OPPIKIRJA

ANALYTILLISESSÄ GEOMETRIASSA.

KIRJOITTANUT

L. LINDELÖF.

Suomennos.

HELSINGISSÄ 1876.

Hinta: 5 markkaa.

Suomalaisen

Kirjallisuuden Seuran

Toimituksia.

52 Osa.

HELSINGISSÄ,
Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran kirjapainossa,
1876.

OPPIKIRJA

ANALYTILLISESSÄ GEOMETRIASSA.

Kirjoittanut

L. LINDELÖF.

Suomentanut

K. SUOMALAINEN,
Fil. maist.

HELSINGISSÄ,

Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran kirjapainossa,

1876.

Sisällys.

Edellinen Osa. Tasannes-Geometria.

Tekijän esipuhe.

(1864).

Niin sanottu analytillinen geometria on osa matematiikasta, jonka alalle on vaikea tieteelliseltä kannalta määrätä rajoja; sillä milt'ei jok'ainoata analysin haaraa käy sovittaminen geometriaan, ja näiden sovittamisten täydellinen esittäminen olisi siis lähipitäin koko matematiikan esittämistä.

Tämä oppikirja ei suinkaan pyrji semmoiseen täydellisyyteen, jota sitä paitsi on mahdoton saavuttaakin; sen määränä on vain esittää alemman analysin, algebran, käyttämistä viivain ja pintain tutkimisessa. Se jakaantuu kahteen osaan: tasannes-geometria ja avaruuden geometria, joista edellinen käsittelee paraasta päästä koonillisia leikkauksia sekä muutamia korkeampi-asteisia viivoja, jälkimmäinen taas sisältää opin avaruus-suorista sekä pinnoista, joiden yhtälöt ovat yksi- tai kaksi-asteisia. Metodeista ja teorioista, jotka ovat omituisia uudemmassa geometriassa, on tek. katsonut sopivaksi tässä esittää lyhennetyn merkitystavan yhtälöille, joten muutamat tutkimukset käyvät paljoa selvemmiksi, sekä tuon monessa katsannossa huvittavan opin kaksi-asteisten viivain ja pintain n. s. harmonillisista ominaisuuksista.

Teos on suunnitettu siten, että yksityisistä, vasta-alkajalle helpommin käsitettävistä, teorioista on vähitellen siirrytty yleisiin ja ennemmin abstraktisiin. Senpä vuoksi selitetään ensin edellisessä osassa ellipsi, hyperbola ja parabola kukin itsekseen, ennenkuin ryhdytään tutkimaan koonillisia leikkauksia yleensä; samoin on jälkimmäisessä osassa, ennen kaksi-asteisten pintain teoriaa, tutkittu tähän ryhmään kuuluvat eri muodot.

Täten suunnitettuna ja tarkoittaen helpoitusta tutkimisessa kuin myös kaikkien tähän kuuluvain kysymysten ratkaisemisen suhteen pelkän algebran avulla, sekoittamatta siihen ollenkaan korkeampaa analysiä, eroaa tämä kirja paljonkin Briot'in ja Bouquet'in, Fort'in ja Schlömilch'in y. m. teoksista, joita nykyjään yleensä käytetään oppikirjoina, vaikka tek. mielellänsä tunnustaa muutamissa kohdin käyttäneensä hyödyksi mainittuja kirjoja kuin myös niitä klassillisia teoksia, joilla Hesse ja Salmon nykyjään ovat rikastuttaneet matematillista kirjallisuutta.

Suomentajan alku-sananen.

Mitä suomalaisten oppisanain tuntemiseen tulee, on suomentaja koettanut noudattaa kahta sääntöä: 1:o) välttää liiallista purismia, s. o. suomentaa ainoastaan tavallisimmat tiedesanat, ja 2:o) muukalaisia oppisanoja käytettäessä liittää runkoon suomalainen pääte. Siitä syystä ei ole käytetty muukalaisia verbejäkään päätteillä -eeraan, vaan on pääte -oin, -oida liitetty runkaan: eliminoin, -ida; projicioin, -oida (= eliminer, projicier); samasta syystä on kirjoitettu origini eikä origo; termini eikä termi; diametri eikä diameteri. Taivutuksen täydellisyyden vuoksi on aina suomalainen adjektivin pääte liitetty muukalaiseen runkoon; niinpä polaarinen eikä polaari-, transcendenttinen y. m.

Muutamia epäjohtoisuuksia on valitettavasti ilmaunut. Niinpä on kirjan ensimmäisissä arkeissa viljelty sanaa konjugaatinen, vaikka se sittemmin pitkin matkaa ilmautuu suomalaisessa muodossa: liittolainen; samoin yhdensivuinen, yhdenkylkinen välistä pro tasasivuinen, tasakylkinen.

Sanat suora ja käyrä ovat mielestäni varsin sievät ja sopivat käyttää substantiveina, merkiten siis: suora viiva, käyrä viiva (tietysti missä vaan ei erehdystä siten synny); samoinhan muissakin kielissä: la droite, die Gerade.

Kiitollisuudella olen vastaanottava asiantuntevain muistutukset suomennostani vastaan, joka, esikoisena uudella uralla, arvattavasti ei ole saattanut vielä kaikkia täysikasvuisen tehtäviä täyttää.

Lopuksi pyydän saada kantaa sulimmat kiitokset herra ylitirehtörille, valtioneuvos L. L. Lindelöf'ille joka hyväntahtoisilla neuvoillansa suurissa määrin on työtäni helpottanut.

Helsingissä, Heinäkuussa 1876.

Suomentaja.

SUOMALAIS-MUUKALAINEN SANALUETTELO.

A.

Aatteinen, ideell, imaginär.
Abscissa, abskissa.
Abstraktinen, abstrakt.
Akseli, axel.
iso-akseli. (gen. iso-akselin j. n. e.) = större axel.
vähä-akseli, (gen. vähä-akselin j. n. e.) = mindre axel.
Aksentti, accent.
Analogia, analogi.
analogillinen, analogisk.
Analysi, analys.
analytillinen, analytisk.
Arvokerta, dignitet.
Asema, bas.
Aste, grad.
yksi-, kaksi-asteinen, af första, andra graden.
Asymptooti, asymptot.
asymptooti-kooni = a.kon.

B.

Binomi, binom.

C.

Centraali-akseli, central-axel.
centraali-taso, c.-plan.
Cosecantti, cosecant.
Cosini, cosinus.
Cotangentti, cotangent.
Cylinderi, cylinder.
elliptinen cylinderi, elliptisk c.
hyperbolinen c., hyperbolisk c.

D.

Diagonaali, diagonal.
Diametri, diameter.
diametraali-taso, diametralplan.

E.

Edustaa, representera.
Eliminoïda, eliminera.
Ellipsi, ellips.
ellipsoïdi, ellipsoid.
elliptinen, elliptisk.
Emä, generatix.
emäpyöriö, -suora l. -viiva, -kulma = generande cirkel, linie, vinkel.
Epikykloïdi, epicykloid.
Eroitus, differens.
Eräkäs, isolerad punkt.
Excentrisyys, excentricitet.

F.

Funktioni, funktion.
y on x:n f. eli y on f. x:stä = y är en f. af x.

G.

Geometria, geometri.
geometrillinen, geometrisk.

H.

Haaruke, branche.
Harmonia, harmoni.
harmonillinen, harmonisk.
harmonikaali, harmonikal.

Heiastaa, heiastua, reflektera, reflekteras.
Homogeninen, homogen.
homogenisuus, homogenitet.
Hyperbola, hyperbel.
hyperbolinen, hyperbolisk.
hyperboloïdi, hyperboloid.
yksivaippainen h., h. med en mantel.
kaksivaippainen h., h. med två mantlar.
Hypokykloïdi, hypocykloid.
Hypotenusa, hypotenusa.

I.

Identtinen, identisk.
identtisyys, identitet.
Isopyöriö (gen. isopyöriön), storcirkel.
iso-akseli, större axel.
Indici, index.
Irrationaalinen, irrationel.

J.

Jakaa kahtia, halfvera.
Johtaa (johdattaa) deducera.
johtaja, directrix, styrlinie.
johtaminen (johdatus), deduktion.
Juokseva, löpande.
Juuri, rot.
juuriluku, -suure, radikal.
Jänne, korda.
Jäsen, membrum.

K.

Kaari, båge.
Kaava, formel.
Kaksoispiste, dubbelpunkt.
Kallistuminen, lutning.
kallistuskulma, lutningsvinkel.
Kantaluku, bas (log.)
Kardioïdi, kardioid.
Katakaustika, katakaustika.
Kateeti, katet.
Kehittää, utveckla.
kehitys-pinta, developpabel yta.
kehä, periferi.
Keskisuhdeluku, medelproportional.
keskivastainen, diametralt motsatt.
keskiö, medelpunkt.
keskiöllinen pinta, yta med m.
keskiötön „ „ utan „.
Kiero, skef.
Kimppu, knippe.
Kissoïdi, cissoid.
Koefficientti, koefficient.
Kohdata, infalla.
Kohtisuora (subst.), perpendikel.
kohtisuora (adj.), vinkelrät.
Kolmio, triangel.
Konkoïdi, konkoid.
Kooni, kon.
koonillinen, konisk.
Koordinaati, koordinat.
koordinaatisto, koordinat-system.
Korkosuora, höjdperpendikel.
Koroittaa, upphöja.
k. neliöön, u. till qvadrat.
k. m:teen arvokertaan, u. till m:te digniteten.
Korollaari, korollarium.
Kotelo, Pascal'in, Pascals snäcka.
Kulma, vinkel.
suora, terävä, tylsä k., rät, spetsig, trubbig v.
kulma-koefficientti, vinkel-koefficient.
Kuutio, kub.
k.-yhtälö, kubisk eqvation.
Kuvio, figur.
Kykloïdi, cykloid.
Käyrä, kroklinie.

L.

Lauseke, expression.
lausua jotakin jollakin, l. lausua jotakin jossakin, exprimera, uttrycka ngt. genom ngt.

Leikkaus, sektion.
Lemniskata, lemniskata.
Liittolainen, konjugerad, konjugat-.
 taso on diametrin liittolainen, planet är konjugeradt med diametern.
 liitto-diametri, konjugat-diameter.
Linjallinen, lineär.
 linjaperäinen, linierbar.
Litistynyt, afplattad.
Liukua, glida.
Logaritmi, logaritm.
 logaritmika, logaritmika.

M.

Maksimi, maximum.
Merkinjatko, teckenföljd.
 „ **vaihdos**, „ ombyte.
Minimi, minimum.
Monikulmio, månghörning, polygon.
Murtopiste, katso rebroussementtipiste.
Muutos, transformation.
Määrittää, definiera.
 määritys, definition.

N.

Negativinen, negativ.
Nelikulmio, fyrhörning.
 „ **sivukas**, „ siding.
 neliö, qvadrat.
Normaali, infallslod.
 „ normaali.
Nurkka, hörn.

O.

Ominainen, absolut.
Ordinaata, ordinata.
Origini, origo.
Ovaali, oval.

P.

Pallo, sfer.
 pallokulmio, sferisk triangel.
Parabola, parabel.
 paraboloïdi, paraboloid.
 elliptinen, hyperbolinen p., elliptisk, hyperbolisk p.
Parallelipipedi, parallelipiped.
Parallelogrammi, katso suunnikas.
Parametri, parameter.
Perimetri, perimeter.
Periferia, kehä.
Perusmuoto, normalform.
Perä, vertex.
 perättäinen, kontinuerlig.
Piirtää, katso sisustaa.
Pinta, yta.
 pinta-ala, area.
Piste, punkt.
 viiva *a* **kääntyy pisteessä** *b*, linien *a* vrider sig omkring punkten *b*.
Poli, pol.
 polaari, polar.
 polaarinen, polär.
 polaaritaso, polarplan.
Polttoväli, focalvidd.
 polttopiste, focus.
 polttosäde, radius vector.
Positivinen, positiv.
Probleemi, problem.
Projektioni, projektion.
 projicioida, projiciera.
Puoli-akseli, -diametri (gen. **puoliakselin, puolidiametrin**), halfaxel, -diameter.
Purkaa (tekijöihin), upplösa.
Pyöriö, cirkel.
 pyöriöleikkaus, cirkelformig sektion.
 pyöriö-piste, cirkelpunkt.
 pyörähdys-akseli, -ellipsoidi y. m., rotationsaxel, -ellipsoid m. m.
Päätaso, p.-diametraalitaso, principalplan, p.-diametralplan.

R.

Radius vektori, radius vektor.
Rationaalinen, rational.
Ratkaista (yhtälö), upplösa.
Rebroussementtipiste, rebroussementspunkt.

S.

Sarja, serie, progression.
Selventää, förenkla.
Sektori, sektor.
Sekantti, sekant.
Segmentti, segment.
Sferoïdi, sferoid.
Sieventää, hyfsa.
Siirtää, öfverflytta, -föra.
Sijoittaa, substituera.
  s. *a b:llä* **l. suureella** $b =$ substituera a i st. f. b.
Sini, sinus.
  sinusoïdi, sinusoid.
Sisustaa (sovittaa, piirtää), inskrifva.
  sisusta pyöriö kolmiolla, inskrifva en triangel i cirkeln.
  kolmio sisustaa pyöriötä, triangeln är inskrifven i en cirkel.
  sisustava kuvio, inskrifven figur.
Sivuta, tangera.
  sivuamispiste, tangeringspunkt.
Sovittaa, katso sisustaa.
Spiraali, spiral.
Subnormaali, subnormal.
Suhde, förhållande.
  suhdeluku, proportional.
Suikea (sferoïdi), förlängd (sferoid).
Suora, rät linie.
  suorakulmainen, rätvinklig.
  suorakulmio, rektangel.
  suorakulmio suorista l. suorilla *a* **ja** *b*, rektangeln af räta linierna *a* och *b*.
Supistaa, reducera.
  supistus, reduktion.
Supplementti, supplement.
  s.-jänne, s.-korda.
Suunnikas, parallelogram.
Suunta, rigtning.
  suuntakosini, -kulma, rigningskosinus, -vinkel.
Suure, qvantitet, storhet.
Symmetrillinen, symmetrisk.
Systeemi, system.
Säde, radie.
Särmä, kant.

T.

Taittuminen, refraktion.
  taittumis-koefficientti, refraktions-, brytningskoefficient.
Tangentti, tangent.
  tangenttikooni, -jänne, tangentkon, -korda.
Tasakylkinen, likbent.
  „ **sivuinen,** liksidig.
  taso, plan.
  tasannes, plan-.
Tekijä, faktor.
Teoreemi, teorem.
Termini, term.
Tetraedri, tetraeder.
Todellinen, reel.
  toteuttaa, satisfiera.
Transcendenttinen, transcendent.
Transversaali, transversal.
  transversaalinen akseli, t.-axel.
Trapetsi, trapezium.
Triedrillinen, triedrisk.
Tulo, produkt.

U.

Ura, ort.
  ura pisteelle *P*, **l.** *P***-pisteen ura,** orten för punkten *P*.

V.

Vaihtua, variera.
  vaihtuva, variabel.
Vaippa, mantel.

Vakinainen, konstant.
Vastavuoroinen, reciprok.
Verhota (jkin jlkin), omskrifva.
verhoava kuvio, omskrifven figur.
Viiva, linie.
viivasto, liniekomplex.
Vinokulmainen, snedvinklig.
Volymi, volym.
Vyöttöellipsi, strupellips.
Väli, katso eroitus.
Väite, teorem.
välimatka, afstånd.

Y.

Yhden-aikainen, simultan.
Yhdenmuotoinen, likformig.
Yhdensuuntainen, parallel.
a on *b*:n suuntainen, *a* on yhdensuuntainen *b*:n kanssa, samansuuntainen kuin *b*, *a* är parallel med *b*.
Yhteellinen, kongruent.
Yhteismitallinen, kommensurabel.
yhteismitaton, inkommensurabel.
Yhtälö, eqvation.
yksi-, kaksi- j. n. e. asteinen yhtälö, eqv. af första, andra etc. graden.
tangentin yhtälö, eqv. för tang.
yhtälö suureissa x, y, z = eqv. i afseende å x, y, z.

Ä.

Äärellinen, ändlig.
Ääretön, oändlig.

MUUKALAIS-SUOMALAINEN SANALUETTELO.

A.

Abskissa, abscissa.
Absolut, ominainen.
Abstrakt, abstraktinen.
Accent, aksentti.
Afplattad, litistynyt.
Alstningslinie, katso generérande linie.
Afstånd, välimatka.
Analogi, analogia.
analogisk, analogillinen.
Analys, analysi.
analytisk, analytillinen.
Area, pinta-ala.
Asymptot, asymptooti.
asymptot-kon, a.-kooni.
Axel, akseli.
större axel, iso-akseli (gen. iso-akselin j. n. e.).
mindre axel, vähä-akseli (gen. vähä-akselin j. n. e.).

B.

Bas, asema (kuvion).
„ kantaluku (log.).
Binom, binomi.
Branche, haaruke.
Brytning, katso refraktion.
Brännpunkt, katso focus.
Båge, kaari.

C.

Central-axel, centraali-akseli.
c.-plan, c.-taso.
Cirkel, pyöriö.
cirkelformig sektion, pyöriöleikkaus.
cirkelpunkt, pyöriöpiste.
Cissoid, kissoïdi.
Cosecant, cosecantti.
Cosinus, cosini.
Cotangent, cotangentti.
Cykloid, kykloïdi.
Cylinder, cylinderi.
elliptisk c., elliptinen c.
hyperbolisk c., hyperbolinen c.
cylindrisk, cylinderi-.

D.

Deducera, johdattaa, johtaa.
deduktion, johdatus, johtaminen.
Definiera, määrittää.
definition, määritys.
Developpobel yta = kehityspinta.
Diagonal, diagonaali.
Diameter, diametri.
diametralplan, diametraali-taso.
diametralt motsatt = keskivastainen.
Differens, eroitus, väli.
Dignitet, arvokerta.
Directrix, johtaja.
Dubbelpunkt, kaksoispiste.

E.

Eliminera, eliminoida.
Ellips, ellipsi.
ellipsoid, ellipsoïdi.

elliptisk, elliptinen.
Epicykloid, epikykloïdi.
Eqvation, yhtälö.
eqv. af första, andra etc. graden = yksi-, kaksi- j. n. e. asteinen yhtälö; eqv. för tang. = tangentin yhtälö l. yhtälö tagentille.
eqv. i afseende å x, y, z = yhtälö suureissa x, y, z.
Excentricitet, excentrisyys.
Expression, lauseke.
exprimera (uttrycka) ngt genom ngt = lausua jotakin jollakin, l. lausua jotakin jossakin.

F.

Faktor, tekijä.
Figur, kurio.
Focalvidd, polttoväli.
focus, polttopiste.
Formel, kaava.
Funktion, funktioni.
y **är en** f. **af** $x = y$ on x:n f. eli y on f. x:stä.
Fyrhörning, nelikulmio.
„ **siding,** „ sivukas.
Förenkla, selventää.
Föreställa, katso representera.
Förhållande, suhde.
Förlängd (sferoid), snikea (sferoïdi).

