmaningar som är kopplade till sådan undervisning och vad man bör beakta för att undervisningen ska fungera. Jag presenterar också olika kännetecken på fruktbara problem. I avsnitt 2.4. redogör jag för designprinciper för en lärarpedagogisk lärarhandledning.

2.1. Läroplan, läromedel, lärarhandledning och lärobok

I de av Utbildningsstyrelsen fastställda *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen* (i fortsättningen Glgu 2014) finns läroämnenas uppdrag formulerade ämnesvis (Utbildningsstyrelsen, 2014). När det gäller matematiken konstateras det i Glgu 2014 att det är ”att utveckla ett logiskt, exakt och kreativt tänkande hos eleverna” (Utbildningsstyrelsen 2014, s. 129). Undervisningen ska främja elevens matematiska förståelse, utveckla elevens förmåga till kommunikation, integrering och samarbete samt stöda utvecklandet av en positiv inställning hos eleven till själva ämnet samt sig själv som matematikelev. Även elevens förmåga att koppla matematiken till vardagen samt själv kunna använda sina matematiska färdigheter på olika sätt ska stödas av undervisningen. Gällande målformuleringar och centralt innehåll för ämnet betonas, utöver färdighetsträning, elevens förmåga inte enbart till matematiskt tänkande men även till att på olika sätt både kunna och våga formulera och uttrycka sitt tänkande.

Matematikundervisningen i åk 1–2 handlar alltså enligt Glgu 2014 om mycket mera än att träna eleverna i rutinmässigt räknande av givna uppgifter (Utbildningsstyrelsen, 2014). För att eleverna senare under sin skolgång ska klara av mera komplexa och krävande matematiska uppgifter bör eleverna redan inom nybörjarundervisningen handledas i utvecklande av en god taluppfattning, matematiskt tänkande och verklig förståelse av ämnet, självfallet på en för åldern lämplig nivå.

Begreppet *läromedel* definieras i *Nationalencyklopedin* (u.å.) som ”resurs för lärande och undervisning; traditionellt främst läroböcker, läseböcker, övningsböcker och ordböcker, men även t.ex. kulramar och anatomiska dockor.” Begreppet har en mycket bred innebörd och har kommit att innefatta en mängd olika typs material som kan användas i undervisningen, från lärarhandledningar, läroböcker och annat textmaterial till konkret och digitalt material (Ammert, 2011; Englund, 2011).

Lärarhandledningar kan bestå fysiskt eller digitalt material som är utarbetat för att stöda läraren i undervisningen (Ammert, 2011). Det finns stora variationer i hur lärarhandledningar är uppbyggda, beroende på vilket syftet med dem är. Hemmi m.fl. (2018) konstaterar att lärarhandledningarna till de vanligaste matematikbokserierna i Finland visserligen ger lärare stöd för undervisningsplanering, bl.a. genom förslag på spel och andra aktiviteter som stöder elevernas lärande, men att de ofta är rätt kortfattade när det gäller teori om stoffet som behandlas. Nyare forskning lyfter fram behovet av lärarhandledningar som inte enbart behandlar det specifika stoff som ska undervisas utan även stöder lärares eget lärande både när det gäller ämneskunnande, kännedom om eleverna och genomförande av undervisningen (Ball & Cohen, 1996; Brehmer, 2023; Davis & Krajcik, 2005; Hemmi m.fl., 2018).

Läroboken, i form av både text- och övningsbok, har av tradition en mycket central roll i undervisningen i många ämnen även om olika digitala läromedel har blivit allt vanligare (Englund, 2011). Englund (2011) menar att sätten läroboken används på varierar beroende på bl.a. ämne, lärarens säkerhet när det gäller ämneskunnande och i vilken grad läroboken underlättar undervisningen. Naturligt nog hör matematik till de ämnen där lärarna i hög grad använder sig av läroböcker i undervisningen. En betydande orsak till det omfattande bruket av läroböcker i stället för t.ex. eget producerat material är att de upplevs som en garant för att läroplanen förverkligas (Englund, 2011).

Läroplanen är alltså det dokument som sätter ramarna för ämnesundervisningen både då det gäller vilka djupare matematiska färdigheter eleverna ska utveckla, bl.a. förståelse och tänkande, samt vilket stoff som eleverna ska lära sig under olika skeden av sin skolgång (Utbildningsstyrelsen, 2014). Läromedel innefattar allt det material som lärare och elever kan använda sig av vid genomförande av den i läroplanen stadgade undervisningen, t.ex. digitalt eller konkretiserande material, läroböcker och lärarhandledningar (Ammert, 2011; Englund, 2011). Lärarhandledningarnas uppgift är att stöda lärarna i undervisningen (Ball & Cohen, 1996;

Brehmer, 2023; Davis & Krajcik, 2005; Hemmi m.fl., 2018) och i läroböckerna ges eleverna möjlighet till systematisk träning av centrala räknefärdigheter (Englund, 2011).

2.2. Problemlösning i undervisningen

Problemlösning har under flera decennier varit ett av de mest centrala områdena inom matematikundervisningen när det gäller både att undervisa matematik och att lära sig matematik (Stein m.fl., 2003). Ofta har dock problemlösning i praktiken fått en rätt undanskymd plats i undervisningen och mera använts som något utöver vanlig undervisning eller som extra uppgifter för snabba eller högre presterande elever (Rodley & Bailey, 2021).

När man talar om problemlösning är det av vikt att skilja mellan tre olika typer av problem, på vilka sätt dessa typer kan användas i undervisningen och för vilka ändamål. Det handlar om undervisning *i* problemlösning, undervisning *om* problemlösning och undervisning *genom* problemlösning (Stein m.fl., 2003) och varje användningssätt fyller en funktion då det väljs i enlighet med syfte och mål för undervisningen. Det har forskats mycket om problemlösning, främst om undervisning *i* och om problemlösning men allt mer även om undervisning genom problemlösning (Cai, 2003; Stein m.fl., 2003).

Den enklaste typen, undervisning *i* problemlösning, innebär att eleverna genom problemen övar vissa färdigheter. Konkret kan det betyda att man lägger in en enkel addition i en händelse ur vilken eleverna ska bilda en beteckning samt lösa uppgiften, t.ex. *Fem fåglar satt i ett träd. Två flög iväg. Hur många fåglar satt kvar i trädet?* Rodley och Bailey (2021) menar dock att uppgifter där ett enkelt matematiskt uttryck är inbäddat i en berättande kontext inte utgör ett genuint matematiskt problem eftersom lösningsstrategin inte kräver matematiskt tänkande utan är rätt uppenbar och består av endast ett steg. Pehkonen m.fl. (2013) talar i sin tur om rutinuppgifter eller övningar.

Vid undervisning *om* problemlösning handleds eleverna i hur man tar sig an ett problem. Liljedahl (2016) konstaterar att eleven vid denna form av problemlösning använder sina tidigare matematiska erfarenheter och färdigheter för att komma fram till möjliga lösningsmodeller. Den kanske mest kända och populära modellen vid undervisning om problemlösning (Liljedahl 2016) är den fyrstegsmetod som Polya (1945) utarbetat. Det första

steget är att man bildar sig en förståelse av problemet t.ex. genom att läsa igenom texten. Följande steg är att göra upp en plan för hur problemet kan lösas. Det följs sedan av genomförandet av planen, d.v.s. själva lösandet av problemet. Till sist ser man tillbaka på processen samt diskuterar den och kontrollerar uträkningen. Genom tillbakablicker och diskussionen kan man anknyta till tidigare kunskaper och samtidigt öka sitt kunskapsutbud med tanke på framtida behov (Liljedahl, 2016).

Vid undervisning *genom* problemlösning utmanas eleverna att utgående från ett fruktbart matematiskt problem enskilt, i par och/eller grupp samt utan att ha en given lösningsmodell resonera sig fram till hur problemet kunde lösas (Larsson & Ryve, 2018). Bruder (2016) framhåller att det vid denna typ av problemlösning behövs ett visst mått av rörligt tänkande även om tidigare inlärd problemlösning kan vara användbara. Undervisningen bör vara väl planerad och genomtänkt och förutsätter att läraren aktivt leder diskussionerna i klassen (Brehmer, 2023).

2.3. Matematikundervisning genom problemlösning

Let me be specific. I am concerned here with mathematics in the high school curriculum and I have an old fashioned idea about its aim: first and foremost, it should teach those young people to THINK.

(Poyla, 1963, s. 605)

I Glgu 2014 poängteras att det inte räcker att eleverna i matematikundervisningen tillägnar sig goda räknefärdigheter, de ska även undervisas i matematiskt tänkande (Utbildningsstyrelsen, 2014). När man då beaktar att förstärkande av elevernas matematiska förståelse och tänkande är ett av de mest centrala målen för användande av problemlösning i undervisningen (Stein m.fl. 2003) ter sig denna typ av undervisning väl ägnad för att målen i Glgu 2014 (Utbildningsstyrelsen, 2014) ska kunna uppfyllas.

Enligt den forskning Pehkonen m.fl. (2013) gjort om användande av problem i matematikundervisningen verkar finländska lärare över lag vara väldigt läroboksbundna i sin undervisning.Handledningarna till de läroböcker som främst används i våra finländska lågstadier är ofta mycket detaljerade när det gäller sätten lärare kan instruera eleverna på vid

genomgång av nytt stoff (Hemmi m.fl., 2018). Eftersom lärarens roll i undervisning genom problemlösning är olik den i traditionell undervisning ställer en förändring av undervisningen krav på både fortbildning, material och handledning för att läraren ska kunna tillämpa ett annorlunda undervisningsätt (Rodley & Bailey, 2021).

I forskning om matematikundervisning genom problemlösning används flera benämningar på problem som kan anses ändamålsenliga, bl.a. *sanna* problem (*true problems*) (Rodley & Bailey, 2021), *rika* problem (Taflin, 2007), *öppna* problem (*open problems*) (Pehkonen m.fl., 2013) samt *värdefulla/lösamma* problem (*worthwhile problems*) (Cai 2003, Rodley & Bailey, 2021). Det finns inte någon allmänt vedertagen definition på hur ändamålsenliga problem ska vara konstruerade (Rodley & Bailey, 2021) så dessa benämningar är inte helt synonyma. Jag har därför i min avhandling valt att använda benämningen *fruktbara* problem eftersom den typ av problem som används ska vara fruktbara för stärkandet av elevernas matematiska tänkande. Jag följer inte heller någon specifik forskares kännetecken utan har på basen av olika forskares synpunkter formulerat kriterier jag använt mig av i min analys av lärarhandböckerna *Sluta räkna – börja SE!/SE mer!*.

I de kommande avsnitten lyfter jag fram olika aspekter som är viktiga att beakta vid undervisning genom problemlösning.

2.3.1. Kännetecken på fruktbara problem

Enligt Rodley och Bailey (2021) finns det inte någon allmän konsensus om hur ett fruktbart (worthwhile) matematiskt problem ska definieras. Liljedahl (2016) menar att problem som kan lösas enbart genom logiskt tänkande och slutledningsförmåga inte är fruktbara problem. Vid lösande av fruktbara problem ges heller inga uppenbara lösningsstrategier utan eleverna måste diskutera sig fram till svar genom att testa och undersöka hurdana strategier som lämpar sig för lösandet av problemet (Rodley & Bailey, 2021). Ett fruktbart problem är ofta en s.k. *Open Ended Question (OEQ)*, d.v.s. ett problem som kan ha ett eller flera svar (Rodley & Bailey, 2021). Den här typen av problem ökar elevernas möjlighet till lärande eftersom problemen inbjuder till analys och diskussion kring olika lösningar och lösningsstrategier (Cai & Hwang, 2023). Enligt Cai och Hwang (2023) kännetecknas fruktbara problem av att de är fängslande, innehåller utmaningar på rätt nivå, och uppmuntrar och styr eleverna att undersöka och lära sig

olika viktiga matematiska tankesätt. De poängterar också att problemen inte behöver vara komplicerade, det viktigaste är de är uppbyggda så att eleverna genom arbetet med dem utvecklar sitt tänkande (Cai & Hwang, 2023). Perkins (i Liljedahl, 2016) menar att beredskapen att lösa ett problem är beroende av elevens tidigare kunskap och erfarenhet och därför är det inte givet att det som för en elev är ett fruktbart problem också är det för en annan. Det samma konstaterar även Rodley och Bailey (2021).

Taflin (2007) har utgående från forskning sammanställt sju kriterier för det hon benämner rika problem:

- problemet ska introducera till viktiga matematiska idéer
- problemet ska vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det
- problemet ska upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid
- problemet ska kunna lösas på flera olika sätt, med olika matematiska idéer och representationer
- problemet ska kunna initiera till matematiska resonemang utifrån elevernas skilda lösningar, ett resonemang som visar på olika matematiska idéer
- problemet ska kunna fungera som brobyggare
- problemet ska kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem

Lappan och Phillips (1998, i Cai & Hwang, 2023) har utarbetat följande kännetecken på fruktbara problem som kan vara till stöd och underlätta arbetet då man väljer eller utformar problem för sin undervisning:

- problemet innehåller viktig och användbar matematik
- problemet kräver tänkande och problemlösning på hög nivå
- problemet bidrar till elevens konceptuella utveckling
- problemet skapar möjlighet för läraren att utvärdera vad eleverna lär sig och var de upplever svårigheter
- eleverna kan närma sig problemet på flera sätt och använda flera olika Lösningsstrategier
- problemet har flera lösningar eller möjliggör olika ståndpunkter som kan antas och försvaras
- problemet uppmuntrar elevengagemang och -samtal

- problemet kopplar till andra viktiga matematiska idéer
- problemet främjar skicklig användning av matematik
- problemet öppnar möjlighet att öva viktiga färdigheter

Även om forskningen presenterar flera kännetecken på fruktbara problem betyder det inte att varje problem som används i undervisningen måste fylla dem alla. Cai och Hwang (2023) fastslår att det allra viktigaste kännetecknet på ett fruktbart problem är att eleverna genom arbetet med det tillägnar sig viktiga matematiska färdigheter.

2.3.2. Läraren och undervisning genom problemlösning

Att matematikundervisning genom problemlösning medför flera fördelar för såväl lärare som elever är något som forskningen på området visar (Rodley & Bailey, 2021). Enligt Stein m.fl. (2003) har jämförande test visat att elever som undervisats genom problem och öppna frågor har en bättre förståelse för matematik och kan använda sitt kunnande mera flexibelt än elever som undervisats mera traditionellt. De klarar även bättre av att verbalisera sitt tänkande och motivera sina val av strategier (Stein m.fl., 2003). Även om lärare ser fördelar med att övergå från en mera traditionell matematikundervisning till en undervisning som baserar sig på inläring genom problemlösning är dock ingen lätt förändring (Rodley & Bailey, 2023). Lärare är generellt rätt bundna vid läroböcker i sin undervisning i matematik och planerar en stor del av sin undervisning utgående från dem och tillhörande lärarhandledningar (Hemmi m.fl., 2018) eftersom de upplevs ge trygghet och säkerhet i undervisningen (Rodley & Bailey, 2021). Att strukturera om sin undervisning ställer stora krav på lärarens både ämnes- och pedagogiska kunnande (Larsson & Ryve, 2018). Det handlar om att gå från en undervisning där läroboken ofta styr undervisningen och läraren vanligen har en mera passiv roll som förmedlare av stoff, utan att nödvändigtvis ha en djupare förståelse för det (Brehmer, 2023), till en undervisning där läraren tar en aktiv roll i att planera och genomföra undervisningen så att eleverna kan utveckla sitt matematiska tänkande och sina ämnesfärdigheter (Brehmer, 2023; Cai, 2003; Larsson & Ryve, 2018). Läraren ska ha en gedigen ämneskunskap och förståelse för bakom undervisningsstoffet liggande matematiska strukturer och resonemang (Brehmer, 2023), förmåga att strukturera undervisningssituationen på ett ändamålsenligt sätt (Larsson & Ryve, 2018), kunna välja, skapa och använda fruktbara problem (Cai, 2003; Cai & Hwang, 2023) samt ha det pedagogiska kunnande som krävs för att bl.a. lägga upp undervisningen så att

eleverna engageras i sådana diskussioner som utvecklar deras matematiska tänkande (Cai, 2003). Ett ofta använt ramverk, kallat MKT (mathematical knowledge of teaching), som synliggör vilken kunskap läraren behöver besitta presenteras av Brehmer (2023). I ramverket delas kunskapen som lärare i matematik behöver in i två huvudgrupper, SMK (subject matter knowledge) och PCK (pedagogical content knowledge). Dessa två huvudgrupper delas i sin tur in i tre undergrupper. SMK handlar om ämneskunskaper med undergrupperna förmåga att räkna, insikt i matematiken bakom räknandet samt kunskap om större matematiska sammanhang. PCK handlar om ämnesdidaktiska kunskaper och till ämnet kopplade pedagogiskt kunnande och omfattar kunskap om elever i förhållande till matematiken, kunskap om hur matematiken ska undervisas samt kunskap om läroplan, läromedel och annat som behövs för att genomföra undervisningen (Brehmer, 2023). Att läraren har dessa kunskaper eller får stöd i att förkovra sig i dem är grundläggande för en fungerande och ändamålsenlig undervisning.

För att tillägna sig sådana förmågor som behövs för att kunna lägga upp undervisningen utgående från problemlösning nämner Rodley och Bailey (2021) att läraren behöver utveckla sin yrkeskunskap på olika sätt. Även om fortbildning på området behövs (Rodley & Bailey, 2021) räcker det inte till (Cai, 2003). Tillgången till färdigproducerade fruktbara problem underlättar det dagliga arbetet (Rodley & Bailey, 2023). Regelbundna diskussioner och samarbete med kolleger (Rodley & Bailey, 2023; Stein m.fl., 2003) samt lärarens eget lärande genom sin undervisning (Brehmer, 2023) är viktigt. Därför är det som på svenska fått benämningen lärarpedagogiska lärarhandledningar något forskningen lyfter fram som ett av de mest centrala stöden för denna typ av undervisning. Dessa handledningar är uppbyggda med lärarens eget lärande genom undervisningen i åtanke (Ball & Cohen, 1996; Brehmer, 2023; Davis & Krajcik, 2005).

En utmaning i undervisning genom problemlösning är att kunna planera och lägga upp själva lektionerna så att de är strukturerade på ett ändamålsenligt sätt och möjliggör diskussion och samarbete som stöder utvecklandet av elevernas matematiska tänkande och förmågor (Larsson & Ryve, 2018). Larsson och Ryve (2018) presenterar en på Stein m.fl. (2008) baserad strategi bestående av fem undervisningspraktiker som hjälper läraren att skapa fungerande rutiner i planeringen och genomförandet av lektionerna. Dessa är:

1. förutse elevlösningar
2. överblicka elevernas arbete

3. välja ut elevlösningar för diskussion
4. ordna de utvalda elevlösningarna
5. koppla ihop elevlösningar till varandra och till centrala matematiska idéer

Som tillägg till dessa fem praktiker presenteras även en inledande praktik, nämligen:

0. välj och anpassa problem, sätt mål för lektionen

(Larsson & Ryve, 2018, s. 46)

0-praktiken visar vikten av att läraren har förmåga att välja ut sådana problem som lämpar sig för undervisningen samt att vid behov anpassa dem för den aktuella elevgruppen. Detta kunnande poängterar även Cai och Hwang (2023). Läraren behöver också ha en klar målsättning med undervisningen och det är av vikt att eleverna känner till syfte och mål för lektionerna (Brehmer, 2023). För den första praktiken, att kunna förutse vilka elevlösningar som kan förekomma vid arbetet med specifika problem, behöver läraren känna till hur elever vanligen tänker och vilka olika strategier de kan tänkas använda sig av (Brehmer, 2023). Under elevdiskussionerna har läraren möjlighet att följa med hur eleverna resonerar samt välja ut och ordna sådana lösningar som sedan i sammanfattningen av lektionen relateras till det centrala matematiska innehållet (Larsson & Ryve, 2018). Rodley och Bailey (2021) framför i sin struktur av undervisningsplanering och lektionsgenomförande liknande tankegångar. Lektionen inleds med presentation av ett fruktbart problem. Sedan följer en undersökningsfas, t.ex. så att eleverna först enskilt och sedan i par eller smågrupp funderar på möjliga Lösningstrategier. Efter det följer en gemensam diskussion om och summering av vad eleverna kommit fram till. Mot slutet av lektionen får eleverna möjlighet att befästa det inlärdas t.ex. genom nya motsvarande aktiviteter (Rodley & Bailey, 2021).