G.

Generatrix, emä.
genererande cirkel, linie, vinkel, emäpyöriö, -suora l. viiva, -kulma.
Geometri, geometria.
geometrisk, geometrillinen.
Glida, liukua.
Grad, aste.
af första, andra etc. graden, katso eqvation.

H.

Half-axel, -diameter, puoli-akseli. -diametri (gen. puoli-akselin).
Halfvera, jakaa kahtia.
Harmoni, harmonia.
harmonisk, harmonillinen.
harmonikal, harmonikaali.
Homogen, homogeninen.
homogenitet, homogenisuus.
Hufvudaxel, -plan, pääakseli, -taso.
Hyfsa, sieventää.
Hyperbel, hyperbola.
hyperbolisk, hyperbolinen.
hyperboloid, hyperboloïdi.
h. med en mantel, yksivaippainen h.
h. med två mantlar, kaksivaippainen h.
Hypocykloid, hypokykloïdi.
Hypotenusa, hypotenusa.
Hänföra. Esim. **kroklinieus eqvation hänförd till polära koordinater,** käyrän yhtälö polaarisissa koordinaateissa.
Härleda, katso deducera.
Höjdperpendikel, korkosuora.
Hörn, nurkka.

I.

Ideel, aatteinen.
Identitet, identtisyys.
identisk, identtinen.
Imaginär, aatteinen.
Index, indici.
Infalla, kohdata.
infallslod, normaali.
Inkommensurabel, yhteismitaton.
Inskrifva, sisustaa, sovittaa, piirtää; **inskrifva en triangel i cirkeln** = sovittaa, piirtää kolmio pyöriöön; **triangeln är inskrifven i en cirkel** = kolmio on sovitettu

pyöriöön, kolmio sisustaa pyöriötä;
inskrifven figur, sisustava kuvio.
Insätta, katso substituera.
Irrationel, irrationaalinen.
Isolerad punkt, eräkäs.

K.

Kant, särmä (= diedrillinen kulma).
Kardioid, kardioïdi.
Katakaustika, katakaustika.
Katet, kateeti.
Knippe kimppu.
Koefficient, koefficientti.
Kommensurabel, yhteismitallinen.
Kon, kooni.
konisk, koonillinen.
Kongruent, yhteellinen.
Konjugat-, **konjugerad**, liitto-, liittolainen, (konjugillinen).
Planet är konjugeradt med diametern, taso on diametrin liittolainen.
Konkoid, konkoïdi.
Konstant, vakinainen.
Kontinuerlig, perättäinen.
Koordinat, koordinaati.
k.-system, koordinaatisto (k. systeemi).
Korda, jänne.
Kordal, kordaali.
Korollarium, korollaari.
Kub, kuutio.
kubisk eqv., kuutio-yhtälö.

L.

Lemniskata, lemniskata.
Likbent, tasakylkinen.
likformig, yhdenmuotoinen
liksidig, tasasivuinen.
Linie, viiva.
rät linie, suora, l. suora viiva.
kroklinie, käyrä, l. käyrä viiva.
linierbar yta, linjaperäinen pinta.
lineär, linjallinen.
linie-komplex, viivasto.
Logaritmi, logaritmi.
logaritmika, logaritmika.
Lutning, kallistuminen.
lutningsvinkel, kallistuskulma.
Löpande, juokseva.

M.

Mantel, vaippa.
Maximum, maksimi.
Medelproportional, keskisuhdeluku.
Medelpunkt, keskiö.
Membrum, jäsen.
venstra, högra m. = vasen, oikea j.
Mininum, minimi.
Månghörning, monikulmie.

N.

Negativ, negativinen.
Normal, normaali.
normalform, perusmuoto.

O.

Omskrifva, verhota (jkin jlkin).
omskrifven figur, verhoava kuvio.
Ordinata, ordinaata.
Origo, origini.
Ort, ura.
O. för punkten *P*, ura pisteelle *P*, l. *P*-pisteen ura.
Oval, ovaali.

P.

Parabel, parabola.
paraboloid, paraboloïdi.
elliptisk, **hyperbolisk p.** elliptinen, hyperbolinen p.
Parallel, yhdensuuntainen.
a **är parallel med** *b*, *a* on *b*:n suuntainen, l. *a* on yhdensuuntainen *b*:n kanssa, a on samansuuntainen kuin *b*.

parallelipiped, parallelipipedi.
parallelogram, suunnikas (parallelogrammi).
Paramater, parametri.
Periferi, kehä (periferia).
Perimeter, perimetri.
Perpendikel, kohtisuora (subst.).
Plan, taso.
plan- = tasannes-.
Pol, poli.
polar, polaari.
polarplan, polaaritaso.
Polär, polaarinen, polaari.
Polygon, monikulmio, polygoni.
Positiv, positivinen.
Principal plan, päätaso.
p. diametralplan = päädiametraalitaso.
Problem, probleemi.
Produkt, tulo.
Progression, sarja, progressioni.
Projektion, projektioni.
projiciera, projicioida.
Proportional, suhdeluku.
Punkt, piste.
linien *a* **vrider sig omkring punkten** *b*, viiva *a* kääntyy pisteessä *b*.

Q.

Qvadrat, neliö.
Qvantitet, suure.

R.

Radie, säde.
radikal, juuriluku, juurisuure.
radius vector, radius vektori.
Rationel, rationaalinen.
Rebroussementspunkt, rebroussementti-, l. murtopiste.
Reciprok, vastavuoroinen.
Reduktion, supistus.
reducera, supistaa.
Reel, todellinen.
Reflektera, **-s**, heiastaa, heiastua.
Refraktion, taittuminen.
r:s koefficient, taittokoefficientti.
Rektangel, suorakulmio.
r. af räta linierna *a* **och** *b*, suorakulmio suorista l. suorilla *a* ja *b*.
Relation, suhta.
Representera, edustaa.
Rigtning, suunta.
rigtningskosinus, **-vinkel**, suunta-kosini, -kulma.
Rot, juuri.
Rotations-axel, **-ellipsoid** etc., pyörähdys-akseli, ellipsoïdi y. m.
Rätvinklig, suorakulmainen.

S.

Satisfiera, toteuttaa.
Segment, segmentti.
Sekant, sekantti.
sektion, leikkaus.
sektor, sektori.
Serie, sarja.
Sfer, pallo.
sferoid, sferoïdi.
sferisk triangel, pallokolmio.
Simultan, yhdenaikainen.
Sinus, sini.
sinusoid, sinusoïdi.
Skef, kiero.
Skilnad, katso differens.
Snedvinklig, vinokulmainen.
Snäcka, Pascals, = Pascal'in kotelo.
Spetsig, vinkel, terävä kulma.
Spiral, spiraali.
Storhet, katso Qvantitet.
Storcirkel isopyöriö, (gen. isöpyöriön j. n. e).
Strupellips, vyöttöellipsi.
Stråle, katso radie.
Styrlinie, katso directrix.
Subnormal, subnormaali.
Substituera, sijoittaa, panna sijaan.
s. *a* **i stället för** *b*, sijoittaa

a *b*:llä l. suureella *b*., l. panna *a* *b*:n sijaan.
Supplement, supplementti.
s. korda, supplementillinen jänne.
Symmetrisk, symmetrillinen.
System, systeemi.

T.

Tangent, tangentti.
tangera, sivuta.
tangeringspunkt, sivuamispiste.
tangentkon, **-korda**, tangenttikooni, -jänne.
Teckenföljd, **-ombyte**, merkinjatko, -vaihdos.
Term, termini.
Tetraeder, tetraedri.
Transcendent, transcendenttinen.
Transformation, muutos.
Transversal, transversaali.
t.-axel, transversaalinen akseli.
Trapezium, trapetsi.
Triangel, kolmio.
Triedrisk vinkel, triedrillinen kulma
Trubbig vinkel, tylsä kulma.

U.

Upphöja, koroittaa.
u. till qvadrat, k. neliöön.
u. till *m*:te **digniteten**, k. *m*:teen arvokertaan.
Upplösa, ratkaista (yhtälö).
u. i faktorer, purkaa tekijöihin.
Upprita en parallelogram på 2 linier, piirtää suunnikas 2:lle suoralle.
Uttryck, katso expression.
Utveckla, kehittää.

V.

Variabel, vaihtuva.
variera, vaihtua.
Vertex, perä.
Vinkel, kulma.
v. spets, kärki.
v.-koefficient, k.-koefficientti.
vinkelrät, kohtisuora.
a **är v. mot** *b*, *a* on kohtisuora l.-ssa *b*:lle.
Volym, volymi.

Y.

Yta, pinta.
y. med medelpunkt, keskiöllinen p.
y. utan medelpunkt, keskiötön p.

Ä.

Ändlig, äärellinen.

Ö.

Öfverflytta, **-föra**, siirtää.

EDELLINEN OSA.

TASANNES-GEOMETRIA.

Ensimmäinen Luku.

Johdatus.

1. Algebraa ja ylipäänsä analysiä käytettäessä geometriaan täytyy geometrillisten suureiden (viivain, pintain, kappalten, kulmain) olla lausuttuina luvuilla, ja tämä tapahtuu siten, että kukin suure verrataan toiseen, ennakolta määrättyyn samanlaiseen suureesen ja tutkitaan, kuinka monta kertaa tahi kuinka suureksi osaksi edellinen sisältää jälkimmäisen. Määrättyä suuretta sanotaan *mitaksi* tai *yksiköksi* ja kaikki muut samanlaatuiset suureet lausutaan sitten rationaalisella tai irrationaalisella luvulla, joka ilmoittaa sen ja määrätyn yksikön välisen suhteen.

Pituusmittoina käytetään jotakin tunnettua pituutta, mitä hyvänsä, esim. tuumaa, jalkaa, peninkulmaa j. n. e. Mielin määrin saattaisi valita mitat myöskin pinnoille ja tiloille; mutta selvyyden vuoksi pannaan tässäkin kohden kerran otaksuttu pituusmitta perustukseksi ja otetaan pintain mitaksi neliö, jossa kukin sivu on pituus-yksikön pituinen, ja tilain yksiköksi kuutio, jonka kukin särmä on saman yksikön pituinen. Pinta-ala suorakulmiossa, jonka sivut ovat a ja b, lausutaan siis suorastansa tulolla ab, ja volymi suorakulmaisessa parallelipipedissä, jonka särmät ovat a, b, c, tulolla abc. Yleensä lausutaan pinta-ala kahden ja volymi kolmen viivallisen (= yksi-asteisen) tekijän tulolla.

Kulmain mittana käytetään alemmassa geometriassa tavallisesti suoraa kulmaa tahi sen $\frac{1}{90}$:nettä osaa, jota sanotaan asteeksi. Analytillisessä geometriassa sitä vastoin käytetään kulman lausekkeena tavallisesti sen kaaren pituutta, jonka kysymyksessä oleva kulma rajoittaa, asetettuna 1-säteisen pyöriön keskiöön, elikkä, toisin sanoen, kaaren ja säteen suhdetta. Koska tämä suhde samassa kulmassa aina on yhtä iso, olkoon pyöriö kuinka suuri hyvänsä, niin säteen pituus onkin mielivallan alainen. Puolen kehän suhdetta säteesen lausuu, niinkuin tietty, Ludolfin luku $\pi = 3{,}14159\ldots$ Niin muodoin merkitsee luku π myöskin 180-asteista kulmaa, ja siitä taas seuraa, että yksikkö vastaa kulmaa, jonka asteluku on $180 : \pi$, siis $= 57^0\ 17'\ 44''8$. Juuri tätä kulmaa, joka rajoittaa säteen pituisen kaaren, käytetään analytillisessä geometriassa tavallisesti kulmain mittana tahi yksikkönä.

2. Kun tällä tavoin on sovittu geometrillisten suureiden lausumisesta luvuilla, niin sopii yhtälöillä osoittaa kuvion eri osain väliset suhteet. Mutta yhtälö ei saata olla yleisen geometrillisen totuuden lausekkeena, jollei se ole itsenäinen otaksutun pituusyksikön suhteen; sen täytyy, toisin sanoen, olla senlaatuisen, ettei se muutu, jos puheena-olevan yksikön sijaan otetaan mikä muu hyvänsä, esim. m kertaa pienempi yksikkö. Viivat, jotka ennen olivat merkityt luvuilla a, b, c, merkittäisiin nyt ma, mb, mc, ja yhtälö siis ei saa muuttua, jos kaikki sen viivalliset suureet kerrotaan mielivallan alaisella tekijällä m. Yhtälöä, joka täyttää tämän ehdon, sanotaan homogeniseksi.

Algebrallinen yhtälö on homogeninen, kun kaikki sen terminit ovat saman-asteisia siinä olevain geometrillisten suureiden suhteen. Jos a, b, x, y merkitsevät viivoja, niin on esim. yhtälö

$$3ax^3 + 5by^3 - a^2b^2 = 0$$

homogeninen; sillä jos mainittujen suureiden sijaan pannaan ma, mb, mx, my, niin saavat kaikki terminit yhteiseksi tekijäkseen m^4, ja kun tämä jakamalla poistetaan, niin yhtälö pysyykin muuttumatonna.

Yhtälöllä, joka ei ole homogeninen, on geometrillinen merkitys ainoastaan silloin, kun joku määrätty pituus otetaan yksiköksi. Jos esimerkiksi pannaan $a = 1$, niin muuttuu edellinen yhtälö seuraavaksi

$$3x^3 + 5by^3 - b^2 = 0$$

joka ei enää ole homogeninen. Mutta semmoisissa tapauksissa saadaan se homogeniseksi jälleen, kun kuhunkin terminiin sijoitetaan sopiva arvokerta otaksuttua pituus-yksikköä.

Näiden lyhyiden selitysten jälkeen analytillisessä geometriassa käytettävistä yhtälöistä osoitamme nyt, mitenkä analytillisesti merkitään ne vastaiset suunnat, joissa geometrillisia suureita, viivoja tai kulmia, sopii ottaa.

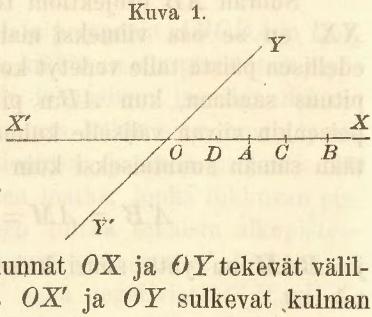
3. Suoraa viivaa XX' myöten liikkuva piste saattaa kulkea joko $X'X$- tahi XX'-suuntaa. Näiden kahden vastaisen suunnan eroittamiseksi käytetään $+$ ja $-$ merkkejä, ja niinpä $+a$ merkitsee sen matkan pituutta, jonka piste on kulkenut toisessa yllämainittuja suuntia, esim. $X'X$, ja $-a$ taas yhtä pitkää matkaa päinvastaisessa suunnassa. Lyhyyden vuoksi annetaan edelliselle suunnalle nimeksi positivinen, jälkimmäiselle negativinen.

Olkoon piste aluksi O:ssa ja siitä lähtien kulkekoon peräkkäin matkat $OA = +a$, $AB = +b$, $BC = -c$, $CD = -d$, ..., merkkien osoittaessa eri suuntia, niin eri matkain algebrallinen summa asianomaisine merkkeinensä

$$a + b - c - d \ldots$$

lausuu nähtävästi pisteen lopullisen välimatkan O:sta positivisella tahi negativisella puolella, aina sen mukaan kuin tämä summa on positivinen tai negativinen.

Kuva 1.



4. Kahden suoran, XX', YY', välisestä kulmasta puhuttaessa, saattaa olla epätiedossa, kumpaistako kulmaa tarkoitetaan, terävääkö XOY vai tylsää $X'OY$. Mutta tämä kahdapäisyys hälvenee, jos määrätään, missä suunnassa mikin suora on otettava. Suunnat OX ja OY tekevät välillensä kulman XOY, suunnat OX' ja OY sulkevat kulman $X'OY$. Saadaksemme kulmainkin suhteen tarkkuutta lauseissa, ajattelemme epämääräisen säteen kääntyvän ympärinsä O-pisteessä. Tämä kääntyminen saattaa tapahtua joko oikealta

vasemmalle (vasten päivää) tahi vasemmalta oikealle (myötä päivää); edellisessä tapauksessa sanomme kääntymistä positiviseksi, jälkimmäisessä negativiseksi. Eroitteeksi merkityksessä käytetään jälleen plus ja minus merkkejä, ja niinpä esim. $+v$ merkitsee sitä v-kulmaa, jonka liikkuva säde on muodostanut positivisen kääntymisen kautta, ja $-v$ yhtä suurta, negativisessa kääntymisessä syntynyttä kulmaa. Se kulma siis, jonka suunta OY tekee jonkun annetun OX-suunnan kanssa, on tesmälleen määrätty, kun tiedetään positivisenko vai negativisenko kääntymisen kautta säde on siirtynyt asemasta OX asemaan OY. Jos säde asemasta OX lähtien on peräkkäin muodostanut eri kulmat $+v$, $-v'$, $+v''$, $-v'''$,..., merkkien osoittaessa kääntymisen suuntaa, niin algebrallinen summa

$$v - v' + v'' - v''' \ldots$$

merkitsee sitä kulmaa, jonka säteen lopullinen asema tekee OX-suunnan kanssa sen ylä- tai alapuolella, sitä myöten kuin tämä summa on positivinen tahi negativinen.

Muist. Yhdensuuntaisia viivoja pidetään analytillisessä geometriassa sellaisina, jotka yhtyvät toisiinsa äärettömän kaukana ja tekevät välillensä kulman $= 0$.

5. Projektionit. A-pisteen projektioniksi suoralla XX' sanotaan A:sta suoralle XX' vedetyn kohtisuoran päätä A'.

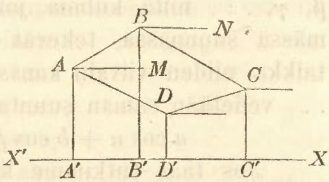
Suoran AB projektioni toisella epämääräisellä suoralla XX' on se osa viimeksi mainittua, $A'B'$, jonka rajoittavat edellisen päistä tälle vedetyt kohtisuorat. Tämän projektionin pituus saadaan, kun AB:n pituus kerrotaan cosinilla kumpaisenkin viivan väliselle kulmalle. Jos nimittäin AM vedetään saman suuntaiseksi kuin XX', niin on nähtävästi

$$A'B' = AM = AB \cos BAM,$$

ja BAM on yhtä suuri kuin se kulma, jonka AB ja XX' tekevät.

Mutta usein on tarpeen määrätä ei ainoastaan suoran viivan projektionin pituus, vaan sen suuntakin. Päästäksemme tässäkin kohden aivan selville, ajatelkaamme jonkun pisteen kulkevan AB-suoraa myöten. Aina sen mukaan kuin liikunnon suuntana on AB tahi BA, kulkee pisteen projektioni joko positivisessa suunnassa $A'B'$ tahi negativisessa $B'A'$. Edellisessä tapauksessa sanotaan viivan projektionia positiviseksi ($= + A'B'$), jälkimmäisessä negativiseksi ($= - A'B'$). AB saa niin muodoin suoralla $X'X$ positivisen tahi negativisen projektionin sitä myöten kuin se otetaan suunnassa AB tahi päinvastaisessa BA.

Kuva 2.



Jos nyt pisteistä A ja B vedetään AM ja BN saman suuntaisiksi kuin suoran $X'X$ positivinen suunta, niin suunnat AB ja $X'X$ tekevät kulman BAM ja suunnat BA ja $X'X$ kulman ABN. Nämä kulmat ovat toistensa supplementteja ja niiden cosinit ovat siis yhtäsuuret, mutta vastaismerkkiset. Nyt on $AB \cos BAM = A'B'$ joka taas on AB:n projektioni, siis $AB \cos ABN = - A'B'$, $= BA$:n projektioni, jolloin kirjainten eri järjestys (AB tai BA) merkitsee eri suuntia, joissa suora on otettava. Tästä saadaan seuraava väite:

Suoran projektioni toisella suoralla saadaan sekä suuruudelleen että merkilleen, kun edellisen pituus kerrotaan cosinilla sille kulmalle, jonka sen suunta tekee jälkimmäisen positivisen suunnan kanssa.

6. Jos tutkimme umpinaista polygonia $ABCDA$ ja ajattelemme pisteen, lähtien A:sta, liikkuvan sen perimetriä myöten, niin kulkee piste polygonin joka sivun jossakin määrätyssä suunnassa; niin muodoin saa kukin sivu oman positivisen tai negativisen projektioninsa, ja tänä projektionina on se positivinen tai negativinen matka, jonka liikkuvan pisteen projektioni tekee. Pisteen tultua takaisin alkupisteesen A, on sen projektioni palannut pisteesen A', kuljettuaan positiviset matkat $A'B'$, $B'C'$ sekä negativiset $C'D'$, $D'A'$, ja nämä matkaparit hävittävät toisensa. Siis:

Jos umpinainen polygoni projicioidaan suoralle, niin on summa sivujen projektioneista $=$ nolla.

Jos siis a, b, c, ... merkitsevät polygonin sivuja ja α, β, γ, ... niitä kulmia, joita ne, pisteen liikunnon määräämässä suunnassa, tekevät positivisen $X'X$-suunnan kanssa taikka niiden viivain kanssa, jotka kulmapisteistä A, B, C, ... vedetään saman suuntaisiksi kuin $X'X$, niin on

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma + \ldots = 0.$$

Jos taas tutkimme kahta suorain muodostamaa tietä ABC ja ADC, jotka yhdistävät kaksi pistettä A ja C, ja ajattelemme jonkun pisteen kulkevan A:sta C:hen, jompaakumpaa tietä, niin huomaamme sen projektionin kumpaisessakin tapauksessa kulkevan saman $A'C'$-matkan. Murtosuorilla ABC ja ADC on siis sama projektioni $A'C'$, kuin sillä suoralla, joka välittömästi yhdistää pisteet A ja C. Siitä väite: Polygoneilla, joilla on samat pääpisteet, ovat summat sivujen projektioneista yhtä suuret.

Lisäämme tähän kaksi teoreemaa, joiden totuus on silminnähtävä:

Yhdensuuntaisten ja yhtäsuurten suorain projektionit ovat yhtä suuret sekä saman- tai erinmerkkiset sen mukaan kuin ne otetaan samassa tai vastaisessa suunnassa.

Suoran projektionit kahdella yhdensuuntaisella suoralla ovat yhtäsuuret sekä saman- tai erinmerkkiset sen mukaan kuin jälkimmäiset suorat otetaan samassa tai vastaisessa suunnassa.

Yleensä on suoran projektioni toisella suoralla sitä suurempi, mitä pienemmän kulman suorat välillensä tekevät. Jos tämä kulma on $=$ nolla, siis suorat yhdensuuntaisia, niin on projektioni yhtäsuuri kuin projicioitu suorakin; mutta jos suorat ovat kohtisuoria toisillensa, niin projektioni on $=$ nolla.

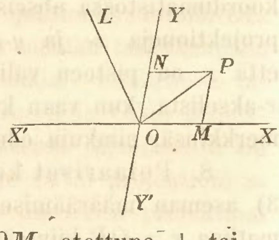
Toinen Luku.

Piste.

7. Suoraviivaiset koordinaatit. Jonkun P-pisteen asema tasolla määrätään kahden kiinteän suoran elikkä ak-

selin avulla $(XX'$ ja $YY')$. Näiden leikkauspiste O on nimeltänsä origini (alkupiste). Kumpaisessakin akselissa eroitetaan kaksi suuntaa, joista toinen (OX, OY) pidetään positivisena, toinen (OX', OY') negativisena.

Kuva 3.



Pisteestä P vedetään sitten suorat PM ja PN yhdensuuntaisiksi akselien kanssa ja määrätään välimatkat originista pisteisin M ja N, joissa ne kohtaavat akseleja. Siten on P-pisteen asema määrätty. Matkaa OM, otettuna $+$ tai $-$ merkillä sitä myöten kuin M lankeaa originistä oikealle tai vasemmalle, sanotaan P-pisteen abscissaksi ja merkitään x; matka ON taas, positivisena tai negativisena sen mukaan kuin se lankeaa originin ylä- tai alapuolelle, on P-pisteen ordinaata ja merkitään y. Abscissaa ja ordinaataa, jotka yhdessä määräävät pisteen aseman, sanotaan yhteisellä nimellä sen suoraviivaisiksi tai suuntaisiksi koordinaateiksi. XX' on nimeltään abscissa- eli x-akseli, YY' taas ordinaata- eli y-akseli, ja molemmat yhteensä koordinaatiakselit.

Nämä akselit tekevät välillensä neljä kulmaa XOY, YOX', $X'OY'$, $Y'OX$, joita sanotaan ensimmäiseksi, toiseksi, kolmanneksi ja neljänneksi akselikulmaksi. Pisteellä ensimmäisessä akselikulmassa ovat koordinaatit x ja y kumpikin positivisia; toisessa akselikulmassa on x negativinen, y positivinen; kolmannessa x ja y kumpikin negativisia, neljännessä x positivinen, y negativinen. Koordinaatit $x = -2, y = +3$ määräävät niin muodoin pisteen toisessa akselikulmassa; koordinaatit $x = +5, y = -7$ neljännessä j. n. e. Piste, jonka koordinaatit ovat x ja y, merkitään lyhyesti (x, y).

Kukin eri arvopari, mikä annetaan koordinaateille x ja y, määrää eri pisteen. Kun x ja y saavat kaikki mahdolliset positiviset ja negativiset arvot, eli, toisin sanoen, jos x ja y pannaan vaihtelemaan rajoissa $-\infty$ ja $+\infty$, niin saadaan perättäin kaikki pisteet tasolla määrätyiksi.

Kiinteät akselit XX' ja YY' saattavat tehdä välillensä joko suoria tai vinokulmia ja P-pisteen asemaa sopii siis määrätä joko suorakulmaisilla tai vinokulmaisilla koordinaateilla. Suorakulmaisessa koordinaati-systeemassa eli koordinaatistossa abscissa x ja ordinaata y ovat OP-matkan projektioneja x- ja y-akselille. Silloin sopii sanoa niinkin, että x on pisteen välimatka y-akselista ja y sen välimatka x-akselista, kun vaan kumpikin välimatka saapi asianomaisen merkkinsä, niinkuin edellä on selitetty.

8. Polaariset koordinaatit. Jonkun P-pisteen (kuva 3) aseman määräämiseksi käytetään välistä myös sen välimatkaa $r = OP$ kiinteästä pisteestä O, jota sanotaan pol'iksi, ja kulmaa $v = POX$, jonka tämä välimatka ja kiinteä akseli OX tekevät välillensä. Nämä suureet r ja v, joista edellisen nimi on radius vector, ovat P-pisteen polaarisia koordinaateja. Kukin eri arvopari koordinaateilla määrää eri pisteen, ja kaikki pisteet tasolla saadaan, jos v pannaan vaihtelemaan 0:sta 360 asteesen ja r nollasta positiviseen äärettömään $(+\infty)$.

Pisteen aseman määräämiseksi tasolla tarvitaan yleensä kaksi määrikettä, ja nämähän saattaisi valita lukemattoman monella eri tavalla, joten saataisiin äärettömän monta koordinaatistoa. Yksinkertaisimpia kumminkin ovat jo mainitut suoraviivainen ja polaarinen koordinaatisto ja niitä analytillisessä geometriassa pääasiallisesti, melkeinpä yksistänsä, käytetäänkin.

9. Pisteen koordinaatien projektionit. Olkoot OX, OY (kuva 3) kaksi suora- tahi vinokulmaista koordinaati-akselia, P olkoon piste, jonka koordinaatit merkitsemme x ja y; OL olkoon suora, jonka suunnan määräävät kulmat $\alpha = LOX$, $\beta = LOY$, mitkä se tekee koordinaati-akselien positivisen suunnan kanssa. P-pisteestä vedämme akselien suuntaisia suoria, jotka leikkaavat akseleista osat OM ja ON. Määrätkäämme nyt näiden osain projektionit suoralla OL.

Jos piste P on y akselin oikealla puolella (ensimmäisessä- tahi neljännessä akselikulmassa), niin on $OM = +x$, kulma $MOL = \alpha$ ja siis OM-matkan projektioni OL:llä $= x \cos \alpha$. Jos sitä vastoin P on y-akselin vasemmalla puolella (toisessa tahi kolmannessa akselikulmassa), niin on $OM = -x$, kulma $MOL = 180^\circ - \alpha$ ja siis OM-matkan projektioni $= -x \cos(180^\circ - \alpha) = +x \cos \alpha$. Kummassakin tapauksessa siis $x \cos \alpha$ lausuu OM:n projektionin suoralla OL. Mitä suoraan ON tulee, niin on meidän tarkkaaminen onko P-piste x-akselin ylä- tai alapuolella. Edellisessä tapauksessa on $ON = +y$, kulma $NOL = \beta$ ja ON:n projektioni OL:llä siis $= y \cos \beta$; jälkimmäisessä tapauksessa on $ON = -y$, kulma $NOL = 180^\circ - \beta$ ja ON:n projektioni $= -y \cos(180^\circ - \beta) = +y \cos \beta$. Siis on ON:n projektioni kummassakin tapauksessa $y \cos \beta$.

Koska nyt MP on samansuuntainen ja yhtäsuuri kuin ON ja näillä suorilla siis (6 §) on yhtä suuret projektionit, niin lausuu summa $x \cos \alpha + y \cos \beta$ kaikissa tapauksissa (s. o. olkoon P-piste missä akselikulmassa tahansa) koordinaati-polygonin OMP projektionin suoralla OL. Tiedämmepä toisaalta (6 §), että murtoviivalla OMP on sama projektioni kuin suoralla OP; siitä saadaan seuraava tärkeä teoreema:

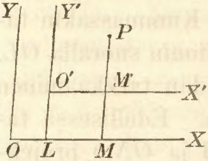
Jos originin ja jonkun pisteen (x, y) välimatka projicioidaan suoralle, joka koordinaati-akselien kanssa tekee kulmat α, β, niin on projektioni suuruudelleen sekä merkilleen $= x \cos \alpha + y \cos \beta$.

OL on tässä kulkenut originin kautta, mutta koska (6 §) projektionit yhdensuuntaisille viivoille ovat yhtä suuret, niin pitää ylläoleva teoreema paikkansa, olkoon OL-suoran suunta mikä hyvänsä.

10. Koordinaatien muutos. Usein on tarpeellista tuntea molemmanpuoliset suhteet saman pisteen koordinaatien välillä eri koordinaatistoissa, ja tämä saadaan tietää koordinaatien muutoksella. Tässä on tutkittavina kolme eri tapausta.

1:o Originin siirto. — Olkoot $x\ (= OM)$, $y\ (= MP)$ koordinaateja pisteelle P suoraviivaisessa koordinaatistossa OX, OY. Siirtyköön sitten tämä koordinaatisto itsensä suunnaisesti pisteesen O', jonka koordinaatit olkoot $a\ (= OL)$, $b\ (= LO')$. Haettakoon nyt P-pisteen koordinaatit $x'\ (= O'M')$, $y'\ (= M'P)$ uudessa koordinaatistossa.

Kuva 4.



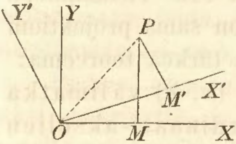
Kun y-akseli on siirtynyt asemastansa OY asemaan $O'Y'$, on P-pisteen abscissa vähentynyt suureella a; niin muodoin on uusi abscissa $x' = x - a$. Samoin on x-akselin siirtymisen kautta asemasta OX asemaan $O'X'$ ordinaata vähennyt suureella b, ja siis on uusi ordinaata $y' = y - b$. Alkuperäisten ja uusien koordinaatien välille saamme siis seuraavat kaavat:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned}\right\}, \text{ eli } \left.\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned}\right\},$$

ja nämä ovat voimassa, olkoon koordinaateilla mitkä positiviset tahi negativiset arvot tahansa.

2:o Akselien suuntain muutos. — Tässä tarkastamme vaan sitä tapausta, jolloin suorakulmainen koordinaatisto (OX, OY) vaihtuu toiseksi, suora- tai vinokulmaiseksi koordinaatistoksi (OX', OY') samalla originillä. P-pisteen koordinaatit (OM, MP) edellisessä systeemassa merkitsemme: x, y, ja saman pisteen koordinaatit $(OM', M'P)$ uudessa systeemassa: x', y'. Jälkimmäisen systeeman määräämiseksi tulee tuntea ne kulmat, jotka uudet akselit OX', OY' tekevät alkuperäisen abscissa-akselin OX kanssa. Merkitsemme nämä kulmat $\alpha = XOX'$, $\beta = XOY'$, pitäen suureita α ja β positivisina tai negativisina sen mukaan kuin niiden arvellaan syntyneen OX-akselin positivisen tai negativisen kääntymisen kautta (4 §). Ne kulmat taas, jotka uudet akselit tekevät OY:n kanssa, ovat $\alpha - 90^0$, $\beta - 90^0$, kun tässäkin sovimme pitämään niitä positivisina tai negativisina OY-akselin positivisen tai negativisen kääntymisen mukaan.

Kuva 5.



Saadaksemme nyt suureet x ja y lausutuiksi suureilla x' ja y', vertaamme vaan toisiinsa suoran OP ja murtoviivan $OM'P$ projektionit akseleilla OX ja OY. OP-suoran projektionit näillä akseleilla ovat suorastaan x ja y. $OM'P$:n projektioni OX:llä on taas $x' \cos\alpha + y' \cos\beta$ ja OY:llä $x' \cos(\alpha - 90^0) + y' \cos(\beta - 90^0) = x' \sin\alpha + y' \sin\beta$, koska

OX tekee kulmat α, β ja OY kulmat $\alpha - 90^0$, $\beta - 90^0$ koordinaati-akselien OX', OY' kanssa (9 §). Niinmuodoin tulee

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \sin\beta.$$

Eliminoituamme näistä yhtälöistä vuorotellen suureet x' ja y' saadaan

$$x \sin\beta - y \cos\beta = x' (\sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha) = x' \sin(\beta - \alpha),$$
$$-x \sin\alpha + y \cos\alpha = y' (\sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha) = y' \sin(\beta - \alpha).$$

Mutta $\beta - \alpha$ on yhtäsuuri kuin uusien koordinaati-akselien välinen kulma $X'OY'$; olkoon se nimeltä θ, niin saadaan

$$x' = \frac{x \sin\beta - y \cos\beta}{\sin\theta},$$
$$y' = \frac{-x \sin\alpha + y \cos\alpha}{\sin\theta}.$$

Kumpaisenkin koordinaatiston ollessa suorakulmaisena, on $\beta = 90^0 + \alpha$, $\theta = 90^0$; edelliset kaavat muodostuvat silloin seuraaviksi:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \qquad x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \qquad y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha.$$

3:o Suoraviivaisten koordinaatien vaihdos polaarisiksi ja päinvastoin. — P-pisteen asema (kuva 3) määrätään toiselta puolen suuntais-koordinaateilla $x = OM$, $y = MP$, toiselta puolen polaarisilla koordinaateilla $r = OP$, $v = POX$. Olkoot koordinaati-akselit aluksi kohtisuoria toisillensa; silloin saadaan suorakulmaisesta kolmiosta POM

$$x = r \cos v, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$y = r \sin v, \quad \text{tang}\, v = \frac{y}{x}.$$

Saadaksemme vastaavat kaavat suuntais-koordinaateille yleensä, kun akselikulma $\theta = XOY$ saattaa olla minkä-arvoinen hyvänsä, projicioidaan matka OP ja samoin murtoviiva OMP akselille OX; OP-matkan projektioni on $r \cos v$, OMP:n projektioni taas (9 §) on $x + y \cos\theta$, koska x-akseli tekee OX-suoran kanssa kulman 0 ja y-akseli kulman θ. Koska nyt nämä projektionit (6 §) ovat yhtä suuret, niin saadaan

$$r \cos v = x + y \cos\theta.$$

Kun taas samat viivat *OP* ja *OMP* projicioidaan viivalle, joka on kohtisuora x-akselille, ja huomataan, että tämä kohtisuora tekee *OP*:n kanssa kulman $90^0 - v$ sekä x- ja y-akselien kanssa erikseen kulmat 90^0 ja $90^0 - \theta$, niin saadaan toiselta puolen $r \cos(90^0 - v) = x \cos 90^0 + y \cos(90^0 - \theta)$, se on

$$r \sin v = y \sin \theta.$$

Korotettuamme viimeksi saadut kaavat neliöihin, laskettuamme ne sitten yhteen ja muistettuamme että $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, saamme

$$r^2 = x^2 + 2xy \cos \theta + y^2.$$

Kun taas samoista kahdesta kaavasta jälkimmäinen jaetaan edellisellä ja muistetaan että $\frac{\sin v}{\cos v} = \operatorname{tang} v$, niin tulee

$$\operatorname{tang} v = \frac{y \sin \theta}{x + y \cos \theta}.$$

Polaariset koordinaatit r ja v ovat siis lausutut vinokulmaisilla koordinaateilla x ja y. Päinvastoin saisimme viimeksi mainitut lausutuiksi polaarisilla, jos ratkaisisimme samat kaavat x- ja y-suureiden suhteen.