Även tidsaspekten är viktig att beakta vid undervisningsplaneringen. Vid en jämförelse mellan undervisning genom problemlösning och användningen av problem i traditionell undervisning framkom det att det användes flera problem i den traditionella undervisningen medan det i undervisning genom problemlösning användes mera tid på diskussionen av olika Lösningstrategier vilket ledde till att man hann bearbeta färre problem (Cai, 2023). Tiden som läggs ner på problemlösning betalar sig enligt Rodley och Bailey (2021) tillbaka, bl.a. genom att eleverna är motiverade och deras lärande förbättras. Stein m.fl. (2003) framhåller dock att

både för mycket och för litet tid för problemlösningen riskerar att försämra elevernas lärande även om problemet kan vara väl valt.

Som tidigare har konstaterats behöver läraren kunna strukturera undervisningen på ett ändamålsenligt sätt och skapa goda rutiner för både planering och genomförande av lektionerna (Larsson & Ryve, 2018; Rodley & Bailey, 2021). Då diskussion om lösningsstrategier är central för undervisningen är det av största vikt att klimatet i undervisningsgruppen är respektfullt och fungerande så att eleverna känner sig trygga nog att framföra sina tankar i diskussionerna (Rodley & Bailey, 2021). Diskussionerna kan t.ex. först föras i par eller mindre grupper (Rodley & Bailey, 2021) och i slutet av lektionen i en gemensam av läraren ledd diskussion (Brehmer, 2023). Larsson och Ryve (2018) tangerar i samband med de fem undervisningspraktikerna ett kooperativt arbetssätt kallat EPA (ensam - par - alla) som innebär att eleverna först enskilt försöker komma på tänkbara lösningsstrategier för att sedan diskutera sina tankar i par eller mindre grupper och till sist föra en gemensam diskussion i helgrupp. Larsson och Ryve (2018) talar om IEPAS då de har lagt till två moment som är väsentliga vid undervisning genom problemlösning, nämligen I för introduktion av problemet och S för sammanfattning av det som framkommit i diskussionerna.

2.3.3. Eleven och undervisning genom problemlösning

Forskning visar att matematikundervisning genom problemlösning verkar vara ett fungerande sätt att stöda utvecklingen av elevernas matematiska tänkande (Cai & Hwang, 2023). Det är ett elevcentrerat arbetssätt (Stein m.fl., 2003) där eleverna vid lösandet av problem kan använda sig av alla sådana strategier de på ett logiskt och fungerande sätt kan motivera (Cai, 2003). Enligt Rodley och Bailey (2021) är det viktigare att eleverna kan svara på frågan Hur tänkte du? och logiskt motivera sitt tänkande än att svaret är korrekt. Larsson och Ryve (2018) understryker att lärande ofta sker genom att man prövar sig fram och lära av sina misstag och att det därför är synnerligen viktigt att det i gruppen är tillåtet att göra fel. Eleverna lär sig matematisk kommunikation och reflektion genom att de resonerar kring och diskuterar olika strategier som kan användas vid lösande av givna problem (Cai & Hwang, 2023; Stein m.fl., 2003). Genom sådana diskussioner fördjupas förståelsen för matematik, det matematiska tänkandet utvecklas och eleverna får större tilltro till sin egen förmåga att lära sig matematik (Cai, 2003; Stein m.fl., 2003). I jämförelse med elever som undervisats på traditionellt sätt har

elever som arbetat med problemlösning vanligen en mera positiv syn på matematik, är mera motiverade att lära sig och deras färdigheter och kunskaper är också mera flexibla (Stein m.fl., 2003). Eleverna ser en större nytta med matematiken då det inte enbart handlar om att kunna räkna ut rätta svar även om denna undervisningsmetod kräver en del ansträngning och arbete (Cai & Hwang, 2023; Rodley & Bailey, 2021; Stein m.fl, 2003).

En frågeställning som aktualiseras av Cai (2003) är om denna undervisningsmetod är tillämpbar med yngre elever. Har elever i lågstadieåldern och då speciellt i de lägsta årskurserna kapacitet att komma fram till fungerande lösningsmodeller? Både Cai (2003) och Stein (2003) konstaterar att forskning som gjorts i lågstadieklasser visar att även yngre elever klarar av att lösa fruktbara problem. Enligt Rodley och Bailey (2021) är undervisning genom problemlösning en genomförbar metod för alla att lära sig matematik eftersom den stöder lärandet hos en mängd olika elever och tillgodoser behovet av differentiering så eleverna kan arbeta på sin nivå. Detsamma konstaterar också Cai och Hwang (2023) och Stein m.fl. (2003). En av lärarens uppgifter är att anpassa problemens utmaningsnivå enligt undervisningsgruppens förutsättningar (Cai & Hwang, 2023; Larsson & Ryve, 2018).

2.4. Lärarpedagogiska lärarhandledningar

Ball och Cohen (1996) har i sin forskning undersökt läromedlens roll när det gäller att stöda lärarnas lärande och förändringar i undervisningen. De definierar fem korsande områden som påverkar lärarens undervisning där lärarhandledningarna borde bidra med mera än de traditionellt gör samt presenterar riktlinjer för hur handledningarna bättre kunde struktureras för att stöda lärarnas lärande. Nedan presenteras i korthet de fem områdena enligt Hemmi m.fl. (2018) baserade på Davis och Krajcik (2005) samt kompletterade med Brehmers (2023) förklaring:

1. lärarens allmänna kunskap om och möte med elevers tänkande – ge information om t.ex. hurdana frågeställningar och svårigheter elever kan tänkas ha i förhållande till ett visst stoff samt hur de kan bemötas
2. matematiska begrepp och fakta - ge stöd för lärarens lärande, t.ex. att fördjupa förståelsen för stoffet genom att placera det i ett större sammanhang

3. matematisk ordning och koppling - visa på ändamålsenlig ordning och tidsåtgång för att stöda planering och genomförande av undervisningen
 4. motivering bakom aktiviteter - ge läraren stöd i valet av sätt att presentera stoff så att det är till nytta för både lärarens och elevernas lärande
 5. utformning av undervisningen - ge riktlinjer för hur undervisningen kan genomföras samt förståelse för varför dessa riktlinjer bör följas
- (Hemmi m.fl., 2018; Brehmer, 2023)

Sådana handledningar som har som syfte att fungera som ett användbart verktyg för undervisning (Ball & Cohen, 1996) och främja lärarens lärande benämner Brehmer (2023) *lärapedagogiska lärarhandledningar*, efter Davis' och Krajciks (2005) *educative curriculum materials*. Till skillnad från traditionella lärarhandledningar som vanligen utöver stoffet endast innehåller stöd för undervisningsstrategier men inte för lärares lärande har lärapedagogiska lärarhandledningar som syfte att öka lärarnas både ämnes- och didaktiska kunnande (Brehmer, 2023; Davis & Krajcik, 2005). Både Brehmer (2023) och Hemmi m.fl. (2018) skiljer mellan två olika typer av lärapedagogiska lärarhandledningar, de som talar *genom* läraren och de som talar *till* läraren. Båda typerna stöder lärares lärande men har olika grad av lärarstyrning. De förra kan kallas procedurcentrerade och avser handledningar som genom detaljerade instruktioner om vad läraren ska säga i undervisningen styr lärarens exakta agerande i klassrummet och ger därmed läraren en mera passiv roll medan de senare, s.k. resurscentrerade, genom förslag på olika sätt att genomföra undervisningen ger utrymme för läraren att flexibelt tillämpa materialet (Hemmi m.fl., 2018). Brehmer (2023) framhåller dock att båda typerna av handledning fyller sin funktion. Procedurcentrerade handledningar upplevs ge behövligt stöd t.ex. åt mindre erfarna lärare eller då nya undervisningsstrategier tas i bruk (Brehmer, 2023).

Davis & Krajciks (2005) har utgående från de av Ball och Cohen (1996) identifierade fem områdena skapat flera principer som kan ligga till grund för hur lärapedagogiska lärarhandledningar kan byggas upp. Av dessa principer menar Brehmer (2023) att tre är tillämpbara vid uppgörande av lärapedagogiska lärarhandledningar i matematik, nämligen *ämneskunskap*, *elevkunskap* och *undervisningskunskap*. När dessa tre principer förverkligas i handledningen får läraren stöd för sitt lärande och kan genom det utveckla sin undervisning. Lärapedagogiska lärarhandledningar kan ha varierande utformning, det centrala är att principerna är tydligt formulerade och begripliga så att läraren genom handledningen får stöd i att utveckla och förstärka sitt yrkeskunnande (Brehmer, 2023).

Principerna med underteman är presenterade i tabell 1. I de följande avsnitten redogör jag för dem enligt Brehmer (2023).

Tabell 1

Designprinciper för lärarpedagogiska lärarhandledningar i matematik samt till dem hörande underteman

Ämneskunskap	Elevkunskap	Undervisningskunskap
Beskriva matematiska begrepp	Beskriva vanliga svårigheter, missuppfattningar och misstag som elever har eller gör	Beskriva syfte och mål för lektionen
Beskriva matematiska strategier	Beskriva tänkbara strategier som elever vanligen använder	Ge förklaringsmodeller, uppgifter och aktiviteter samt förklara syftet med dem
Använda visualiseringar som förklaringsmodeller	Beskriva stöd för elever i behov av extra hjälp eller utmaningar	Ge stöd för hur man kan diskutera och sammanfatta lektionens centrala innehåll

2.4.1. Designprincipen ämneskunskap

Det är av stor betydelse att läraren besitter kunskaper i sitt ämne utöver och på ett djupare plan än det stoff som ska undervisas. När läraren har en förståelse för de matematiska sammanhangen bakom stoffet ger det en större beredskap att möta olika utmaningar som kan förekomma, även så tidigt som i nybörjarundervisningen. Denna ämnesförståelse har betydelse inte endast för lärarens förmåga att förklara stoffet utan även för elevens inläring. Det går dock inte att förutsätta att alla lärare besitter all nödvändig kunskap och därför är det av vikt att det i handledningen redogörs för den bakomliggande matematiken. Designprincipen ämneskunskap omfattar tre underteman som preciserar den, nämligen *beskrivning av matematiska begrepp*, *beskrivning av matematiska strategier* samt *användning av visualiseringar som förklaringsmodeller*.

Det är väsentligt att läraren i sin undervisning kan använda matematiska begrepp på ett korrekt sätt. Det förutsätter att läraren själv har en rätt förståelse för begreppen, deras bakomliggande innebörd, inbördes förhållanden och ord som är sammankopplade med dem. Lärare kan dock av olika orsaker känna sig osäkra på vad som egentligen sker i t.ex. olika beräkningar och därför är det viktigt att det i handledningen förklaras den aktuella matematikens bakgrund och användning samt beskrivs för området centrala begrepp och hur de i praktiken fungerar.