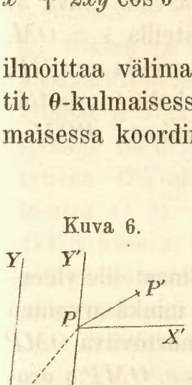
11. Kahden pisteen väli. Äsken saatu kaava $r^2 = x^2 + 2xy \cos \theta + y^2$ eli

$$r = \sqrt{x^2 + 2xy \cos \theta + y^2}$$

ilmoittaa välimatkan originista pisteesen P, jonka koordinaatit θ-kulmaisessa koordinaatistossa ovat x ja y. Suorakulmaisessa koordinaatistossa on $\theta = 90^0$, $\cos \theta = 0$ ja siis

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Kuva 6.



Näiden kaavain johdolla saapi määrätyksi matkan minkä kahden pisteen (P ja P') välillä hyvänsä, kun vaan niiden koordinaatit x, y ja x' y' ovat tunnetut. Otetaan nimittäin piste P originiksi uudelle koordinaatistolle, jossa akselit ovat saman suuntaisia kuin edellisessäkin; silloin saadaan koordinaateiksi pisteelle P' (10 §, 1:o) $x' - x$, $y' - y$. P'-pisteen ja uuden originin (P) välinen d-matka θ-kulmaisessa koordinaatistossa on siis

$$d = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + 2(x' - x)(y' - y)\cos\theta};$$

ja jos $\theta = 90^0$, siis koordinaatit suorakulmaisia, niin muuttuu edellinen kaava seuraavaksi:

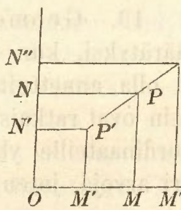
$$d = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

12. Haettakoon koordinaatit pisteelle, joka jakaa annetun suoran määrätyssä suhteessa. — Olkoot P' ja P'' kaksi pistettä, joiden koordinaatit x', y' ja x'', y'' ovat tunnetut, ja P kolmas piste, joka jakaa $P'P''$-matkan niin että

$$PP' : PP'' = m : n;$$

haettakoon P-pisteen koordinaatit x, y.

Kuva 7.



Jos mainituista kolmesta pisteestä vedetään akselien suuntaisia suoria, niin jakauvat akselitkin samassa suhteessa kuin suora $P'P''$. Siis on

$$MM' : MM'' = m : n,$$
$$NN' : NN'' = m : n.$$

Kuvasta näkyy, että $MM' = x - x'$, $MM'' = x'' - x$, ja niin on aina, kun suunta $P'P''$ tekee terävän kulman x-akselin positivisen suunnan kanssa. Jos mainittu kulma olisi tylsä, niin olisi $-MM' = x - x'$, $-MM' = x'' - x$. Samoin saadaan $NN' = y - y'$, $NN'' = y'' - y$ tahi myös $-NN' = y - y'$, $-NN'' = y'' - y$, aina sitä myöten kuin $P'P''$ tekee terävän tahi tylsän kulman y-akselin kanssa. Kummassakin tapauksessa on siis

$$x - x' : x'' - x = m : n,$$
$$y - y' : y'' - y = m : n,$$

josta

$$(1) \qquad x = \frac{mx'' + nx'}{m + n}, \quad y = \frac{my'' + ny'}{m + n}.$$

Jos olisi $m = n$, s. o. P olisi keskellä viivaa $P'P''$, niin saataisiin

$$x = \frac{x' + x''}{2}, \quad y = \frac{y' + y''}{2},$$

josta näkyy, että koordinaatit määrätyn suoran keskukselle ovat aritmetillisiä keskiarvoja vastaavista pääpisteiden koordinaateista.

Tutkittakoon nyt se tapaus, jossa piste $P(x, y)$ on ulkopuolella pisteitä P' ja P'', suoran $P'P''$ pitennyksellä toisaanne tai toisaanne, mutta semmoisen matkan päässä, että $PP' : PP'' = m : n$. Kummassakin tapauksessa saamme silloin

$$x - x' : x - x'' = m : n,$$
$$y - y' : y - y'' = m : n,$$

joista

$$(2) \qquad x = \frac{mx'' - nx'}{m - n}, \quad y = \frac{my'' - ny'}{m - n}.$$

Näiden ja edellisten kaavojen (1) eroitus on vaan se, että suureiden x' ja x'' koefficientit edellisissä ovat yhdenmerkkisiä, jälkimmäisissä erinmerkkisiä.

13. Geometrilliset urat. Pisteen asema saadaan määrätyksi, kun tunnetaan sen koordinaatit. Nämä saattavat olla annettuina suorastaan tahi kahdella yhtälöllä, jotka ensin ovat ratkaistavat. Jälkimmäisessä tapauksessa saadaan koordinaateille yhtälöjen astelukua myöten yksi tai useampi pari arvoja, joten tulee määrätyksi yleensä yksi tai useampi piste.

Mutta jos pisteen koordinaatit olisivat annetut ainoastaan yhdellä yhtälöllä, niin ei sen asemaa täydellisesti saisikaan määrätyksi. Silloinhan nimittäin saattaisi mielinmäärin antaa arvoja toiselle koordinaatille ja yhtälöstä johdattaa toisen vastaavat arvot. Semmoinen yhtälö sallii siis äärettömän monta ratkaisua, joista kukin, ollessaan vaan todellinen, määrää tasolla eri pisteen. Jos toinen koordinaati pannaan vaihtelemaan perättäisesti elikkä äärettömän pienin välikkein, niin ovat toisenkin koordinaatin perättäiset muutteet yleensä äärettömän pieniä; siten saadut pisteet muodostavat siis kokonaisen jakson elikkä viivan. Yksi yhtälö pisteen koordinaatien välillä merkitsee niin muodoin yleensä viivaa, ja silloin sanotaan tätä viivaa puheena olevan pisteen geometrilliseksi uraksi (tahi vaan uraksi).

Poikkeustapauksissa saattaa kumminkin sattua, ettei yhtälöllä ole yhtään todellista juurta taikka että sillä on ainoastaan rajoitettu luku juuria; edellisessä tapauksessa ei sillä ole mitään geometrillista merkitystä, jälkimmäisessä se merkitsee joukkoa yksinäisiä pisteitä.

Esimerkki. Yhtälöä

$$x^2 + y^2 = -a^2$$

ei saa toteutetuksi millään x- ja y-suureiden todellisilla arvoilla, koska vasemman jäsenen, ollen kahden neliön summa, tulee aina olla positivisen, jota vastoin oikea jäsen on negativinen. Sillä ei siis ole mitään geometrillistä merkitystä. Yhtälö

$$x^2 + y^2 = 0$$

ei salli muita todellisia arvoja tuntemattomille kuin $x = 0$, $y = 0$: se tietää siis pistettä, nimittäin originia. Sitä vastoin yhtälö

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

kun koordinaatisto on suorakulmainen, toteutuu jokaisen sellaisen pisteen koordinaatien arvolla, jonka välimatka originistä on a; se osoittaa siis a-säteistä pyöriötä originin ympärillä.

Päin vastoin on kullakin, annetun lain mukaan tehdyllä, viivalla yhtälönsä, joka osoittaa *koordinaatien keskinäisen suhteen missä viivan pisteessä hyvänsä* ja jonka saattaa johdattaa viivan geometrillisestä määrityksestä. Viiva on algebrallinen tahi transcendettinen aina sen mukaan, minkälaatuinen sen yhtälö on suoraviivaisissa koordinaateissa. Algebralliset viivat taas saattavat olla yksi- kaksi-, kolme- tahi useampi-asteisia.

Viivat, puettuina algebrallisiin yhtälöihin — siinä tutkimus-ala analytilliselle geometrialle in plano. Ja siinä on sillä kahta laatua tehtäviä: 1:o johdattaa viivan yhtälö sen geometrillisesta määrityksestä, 2:o tutkia minlaatuinen se viiva on, jonka yhtälö on annettu.

Kolmas Luku.

Suora.

14. Ura pisteelle, jonka koordinaatit ovat annetut yksi-asteisessa yhtälössä. — Yksi-asteinen yhtälö kahdella tuntemattomalla x, y on muodoltaan yleensä

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

jossa koefficientit A, B, C saattavat ylipäänsä olla minkä arvoisia tahansa. (Huomautettakoon tässä kumminkin kohta, etteivät A ja B yht'aikaa saata olla $=$ nolla, sillä silloin täytyisi myöskin olla $C=0$ ja yhtälö siis katoaisi). Ratkaistuna y-suureen suhteen antaa yhtälö (1)

$$y=\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

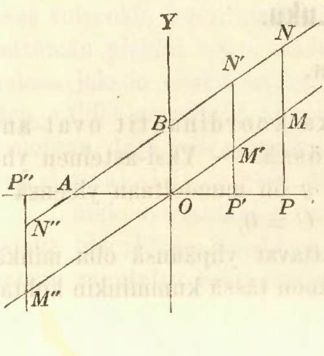
ja jos lyhyyden vuoksi merkitään $-\frac{A}{B}=m, -\frac{C}{B}=b$, saadaan

$$y=mx+b.$$

Jos $C=0$, niin saamme ainoastaan $y=mx$, ja jos $A=0$, niin on yhtälön muoto $y=b$. Jos olisi $B=0$, niin ei yhtälöä enää voisikaan ratkaista y-suureen suhteen; mutta siinä tapauksessa saa x-suure yhtälöstä (1) määrätyn arvon ja yhtälö ottaa muodon $x=a$. Otamme erittäin tutkiaksemme geometrillisen merkityksen näillä neljällä yhtälöllä $x=a$, $y=b$, $y=mx$, $y=mx+b$, jotka ovat erikoistapauksia yleisestä yksiasteisesta yhtälöstä.

Yhtälö $x=a$ merkitsee jokaista pistettä, jonka abscissa on a, olkoon sen ordinaata mikä hyvänsä, siis jokaista pistettä sillä suoralla, joka on y-akselin suuntainen ja leikkaa x-akselia a-matkan päässä oikealla tai vasemmalla originistä, sen mukaan kuin a on positivinen tai negativinen; $x=a$ on siis semmoisen suoran yhtälö. Sitä vastoin yhtälö $y=b$ tietää x-akselin suuntaista suoraa, joka leikkaa y-akselia b-matkan päässä originistä, toisin sanoen pisteessä, jonka ordinaata on b. Kun a ja b katoavat, tulee näistä yhtälöistä $x=0$, $y=0$, joista edellinen merkitsee itse y-akselia, jälkimmäinen itse x-akselia.

Kuva 8.



Yhtälö $y=mx$ eli $\frac{y}{x}=m$ merkitsee piste-jaksoa (pisteistöä), jossa eri pisteet M, M', M'', ... ovat niin sijoitetut, että kullakin on ordinaatan ja abscissan suhde yhtä suuri, nimittäin m. Jos m on positivinen, niin ovat x ja y yhdenmerkkisiä ja pisteistö kulkee siis joko ensimmäisen akselikulman kautta, jossa kumpikin koordinaati on positivinen, taikka kolmannen kautta, jossa kumpikin on negativinen. Vedetään $MP, M'P', M''P''$ y-akselin suuntaisiksi ja yhdistetään O kuhunkin pisteistä M, M', M''; silloin on

$$MP : PO = M'P' : P'O = M''P'' : P''O = \ldots,$$

josta seuraa, että kolmiot OMP, $OM'P'$, $OM''P''$,... ovat yhdenmukaiset ja eri kolmioiden kulmat O-pisteessä yhtä suuret. Pisteistö M, M', M'',... muodostaa siis suoran, joka kulkee originin kautta.

Kun m on negativinen, huomataan samalla muotoa, että kaikki pisteet, joiden koordinaatit täyttävät ehdon $y = mx$, ovat suoralla, joka kulkee originin kautta toisessa tai neljännessä akselikulmassa. Yhtälö $y = mx$ merkitsee siis kummassakin tapauksessa originin kautta kulkevaa suoraa.

Saadaksemme vihdoin selville, mitä yhtälö $y = mx + b$, merkitsee, verratkaamme sitä yhtälöön $y = mx$. Silloin näemme, että samoja abscissoja vastaavaiset ordinaatat eroavat toisistansa ainoastaan vakinaisella suureella b. Esittääksemme siis geometrillisesti yhtälöä $y = mx + b$, ei tarvitse muuta kuin b-suureen merkin mukaan joko lisätä tai vähentää kaikki edellisen suoran $(y = mx)$ ordinaatat vakinaisilla suureilla MN, $M'N'$, $M''N''$,..., jotka ovat yhtäsuuret kuin b:n ominainen arvo. Täten saadut pisteet N, N', N'',... muodostavat nähtävästi suoran, joka on samansuuntainen kuin MM''.

On siis todistettu, että kukin yksi-asteinen yhtälö x- ja y-suureiden välillä edustaa suoraa.

15. Yhtälön hakeminen suoralle. Kun suora on y-akselin suuntainen, on sen kaikilla pisteillä sama abscissa a; sen yhtälö on siis $x = a$. Samoin on $y = b$ yhtälönä suoralle, joka on x-akselin suuntainen.

Tutkittakoon senjälkeen originin kautta kulkeva suora MM'' (kuva 8). Kaikilla tämän suoran pisteillä on ordinaatan ja abscissan suhde yhtä suuri. Jos m merkitsee tätä vakinaista suhdetta ja x, y koordinaateja mille pisteelle hyvänsä sanotulla suoralla MM'', niin on siis $\frac{y}{x} = m$, eli

$$y = mx.$$

Koefficientti m riippuu suoran suunnasta. Suoran ollessa ensimmäisessä ja kolmannessa akselikulmassa, on m positivinen, sillä x ja y ovat silloin yhdenmerkkisiä; mutta kun suora kulkee toisessa ja neljännessä akselikulmassa, ovat x ja y erinmerkkisiä ja m silloin negativinen. Suoran langetessa yhteen x-akselin kanssa, on $m = 0$; sen yhtyessä y-akseliin, on $m = \infty$. Suoralla, joka jakaa XOY kulman kahteen yhtäsuureen osaan on $m = 1$; mutta jos se jakaa $X'OY$ kulman kahtia, on $m = -1$ j. n. e.

Nyt on vielä haettavana yhtälö suoralle NN'', jolla saattaa olla koordinaatistossa mimmoinen asema hyvänsä. Tämä suora leikkaa y-akselia eräässä pisteessä B, jonka ordinaata, oli se positivinen tahi negativinen, merkittäköön kirjaimella b. Olkoot vielä x, y koordinaateja pisteelle N, joka on otettu mielinmäärin suoralla NN''. Originin kautta vedetään suora MM'' samansuuntaiseksi kuin NN'' ja N-pisteestä suora NP samansuuntaiseksi kuin y-akseli; ordinaata pisteelle M, jossa nämä suorat leikkaavat toisensa, on nähtävästi $y-b$ ja sen abscissa x. Mutta MM''-suoran kaikilla pisteillä on ordinaatan ja abscissan suhde sama; nimitetään se m, niin saadaan $\frac{y-b}{x} = m$, eli $y - b = mx$, josta

$$(2) \qquad y = mx + b.$$

Koska x ja y tässä ovat koordinaateja mille pisteelle hyvänsä suoralla NN'', niin tämä onkin yhtälö sanotulle suoralle. Tästä näemme, että *jokaisen suoran saattaa lausua yksiasteisella yhtälöllä x- ja y- suureiden välillä.*

16. *Koefficienttien merkitys.* — Viimeksi saadussa suoran yleisessä yhtälössä $y = mx + b$ on kaksi vakinaista, m ja b, jotka riippuvat ainoastaan suoran asemasta ja joitten geometrillinen merkitys tunnetaan jo edellisestä; b on nimittäin ordinaata sille pisteelle, jossa suora leikkaa y-akselia, m on taas vakinainen suhde $(MP : PO)$ ordinaatan ja abscissan välillä suoralla MM'', joka originin kautta vedetään annetun suoran suuntaiseksi.

Suoran ja x-akselin välinen kulma NAX, luettuna x-akselin positivisesta suunnasta ylöspäin, olkoon nimeltään φ ja koordinaati-akselien välinen kulma XOY nimeltään θ; meillä on siis

$$m=\frac{MP}{PO}=\frac{BO}{OA}=\frac{\sin OAB}{\sin OBA'}$$

se on:

$$(3) \qquad m=\frac{\sin\varphi}{\sin(\theta-\varphi)}.$$

Tästä näkyy, että vakinainen m riippuu ainoastaan kulmasta φ, jonka välillensä tekevät suora ja x-akseli. Päinvastoin saattaa tämän kulman laskea, kun koefficientti m on tunnettu. Edelliselle kaavalle nimittäin saattaa antaa seuraavan muodon

$$\sin\varphi=m\sin(\theta-\varphi)=m(\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi)$$

eli

$$(1+m\cos\theta)\sin\varphi=m\sin\theta\cos\varphi;$$

jaettuamme suureella $\cos\varphi$ ja huomattuamme että $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\operatorname{tang}\varphi$, saamme

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\varphi=\frac{m\sin\theta}{1+m\cos\theta}.$$

Koska siis koefficientti m määrää suoran viivan suunnan elikkä sen kulman, jonka suora tekee x-akselin kanssa, on se saanut nimekseen kulmakoefficientti.

Kun akselikulma θ on 90^0, niin muodostuu kaava (3) seuraavaksi

$$m=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\operatorname{tang}\varphi;$$

suorakulmaisessa koordinaatistossa merkitsee siis kulmakoefficientti m tangenttia suoran ja x-akselin väliselle kulmalle.

17. Yhdensuuntaiset suorat. — Kahdella yhdensuuntaisella suoralla on yhtäsuuret kulmakoefficientit; sillä ne kun tekevät yhtä suuria φ-kulmia x-akselin kanssa, niin kumpaisenkin suoran m saapi saman arvon kaavasta (3).

Päinvastoin ovat kaksi suoraa yhdensuuntaiset, kun niiden kulmakoefficientit ovat yhtäsuuret, sillä kaava (4) antaa silloin samat arvot kulmalle φ. Yhtälöt $y = mx + b$ ja $y = m'x + b'$ edustavat kahta yhdensuuntaista suoraa, jos $m = m'$.

Tutkiaksemme yleensä yhdensuuntaisuutta kahdella suoralla, jotka on lausuttu kahdella yksiasteisella yhtälöllä

$$Ax + By + C = 0,\ A'x + B'y + C' = 0,$$

ei huoli muuta kuin ratkaista kumpikin yhtälö y:n suhteen. Silloin saamme x-suureen koefficientiksi toisessa $-\frac{A}{B}$, toisessa $-\frac{A'}{B'}$, ja päätämme suorain olevan yhdensuuntaisten, jos

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'},$$

se on: jos x- ja y-suureiden koefficienteillä on toisiinsa sama suhde kummassakin yhtälössä.

18. **Suoran ja koordinaati-akselien yhteiset leikkauspisteet.** — Saadaksemme vedetyksi suoran, jonka yhtälö

$$Ax + By + C = 0$$

on annettu, on yksinkertaisinta hakea ne pisteet M, N, joissa suora leikkaa koordinaati-akselit. Koska koordinaatit suoran kullekin pisteelle toteuttavat annetun yhtälön, niin on asianlaita luonnollisesti sama siinäkin pisteessä M, jossa suora leikkaa x-akselin. Mutta tässä pisteessä on $y = 0$; silloin on yhtälö muodoltaan $Ax + C = 0$, josta saamme

$$x = -\frac{C}{A},$$

ja tämä siis on abscissan arvo pisteessä M. Pisteessä N taas, jossa suora leikkaa y-akselin, on $x = 0$; yhtälö muuttuu silloin seuraavaksi: $By + C = 0$ ja antaa

$$y = -\frac{C}{B},$$

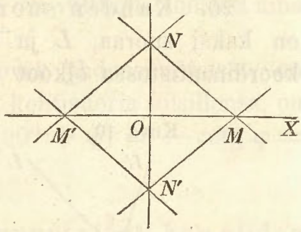
joka on ordinaatan vastaava arvo.

Pantakoon nyt lyhyyden vuoksi $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, joista $A = -\frac{C}{a}$, $B = -\frac{C}{b}$ ja sijoitettakoon nämä arvot A- ja B-suureiden sijaan yhtälössä $Ax + By + C = 0$; siten saadaan $-\frac{Cx}{a}-\frac{Cy}{b}+C=0$, elikkä, jaettuamme C:llä ja siirettyämme terminit:

$$(5) \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Tässä on uusi yleinen muoto suoran yhtälölle entisten, (1) ja (2), lisäksi. Siinä merkitsee a abscissaa pisteelle, jossa suora leikkaa x-akselin, b taas ordinaataa suoran ja y-akselin leikkauspisteelle. Toisin sanoen: a ja b ovat suoran leikkaamia osia koordinaati-akseleista, positivisia tai negativisia, sitä myöten kuin ne sattuvat olemaan akselien positivisessa tai negativisessa suunnassa.

Kuva 9.



Nimittäjät a ja b saattavat olla positivisia tai negativisia. Suoralla MN on $a=+OM$, $b=+ON$; suoralla $M'N$ on $a=-OM'$, $b=+ON$; suoralla $M'N'$ on $a=-OM'$, $b=-ON'$; suoralla MN' on $a=+OM$, $b=-ON'$.

Esim. 1. Vedettäköön suora, jonka yhtälö on

$$3x-5y+8=0.$$

Kun $y=0$, on $x=-\frac{8}{3}$; kun $x=0$, tulee $y=\frac{8}{5}$. Haettu suora leikkaa siis x-akselia $\frac{8}{3}$-suuruisen matkan päässä vasempaan originista ja y-akselia $\frac{8}{5}$-suuruisen matkan päässä originista ylöspäin.

Esim. 2. Haettakoon yhtälö suoralle, joka leikkaa koordinaatiakselit niin, että leikkauspisteen välimatka x-akselilla on 5 originista oikeaan ja y-akselilla 7 originista alaspäin. — Haettu yhtälö on $\frac{x}{5}-\frac{y}{7}=1$, eli sievennettynä

$$7x-5y-35=0.$$

19. **Kahden suoran leikkaupisteet.** — Olkoot

$$Ax+By+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0$$

kahden suoran yhtälöitä. Koska leikkauspiste kuuluu kumpaankin suoraan, niin täytyy sen koordinaatien toteuttaa kumpaisenkin suoran yhtälö. Tätä pistettä määrätäksemme ei siis huoli muuta kuin hakea ne arvot suureille x ja y, jotka yht'aikaa toteuttavat molemmat annetut yhtälöt. Ratkaistuamme ne, saamme seuraavat lausekkeet leikkauspisteen koordinaateille:

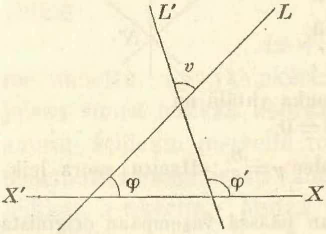
$$x = \frac{BC' - B'C}{AB' - A'B'}\quad y = \frac{CA' - C'A}{AB' - A'B}.$$

Jos nimittäjä $AB' - A'B = 0$, niin ovat x ja y äärettömiä, ja tämä merkitsee suorain yhtyvän äärettömän kaukana, s. o. olevan yhdensuuntaisia. Ehtona suorain yhdensuuntaisuudelle on siis $AB' - A'B = 0$ elikkä $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$. Samaan päätökseen olemme jo tulleet ennenkin, 17 §:ssä.

20. Kahden suoran välinen kulma. — Annettuina on kaksi suoraa, L ja L', joiden yhtälöt suorakulmaisessa koordinaatistossa olkoot

$$y = mx + b,$$
$$y = m'x + b';$$

Kuva 10.



φ ja φ' ovat kulmia, joita puheenaolevat suorat tekevät x-akselin kanssa. Silloin on 16 §:n mukaan $m = \text{tang}\,\varphi$, $m' = \text{tang}\,\varphi'$. Suorain välinen kulma v on, kuten kuvasta näkyy, yhtäsuuri kuin $\varphi' - \varphi$; siis saadaan*)

$$\text{tang}\,v = \text{tang}\,(\varphi' - \varphi) = \frac{\text{tang}\,\varphi' - \text{tang}\,\varphi}{1 + \text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\varphi'},$$

se on:

$$\text{(6)}\qquad \text{tang}\,v = \frac{m' - m}{1 + mm'},$$

josta v-kulman arvo saadaan, kun m ja m' ovat tunnetut.

---

*) Tunnettujen trigonometrillisten kaavain mukaan on nimittäin

$$\text{tang}\,(\varphi' - \varphi) = \frac{\sin(\varphi' - \varphi)}{\cos(\varphi' - \varphi)} = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi - \cos\varphi'\sin\varphi}{\cos\varphi'\cos\varphi + \sin\varphi'\sin\varphi}.$$

Kun osoittaja ja nimittäjä jaetaan suureella $\cos\varphi\cos\varphi'$, saadaan siitä

$$\text{tang}\,(\varphi' - \varphi) = \frac{\frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1 + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'}} = \frac{\text{tang}\,\varphi' - \text{tang}\,\varphi}{1 + \text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\varphi'}.$$

Muist. Tämän v-kulman saattaa aina ottaa rajoissa — 90^0 ja $+90^0$ ja sen arvo on oleva positivinen tai negativinen sitä myöten kuin $\tang v$ on positivinen tahi negativinen. Edellisessä tapauksessa arvellaan L-suoran kääntyneen positivisesti, jälkimmäisessä negativisesti siinä pisteessä, jossa se leikkaa suoraa L' (4 §).

Jos $m = m'$, niin katoaa kaavassa (6) osoittaja, joten saadaan $\tang v = 0$, josta $v = 0$; suorat ovat siis silloin yhdensuuntaisia. Jos sitä vastoin nimittäjä katoaa, se on jos $1 + mm' = 0$ eli $m' = -\frac{1}{m}$, tulee $\tang v = \infty$ ja $v = 90^0$; silloin ovat suorat kohtisuoria toisillensa. Osoittaja ja nimittäjä eivät voi kadota yht'aikaa, sillä tulo mm' on välttämättömästi aina positivinen, niin usein kuin $m = m'$.

Ja päinvastoin: jos suorat ovat yhdensuuntaiset, on $\varphi = \varphi'$ ja siis $m = m'$; jos ne ovat kohtisuoria toisillensa, on $\varphi' = 90^0 + \varphi$, $\tang \varphi' = \tang (90^0 + \varphi) = -\cotg \varphi = -\frac{1}{\tang \varphi}$, se on $m' = -\frac{1}{m}$. Siis:

Kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset, kun niiden kulmakoefficientit ovat yhtäsuuret; ne ovat kohtisuorat toisillensa, kun toisen kulmakoefficientti on yhtäsuuri kuin toisen vastavuoroinen (ylösalasin käännetty) arvo vastaisella merkillä.

Edellinen osa tätä väitettä soveltuu vinokulmaisiinkin koordinaateihin, niinkuin 17 § näyttää; jälkimmäinen, kohtisuorista viivoista, on sitä vastoin voimassa ainoastaan suorakulmaisessa koordinaatistossa.

Esim. Haettakoon kulma, jonka tekevät välillensä kaksi suoraa $2x - 3y + 5 = 0$ ja $6x + y - 4 = 0$. — Muodostettuamme nämä yhtälöt seuraaviksi

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3},\quad y = -6x + 4,$$

saamme $m = \frac{2}{3}$, $m' = -6$, josta $\tang v = \frac{20}{9}$ ja $v = 65^0 46' 20''$.

21. **Yhtälö annetun pisteen kautta kulkevalle suoralle.** — Annetun pisteen koordinaatit olkoot x', y'. Suoran yhtälölle saattaa 15 §:n mukaan aina antaa muodon

$y = mx + b$. Olkoon nyt tämä yhtälö annetun suoran edustajana; tehtävänä on siis joko määrätä tai eliminoida tuntemattomat koefficientit m, b. Kun nyt, ehdotuksen mukaan, x', y' ovat koordinaateja eräälle saman suoran pisteelle, niin täytyy niiden, pantuina x- ja y-suureiden sijaan, toteuttaa mainittu yhtälö. Meillä on siis yht'aikaa

$$y = mx + b,$$
$$y' = mx' + b,$$

joista

$$(7) \qquad y - y' = m(x - x').$$

Siinä yhtälö, joka pitää paikkansa minkä (x, y)-pisteen suhteen hyvänsä haetulla suoralla ja siis yleensä edustaa pisteen (x', y') kautta kulkevaa suoraa.

Tässä yhtälössä on vielä kulmakoefficientti aivan epämääräinen, ja sehän olikin jo ennakolta arvattava, sillä yhden pisteen kautta saattaa vetää äärettömän monta suoraa, jotka x-akselin kanssa tekevät erinsuuria kulmia.

Mutta tämä epämääräisyys poistuu, jos esim. tehdään semmoinen ehto, että suoran tulee olla samansuuntaisen kuin annettu suora $y = m'x + b'$ taikka kohtisuoran sille; edellisessä tapauksessa on nimittäin $m = m'$, jälkimmäisessä taas, kun koordinaatisto on suorakulmainen, $m = -\frac{1}{m'}$.

22. Y h t ä l ö s u o r a l l e, j o k a k u l k e e k a h d e n a n n e t u n p i s t e e n k a u t t a. — Olkoot x', y' koordinaateja toiselle sekä x'', y'' toiselle pisteelle, ja olkoon $y = mx + b$ haetun suoran yhtälö. Tämän yhtälön täytyy olla voimassa, jos suureiden x, y sijaan pannaan joko x', y' tahi x'', y''. Meillä on siis taaskin yht'aikaa

$$y = mx + b,$$
$$y' = mx' + b,$$
$$y'' = mx'' + b.$$

Näistä kolmesta yhtälöstä saadaan tuntemattomat m ja b eliminoiduiksi ja jäljelle jääpi yhtälö etsittyjen x, y sekä annettujen x', y', x'', y'' välillä. Eliminoidaksemme mainitut m ja b, otetaan pois toinen yhtälö ensimmäisestä ja kolmas toisesta, joten saadaan

$$y - y' = m(x - x'),$$
$$y' - y'' = m(x' - x'').$$

Näistä antaa jälkimmäinen

$$m = \frac{y' - y''}{x' - x''},$$

joten edellisestä tulee

$$(8) \qquad y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'),$$

ja siinä haetun suoran yhtälö. Tässä on erittäin huomattava se arvo, jonka olemme saaneet kulmakoefficientille m.

Esim. Yhtälö suoralle, joka kulkee pisteitten $(-\frac{3}{4}, 1)$ ja $(2, \frac{1}{2})$ kautta, on sievennettynä

$$4x + 22y = 19.$$

23. **Yhtälö suoralle, joka kulkee kahden annetun suoran leikkauspisteen kautta.**

Puheena-olevan yhtälön saisimme 21 §:n mukaan, määrättyämme ensin 19 §:n jälkeen leikkauspisteen koordinaatit. Mutta saa sen välittömästikin seuraavalla tavalla.

Jos yhtälöt

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$

edustavat kahta annettua suoraa L, L', niin

$$(9) \qquad Ax + By + C + k(A'x + B'y + C') = 0$$

on yhtälönä kolmannelle suoralle, joka kulkee kahden ensinmainitun leikkauspisteen kautta. Tämä yhtälö on nimittäin yksiasteinen ja edustaa siis suoraa; sen toteuttavat sitä paitsi ne x- ja y-suureiden arvot, jotka yht'aikaa tekevät $Ax + By + C = 0$ ja $A'x + B'y + C' = 0$, elikkä koordinaatit annettujen suorain leikkauspisteelle.

Suunnan uudelle suoralle määrää muutoin kulmakoefficientti k; k-suureen saadessa erillaisia arvoja, saattaa yhtälö (9) perättäin merkitä kaikki suorat, jotka kulkevat suorain L ja L' leikkauspisteen kautta; sillä jos yhtälö ratkaistaan y-suureen suhteen, saadaan kulmakoefficientille m lausekkeeksi

$$m = -\frac{A + kA'}{B + kB'},$$

joka, kun k-suure määrätään sopivalla tavalla, saattaa saada minkä arvon tahansa.

Esim. 1. Haettu suora kulkekoon originin kautta. — Yhtälö (9) toteutuu nyt arvoilla $x=0, y=0$, jolloin täytyy olla $C+kC'=0$ ja siis $k=-\frac{C}{C'}$. Sijoitettuamme tämän yhtälöön (9), tulee

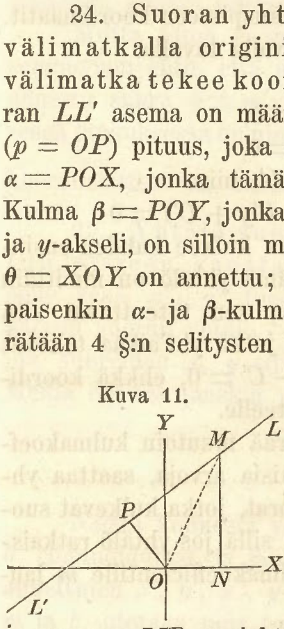
$$(AC'-A'C)x+(BC'-B'C)y=0.$$

Esim. 2. Haettu suora olkoon x-akselin suuntainen. — Tässä täytyy siis kulmakoefficientin olla $=0$, elikkä $A+kA'=0$, josta $k=-\frac{A}{A'}$. Sijoituksen jälkeen saadaan yhtälöstä (9)

$$(AB'-A'B)y+(AC'-A'C)=0.$$

24. **Suoran yhtälö, lausuttu sen kohtisuoralla välimatkalla originista sekä kulmilla, jotka tämä välimatka tekee koordinaati-akselien kanssa.** — Suoran LL' asema on määrätty, kun tunnetaan sen kohtisuoran ($p=OP$) pituus, joka siihen vedetään originista, sekä kulma $\alpha=POX$, jonka tämä kohtisuora tekee x-akselin kanssa. Kulma $\beta=POY$, jonka välillensä tekevät mainittu kohtisuora ja y-akseli, on silloin myöskin tunnettu, kun vaan akselikulma $\theta=XOY$ on annettu; sillä selvästihän on $\beta=\alpha-\theta$. Kumpaisenkin α- ja β-kulman positivisuus tai negativisuus määrätään 4 §:n selitysten mukaan.

Kuva 11.



Otetaan suoralla LL' mielinmäärin joku piste M, jonka koordinaatit olkoot x, y, ja vedetään MN saman suuntaiseksi kuin y-akseli. Siten saadaan murtoviiva $ONMP$, jonka projektioni suoralle OP on juuri itse kohtisuora p. Mutta viivan ONM projektioni on (9 §) $x\cos\alpha+y\cos\beta$ ja suoran MP projektioni on nolla; siis on $p=x\cos\alpha+y\cos\beta$ eli

(10) $$x \cos\alpha + y \cos\beta - p = 0.$$

Tämä yhtälö on tästäpuolin oleva perusmuotona suoran yhtälölle. Se voi edustaa mitä suoraa hyvänsä, jota vastoin yhtälöistä $y = mx + b$ ja $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ edellistä ei voi käyttää, kun viiva on y-akselin suuntainen, jälkimmäistä, kun suora kulkee originin kautta.

25. Suureiden p, α, β määrääminen. — Jos suora on annettuna minkä muotoisella yhtälöllä hyvänsä

$$Ax + By + C = 0,$$

niin voidaan päinvastoin määrätä sen kohtisuora välimatka p originista sekä ne kulmat α, β, jotka tämä välimatka tekee koordinaati-akselien kanssa. Samaa suoraa edustaa nimittäin myöskin yhtälö

$$x \cos\alpha + y \cos\beta - p = 0.$$

Mutta nämä yhtälöt eivät saata olla yhtäpitäviä, jollei toisen koefficientit A, B, C ole samansuhteisia kuin toisenkin koefficientit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $-p$. Täytyy sen vuoksi löytyä sellaisen tekijän R, että edellinen yhtälö sillä kerrottuna saapi samat koefficientit kuin toinenkin. Saatamme sentähden panna

(11) $$\begin{cases} \cos\alpha = RA, \\ \cos\beta = RB, \\ -p = RC. \end{cases}$$

Nyt on vaan tekijä R määrättävänä.

Tavallisesti käytetään suorakulmaisia koordinaateja, jolloin on $\beta = \alpha - 90^0$, $\cos\beta = \sin\alpha$ sekä

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Sijoitettuamme tähän suureiden $\cos\alpha$ ja $\cos\beta$ edellä olevat arvot, saamme $R^2(A^2 + B^2) = 1$, josta

(12) $$R = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Yleensä, jos akselikulma θ on mimmoinen hyvänsä, on $\alpha - \beta = \theta$, ja silloin saadaan

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta = \sin^2\theta. \text{*)}$$

Kun tässä $\cos\alpha$ ja $\cos\beta$ sijöitetaan suureilla RA ja RB, niin tulee $R^2(A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta) = \sin^2\theta$, josta

$$(13) \qquad R = \pm \frac{\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}.$$

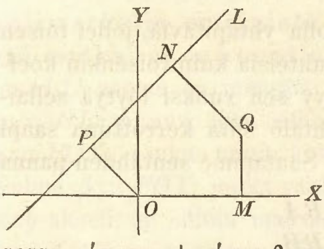
Löydettyämme nyt tällä tavoin sen tekijän, jolla kerrottuna yhtälö $Ax + By + C = 0$ saapi perusmuodon, voimme laskea suureet α, β ja p kaavoista (11). Kolmas näistä kaavoista $(-p = RC)$ osoittaa, että RC on negativinen, toisin sanoen, että R on otettuna C:n vastaisella merkillä, joten kaksinaisuus yhtälöissä (12) ja (13) katoaa.