Exempelvis kan en beskrivning av begreppet addition omfatta räkneoperationens innebörd, termernas inbördes ordning, i vilka sammanhang addition är ett ändamålsenligt räknesätt samt förklaring av till addition hörande vokabulär.

För att matematikundervisningen ska bli mera än enbart träning i att räkna enligt givna mönster behöver läraren känna till hur olika matematiska strategier fungerar, vilket matematiskt tänkande som ligger bakom dem och varför man kan använda strategierna. Om läraren inte har klart för sig matematiktänkandet bakom strategin finns det risk för att eleverna endast lär sig en procedur. Exempelvis kan en beskrivning av addition över 10 visa hur man kan dela upp termerna i talsorter för att sedan först addera varje talsort och därefter steg för steg addera de nya termerna, t.ex. $38+47 = 30+8+40+7 = 70+8+7 = 70+10+5 = 80+5 = 85$.

Bilder och annat visuellt material kan med fördel användas för att förklara bakomliggande matematiska tänkande. Visuellt material förtydligar ofta det som en text förklarar och ökar så lärarens förståelse för stoffet. Materialet kan även användas i undervisningen för att för eleverna illustrera matematiskt tänkande.

2.4.2. Designprincipen elevkunskap

För att kunna planera och genomföra undervisningen så att den stärker elevens kunnande räcker det inte med att läraren besitter en god ämneskunskap utan det behövs även kännedom om eleverna i förhållande till matematiken. Designprincipen elevkunskap handlar alltså om att förstå och kunna identifiera sådana ämnesspecifika utmaningar och tankesätt elever kan ha och hur man kan förutse och hantera dem. Principen är indelad i tre underteman, *beskrivning av vanliga svårigheter, missuppfattningar och misstag som elever har eller gör, beskrivning av tänkbara strategier som elever vanligen använder samt beskrivning av stöd för elever i behov av extra hjälp eller utmaningar*.

För att läraren ska kunna välja adekvata förklaringsmodeller och undervisningsstrategier är det viktigt att vara insatt i hurdana feluppfattningar och svårigheter elever vanligen kan ha på olika matematiska områden. När handledningen beskriver dem och hur de kan kännas igen har läraren beredskap att planera sin undervisning så att dylika problem kan förebyggas eller rättas

till. Det är väsentligt att eleverna redan från början får en rätt matematisk förståelse eftersom det annars senare kan uppstå svårigheter p.g.a. tidigare missuppfattningar.

Kännedom om och förståelse för hur olika matematiska strategier hör till grunderna för lärarens undervisning. Att kunna tillämpa olika strategier räcker inte till för att läraren ska kunna stöda elevernas förståelse för varför vissa strategier är mer ändamålsenliga än andra. Det är också viktigt att läraren kan identifiera strategier som är felaktiga eller som på sikt inte är tillämpbara så läraren i sin undervisning kan hålla fram korrekta strategier.Handledningen kan beskriva dessa utmaningar och hur de kan hanteras och på så sätt stöda läraren i arbetet med eleverna.

Olika sätt på vilka man som lärare kan arbeta med elever som upplever svårigheter i matematik och elever som behöver extra utmaningar kan tas upp i handledningen. Det är viktigt att förslag på vilken typ av uppgifter eleverna behöver är konkreta och möter elevernas olika behov. Handledningen kan också stöda läraren i hur t.ex. svårigheter kan identifieras och på vilka sätt det kan vara ändamålsenligt att arbeta med elever i behov av extra stöd. Elever som är matematiskt begåvade behöver också uppmärksammas så att deras motivation för ämnet upprätthålls. Även om det i vissa läromedel finns uppåtdifferentierande uppgifter kan handledningen stöda läraren i att göra undervisningen mera utmanande för de elever som behöver det.

2.4.3. Designprincipen undervisningskunskap

Utöver ämneskunskap och elevkunskap behöver läraren även ha en god undervisningskunskap. Det innebär att läraren inte endast ska känna till hur man lär ut ett specifikt stoff, väljer eller skapar ändamålsenliga uppgifter till stöd för matematiskt tänkande och färdighetsträning eller motiverar eleverna till matematiska aktiviteter. Läraren behöver också förstå de matematiska resonemangen bakom allt detta samt vilket syftet är med den undervisning man förmedlar. Designprincipen undervisningskunskap handlar alltså om att läraren ges stöd i själva genomförandet av undervisningen samt förståelse för varför vissa modeller är att föredra framför andra. De tre underteman som preciserar denna designprincip handlar om att *beskriva syfte och mål för lektionen, ge förklaringsmodeller, uppgifter och aktiviteter samt förklara syftet med dem samt ge stöd för hur man kan diskutera och sammanfatta lektionens centrala innehåll.*

Det är av vikt att läraren i planering och genomförande av undervisning har klart för sig både syfte och mål för lektionen. Här kan handledningen vara till stöd genom att det tydligt är formulerat både ett mera övergripande syfte och mätbara mål som eleven ska uppnå. Syfte och mål kan i början av lektionen presenteras för eleverna så att de är medvetna om av vilken orsak stoffet är viktigt och vad det är meningen att de ska lära sig under lektionen.

Med tanke på att läraren ska kunna undervisa så att eleverna förstår matematiken och får tillräcklig ändamålsenlig övning behöver det i handledningen framgå vad som ligger bakom olika modeller att förklara matematiken på. För att läraren ska kunna välja på sikt hållbara förklaringsmodeller är förståelse för vad de bygger på viktig. Handledningen kan innehålla inte endast förslag på ändamålsenliga uppgifter och aktiviteter utan också deras syfte och mål samt beskriva strukturer och sammanhang bakom dessa. Detta ökar lärarens eget undervisningskunnande.

Som hjälp för läraren att avsluta lektionen på ett ändamålsenligt sätt kan handledningen ge förslag på olika sätt lärare och elever tillsammans kan sammanfatta det stoff som behandlats. Det är viktigt att läraren får konkreta exempel på hur en avslutande klassdiskussion kan struktureras så den är kortfattad och håller sig till lektionens centrala matematiska innehåll.

3. Metod

I denna avhandling har jag valt att närma mig avhandlingens tema ur ett kvalitativt perspektiv eftersom syftet är att beskriva om och i så fall hur ett enskilt läromedel följer vissa uppställda principer. Kvalitativa forskningsmetoder lämpar sig då man använder sig av mjuka data, t.ex. intervjuer eller textmaterial (Patel & Davidson, 2014) och eftersom lärarhandledningar kan klassificeras som skrivna dokument (Bryman, 2012) är kvalitativ innehållsanalys en ändamålsenlig forskningsansats.

Syftet med min avhandling är att analysera lärarhandboken *Sluta räkna – börja SE!* för att få svar på mina två forskningsfrågor, nämligen

1. Möjliggör *Sluta räkna – börja SE!/SE mer!* undervisning genom problemlösning och i så fall hur?
2. Uppfyller *Sluta räkna – börja SE!/SE mer!* förväntningarna på lärarpedagogiska handledningar och i så fall hur?

3.1. Materialpresentation

Lärarhandboksserien *Sluta räkna* är ett svenskt material och består av tre böcker för lärare, en för varje årskurs i lågstadiets åk 1–3. Separata arbetsböcker för elever finns inte utan eleverna utarbetar själva sina böcker. Utgångspunkten för böckerna är att materialet kan användas med alla elever oberoende av kunskapsnivå (Ulla Öberg i förordet till *Sluta räkna – börja SE!*) Upplägget i lärarhandböckerna avviker på flera sätt från traditionella lärarhandledningar. Böckerna består av arbetsområden (AO) som behandlar alla de delområden i matematik som tas upp i den svenska lärokursen (Lgr22), en översikt över arbetsområdenas anknytning till Lgr22 samt ett antal kopieringsunderlag som läraren kan använda sig av i undervisningen. Arbetsområdenas omfattning varierar, den beräknade tidsåtgången finns utskrivet i början av varje arbetsområde. Arbetsområden som behandlar samma matematiska delområden följer för det mesta inte på varandra utan varvas med andra delområden vilket gör att de aktualiseras flera gånger under läsårets gång i vad man kunde beskriva som snäv spiralundervisning. Texterna i böckerna är skrivna i berättande form med inslag och exempel från författarens egen mångåriga karriär som matematiklärare i låg- och mellanstadiet. Jag har i min studie valt att begränsa min

analys till böckerna för nybörjarundervisningen (åk 1 och 2), *Sluta räkna – börja SE!* och *Sluta räkna - SE vidare!* Eftersom böckerna består av 51 respektive 47 arbetsområden som behandlar ett flertal olika matematiska teman, allt från våra fyra räknesätt till mönster, mätning, sannolikhet m.m. skulle en analys av hela materialet bli för splittrat. Därför har jag dessutom avgränsat materialet för min analys till de arbetsområden som på ett eller annat sätt arbetar med de fyra räknesätten. Arbetsområdena i åk 1 är sammanlagt 15 fördelade på addition 9, subtraktion 4 (3+1), multiplikation 2 och division 2 (1+1). Noteras bör att AO20 i analysstabell 2 finns medtaget för både addition, subtraktion och division eftersom det tangerar alla tre räknesätten vilket gör att antalet arbetsområden i tabellen uppgår till 17. I åk 2 är arbetsområdena 23 till antalet fördelade på addition 7, subtraktion 5, multiplikation 6 och division 5.

3.2. Innehållsanalys

För att kunna analysera arbetsområdena mot de kännetecken på fruktbara problem och de designprinciper för lärarpedagogiska lärarhandledningar jag har presenterat i kapitel 2 har jag skapat två analys scheman. Det första schemat består av 6 kategorier som jag tagit fram genom att jämföra de olika kännetecknen på fruktbara problem som forskningen lyfter fram med vad Glgu 2014 säger om matematikämnets uppdrag i nybörjarundervisningen. Enligt Glgu 2014 är det viktigt att eleverna får en positiv inställning till matematiken och sin egen kapacitet, lär sig samarbete och kommunikation, utvecklar sitt matematiska tänkande och förmåga att uttrycka sina tankar samt ges tillfälle att träna olika matematiska färdigheter (Utbildningsstyrelsen, 2014). Jämförelsen gav att problemen

1. ska vara intressanta, fängslande och utmanande på lämplig nivå
2. ska uppmuntra till elevsamtal, resonemang samt motiverande av lösningar
3. inte ha uppenbara lösningsstrategier utan bestå av t.ex. öppna frågor med flera svar och/eller strategier
4. ska utveckla elevernas matematiska tänkande och förmåga att verbalisera det
5. ska ge eleverna möjlighet att öva viktiga matematiska färdigheter
6. ska ge läraren möjlighet att utvärdera elevernas kunnande och identifiera svårigheter

I det andra schemat har jag använt mig av de designprinciper med respektive tre underteman Brehmer (2023) tagit fram gällande lärarpedagogiska lärarhandledningar. Principerna är *ämneskunskap* med undertemana matematiska begrepp, matematiska strategier och visualisering som förklaring, *elevkunskap* med undertemana vanliga elevsvårigheter, vanliga elevstrategier och differentiering samt *undervisningskunskap* med undertemana syfte och mål för lektionen, förklaringsmodeller och sammanfattning av lektionen.