26. Pisteen ja suoran välimatka. — Olkoon

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

perusmuotoinen yhtälö suoralle L; x', y' koordinaateja annetulle Q-pisteelle sekä δ pisteen ja suoran haettu välimatka. Vedetään OP ja QN kohtisuoriksi suoralle L sekä QM samansuuntaiseksi kuin y-akseli; silloin on $OP = p$ ja $QN = \delta$. Jos nyt umpinainen polygoni $OMQNPO$ projicioidaan suoralle OP, niin on summa sivujen projektioneista nolla. Murtoviivalle OMQ saadaan projektioniksi joka tapauksessa $x'\cos\alpha + y'\cos\beta$; suoran QN projektioni on $+\delta$, jos Q on samalla puolen L-suoraa kuin origini, muussa tapauksessa se on $-\delta$; NP-suoran projektioni on nolla ja PO-suoran projektioni $= -p$. Näiden kaikkien projektionien summa on

Kuva 12.



*) Yhtäläisyydestä $\alpha - \beta = \theta$ johdatetaan nimittäin perättäin

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos\theta,$$

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta = (\cos\theta - \cos\alpha\cos\beta)^2$$
$$= \cos^2\theta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta + \cos^2\alpha\cos^2\beta.$$

Mutta

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta = (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta)$$
$$= 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta;$$

siis:

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = \cos^2\theta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta,$$

josta

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta.$$

$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta \pm \delta - p = 0,$$

josta

(14) $$\mp \delta = x' \cos\alpha + y' \cos\beta - p.$$

Pisteen ja suoran välimatka saadaan siis, kun vasemmassa jäsenessä suoran perusmuotoista yhtälöä x ja y sijoitetaan annetun pisteen koordinaateilla. Siten saatu lauseke on negativinen, jos piste ja origini ovat samalla puolen suoraa, vaan positivinen, jos ne ovat eri puolilla sitä.

Suure $x \cos\alpha + y \cos\beta - p$ lausuu siis, merkkiä vaille, välimatkan pisteestä (x, y) siihen suoraan, jonka yhtälö on $x \cos\alpha + y \cos\beta - p = 0$.

27. Jos suoran yhtälö ei ole annettu perusmuotoisena, vaan jossakin muussa muodossa, esim.

$$Ax + By + C = 0,$$

niin tehdään se perusmuotoiseksi, kertomalla eräällä vakinaisella tekijällä R (25 §); silloin on $\cos\alpha = RA$, $\cos\beta = RB$, $-p = RC$, ja, olkoot x ja y minkä arvoisia tahansa,

$$x \cos\alpha + y \cos\beta - p = R(Ax + By + C).$$

Pisteen (x', y') ja annetun suoran välimatka on siis kaavan (14) mukaan

(15) $$\mp \delta = R(Ax' + By' + C).$$

Merkistä on tässä huomattava samaa kuin yhtälössä (14).

Suorakulmaisessa koordinaatistossa on $R = \pm \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ja siis

(16) $$\delta = \pm \frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

s. o. haettava välimatka saadaan, kun viivan yhtälön vasen jäsen, johon on sijoitettu annetun pisteen koordinaatit, jaetaan suureella $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Yhtälö (15) näyttää, että kohtisuorat välimatkat kahdesta pisteestä (x', y'), (x'', y'') suoraan $Ax + By + C = 0$ ovat toisiinsa samassa suhteessa kuin trinomit $Ax' + By' + C$ ja $Ax'' + By'' + C$, kuin myös että pisteet ovat samalla tai eri puolilla suoraa, sitä myöten kuin näillä lausekkeilla on samat tai eri merkit.

Yleensä: suure $Ax + By + C$ vaihtuu samassa suhteessa kuin kohtisuora välimatka liikkuvasta pisteestä (x, y) siihen suoraan, jonka yhtälö suora- tai vinokulmaisissa koordinaateissa on $Ax + By + C = 0$.

Esim. Haettakoon välimatka pisteestä $(-1, 2)$ siihen suoraan, joka leikkaa suorakulmaiset koordinaati-akselit välimatkoissa -3 ja $+4$ originista. — Suoran yhtälö on siis

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1 \text{ eli } 4x - 3y + 12 = 0.$$

Tässä on $A = 4$, $B = -3$ ja $C = 12$ sekä [25 § (12)]

$$R = -\frac{1}{\sqrt{16+9}} = -\frac{1}{5};$$

(minus merkkiä käytetään, koska C on positivinen). Pisteen (x, y) ja suoran välimatkaa osoittaa siis yleensä lauseke $\frac{4x - 3y + 12}{-5}$. Sijoitettuamme tähän $x = -1$, $y = 2$, saamme vaaditun välimatkan, joka on $= -\frac{2}{5}$. Koska tämä arvo on negativinen, ovat annettu piste ja origini yhdellä puolen suoraa.

Esim. 2. Kolmiossa ovat annettuina kaksi sivua a, b ja niiden välinen kulma C; haettakoon kolmannelle sivulle vedetty korkosuora h. — Otettuamme kaksi annettua sivua koordinaati-akseleiksi, on kolmannen sivun yhtälö oleva

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ eli } bx + ay - ab = 0.$$

Haettava korkosuora on kohtisuora matka originista tähän kolmanteen sivuun eli $h = Rab$. Ja kun akselikulma on C, saadaan [25 § (13)]

$$R = \frac{\sin C}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C}}$$

ja siis

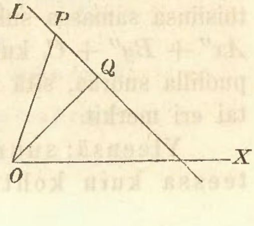
$$h = \frac{ab \sin C}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C}}.$$

28. Suoran yhtälö polaarisissa koordinaateissa. — L-suoran asema, polin O ja akselin OX suhteen, määrätään sen kohtisuoralla välimatkalla polista, $OQ = p$, ja kulmalla $QOX = \alpha$, jonka tämä välimatka tekee akselin kanssa. Suoralla olevan P-pisteen polaariset koordinaatit ovat $r = OP$, $v = POX$. Kun siis kulma $POQ = v - \alpha$, saadaan suorakulmaisesta kolmiosta POQ

$$r \cos (v - \alpha) = p,$$

joka on suoran haettu yhtälö.

Kuva 13.



29. Lyhennetty merkitsemistapa. — Monet tutkimukset analytillisessä geometriassa saadaan paljoa helpommiksi käyttämällä yhtälöjä lyhennetyssä, niin sanoaksemme symbolisessa muodossa. Semmoinen on esimerkiksi asianlaita, kun tutkitaan saman pisteen kautta kulkevia suoria.

Merkitköön lyhyyden vuoksi L yksiasteista trinomia $Ax + By + C$ ja L' toista senlaista trinomia $A'x + B'y + C'$. Silloin edustavat yhtälöt

$$L = 0, \; L' = 0$$

kahta suoraa, jotka nimitämmekin vaan L ja L'. Täten on kirjaimilla L ja L' kaksi merkitystä, mutta erehdystä ei kumminkaan voi syntyä, sillä joka tapauksessahan täytyy olla selvänä, puhutaanko tosiaankin jostakin suureesta vai ainoastaan suoran nimestäkö. Tiedämme (23 §), että

$$L + kL' = 0$$

on silloin yhtälönä kolmannelle suoralle, joka kulkee kahden ensinmainitun leikkauspisteen kautta. Mutta tämän saattaa todistaa toisellakin, suoremmalla, tavalla.

Yhtälö $Ax + By + C = 0$ saapi perusmuodon, kun se kerrotaan eräällä vakinaisella tekijällä R, joka riippuu ainoastaan koefficienteistä A, B sekä koordinaati-akselien välisestä kulmasta θ. Suure $R(Ax + By + C)$ eli RL semmoisenansa merkitsee silloin (27 §) kohtisuoraa matkaa pisteen (x, y) ja suoran L välillä. Samoin lausuu $R'(A'x + B'y + C')$ eli $R'L'$, jossa R' on eräs toinen vakinainen tekijä, pisteen (x, y) ja L'-suoran välimatkaa. Yhtälö $L + kL' = 0$, pantuna muotoon

$$\frac{L}{L'} = -k \text{ eli } \frac{RL}{R'L'} = -\frac{kR}{R'},$$

osoittaa siis, että välimatkat vaihtuvasta pisteestä (x, y) kumpaankin suoraan L ja L' ovat toisiinsa vakinaisessa suhteessa. Semmoisen pisteen ura on nähtävästi suora viiva, joka kulkee suorain L ja L' leikkauspisteen kautta.

30. Asia käy selvemmäksi, jos suorain yhtälöt alusta alkain ovat perusmuotoisia. Olkoon $x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$

yhtälönä toiselle ja $x \cos \alpha' + y \cos \beta' - p' = 0$ toiselle suoralle, ja merkittäköön ne lyhyyden vuoksi

$$A = 0,\ A' = 0.$$

A ja A' edustavat silloin suorastaan kohtisuoria pisteestä (x, y) kumpaankin viivaan, ja yhtälö

$$A + kA' = 0$$

merkitsee uraa kaikille niille pisteille, joiden välimatkoilla kumpaankin viivaan on vakinainen suhde $\frac{A}{A'} = - k$, toisin sanoen suoraa, joka on vedetty kummankin viivan leikkauspisteen kautta.

Tähän saakka emme ole pitäneet lukua suureiden A ja A' merkeistä; mutta mitä niihin tulee, niin muistettakoon vaan, että jos $x \cos \alpha + y \cos \beta - p$ eli A on positivinen, ovat piste (x, y) ja origini eri puolilla suoraa A, vaan jos ne ovat negativisia, niin lankeavat piste ja origini samalle puolelle suoraa. Sama on myöskin A'-suureen laita. Jos siis A ja A' ovat yhdenmerkkisiä, on piste (x, y) samassa suorain A ja A' muodostamassa kulmassa kuin originikin taikka sen ristikulmassa; mutta jos A ja A' ovat erinmerkkisiä, on piste (x, y) jommassakummassa toisia kulmia.

Että piste (x, y) on yhtä kaukana suorista A ja A', lausutaan yhtälöllä

$$A - A' = 0.$$

Tämä siis merkitsee suoraa, joka jakaa kahtia kumpaisenkin viivan välisen kulman, nimittäin sen, jossa origini on, ja sen ristikulman. Sitä vastoin lausuu

$$A + A' = 0,$$

että kohtisuorat ovat yhtä suuret, mutta erinmerkkiset; tämä on siis yhtälö suoralle, joka jakaa kahtia toiset kaksi kulmaa samain suorain välillä. Siis: jos $A = 0$ ja $A' = 0$ ovat kahden suoran perusmuotoisia yhtälöitä, niin ovat $A - A' = 0$ ja $A + A' = 0$ yhtälöitä toisille kahdelle suoralle, jotka jakavat kahtia edellisten väliset kulmat.

31. Kolme suoraa leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä, jos niiden yhtälöt $L = 0$, $L' = 0$, $L'' = 0$ sallivat identtisyyden

$$kL + k'L' + k''L'' = 0,$$

niin että yhden näistä yhtälöistä saattaa johdattaa toisista kahdesta. Tämän identtisyyden tähden nimittäin katoaa L'' niissä suureiden x ja y arvoissa, jotka yht'aikaa toteuttavat yhtälöt $L = 0$ ja $L' = 0$; yhtälön $L'' = 0$ saa siis toteutetuksi koordinaateilla sille pisteelle, jossa suorat L ja L' leikkaavat toisensa.

Siinä siis helppo keino, jolla voi tutkia, leikkaavatko eräät suorat toisiansa samassa pisteessä. Asian selvitykseksi otamme moniaita esimerkkejä.

Esim. 1. Jos $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ ovat perusmuotoisia yhtälöitä kolmion kolmelle sivulle, niin ovat, originin ollessa kolmion sisällä,

$$a - b = 0,\ b - c = 0,\ c - a = 0$$

yhtälöitä suorille, jotka jakavat kulmat kahtia. Kun nyt vasempain jäsenten summa näissä yhtälöissä itsestänsä katoaa, niin on täten todistettu, että *suorat, jotka jakavat kahtia kolmion kulmat, leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä.*

Esim. 2. Samassa kolmiossa merkitsevät $b + c = 0$, $c + a = 0$ suoria, jotka jakavat kahtia kaksi ulkokulmaa, ja $a - b = 0$ suoraa, joka jakaa kahtia kolmion kolmannen kulman. Nämäkin suorat leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä, sillä yhden näistä yhtälöistä saattaa yhteenlaskemalla tai vähentämällä johdattaa toisista kahdesta.

Esim. 3. *Kolmion kolme korkoviivaa leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä.* — Jos nimittäin A, B, C merkitsevät vastakulmia sivuille $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, niin yksi korkoviiva leikkaa esimerkiksi A-kulman kahteen osaan, jotka ovat komplementteja kulmille B ja C. Välimatkat jostakin pisteestä tällä korkoviivalla sivuihin b ja c ovat niin muodoin toisiinsa kuin $\cos C : \cos B$ ja korkoviivan yhtälö, originin ollessa kolmion sisällä, on $\frac{b}{\cos C} = \frac{c}{\cos B}$, eli $b \cos B - c \cos C = 0$. Kolmion kolmella korkoviivalla ovat siis seuraavat yhtälöt

$$a \cos A - b \cos B = 0,$$
$$b \cos B - c \cos C = 0,$$
$$c \cos C - a \cos A = 0;$$

ja kun näiden yhtälöjen summa on identtisesti nolla, niin seuraa siitä, että kolmion kolme korkoviivaa leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä.

Esim. 4. Kussakin kolmiossa käyvät ne suorat, jotka yhdistävät kulmankärjet vastasivujen keskuksien kanssa, yhden pisteen kautta. — Kohtisuorat c-sivun keskuksesta sivuja a ja b vastaan ovat toisiinsa niinkuin $\sin B : \sin A$. Yhtälö suoralle, joka lähtien kulmasta C jakaa vastasivun kahtia, on siis $\frac{a}{\sin B} = \frac{b}{\sin A}$, ja yhtälöt kolmelle jakoviivalle ovat

$$a \sin A - b \sin B = 0,$$
$$b \sin B - c \sin C = 0,$$
$$c \sin C - a \sin A = 0.$$

Vasempain jäsenten summa on identtisesti nolla; suorat leikkaavat siis toisensa yhdessä pisteessä.

Neljäs Luku.

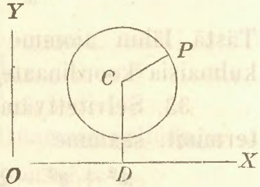
Pyöriö.

32. Pyöriön yhtälö. — Pyöriön isous ja asema on määrätty, kun tunnetaan sen säde r ja keskiön koordinaatit $a = OD$, $b = DC$. Olkoot x, y koordinateja jollekin P-pisteelle pyöriöllä; silloin on, 11 §:n mukaan, suorakulmaisessa koordinaatistossa välimatka $CP = r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, josta

$$(1) \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

joka on pyöriön haettu yhtälö.

Kuva 14.



Tässä yhtälössä on kolme vakinaista a, b, r, joilla eri pyöriöissä on eri arvot. Asianmukaisesti määräämällä näitä vakinaisia, voipi saada pyöriön täyttämään kolme ehtoa, esim. että sen kehä kulkisi kolmen annetun pisteen kautta tahi että se sivuaisi kolmea annettua suoraa j. n. e.

Keskiön ollessa x-akselilla, on sen ordinaata $b = 0$, jolloin pyöriön yhtälö on

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2.$$

Jos sitä paitsi olisi $a = r$, niin että kehä kulkisi originin kautta, saisimme $(x-r)^2 + y^2 = r^2$ eli selvitettynä

$$y^2 = 2rx - x^2;$$

siinä siis yhtälö pyöriölle, jonka diametri ja tangentti ovat koordinaati-akseleina.

Kun taas keskiö on y-akselilla, niin on sen abscissa $a = 0$, ja pyöriön yhtälö (1) saa seuraavan muodon

$$x^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Kun keskiö ja origini ovat yhdessä, on yht'aikaa $a = 0$, $b = 0$ ja siis

$$(2) \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

joka on yksinkertaisin muoto pyöriön yhtälölle.

Vinokulmaisessa koordinaatistossa saadaan pyöriölle, jonka säteenä on r ja keskiönä (a, b), yhtälön (1) sijaan seuraava vähän laveampi:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta=r^2,$$

jossa θ on akselikulma. Kun keskiö ja origini ovat yhdessä, saa tämä yhtälö seuraavan muodon:

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta=r^2.$$

Tästä lähin aiomme kumminkin käyttää ainoastaan suorakulmaisia koordinaateja.

33. Selvitettyämme pyöriön yleisessä yhtälössä (1) neliöterminit, saamme

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

Tässä yhtälössä siis on, paitsi neliösummaa x^2+y^2, ainoastaan yksiasteisia terminejä x:n ja y:n suhteen. Päin vastoin taas semmoinen yhtälö, jossa neliöillä x^2 ja y^2 on samat koefficientit ja tuloa xy ei ole, siis tänmuotoinen yhtälö

$$(3)\qquad c(x^2+y^2)+dx+ey+f=0,$$

merkitsee yleensä pyöriötä; sillä jos suureella c jaetaan ja neliöiden täytteeksi lisätään $\frac{d^2}{4c^2}+\frac{e^2}{4c^2}$ kumpaankin jäseneen, niin saa tämä yhtälö seuraavan muodon

$$\left(x+\frac{d}{2c}\right)^2+\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2=\frac{d^2+e^2-4cf}{4c^2},$$

ja tämä tulee identtiseksi yhtälön (1) kanssa, jos pannaan

$$(4)\quad a=-\frac{d}{2c},\quad b=-\frac{d}{2c},\quad r^2=\frac{d^2+e^2-4cf}{4c^2}.$$

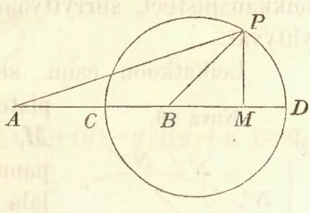
Siitä näkyy, että yhtälö (3) merkitsee pyöriötä, jonka keskiön ja säteen määrääjinä ovat suureille a, b, r äsken annetut arvot.

34. Edellisessä §:ssä esitetyn teorian sovittamiseksi otetaan tähän seuraava probleema:

Haettakoon ura pisteelle P, jonka välimatkat kahdesta kiinteästä pisteestä A ja B ovat toisiinsa vakinaisessa suhteessa $m:n$.

Otetaan piste A originiksi ja suora AB x-akseliksi. Silloin ovat liikkuvan P-pisteen koordinaatit $x = AM$, $y = MP$, ja, annettuamme välimatkalle AB merkiksi α, saadaan $AP = \sqrt{x^2 + y^2}$, $BP = \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}$. Mutta ehdotuksen mukaan on $AP : BP = m : n$, siis

Kuva 15.