Eftersom de aktuella arbetsområdena i de båda böckerna är olika till antalet har jag för tydlighetens skull gjort skilda scheman både för givande problem och för designprinciperna. Vid själva analysen har jag ett flertal gånger läst igenom de valda arbetsområdena ett och ett. Jag har vid genomläsningen först avgränsat det som utgjort problemet för det aktuella stoffet. Detta har jag sedan analyserat mot analys-schemats kännetecken på fruktsamma problem och i schemat kryssat för de kännetecken jag kunnat identifiera. På motsvarande sätt har jag analyserat texten mot designprincipernas underteman för att kunna ringa in den handledning som förmedlas i materialet. Utgående från dessa analys-scheman har jag redogjort för resultaten gällande böckerna i förhållande till mina forskningsfrågor.

3.3. Forskningsetiska aspekter

Vid insamlingen av forskningsmaterial bör man ha i åtanke olika forskningsetiska principer både gällande informanternas rätt till anonymitet och integritet men också gällande forskarens opartiskhet i förhållande till forskningsområdet (Bryman 2012). Forskningsetiska delegationen (2021) har ställt upp centrala utgångspunkter för god forskningsetisk praxis och dem har jag följt i mitt arbete. Då jag i min avhandling gjorde en analys av ett skrivet läromedel behövde jag inte ta ställning till de principer som berör informanter.

Eftersom jag valde att analysera ett läromedel jag själv använt mig av i min undervisning fanns det risk för att min utgångsförståelse av det skulle påverka analysresultaten. Vid genomgången av arbetsområdena var jag därför noggrann med att hålla mig till både de kännetecken på fruktbara problem jag hade valt att använda och de designprinciper som Brehmer (2023) ställt upp för lärarpedagogiska handledningar så att jag gjorde analysen utgående från vad som stod i texten utan att lägga till sådan tolkning jag eventuellt gjort då jag använt materialet i min

undervisning. Varje arbetsområde analyserades alltså mot vart och ett av de sex kännetecknen och de nio underteman jag ställt upp i respektive analyschema.

Fotografiet på elevarbetet, figur 3 s. 34, *Elevens egna uttryck*, har jag använt med såväl elevens som vårdnadshavarnas tillstånd.

I övrigt har jag varit noggrann i valet av bakgrundsforskning och använt mig av material som specifikt anknutit till mitt syfte och mina forskningsfrågor.

4. Resultat

I detta kapitel redogör jag för resultaten av min analys av valda arbetsområden i *Sluta räkna – lärarhandböckerna* utgående från de analyskategorier jag ställt upp tidigare i kapitel 3. Först presenterar jag resultaten för analysen i förhållande till min första forskningsfråga om lärarhandböckerna och undervisning genom problemlösning. Sedan presenterar jag resultaten för analysen i förhållande till min andra forskningsfråga om lärarhandböckerna och lärarpedagogiska handledningar. För enkelhetens skull har jag i kommande avsnitt valt att använda beteckningen SR 1 för *Sluta räkna – börja SE!* och SR 2 för *Sluta räkna – SE mer!*

4.1. Fruktbara problem

Tabell 2 och 3 ger en översikt över hur de olika kategorierna för fruktbara problem gått att identifiera i de analyserade arbetsområdena. Som det framgår av tabell 4 så fyller alla problemen kriterierna för flera kategorier.

Tabell 2*Kategorier för fruktbara problem, åk 1*

AO	1. Är intressanta, fängslande och utmanande på lämplig nivå	2. Har inga uppenbara lösningsstrategier, OEQ, flera svar och/eller strategier	3. Uppmuntrar till elevsamtal, resonemang samt motiverande av lösningar	4. Utvecklar matematiskt tänkande och förmåga att verbalisera det	5. Ger eleverna möjlighet att öva viktiga matematiska färdigheter	6. Ger läraren möjlighet att utvärdera elevernas kunskaper och identifiera svårigheter
Addition						
7	x	x	x	x	x	x
8	x	x	x	x	x	x
13	x	x	x	x	x	x
16	x				x	x
18	x				x	x
20	x	x	x	x	x	x
33	x		x	x	x	x
37	x	x	x	x	x	x
47	x		x	x	x	x
Subtraktion						
14	x		x	x	x	x
20	x	x	x	x	x	x
31	x	x	x	x	x	x
39	x		x	x	x	x
Multiplikation						
47	x		x	x	x	x
51	x	x	x	x	x	x
Division						
20	x	x	x	x	x	x
50			x	x	x	x

I tabell 2 står förkortningen AO för arbetsområden och OEQ för *open ended questions* (öppna frågor).

Tabell 3

Kategorier för fruktbara problem, åk 2

AO	1. Är intressanta, fängslande och utmanande på lämplig nivå	2. Har inga uppenbara lösningsstrategier, OEQ, flera svar och/eller strategier	3. Uppmuntrar till elevsamtal, resonemang samt motiverande av lösningar	4. Utvecklar matematiskt tänkande och förmåga att verbalisera det	5. Ger eleverna möjlighet att öva viktiga matematiska färdigheter	6. Ger läraren möjlighet att utvärdera elevernas kunskande och identifiera svårigheter
Addition						
1	x	x	x	x	x	x
3	x		x	x	x	x
6	x	x	x	x	x	x
13			x	x	x	x
15	x	x	x	x	x	x
28			x	x	x	x
36		x	x	x	x	x
Subtraktion						
7		x	x	x	x	x
22	x	x	x	x	x	x
24			x	x	x	x
26	x	x	x	x	x	x
33				x	x	x
Multiplikation						
12	x	x	x	x	x	x
21	x	x	x	x	x	x
32	x		x	x	x	x
34	x		x	x	x	x
38	x	x	x	x	x	x
44	x	x	x	x	x	x
Division						
17	x		x	x	x	x
20	x		x	x		
30	x	x	x	x	x	x
40	x	x	x	x	x	x
41	x		x	x	x	x

I tabell 3 står förkortningen AO för arbetsområden och OEQ för *open ended questions* (öppna frågor).

Tabell 4

Antalet analyserade AO per bok som fyller kriterier för kategorierna för fruktbara problem

	1. Är intressanta, fängslande och utmanande på lämplig nivå	2. Har inga uppenbara lösningsstrategier, OEQ, flera svar och/eller strategier	3. Uppmuntrar till elevsamtal, resonemang samt motiverande av lösningar	4. Utvecklar matematiskt tänkande och förmåga att verbalisera det	5. Ger eleverna möjlighet att öva viktiga matematiska färdigheter	6. Ger läraren möjlighet att utvärdera elevernas kunskande och identifiera svårigheter
SR 1, 17 AO	16/17	9/17	15/17	15/17	17/17	17/17
SR 2, 23 AO	17/23	13/23	22/23	23/23	22/23	22/23

SR 1 = *Sluta räkna – börja SE!*, SR 2 = *Sluta räkna – SE mer!*

När man granskar tabell 2 och 3 framgår det tydligt att problem har en betydande roll i undervisningen utgående från *Sluta räkna – börja SE!/SE mer!*. Inom så gott som alla arbetsområden arbetar man med någon form av problemställning. De arbetsområden där inga nya problem presenteras handlar till övervägande del om repetition av redan bekant stoff och inkluderar vid behov hänvisningar till frågeställningar i tidigare arbetsområden.

Eftersom det handlar om nybörjarmatematik är problemen vanligen mycket enkla och till stor del anknutna till elevernas vardag eller miljö. De kan bestå av en kort berättelse med ett intressant eller spännande innehåll som mynnar ut i ett matematiskt problem som eleverna sedan får fundera ut lösningar på, enskilt eller i grupp. Flera problem är formulerade som konstateranden med en följdfråga, t.ex. ”Igår räknade jag och hur jag än räknade fick jag svaret 23. Hur tror du jag tänkte?”. På denna typ av öppna frågor finns det obegränsat med svarsmöjligheter, allt från t.ex. $22 + 1$ till $40 \times 40 - 1577$, vilket gör att de fungerar differentierande då de lämpar sig för alla elever oberoende av kunskapsnivå.

För det mesta har de problem som används i de olika arbetsområdena inte en given strategi utan de ger eleverna möjlighet att själva resonera sig fram till hur problemen kunde lösas. Detta gäller speciellt arbetsområden där nytt stoff tas upp. I de arbetsområden där man återknyter till och bygger vidare på tidigare genomgången stoff kan lösningsstrategierna naturligt nog åtminstone till en del vara bekanta men då kan problemens innehåll vara något annorlunda och på det sättet öppna upp för nya sätt att lösa dem. Öppna frågor eller OEQ av olika slag är vanliga. I figur 1 ges exempel på den typ av problem som kan kallas ”ett ska bort” eller ”one odd out”. Alla svar på ett sådant problem är korrekta så länge de kan motiveras logiskt.

Figur 1

SR1, Ett ska bort/vilka tre hör ihop - varför?

11	7
4	3

Talen i denna typ av problem kan varieras utgående från det innehåll man arbetar med. Ovanstående ruta kan användas vid arbetet med t.ex. addition och subtraktion och sambandet mellan dem eller jämna och udda tal.

I både SR 1 och SR 2 betonas vikten av att eleverna blir vana vid att tänka ut och diskutera fram olika lösningsmodeller och strategier samt lär sig att motivera sina svar medan mindre uppmärksamhet läggs vid själva räknandet. Ofta avslutas problemen med frågor som ”hur tror du att...?” eller ”hur kunde jag ha tänkt?”, eventuellt följt av ett ”varför”, för att ge eleverna möjlighet att svara och förklara sitt tänkande utan rädsla för att svara fel. Då ett arbetsområdes problem presenterats får läraren sedan i den löpande texten handledning i på vilket sätt diskussionen kan föras vidare och hur eleverna kan motiveras att delta i den. Det kan röra sig om direkt utskrivna följdfrågor läraren kan ställa eller om mera allmänt skrivna förklaringar om t.ex. matematisk kontext som hjälper läraren att själv formulera lämpliga följdfrågor. Som framgår av kategori 3 i tabell 2 och 3 ges läraren detta stöd i snart sagt varje analyserat arbetsområde. Detta är väsentligt eftersom en central del av undervisningen genom problemlösning är att eleverna genom samtal och diskussioner ska komma fram till olika lösningsmodeller. I tidigare nämnda ”en ska bort” (figur 1) kan ett elevsvar vara att 11 ska bort med motiveringen att ”jag är 7 år gammal och mina syskon är 4 och 3” vilket är ett godkänt svar eftersom motiveringen är logisk/korrekt även om den inte är matematisk. När eleverna blir vanare med arbetssättet uppmuntras de att motivera sina svar matematiskt och kan då svara t.ex. att 3 ska bort för att $4 + 7 = 11$.