$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}} = \frac{m}{n},$$

eli, hävitettyämme nimittäjät ja korotettuamme neliöön,

$$(m^2 - n^2)(x^2 + y^2) - 2m^2\alpha x + m^2\alpha^2 = 0.$$

Tämä yhtälö on samanmuotoinen kuin (3), jolloin $c = m^2 - n^2$, $d = -2m^2\alpha$, $e = 0$, $f = m^2\alpha^2$; se merkitsee siis pyöriötä, jonka keskiö (a, b) ja säde r saadaan [katso (4)] määrätyksi kaavoilla

$$a = \frac{m^2\alpha}{m^2 - n^2}, \quad b = 0, \quad r = \frac{mn\alpha}{m^2 - n^2}.$$

Haettu ura on siis pyöriö, jonka keskiö on suoralla AB. Keskiö tulee oikealle puolelle pistettä B tahi vasemmalle pistettä A sitä myöten kuin m on suurempi tahi pienempi kuin n, sillä edellisessä tapauksessa on a positivinen ja isompi kuin α, jälkimmäisessä negativinen. Pisteet C ja D, joissa pyöriö leikkaa x-akselin, löydetään helposti, sillä niissäkin pitää annetun ehdon $m : n = CA : CB = DA : DB$ olla täytettynä.

Kun $m = n$, saa edellinen yhtälö muodon

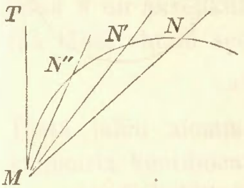
$$-2m^2\alpha x + m^2\alpha^2 = 0 \text{ eli } x = \frac{\alpha}{2}.$$

Toisin sanoen, ura sille pisteelle, joka on yhtä kaukana pisteistä A ja B, kulkee sitä kohtisuoraa myöten, joka leikkaa suoran AB kahtia.

35. Pyöriön tangentti. — Tangentin yleinen määritys: Tangentti mille käyrälle hyvänsä on se lopullinen asema,

mihin käyrää leikkaava suora (sekantti) viimein asettuu, kun leikkauspisteet, siirryttyään yhä lähemmäksi toisiaan, lopulta yhtyvät.

Kuva 16.



Leikatkoon esim. suora *MN* käyrää *MN'N* kahdessa pisteessä *M* ja *N*. Jos toinen piste, *M*, pidetään paikallansa ja toinen, *N*, pannaan siirtymään käyrää myöten yhä lähemmäksi pistettä *M*, niin silloin myöskin sekantti *MN* kääntyy pisteessä *M*, käyden perättäin asemiin *MN'*, *MN''*, j. n. e., ja lähestyy siten erästä lopullista raja-asemaa *MT*, johon se asettuu samassa kuin piste *N* yhtyy pisteesen *M*. Tämä lopullinen asema *MT* on juuri käyrän tangentti; toisin sanoen, se sivuaa käyrää pisteessä *M*.

Saadaksemme yhtälöä käyrän tangentille, haetaan siis ensin yhtälö semmoiselle suoralle, joka leikkaa käyrää kahdessa pisteessä, ja tutkitaan sitten, mimmoiseksi yhtälö käy, kun mainitut pisteet yhtyvät toisiinsa.

Haettakoon nyt tämän mukaan yhtälö suoralle, joka sivuaa pyöriötä

$$x^2 + y^2 = r^2$$

jossakin pisteessä (x', y'). Panemme jonkun suoran kulkemaan sanotun pisteen (x', y') ja jonkun toisen pisteen (x'', y'') kautta pyöriöllä. Yhtälö suoralle, joka kulkee kahden pisteen (x', y') ja (x'', y'') kautta, on (22 §)

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Nyt on vaan tutkiminen, mimmoiseksi tämä yhtälö käy, kun pisteet (x', y') ja (x'', y'') yhtyvät, s. o. kun $x'' = x'$, $y'' = y'$.

Ensi silmäyksessä näyttää kuin olisi seuraus epämääräinen, sillä kulmakoefficientti $\frac{y' - y''}{x' - x''}$ saa muodon $\frac{0}{0}$. Asianlaita on kumminkin ainoastaan ulkonäöltään sellainen; todellisen arvon löydämme kulmakoefficientille seuraavalla tavalla.

Koska (x', y') ja (x'', y'') ovat pisteitä itse pyöriöllä, niin täytyy olla

$$x'^2 + y'^2 = r^2,$$
$$x''^2 + y''^2 = r^2.$$

Vähentämällä saamme

$$x'^2 - x''^2 + y'^2 - y''^2 = (x' - x'')(x' + x'') + (y' - y'')(y' + y'') = 0,$$

josta

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{x' + x''}{y' + y''}.$$

Kun nyt tehdään $x'' = x'$, $y'' = y'$, niin tulee oikeasta jäsenestä $-\frac{2x'}{2y'} = -\frac{x'}{y'}$, ja se on siis tangentin kulmakoefficientti. Tällä arvolla sijoitetaan lopuksi entinen arvo $\frac{y' - y''}{x' - x''}$ sekantin yhtälössä, ja niin saadaan

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x'),$$

joka on yhtälö pyöriön tangentille pisteessä (x', y').

Tälle yhtälölle saattaa antaa sievemmän muodon. Hävitettyämme nimittäjän ja siirrettyämme terminit, saadaan $yy' - y'^2 + xx' - x'^2 = 0$ eli $xx' + yy' = x'^2 + y'^2$. Mutta $x'^2 + y'^2 = r^2$, siis

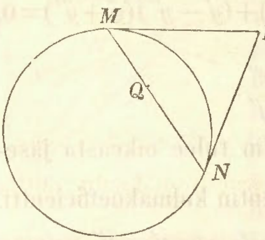
$$xx' + yy' = r^2. \tag{5}$$

Siinä yksinkertaisin muoto tangentin yhtälölle. Tässä merkitsevät x', y' koordinaateja sivuamispisteelle ja x, y juoksevia koordinaateja, toisin sanoen koordinaateja mille tangentin pisteelle tahansa. Mutta huomattakoon tässä, että vaikka x, y ja x', y' vaihtaisivatkin merkitystänsä, niin tangentin yhtälö (5) ei kumminkaan sen kautta muutu.

Yhtälö pyöriön säteelle pisteessä (x', y'), s. o. suoralle, joka kulkee pisteiden $(0, 0)$ ja (x', y') kautta, saa kulmakoefficientikseen $\frac{y'}{x'}$, ja kun tämä on vastaismerkkinen ja vastavuoroinen arvo tangentin kulmakoefficientille, niin seuraa (20 §), että tangentti ja säde ovat kohtisuorat toisilleen. Tästä tangentin tunnetusta ominaisuudesta olisi päinvastoin voinut johdattaa sen yhtälön; mutta parempana olemme pitäneet tässä kohta osoittaa esitystavan, joka sopii kaikkiin käyriin.

36. Tangenttijänne. — Jostakin pisteestä P pyöriön ulkopuolella vedetään kaksi tangenttia PM, PN pyöriölle; suoraa MN, joka yhdistää sivuamispisteet, sanotaan P-pisteen tangenttijänteeksi. Haettakoon sen yhtälö.

Kuva 17.



Keskiön ollessa originina on pyöriön yhtälö $x^2 + y^2 = r^2$ ja tangentin yhtälö

(5) $xx' + yy' = r^2$.

Tämä jälkimmäinen yhtälö pitää siis paikkansa, jos x', y' ovat koordinaateja pisteelle P ja x, y koordinaateja jommallekummalle sivuamispisteelle (M tai N). Semmoisen yhtälön ura on siis viiva, joka kulkee pisteiden M, N kautta, ja se on sitä paitsi suora, sillä yhtälö on yksiasteinen vaihtuvain x:n ja y:n suhteen. Puheena oleva yhtälö merkitsee siis tangenttijännettä pisteelle (x', y').

Tässäkin saattavat x, y ja x', y' vaihtaa merkityksiänsä; yhtälö (5) on sen vuoksi voimassa silloinkin, kun x, y merkitsevät koordinaateja pisteelle P ja x', y' koordinaateja jollekin pisteelle Q tangenttijänteellä.

Ajatellaan nyt, että tangenttijänne kääntyy pisteessä Q. Silloin siirtää sijaansa myöskin se piste P, jossa jänteen päistä vedetyt tangentit yhtyvät, ja muodostaa erään viivan, joka meidän nyt tulee määrätä. Yhtälö (5) on lakkaamatta voimassa pisteiden P ja Q suhteen; ja kun nyt x' y' ovat kiinteitä koordinaateja pisteelle Q ja x, y vaihtuvia koordinaateja liikkuvalle pisteelle P, niin (5) onkin yhtälö mainitulle P-pisteen muodostamalle viivalle, joka on suora, koska sen yhtälö on yksiasteinen. Siis:

Jos pyöriön jänne kääntyy jossakin pisteessä, niin ura jänteen päistä vedettyjen tangenttien yhtymäpisteelle on suora.

Yhtälöllä $xx' + yy' = r^2$ on siis erillaiset merkitykset sitä myöten mitä pistettä koordinaatit x', y' osoittavat pyöriössä $x^2+y^2=r^2$. Jos (x', y') osoittaa pistettä itse pyöriöllä, niin mainittu yhtälö merkitsee tangenttia; jos (x', y') on piste pyöriön ulkopuolella, niin $xx'+yy'=r^2$ on yhtälö tangenttijänteelle, ja jos (x', y') on pyöriön sisässä oleva piste, niin edustaa sama yhtälö uraa sille pisteelle, jonka tangenttijänne kulkee pisteen (x', y') kautta.

Pistettä (x', y') sanotaan yleensä p o l'iksi suoralle $xx'+yy'=r^2$ ja tätä suoraa taas p o l a a r i k s i pisteelle (x', y') pyöriössä $x^2+y^2=r^2$.

37. H a e t t a k o o n s e n t a n g e n t i n p i t u u s, j o k a p i s t e e s t ä (x', y') v e d e t ä ä n p y ö r i ö l l e

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0.$$

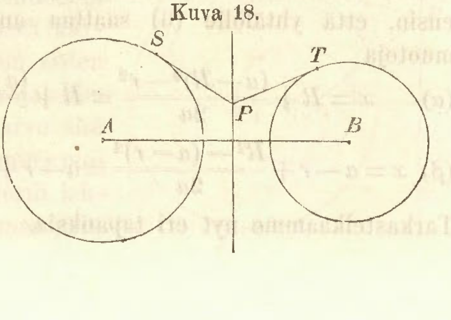
Haettu tangentti ja sivuamispisteesen vedetty säde ovat kateeteja suorakulmaisessa kolmiossa, jonka hypotenusana on välimatka pisteestä (x', y') pyöriön keskiöön (a, b). Neliö mainitulla välimatkalla $(x'-a)^2+(y'-b)^2$ on siis yhtä suuri kuin r^2+ tangentin neliö, ja siis tangentin neliö yhtä suuri kuin

$$(x'-a)^2+(y'-b)^2-r^2.$$

Jos siis (x, y) merkitsee pistettä pyöriön ulkopuolella, niin suure $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$ on sanotusta pisteestä vedetyn tangentin neliö. Jos taas (x, y) kuuluu pisteesen pyöriön sisäpuolella, niin sama suure on nähtävästi negativinen. Kun taas (x, y) merkitsee pistettä itse pyöriöllä, niin mainittu suure luonnollisesti on nolla.

38. H a e t t a k o o n u r a s e m m o i s e l l e p i s t e e l l e P, e t t ä s i i t ä k a h d e l l e a n n e t u l l e p y ö r i ö l l e v e d e t y t t a n g e n t i t o v a t y h t ä s u u r e t.

Kuva 18.



Olkoon A keskiö ja R säde isommassa pyöriössä sekä B keskiö ja r säde pienemmässä. Välimatka AB olkoon a. Pitäen pistettä A originina ja lukien abscissoja suunnassa AB, saamme pyöriöiden yhtälöiksi

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$
$$(x - a)^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Edellisen §:n mukaan osoittavat vasemmat jäsenet näissä yhtälöissä niiden tangenttien neliöitä, jotka pisteestä (x, y) vedetään sanotuille pyöriöille. Olkoot x, y nyt koordinaateja semmoiselle pisteelle P, että siitä vedetyt tangentit ovat yhtä suuret. Me saamme siis $x^2 + y^2 - R^2 = (x - a)^2 + y^2 - r^2$, josta, kehitettyämme ja yhdistettyämme, $2ax = R^2 - r^2 + a^2$ eli

$$(6) \qquad x = \frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a}.$$

Siinä yhtälö haetulle uralle. Kosk'ei tässä ole y-suuretta, niin osoittaa se x-akselille kohtisuoraa viivaa, jonka välimatka pisteestä A on juuri x:lle viimeksi saatu vakinainen arvo.

Sama yhtälö (6) olisi saatu sitenkin, että olisi haettu ne pisteet, joissa annetut pyöriöt leikkaavat toisensa. Niissä pisteissä nimittäin ovat kumpaisenkin pyöriön yhtälöt yht'aikaa voimassa, toisin sanoen $x^2 + y^2 - R^2 = (x - a)^2 + y^2 - r^2$, josta (6) on sievennetty muoto. Pyöriöiden leikatessa toisiansa täytyy siis leikkauspisteiden koordinaatien toteuttaa yhtälö (6), joka silloin merkitsee pyöriöiden yhteistä jännettä.

Erillaisten ominaisuuksiensa mukaan on puheena-oleva suora saanut eri nimiä, niinkuin r a d i k a a l i - a k s e l i, y h t ä s u u r t e n t a n g e n t t i e n l i n j a, k o r d a a l i; lyhyyden vuoksi käytämme viimeksi mainittua, P l u e c k e r'in ehdottamaa nimeä.

Lähemmin tutkiaksemme, minkä rajain välille kordaali taikka sen välimatka x originista lankeaa, huomattakoon ensin, että yhtälölle (6) saattaa antaa jonkun seuraavia muotoja

$$(\alpha) \qquad x = R + \frac{(a - R)^2 - r^2}{2a} = R + \frac{(a - R + r)(a - R - r)}{2a},$$

$$(\beta) \qquad x = a - r + \frac{R^2 - (a - r)^2}{2a} = a - r + \frac{(a + R - r)(R + r - a)}{2a}.$$

Tarkastelkaamme nyt eri tapauksia.

1:o Jos pyöriöt ovat aivan erillään toisistansa, niinkuin edellisessä kuvassa, niin on $a > R + r$ ja niin muodoin tulossa $(a - R + r)(a - R - r)$ kumpikin tekijä positivinen, mutta tulossa $(a + R - r)(R + r - a)$ toinen tekijä positivinen, toinen negativinen. Edellinen tulo on siis positivinen, jälkimmäinen negativinen, ja silloin päätämme yhtälöistä (α) ja (β), että x on suurempi kuin R, mutta pienempi kuin $a - r$, s. o. että kordaali kulkee pyöriöiden välitse.

Pyöriöiden sivutessa toisiansa ulkopuolillaan yhtyy kordaali kummankin pyöriön yhteiseen, sivuamispisteen kautta vedettyyn, tangenttiin.

2:o Pyöriöiden leikatessa toisiansa on, kuten jo sanottiin, kordaali sama kuin pyöriöiden yhteinen jänne.

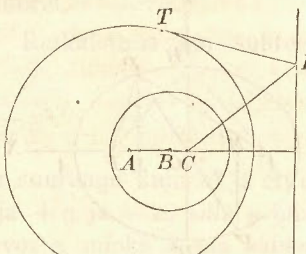
3:o Jos pyöriöt ovat sisätysten, niin on $a < R - r$, jolloin tulo $(a - R + r)(a - R - r)$ on positivinen. Yhtälöstä (α) näemme silloin, että x on suurempi kuin R, s. o. että kordaali on kumpaisenkin pyöriön ulkopuolella.

Päinvastoin saattaisi pitää kordaalin ja toisen pyöriön tunnettuina ja niiden mukaan määrätä toisen pyöriön aseman ja suuruuden. Yhtälössä (6) olisivat silloin R ja x tunnettuja, r ja a haettavia. Tälle probleemalle voi saada äärettömän monta ratkaisua; sillä toiselle tuntemattomalle r saattaisi antaa minkä arvon hyvänsä ja sen mukaan määrätä arvon toiselle tuntemattomalle a. Yhtälö (6), ratkaistuna a:n suhteen, antaa

$$a = x \pm \sqrt{x^2 + r^2 - R^2}.$$

Olkoon r-säteinen pyöriö R-säteisen sisällä; silloin on a pienempi kuin x ja niin muodoin on yllä olevassa yhtälössä käytettävä — merkkiä. Kun sitten r vähitellen saa eri arvoja, niin muuttuu myöskin a:n arvo sitä suuremmaksi mitä enemmin r pienenee. Jos siis sisäpyöriö lakkaamatta vähenee, isomman pyö-

Kuva 19.



riön, ja kordaalin pysyessä muuttumattomina, niin keskiöiden välimatka a kasvaa yhä enemmin ja saavuttaa, kun r on kadonnut, raja-arvon $a = x - \sqrt{x^2 - R^2}$. Sisäpyöriö on silloin supistunut semmoiseksi rajapisteeksi C, että matka siitä mihin pisteesen P hyvänsä kordaalilla on yhtä pitkä kuin samasta pisteestä P vedetty tangentti PT. Tämä rajapiste on hyvin tärkeä elliptillisiä funktioneja tutkittaessa.

Viides Luku.

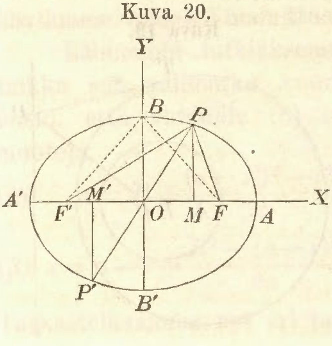
Ellipsi.

39. Ellipsi on ura semmoiselle pisteelle P, jonka välimatkat kahteen kiinteään pisteesen F ja F' tekevät vakinaisen summan. Näitä kiinteitä pisteitä sanotaan polttopisteiksi (foci) ja niitä suoria, jotka jostakin ellipsin pisteestä vedetään polttopisteisin, polttosäteiksi (radii vectores).

Tämän määrityksen mukaan saattaa ellipsin piirtää rihman avulla seuraavalla tavalla. Rihma, jonka täytyy olla yhtä pitkän kuin polttosäteiden vakinainen summa, kiinnitetään päistänsä polttopisteisin, jonka jälkeen rihma jännitetään kireelle piirtimen kärjellä. Kun nyt piirrintä tässä tilassa kuljetetaan ympäri, niin muodostaa se ellipsin.