Problemen som används i böckerna har ofta anknytning till elevernas egen vardag och verklighet vilket kan bidra till att eleverna upplever att det lönar sig att försöka lösa dem. De är valda så att de ska rikta in elevsamtalen mot upptäckandet av för stoffet lämpliga strategier och eleverna ges möjlighet att enskilt eller tillsammans resonera sig fram till tänkbara lösningar på dem. Dessa gemensamma diskussioner av olika lösningsmöjligheter stöder utvecklandet av matematiskt tänkande och eleverna får övning i att formulera och uttrycka sina tankar. Följande OEQ är exempel på ett vardagsproblem som kan leda till mångsidiga matematiska resonemang och upptäckter.

I går hade jag en väldig otur. Jag hade köpt 10 stycken Ploppchoklad som jag skulle njuta av när jag skulle titta på en film. Precis när jag skulle sätta mig i fåtöljen tappade jag skålen med godiset. Alla chokladen flög ut på golvet och hamnade under soffan och

under bordet. Hur många kan ha hamnat under bordet och hur många ligger då under soffan? (SR 1, AO 23)

Genom diskussionen kring hur godiset kunde ha hamnat under bord och soffa upptäcks 10-kamraterna. Vid behov kan eleverna använda sig av laborativt material som stöd för tänkandet. Läraren kan sedan ställa följdfrågor som ”på hur många olika sätt kan godisarna ha lagt sig?” och ”hur kan man vara säker på att man har hittat alla sätt?” för att föra upptäckandet och tänkandet vidare. Sedan kan läraren bygga på med att fråga eleverna hur det kunde bli ifall det funnits 11 eller 12 godisar i skålen. Detta kan öppna upp för eleverna att upptäcka att det i matematiken går att generalisera mönster, t.ex. genom detta problem upptäcka att möjligheterna för godisarna att gruppera sig är en fler än antalet godisar, alltså $n+1$, och stöder så utvecklandet av elevernas matematiska tänkande.

I så gott som varje arbetsområde bereds eleverna möjlighet att på olika sätt öva och befästa matematiska färdigheter. T.ex. kan det vara fråga om att ur ett talmoln välja tal som eleven tycker hör ihop på ett eller annat sätt, motivera sitt val och skriva det på matematikspråk i sin bok (figur 2 och 3). Genom en sådan uppgift övar sig eleven att se samband, välja räknesätt, skapa uttryck, motivera sitt val, öva sifferskrivning, räkna ut svar m.m.

Figur 2

Talmoln, SR 2, AO1



Figur 3

Elevens egna uttryck

$5 - 2 = 3$	$20 - 14 = 6$
$2 + 3 = 5$	$11 - 4 = 7$
$5 - 3 = 2$	$2 \cdot 3 = 6$
$3 + 2 = 5$	$7 \cdot 2 = 14$
$3 \cdot 2 = 6$	$2 \cdot 9 = 18$
$6 \cdot 2 = 12$	$6 \cdot 2 = 12 + 1$
$1 + 2 = 2$	$7 + 6 = 12 + 1$
$7 + 4 = 11$	
$11 + 9 = 20$	

Eftersom undervisningen dels består av diskussioner kring olika sätt att lösa givna problem och dels av att eleverna arbetar fram sina egna böcker har läraren en god möjlighet att följa med hur den enskilda elevens både tänkande och kunnande utvecklas vilket författaren konstaterar i SR 2 AO 31. Vid diskussionerna kring de olika problemen kan svaren variera mycket när det gäller svårighetsgrad vilket ger läraren en god uppfattning om vilka elever som har mera grundläggande räknefärdigheter och vilka som t.ex. klarar av att skapa uttryck som innehåller flera räknesätt. På samma sätt får läraren en bild av elevernas kunnande genom att följa med hur eleverna i sina böcker arbetar med problemen.

4.2. Designprinciper för lärarpedagogiska lärarhandledningar

I tabellerna 5 – 10 framgår i vilka arbetsområden de tre designprincipernas underteman gått att identifiera.

4.2.1. Designprincipen Ämneskunskap

Designprincipen Ämneskunskap lyfter fram vad som är viktigt att beakta i en lärarpedagogisk lärarhandledning med tanke på den djupare kunskap om ämnet läraren förväntas ha eller tillägna sig för att kunna bygga upp undervisningen på ett ändamålsenligt och fungerande sätt. I tabellerna 5 och 6 framgår i vilka arbetsområden designprincipens underteman är synliggjorda.

Tabell 5*Designprincipen Ämneskunskap med underteman, SR 1*

AO Åk 1	Ämneskunskap		
	Matematiska begrepp	Matematiska strategier	Visualisering som förklaring
Addition			
7	x		x
8	x	x	x
13	x	x	x
16			x
18	x	x	x
20	x	x	x
33	x	x	x
37	x	x	x
47	x	x	x
Subtraktion			
14	x	x	x
20	x	x	x
31	x	x	x
39		x	x
Multiplikation			
47	x	x	x
51			x
Division			
20	x	x	x
50			x

Tabell 6*Designprincipen Ämneskunskap med underteman, SR 2*

AO Åk 2	Ämneskunskap		
	Matematiska begrepp	Matematiska strategier	Visualisering som förklaring
Addition			
1			x
3	x	x	x
6	x		x
13	x	x	x
15	x	x	
28		x	x
36		x	x
Subtraktion			
7		x	x
22		x	x
24		x	x
26	x	x	x
33	x	x	x
Multiplikation			
12		x	x
21		x	x
32	x		x
34			x
38			x
44			x
Division			
17	x		x
20	x		x
30			x
40			x
41	x		x

I SR 1 beskrivs matematiska begrepp i 14 arbetsområden av 17 och i SR 2 i 10 av 23. Begreppsbeskrivningarna och genomgången av den bakomliggande matematiken presenteras inte utskrivna t.ex. i specifika rutor för varje arbetsområde utan är vanligen invävda i texten där begreppet aktualiseras i den berättande lektionsbeskrivningen. Begreppen innebörd förklaras dock tydligt och vikten av att både läraren och eleverna har en rätt förståelse av dem med tanke på framtida bruk betonas.

I figur 4, tagen ur SR 2, presenteras några olika strategier för lösandet av additionen $21+13$. Motsvarande strategitabeller förekommer i ett flertal arbetsområden för både additions- och subtraktionsstrategier. I samband med tabellerna förklaras bakgrunden till strategierna och även hur läraren ska gå till väga vid arbetet med sådana uppgifter så att eleverna lär sig både att tänka matematiskt och att verbalisera och skriva ner sitt tänkande.

Figur 4*Additionsstrategier, SR 2 AO 13, s. 55*

21 + 13	
1+3+20+10	Entalen först
21+3+10	Entalen först
21+10+3	Tiotalen först
21+1+1+1+10	Se upp – fingerräknare!
13+20+1	Räknar upp
20+10+1+3	Tiotalen först
34	”SER” – Eleven måste förklara hur den ser

Olika former av bilder förekommer i alla analyserade arbetsområden i SR 1 och i SR 2 är det endast ett arbetsområde där det inte ingår någon bild. Största delen av bilderna är fotografier som illustrerar och förtydligar instruktioner som finns i texten. De visar hur materialet som hör till arbetsområdet kan användas av läraren för att t.ex. för eleverna visualisera matematiska frågeställningar som aktualiseras i det problem som presenteras i arbetsområdet.

4.2.2. Designprincipen Elevkunskap

Designprincipen Elevkunskap lyfter fram vad som är viktigt att beakta i en lärarpedagogisk lärarhandledning med tanke på vad läraren behöver känna till om elever och utmaningar dessa kan tänkas ha för att kunna identifiera och eventuellt förebygga svårigheter av olika slag. I tabellerna 7 och 8 framgår i vilka arbetsområden designprincipens underteman är synliggjorda.

Tabell 7*Designprincipen Elevkunskap med underteman, SR 1*

AO Åk 1	Elevkunskap		
	Vanliga svårigheter	Vanliga elevstrategier	Differentiering
Addition			
7			
8			x
13			x
16			x
18			x
20		x	x
33	x	x	x
37			x
47			
Subtraktion			
14			
20		x	x
31	x		x
39	x		x
Multiplikation			
47			
51			
Division			
20		x	
50			

Tabell 8*Designprincipen Elevkunskap med underteman, SR 2*

AO Åk 2	Elevkunskap		
	Vanliga svårigheter	Vanliga elevstrategier	Differentiering
Addition			
1			x
3			x
6			x
13	x	x	x
15			
28	x	x	
36		x	x
Subtraktion			
7	x		
22		x	x
24		x	
26	x		
33	x	x	
Multiplikation			
12	x	x	x
21			x
32			x
34			
38			x
44			x
Division			
17		x	x
20			
30		x	x
40			
41			

Eftersom SR 1 och SR 2 är skrivna för nybörjarundervisningen betonas vikten av att eleverna från början lär sig ändamålsenliga strategier och lösningsmodeller för att minska risken för matematiksvårigheter i framtiden. Olika svårigheter som trots detta kan förekomma beskrivs, t.ex. förklaras vad s.k. fingerräkning hos nybörjare kan bero på och hur man kan arbeta för att stärka elevens taluppfattning och så befästa andra hållbarare räknestrategier. Genom sådana beskrivningar får läraren insyn i vilka typer av feluppfattningar som kan förekomma och vad man kan göra för att rätta till dem.

I några arbetsområden tas i samband med beskrivningen av lektionsgången upp sådana strategier och förklaringsmodeller som på sikt kan förorsaka utmaningar för eleverna och deras matematiska kunnande samt olika sätt att förebygga eller korrigera dylika missuppfattningar. När det t.ex. gäller multiplikation och den djupare matematiken bakom räknesättet får läraren handledning i att förstå hurdana strategier som fungerar på sikt och vad det gäller att se upp med så inte det inte skapas missuppfattningar hos eleverna. Dylika instruktioner förekommer

dock rätt sparsamt i böckerna men de är till hjälp för läraren då det gäller att förstå och lägga märke till hurdana mindre fungerande eller helt felaktiga strategier eleverna kan tänkas använda sig av. Som exempel på ickefungerande räknestrategier kan nämnas fingerräkning som tas upp bl.a. i SR 1, AO 33 samt SR 2, AO 7 och 13. I arbetsområdena ges sedan instruktioner för hur man kan arbeta med elever som fingerräknar för att de ska utveckla sin förståelse och sin förmåga att se svaren.

Som tidigare nämnts är utgångspunkten för SR 1 och SR 2 att materialet kan användas med alla elever oberoende av kunskapsnivå (U. Öberg, förord till SR 1). De problem och uppgifter som används i undervisningen utgörs ofta av öppna frågor där det finns många lösningsmöjligheter eller uppgifter där eleverna själva kan välja hurdana tal de arbetar med. Dessa typer av uppgifter fungerar självdifferentierande eftersom säkra och vana räknare kan utmana sig genom att t.ex. välja stora tal för sina additionsuttryck medan elever som inte har lika starka matematiska färdigheter kan arbeta med mindre tal och enklare uttryck. I texten beskrivs olika sätt läraren kan differentiera uppgifter på, t.ex. kan läraren vid övandet av tiokamrater åt osäkrare elever "ge" ett heltal som eleven ska kunna tiokamraten till och åt säkrare elever ett tal i bråk- eller decimalform.

4.2.3. Designprincipen Undervisningskunskap

Designprincipen Undervisningskunskap lyfter fram vad som är viktigt att beakta i en lärarpedagogisk lärarhandledning med tanke på lärarens kunskap om bakomliggande matematiska resonemang samt syfte och mål för undervisningen så att undervisningen blir målinriktad och tydlig för eleverna. I tabellerna 9 och 10 framgår i vilka arbetsområden designprincipens underteman är synliggjorda.

Tabell 9*Designprincipen Undervisningskunskap med underteman, SR 1*

AO Åk 1	Undervisningskunskap		
	Mål och syfte för lektionen	Förklaringsmodeller	Sammanfattning
Addition			
7	x/s	x	
8	x/s		
13	x/s	x	
16	x		x
18	x		
20	x/s	x	
33	x/s		
37	x/s		
47	x/s		
Subtraktion			
14	x	x	
20	x/s	x	
31	x	x	x
39	x	x	
Multiplikation			
47	x/s		
51	x/s		
Division			
20	x		
50	x		

I tabell 9 står x för målformulering och s för att det även finns ett identifierbart övergripande syfte.

Tabell 10*Designprincipen Undervisningskunskap med underteman, SR 2*

AO Åk 2	Undervisningskunskap		
	Mål och syfte för lektionen	Förklaringsmodeller	Sammanfattning
Addition			
1	x		
3	x		
6	x		
13	x	x	
15	x/s		
28	x		
36	x	x	
Subtraktion			
7	x		
22	x		
24	x		
26	x/s	x	
33	x	x	
Multiplikation			
12	x/s	x	
21	x		x
32	x/s		x
34	x		
38	x		
44	x/s		
Division			
17	x		
20	x/s		
30	x		
40	x/s		
41	x/s		

I tabell 10 står x för målformulering och s för att det även finns ett identifierbart övergripande syfte.

I både SR 1 och SR 2 finns det i inledningen till varje arbetsområde en ruta där målet för arbetsområdet är beskrivet. Målen är för det mesta kortfattade och formulerade så att det går att utvärdera om de nåtts under lektionerna. I en del av rutorna finns även ett mera övergripande syfte för arbetsområdet angett.

De arbetsområden i vilka olika förklaringsmodeller presenteras är, som det framgår ur tabellerna 9 och 10, totalt endast 12 till antalet. Av dessa 12 behandlar hälften subtraktion, det räkneseätt som författaren nämner att eleverna brukar uppleva varasvårt (SR 1 AO 14). Genomgången av förklaringsmodellerna ger läraren en bredare förståelse för hur dessa fungerar och varför det är viktigt på sikt att eleverna utvecklar sin matematiska förståelse. Som exempel kan nämnas förklaringsmodellen för de fyra räknehändelserna i subtraktion (SR 2, AO26, att minska, att jämföra, att dela upp och att fylla upp) som dels belyser vad räknehändelserna

innebär matematiskt och dels visar på vilka framtida utmaningar som kan uppstå om eleven inte förstår tänkandet bakom dem.

Generellt betonas i böckerna vikten av att i slutet av lektionen föra en avslutande eller sammanfattande genomgång av det man arbetat med under lektionen (t.ex. SR 1, AO 8). Vid den gemensamma genomgången får eleverna under lärarens ledning presentera sina lösningar och motiveringar till dessa. Sådana instruktioner som designprincipen lyfter fram för hur sammanfattande diskussioner kunde byggas upp och genomföras förekommer däremot inte entydigt formulerade.

5. Diskussion och slutsatser

I detta kapitel diskuteras resultatet i förhållande till avhandlingens syfte och forskningsfrågor mot bakgrund av teori och tidigare forskning samt vilka slutsatser man kan dra av analysen. Även metoden diskuteras och till sist framförs tankar om vidare forskning.

5.1. Resultatdiskussion

I denna avhandling har jag analyserat lärarhandböckerna *Sluta räkna – börja SE!/SE mer!* för att få svar på om de kan användas vid matematikundervisning genom problemlösning samt om de uppfyller de förväntningar som enligt Brehmer (2023) kan ställas på lärarpedagogiska lärarhandledningar.

För min första forskningsfråga har jag tagit fram 6 kategorier för fruktbara problem och analyserat de valda arbetsområdena ur lärarhandböckerna mot dem. Resultatet av analysen visar att de problem och uppgifter som används i SR 1 och SR 2 till största del faller inom en eller flera av kategorierna vilket framgår ur tabell 4. Många problem är uppbyggda så att de kan ha flera lösningar (figur 1), de är formulerade så att eleverna oberoende av kunskapsnivå kan komma fram till lösningar (figur 2 och 3) och de är motiverande att arbeta med då de är vardagsnära och kopplade till situationer eleverna kan relatera till (godisexemplet på s. 33). Detta är i linje med de kännetecken på fruktbara problem som forskning på området lyfter fram, bl.a. att problemen ska vara uppbyggda så att det inte finns några uppenbara lösningsstrategier (Rodley & Bailey, 2021), de ska innehålla utmaningar på för målgruppen lämplig nivå och inspirera eleverna att arbeta med dem så att elevernas matematiska tänkande utvecklas (Cai & Hwang, 2023). Problemen i böckerna är omväxlande till sin utformning och sträcker sig innehållsmässigt från enkla vardagssituationer till fantasifulla berättelser som utmynnar i problemställningar som är kopplade till det aktuella stoffet. I och med de ofta öppna frågorna är materialet automatiskt differentierande då eleverna ges möjlighet att lösa dem på sin egen nivå vilket kan bidra till intresse för ämnet. Något som genomgående betonas är att eleverna systematiskt ska öva sig i att både verbalisera sitt tänkande och motivera sina lösningar vilket även Cai och Hwang (2023) lyfter fram som centralt i undervisning genom problemlösning. Det är också viktigt att eleverna lär sig att kunna formulera tänkandet matematiskt, d.v.s. skriva det som uttryck. I slutet av böckerna ingår en del kopieringsunderlag som stöd för elevernas

arbete. Det som inte finns är färdigt utarbetat utvärderingsmaterial men eftersom eleverna själva arbetar fram sina böcker och så dokumenterar sitt lärande och läraren aktivt tar del i och följer med elevarbetet under lektionerna torde läraren ha goda möjligheter att bilda sig en uppfattning om elevernas kunnande. Dessutom kan vid behov bekanta problem och öppna frågor omarbetas och användas för utvärdering.

För att få svar på min andra forskningsfråga använde jag mig av de tre designprinciper som enligt Brehmer (2023) kännetecknar en lärarpedagogisk lärarhandledning. Vid analysen kunde jag konstatera att böckerna inte till det yttre är uppbyggda enligt den struktur som Brehmer (2023) föreslår med rubriker för varje princip och dess underteman. I stället skriver författaren berättande vilket för med sig att underteman kan gå in i varandra och så vara mera utmanande att identifiera. Trots det framkommer det tydligt att alla tre designprinciper i högre eller lägre grad förekommer i böckerna. Designprincipen Ämneskunskap ses tydligt i så gott som alla arbetsområden i SR 1 och i de flesta i SR 2 medan designprinciperna Elevkunskap och Undervisningskunskap inte går att identifiera i motsvarande grad. Ett undantag utgör dock undertemat Mål och syfte för lektionen som ingår i varje arbetsområde. Böckerna fungerar väl som stöd i lärarens planering och genomförande av undervisningen genom att bl.a. förklara de större matematiska sammanhang stoffet är en del av, visa på vad som är viktigt att känna till när det gäller elevernas sätt att tänka och resonera samt hur olika typer av problem och uppgifter kan användas för att alla elever ska kunna utveckla sitt matematiska tänkande och sin förståelse för ämnet. I förordet till SR 1 skriver författaren att hon inte i sina böcker delar ut recept på hur undervisningen ska byggas upp och genomföras utan vill utbilda kockar som kan göra egna recept och variera dem utgående från de behov varje undervisningsgrupp har.

Något som kan nämnas både som en styrka och en utmaning med böckerna är att ett och samma matematiska tema, t.ex. addition, är uppdelat och utspritt under läsåret. Det betyder att man i undervisningen regelbundet återkommer till temat vilket kan vara till nytta för eleverna då temat på detta sätt hålls aktuellt under hela året. För läraren kan det vara utmanande att växla mellan teman eftersom det gäller att både vara inläst på hela årsstoffet för att ha en helhetsbild av alla olika delområden och att kunna återkoppla till tidigare arbetsområden inom temat. Som ovan nämnts kan utvärderingen av elevernas kunskaper upplevas utmanande för läraren eftersom det inte finns några traditionella prov att använda sig av. Läraren är därför beroende av möjligheterna att följa med de enskilda eleverna och deras aktivitet under lektionerna samt av det arbete eleverna gör i böckerna de framställer.

Sammanfattningsvis kan konstateras att eftersom problemen i de analyserade arbetsområdena uppfyller de kriterier som uppställts för kategorierna för fruktbara problem blir slutsatsen av läromedelsanalysen att lärarhandböckerna *Sluta räkna – börja SE!/SE mer!* lämpar sig för undervisning genom problemlösning. Betoningen i böckerna ligger på att eleverna genom att enskilt och tillsammans arbeta med fruktbara problem ska utveckla sitt matematiska tänkande och fördjupa sin förståelse för matematik över lag. Också de designprinciper för lärarpedagogiska lärarhandledningar Brehmer (2023) ställer upp går att identifiera även om böckerna inte är utformade så strukturerat som Brehmer förespråkar. Böckerna fungerar därmed rätt långt så som lärarpedagogiska lärarhandledningar är tänkta att fungera och ger behövligt stöd och handledning åt lärare som är intresserade av att helt eller delvis övergå till att undervisa matematik genom problemlösning.

Efter att i några års tid arbetat utgående från SR 1 och SR 2 kan jag konstatera att det är ett givande om än på flera sätt krävande sätt att undervisa matematik. Även om jag även tidigare väl klarat av lågstadiematematiken har mina egna insikter i ämnet har fördjupats och jag har lärt mig nya metoder för att hjälpa eleverna till en större matematisk förståelse. Det som kanske har krävt mest arbete har varit att sätta mig in i arbetssättet så väl att undervisningen har löpt, att jag kunnat motivera även mindre aktiva elever att delta samt att kunna följa med de enskilda elevernas arbete och hur de gått framåt i sitt ämneskunnande. Elevernas inställning till ämnet har över lag varit mera positiv än jag tyckt den vara i klasser där jag undervisat på traditionellt sätt. Delvis kan detta bero på att jag själv upplevt detta sätt att undervisa mera motiverande än traditionell undervisning. Jag tror dock att många elever, oberoende av kunskapsnivå, har tyckt det varit roligt att själva få arbeta sig fram till matematiskt tänkande och fungerande strategier. Speciellt elever som upplever bokmatte som tråkig har uppskattat utmaningarna den här typen av undervisning erbjuder. Jag har även tyckt mig märka nyttan av en ökad förmåga att tänka och resonera bl.a. i elevernas uppställande av hypoteser vid utförandet av enkla experiment inom omgivningsläran. Det verkar alltså som om denna typ av matematikundervisning stöder elevarbetet även i andra ämnen.

5.2. Metoddiskussion

Då syftet med avhandlingen var att analysera ett läromedel fungerade den valda metoden som förväntat. Avgränsningen av kunde ha varit annorlunda då analys av arbetsområden som

behandlar t.ex. mätning, taluppfattning eller tallinjen eventuellt ännu bättre hade belyst upplägget i lärarhandböckerna. En utmaning med själva analysarbetet var att ur texterna identifiera kategorierna för speciellt de olika designprincipernas underteman men även till en del kännetecknen på fruktbara problem. Detta berodde på att texterna i huvudsak är skrivna i mera berättande form än som direkta faktatexter samt att uppläggningsen av arbetsområdena inte följer någon given struktur. Samtidigt som min förförståelse av materialet kunde utgöra en risk för att jag skulle söka sådant i texterna som stöder min egen uppfattning om materialets användbarhet var den i detta fall till stöd då det gällde att ibland läsa mellan raderna för att kunna avgöra om det i arbetsområdenas texter ingick material som svarar mot kategorierna och designprinciperna. För att ändå hålla mig objektiv återgick jag flera gånger till texterna för att kontrollera att jag höll mig till det som gick att utläsa ur dem.

5.3. Förslag på fortsatt forskning

I lärarhandboksserien ingår för nuvarande böcker för åk 1–3 och ett material för åk 4–6 är under arbete. I Sverige har ett rätt stort antal lärare sedan hösten 2020 arbetat med materialet och flera lärare har följt sina klasser under tre år. Att undersöka hur elever som redan från åk 1 i matematik undervisats genom problemlösning klarar sig i jämförelse med elever som undervisats traditionellt skulle ge värdefull information om huruvida detta sätt att ta sig an matematikundervisningen kunde bidra till att vända den i både Finland och Sverige nedåtgående trenden gällande matematikfärdigheter. Det skulle även vara intressant att undersöka om de färdigheter att verbalisera sitt tänkande och argumentera för sina slutsatser eleverna utvecklar genom problemlösning överförs till andra ämnen, t.ex. omgivningslära och modersmål.

Referenser

- Ahonen, A. K. (2020). Finland: Success Through Equity - The Trajectories in PISA Performance. I Crato, N. (Red.), *Improving a Country's Education PISA 2018 Results in 10 Countries* (s. 122–136). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-59031-4_6
- Ammert, N. (2011). Inledning. I Ammert, N. (red.), *Att spegla världen. Läromedelsstudier i teori och praktik* (s. 17–22). Studentlitteratur.
- Andrews, P., Ryve, A., Hemmi, K. & Sayers, J. (2014). PISA, TIMSS and Finnish mathematics teaching: an enigma in search of an explanation. *Educational Studies in Mathematics*, 87, 7–26. <https://doi-org.ezproxy.vasa.abo.fi/10.1007/s10649-014-9545-3>
- Ball, D. L., Cohen, D. K. (1996). Reform by the Book: What Is: Or Might Be: The Role of Curriculum Materials in Teacher Learning and Instructional Reform? *Educational Researcher*, 25(9), 6–8+14. <https://doi.org/10.3102/0013189X025009006>
- Brehmer, D. (2023). *Lärare lär av läromedel*. Studentlitteratur.
- Bruder, R. (2016). Role of heuristics for Problem Solving. I Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina U. & Bruder, R. (Red.). *Problem solving in mathematics education* (s. 2–6). Springer Open. DOI 10.1007/978-3-319-40730-2
- Bryman, A. (2012). *Social research methods*. Oxford University Press Inc.
- Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. I Lester, F. (Red), *Research and issues in teaching mathematics through problem solving*. National Council of Teachers of Mathematics. <http://howtosolveit.pbworks.com/w/file/fetch/90466091/teaching+math+through+problem+solving.pdf>

- Cai, J. & Hwang, S. (2023). Making mathematics challenging through problem posing in the classroom. I Leikin R. (Red), *Mathematical challenges for all* (s. 115–145). Springer International Publishing AG. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8>
- Davis, E. A., & Krajcik, J. S. (2005). Designing Educative Curriculum Materials to Promote Teacher Learning. *Educational Researcher*, 34(3), 3–14. <https://doi-org.ezproxy.vasa.abo.fi/10.3102/0013189X034003003>
- Englund, B. (2011). Vad gör läroböcker? I Ammert, N. (Red.), *Att spegla världen. Läromedelsstudier i teori och praktik* (s. 279–294). Studentlitteratur.
- Forskningsetiska delegationen. (2012). *God vetenskaplig praxis och handläggning av misstankar om avvikelser från den i Finland*. https://tenk.fi/sites/tenk.fi/files/HTK_ohje_2012.pdf
- Hiltunen, J., Ahonen, A., Hienonen, N., Kauppinen, H., Kotila, J., Lehtola, P., Leino, K., Lintuvuori, M., Nissinen, K., Puhakka, E., Sirén, M., Vainikainen, M-P., Vettenranta, J. (2023). *PISA 2022 ensituloksia*. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2023:49. <https://urn.fi/URN:ISBN:978-952-263-949-3>
- Hemmi, K., Krzywacki, H. & Koljonen, T. (2018). Investigating Finnish Teacher Guides as a Resource for Mathematics Teaching. *Scandinavian Journal och Educational Research*, 62(6), 911–928. <https://doi.org/10.1080/00313831.2017.1307278>
- Larsson, M. & Ryve, A. (2018). Matematiklärarens roll i strukturerade problemlösningssamtal. I O. Helenius & M. Johansson (Red.). *Att bli lärare i matematik*, 1, (s. 29–58). Liber.
- Liljedahl, P. (2016). Creative problem solving. I Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina U. & Bruder, R. (Red.). *Problem solving in mathematics education* (s. 6–19). Springer Open. DOI 10.1007/978-3-319-40730-2

- Metsämuuronen, J. (Red.), 2013. *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012*. Koulutuksen seurantaraportti 2013:4. Helsinki: Opetushallitus.
https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/150841_perusopetuksen_matematiikan_oppimistulosten_pitkittaisarviointi_vuosina_20051.pdf
- Nationalencyklopedin, (u.å.). Läromedel, hämtad 9 december 2023 från
<http://www.ne.se.ezproxy.vasa.abo.fi/uppslagsverk/encyklopedi/lang/laromedel>
- Phillips, E. (1998). Developing a coherent and focused K-12 algebra curriculum. I *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum : Proceedings of a National Symposium* (s. 27–29). <https://ebookcentral-proquest-com.ezproxy.vasa.abo.fi/lib/abo-ebooks/reader.action?docID=3375702&ppg=13>
- Pehkonen, E., Näveri, L., Laine, A. (2013). On Teaching Problem Solving in School Mathematics. *Center for Educational Policy Studies Journal*, 3(4), 9–23.
<https://doi.org/10.25656/01:8498>
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
https://books.google.fi/books?hl=sv&lr=&id=z_hsbu9kyQQC&oi=fnd&pg=PP2&dq=george+polya&ots=o_iFUknVRa&sig=-u2SmiW37BqAk62A_BaBLnPqAZY&redir_esc=y#v=onepage&q=george%20polya&f=false
- Pólya, G. (1963). On Learning, Teaching and Learning Teaching. *The American Mathematical Monthly*, 70(6), 605–619. <https://doi.org/10.2307/2311629>
- Rodley, H. & Bailey, J. (2021). The challenge of teaching children mathematics through meaningful problem solving. *NZCER journal*, 1, 43–51
<https://doi.org/10.18296/set.0195>

- Sollerman, S. (2019). *Kan man räkna med PISA och TIMSS? Relevansen hos internationella storskaliga mätningar i matematik i en nationell kontext* [Doktorsavhandling, Stockholms universitet]. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1304859/FULLTEXT01.pdf>
- Stein, M. K., Boaler, J. & Silver, E. A. (2003). Teaching Mathematics through problem solving: Reserach Perspectives. I Schoen, H. L. & Charles, R. I. (Red). *Teaching Mathematics through problem solving: Grades 6-12* (s. 245–256). National Council of Teachers of Mathematics.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340.
DOI:[10.1080/10986060802229675](https://doi.org/10.1080/10986060802229675)
- Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande*. [Doktorsavhandling, Umeå universitet]. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:140830/FULLTEXT01.pdf>
- Utbildningsstyrelsen. (2014). *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen 2014*.
https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/grunderna_for_laroplanen_for_den_grundlaggande_utbildningen_2014.pdf