40. Ellipsin yhtälö suorakulmaisissa koordinaateissa. — Otetaan x-akseliksi suora FF', joka yhdistää polttopisteet, ja originiksi piste O, joka on niiden puolivälissä; polttosäteiden vakinainen summa olkoon $2a$ ja polttopisteiden väli $2c$, niin että $OF = OF' = c$. Kun nyt P-pisteen koordinaatit ovat x, y, niin on $x = OM$, $y = MP$, $FM = c - x$, $F'M = c + x$ ja

Kuva 20.



$$PF = \sqrt{(c-x)^2 + y^2},\quad PF' = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}.$$

Ellipsin määritysehdon mukaan on nyt $PF + PF' = 2a$, siis

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a.$$

Siinä haettu yhtälö, lausuttuna suureissa x ja y. Sieventämistä varten siirretään ensimmäinen juurimerkki oikeaan jäseneen ja yhtälön jäsenet korotetaan neliöön; siten saadaan

$$(c+x)^2 + y^2 = 4a^2 + (c-x)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2},$$

josta, sittenkuin terminit on supistettu ja siirretty sekä jaettu 4:llä, tulee

$$a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Nyt korotetaan uudelleen neliöön ja terminit supistetaan, joten jää

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Kolmiossa PFF' on $PF + PF' > FF'$, se on: $2a > 2c$ eli $a > c$; siis on $a^2 - c^2$ positivinen. Sen vuoksi sopii panna

$$a^2 - c^2 = b^2,$$

joten edellisestä yhtälöstä tulee

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Tässä kun jaetaan suureella a^2b^2, niin saadaan viimein

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Siinä ellipsin yhtälö yksinkertaisimmassa muodossaan.

Jos olisi $a = b$, niin tulisi tästä yhtälöstä $x^2 + y^2 = a^2$, joka osoittaisi a-säteistä pyöriötä. Pyöriötä sopii siis pitää ellipsinä, jonka akselit ovat yhtäsuuret.

41. Ellipsin muoto. — Ratkaistuna y:n suhteen antaa yhtälö (1)

$$(2)\qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Siitä näemme, ett'ei x^2 saata olla suurempi kuin a^2 ja ett'ei x siis saa olla ulkopuolella rajoja $+a$ ja $-a$, sillä y olisi muutoin aatteinen. Jokaisesta arvosta, minkä x saa näiden rajainsa välillä, saa y kaksi todellista, yhtä suurta, mutta vastaismerkkistä, arvoa. Kun $x = a$, on $y = 0$. Kun x vähitellen pienenee arvosta a nollaan, kasvaa y nollasta arvoon $+b$; kun x vieläkin vähenee nollasta arvoon $-a$, vähenee y vuoroansa arvosta $+b$ nollaan. Ellipsi on siis umpinainen käyrä, symmetrillinen x-akselin suhteen, se on: jos ellipsi taivutetaan mainittua akselia myöten, niin sen molemmat puoliskot peittävät toisensa.

Ratkaistuna x:n suhteen antaa yhtälö (1)

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2},$$

josta päätetään, ettei y saa olla ulkopuolella rajoja $+b$ ja $-b$, ja että ellipsi on symmetrillinen myöskin y-akselin suhteen. Ellipsissä on siis neljä yhteellistä osaa AB, BA', $A'B'$, $B'A$.

Samoin nähdään, että, jos x, y ovat koordinaateja jollekin ellipsin pisteelle P, niin toteuttavat myös arvot $-x$, $-y$ ellipsin yhtälön (1) ja määräävät siten erään toisen pisteen P' ellipsin vastaisella kvadrantilla. Koska nyt pisteillä P ja P' on yhtäsuuret, vaikka vastaismerkkiset, koordinaatit, niin ovat kolmiot POM ja $P'OM'$ yhteellisiä ja siis kulma $POM =$ kulma $P'OM'$ sekä $PO = P'O$. Pisteillä P, P' on siis symmetrillinen asema O-pisteen suhteen, toisin sanoen ne ovat samalla pisteen O kautta kulkevalla suoralla ja yhtä kaukana kummallakin puolen sitä. Täten jakaa piste O kaikki sen kautta vedetyt ellipsin jänteet kahtia, ja sen vuoksi sitä sanotaan ellipsin k e s k i ö k s i.

Pisteissä A, A', joissa ellipsi leikkaa x-akselin, on $x = \pm a$; pisteissä B, B', joissa ellipsi leikkaa y-akselin, on $y = \pm b$. Suoraa $AA' = 2a$ sanotaan ellipsin i s o - a k s e l i k s i ja suoraa $BB' = 2b$ sen v ä h ä - a k s e l i k s i. Ellipsin yhtälössä (1) suureet a ja b osoittavat siis puoliakseleja.

42. Saadaksemme selvää käsitystä ellipsin muodosta, on meidän tutkiminen, mitenkä välimatka keskiöstä vaihtuu OP-suunnan mukana (kuva 20). Pannaan $OP = \varrho$ ja kulma

$POX = \omega$; silloin on $x = \varrho \cos \omega$, $y = \varrho \sin \omega$, ja pantuamme nämä arvot ellipsin yhtälöön (1), saamme

$$\frac{\varrho^2 \cos^2 \omega}{a^2} + \frac{\varrho^2 \sin^2 \omega}{b^2} = 1,$$

josta

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2 \omega}{a^2} + \frac{\sin^2 \omega}{b^2} = \frac{1 - \sin^2 \omega}{a^2} + \frac{\sin^2 \omega}{b^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin^2 \omega.$$

Koska nyt $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}$ aina on positivinen, niin näemme tästä kaavasta, että $\frac{1}{\varrho^2}$ kasvaa ja siis itse ϱ vähenee samassa kuin $\sin^2 \omega$ kasvaa. Kun $\omega = 0$, saa ϱ isoimman arvonsa $= a$; kun ω siitä kasvaa, vähenee ϱ, kunnes se, kun $\omega = 90^0$, saavuttaa vähimmän arvonsa $= b$. Kun ω-kulman asteluku vieläkin lisääntyy 180:een, kasvaa ϱ jälleen arvosta b arvoon a.

Kun $\sin^2 \omega$ saa yhtäsuuria arvoja, saa myöskin ϱ yhtäsuuria arvoja; ne keskiösäteet siis, jotka tekevät yhtäsuuria kulmia iso-akselin kanssa, ovat yhtäsuuret. Sellaisia yhtäsuuria keskiökulmia on ellipissä neljä eri kappaletta, ja niitä siis vastaa neljä yhtäsuurta keskiösädettä, jotka ovat asettuneet symmetrillisesti akselien suhteen, yksi kuhunkin akselikulmaan.

43. **Ellipsi verrattuna verhoavaan ja sisustavaan pyöriöön.** — Ellipsille, iso-akseli diametrina, verhotun pyöriön yhtälö on $x^2 + y^2 = a^2$, josta

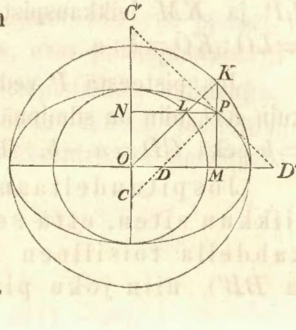
$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ellipsissä sitä vastoin (2) on

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Samaa abscissaa $x = OM$ vastaavat

Kuva 21.



siis ellipsissä ordinaata $PM = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ja pyöriössä ordinaata $KM = \sqrt{a^2 - x^2}$; näiden ordinaatain suhde on siis $\frac{PM}{KM} = \frac{b}{a}$. Toisin sanoen: ellipsissä ja verhoavassa pyöriössä ovat vastaavaiset ordinaatat toisiinsa niinkuin vähä-akseli iso-akseliin. Tämän nojalla saatamme määrätä kuinka monta pistettä hyvänsä ellipsillä. Piirrettyämme, iso-akseli diametrina, pyöriön, vedämme siihen ordinaatoja mielin määrin ja leikkaamme joka ordinaatasta sellaisen osan PM, että sen suhde koko ordinaataan on $\frac{b}{a}$. Kukin siten saatu piste P on ellipsillä.

Jos taas piirretään pyöriö, vähä-akseli diametrina, ja verrataan sen yhtälö $x^2 + y^2 = b^2$ ellipsin yhtälöön, niin huomataan, että ne abscissat NP, NL, jotka ellipsissä ja sisustavassa pyöriössä vastaavat samaa ordinataa ON, ovat toisiinsa niinkuin iso-akseli vähä-akseliin. Tämänkin nojalla saattaa ellipsin piirustaa pisteillä.

Helpoimmin tapahtuu tämä piirtäminen molempain pyöriöiden avulla tällä lailla. Vedetään joku säde OK mielin määrin. Siitä pisteestä L, jossa tämä säde leikkaa sisustavan pyöriön, vedetään suora LP samansuuntaiseksi kuin x-akseli, ja siitä pisteestä K, jossa se leikkaa verhoavan pyöriön, suora KM y-akselin suuntaiseksi. Näiden suorain LP ja KM leikkauspiste P on ellipsillä, sillä $PM : KM = LO : KO = b : a$.

Jos pisteestä P vedetään suora PC samansuuntaiseksi kuin KO, niin on silminnähtävästi $PC = KO = a$ ja $DP = OL = b$ sekä $CD = a - b$. Tästä johdetaan seuraava teoreema:

Jos pituudeltaan vakinainen suora ($CD = a - b$) liikkuu siten, että sen päät (C, D) koko ajan ovat kahdella toisilleen kohtisuoralla akselilla (AA' ja BB'), niin joku piste P samalla suoralla muodostaa ellipsin, jonka puoli-akselit ovat yhtäsuuret kuin välimatkat pisteestä P vakinaisen suoran päihin ($PC = a$, $PD = b$).

Tässä oli muodostava piste vakinaisen suoran pitennyksellä, mutta asianlaita on sama, vaikka se olisi itse suoralla. Tehdään nimittäin $MD' = MD$ ja vedetään $D'P$ kunnes se kohtaa vähä-akselin pisteessä C'; silloin ovat kolmiot PDD' ja PCC' yhtäkylkisiä ja siis $PC' = PC = KO = a$, $PD' = PD = LO = b$ ja $C'D' = a + b$. Piste P on siis suoralla $C'D'$, jonka pituus on vakinainen, ja sitä paitsi välimatkoissa a, b sen päistä C', D', jotka ovat ellipsin akseleilla.

Mainitun teoreeman perusteilla on tehty ellipsografi niminen instrumentti ellipsin piirtämistä varten. Meidän ei käy kumminkaan ryhtyminen tarkemmin sitä selittämään.

44. Ellipsin polttopisteet. — Ellipsin polttopisteet ovat iso-akselilla yhtä kaukana (c) keskiöstä. Tämän välimatkan ja ellipsin puoli-akselien välillä on (40 §) suhde $a^2 - c^2 = b^2$ eli

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

josta saattaa laskea yhden näitä suureita, kun toiset kaksi tunnetaan.

Vähä-akselin päistä vedetyt polttosäteet BF, BF' (kuv. 20) ovat nähtävästi yhtäsuuret; niiden summa on ellipsin määrityksen mukaan $2a$ ja siis kumpikin itsekseen yhtä suuri kuin a. Kun siis akselit ovat annetut, niin löydetään polttopisteet siten, että piirretään pyöriö, käyttäen keskiönä vähäakselin päätä ja säteenä iso-akselin puoliskoa; ne pisteet, joissa tämä pyöriö leikkaa iso-akselia, ovat polttopisteitä.

Ellipsin excentrisyys on polttopisteiden välimatka, lausuttu iso-akselissa yksikkönä, toisin sanoen mainitun välimatkan ja iso-akselin suhde. Jos excentrisyys merkitään e:llä, niin on siis:

$$e = \frac{c}{a},$$

josta

$$c = ae \text{ ja } b^2 = a^2 - c^2 = a^2 (1 - e^2),$$

se on

$$b = a\sqrt{1-e^2}, \text{ eli } \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}.$$

Täten määritettynä on exentrisyys abstraktinen luku, yksikköä pienempi, sillä $c < a$.

Otamme nyt lausuaksemme jonkun P-pisteen polttosäteet (k. 20) abscissassa. Merkittäköön ne r ja r', nimittäin $r = PF$, $r' = PF'$. Nyt on

$$r^2 = (c - x)^2 + y^2, \; r'^2 = (c + x)^2 + y^2,$$

joista

$$r'^2 - r^2 = (r' + r)(r' - r) = 4cx.$$

Mutta ellipsin määrityksen mukaan on

$$(3) \qquad r' + r = 2a;$$

kun edellinen yhtälö jaetaan tällä, saadaan

$$(4) \qquad r' - r = \frac{2cx}{a} = 2ex.$$

Ja kun nyt yhtälöistä (3) ja (4) edellinen ensin vähennetään ja sitten lisätään jälkimmäisellä, saadaan polttosäteiden haetut lausekkeet

$$(5) \qquad \begin{cases} r = a - \frac{c}{a}x = a - ex, \\ r' = a + \frac{c}{a}x = a + ex. \end{cases}$$

Kerrottuamme nämä yhtälöt keskenään ja huomattuamme, että $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ja $c^2 = a^2 - b^2$, saamme

$$rr' = a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 = a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 = \frac{a^2y^2}{b^2} + \frac{b^2x^2}{a^2},$$

eli

$$(6) \qquad rr' = a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right).$$

Vast'edes tulemme tarvitsemaan näitä kaavoja.

Polttopiste F erottaa iso-akselista kaksi erinsuurta osaa, joista pienempi AF on yhtäsuuri kuin $a - c = a(1 - e)$ ja isompi $A'F$ yhtäsuuri kuin $a + c = a(1 + e)$. Nämä osat ovat myös F-pisteestä lähteväin polttosäteiden vähin ja isoin arvo. Niiden keskiarvo on a.

Parametriksi sanotaan jännettä, joka jommastakummasta polttopisteestä on vedetty kohtisuoraksi iso-akselille. Jos yhtälöön $r = a - ex$ pannaan $x = c = ae$, niin saadaan parametrin puoliskolle p arvoksi $a(1 - e^2)$, joka verrattuna yhtälöön $a^2(1 - e^2) = b^2$ antaa $ap = b^2$ eli $a : b = b : p$. Parametri on siis kolmas suhdeluku iso-akselille ja vähä-akselille.

Esim. 1. Maan meridiaani on ellipsi, jossa iso-akselin puolikas (ekvatorin säde) on $a = 859{,}44$ ja vähä-akselin puolikas (polaarisäde) on $b = 856{,}57$ geografillista peninkulmaa; kuinka iso on excentrisyys? — Saadaan $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 70{,}18$ geogr. peninkulmaa ja $e = \frac{c}{a} = 0{,}0817$ elikkä lähipitäin $= \frac{1}{12}$.

Muist. Excentrisyyttä ei saa sekottaa litteyteen navoilla; jälkimmäisellä ymmärretään akselien eroitus, lausuttuna iso-akselissa yksikkönä, se on $\frac{a - b}{a}$. Maan meridianissa se tekee lähimmittäin $\frac{1}{299}$.

Esim. 2. Maan rata auringon ympäri on ellipsi, jonka toisessa polttopisteessä on aurinko. Kun nyt maan keski-välimatka auringosta, s. o. ellipsin iso-akselin puolikas, on $a = 20680000$ geogr. peninkulmaa ja maan radan excentrisyys lähimmiten $e = \frac{1}{60}$, niin mikä on maan pisin ja lyhin matka auringosta?

Vastaus: Pisin matka on $a(1 + e) = 21020000$ ja lyhin $a(1 - e) = 20340000$ geogr. penink.

45. Ellipsin tangentti. — Saadaksemme yhtälöä ellipsin tangentille, haemme ensin, niinkuin 35:ssäkin §:ssä, yhtälön sille suoralle, joka kulkee kahden pisteen (x', y'), (x'', y'') kautta ellipsillä, ja tutkimme sitten, millaiseksi mainittu yhtälö käy, kun pisteet yhtyvät toisiinsa.

Yhtälö suoralle, joka kulkee pisteitse (x', y') ja (x'', y'') on

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Koska mainitut pisteet kumpikin ovat ellipsillä, niin pitää niiden koordinaatien toteuttaman ellipsin yhtälö (1); siten saadaan siis

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1.$$

Vähennettyämme edellisen näitä yhtälöitä jälkimmäisellä, saamme

$$\frac{x'^2-x''^2}{a^2}+\frac{y'^2-y''^2}{b^2}=$$

$$\frac{(x'-x'')(x'+x'')}{a^2}+\frac{(y'-y'')(y'+y'')}{b^2}=0.$$

josta

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{b^2(x'+x'')}{a^2(y'+y'')}.$$

Kun nyt pisteet päästetään yhtymään toisiinsa, tehden $x''=x'$, $y''=y'$, supistuu oikea jäsen seuraavaksi: $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$, ja kun tämä arvo pannaan kulmakoefficientin $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ sijaan ensin saadussa yhtälössä suoralle, joka siten muuttuu tangentiksi, niin saadaan

$$y-y'=-\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x')$$

eli sievennettynä

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}.$$

Mutta $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$, sillä (x', y') on piste ellipsillä; siis saadaan lopullisesti ellipsin tangentille seuraava yhtälö

$$(7) \qquad \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1,$$

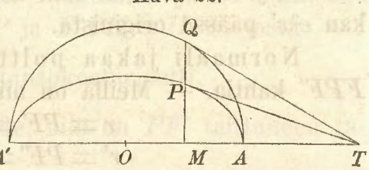
joka, sen yhtäläisyyden tähden ellipsin oman yhtälön kanssa, on helppo muistaa. Tässä merkitsevät x', y' koordinaateja sivuamispisteelle ja x, y tangentin juoksevia koordinaateja, mutta vaikka x, y ja x', y' vaihtaisivatkin merkitystänsä, niin yhtälö (7) tietysti ei muutu. Ratkaistuna y:n suhteen tämä yhtälö antaisi x:n koefficientiksi $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$, joka siis on tangentin kulmakoefficientti, ja senhän näimme jo äskön.

Yhtälö (7) muuttaa merkitystänsä, jos (x', y') ei olekaan piste ellipsillä, vaan sen ulko- tahi sisäpuolella. Edellisessä tapauksessa yhtälö (7) osoittaa tangenttijännettä pisteelle (x', y'), jälkimmäisessä taas uraa sille pisteelle, jonka tangenttijänne kääntyy pisteessä (x', y'). Tämän saa helposti toteen samalla tavalla, kuin 36 §:ssä on osoitettu.

46. Tangentin piirtäminen. — Jos tangentin yhtälössä (7) tehdään $y = 0$, niin saa abscissa pisteelle T, jossa tangentti leikkaa x-akselin, seuraavan arvon

$$OT = \frac{a^2}{x'}.$$

Kuva 22.



Tämä arvo pysyy aina samana, vaikka vähä-akseli b pannaan vaihtumaan, kun vaan a ja x' pysyvät muuttumattomina. Jos siis samalle akselille AA' piirretään useampia ellipsejä ja niillä otetaan pisteitä P, Q, jotka vastaavat samaa abscissaa $x' = OM$ ja ovat siis samalla ordinaatalla, sekä jokaisesta sellaisesta pisteestä vedetään tangentti asianomaiselle ellipsille, niin kohtaavat kaikki nämä tangentit pitennettyä akselia samassa pisteessä T. Mutta mainittujen ellipsien joukossa on se pyöriökin, jonka lävistäjänä on AA'. Tämän nojalla löydetään tangentti ellipsille määrätyssä pisteessä P seuraavalla tavalla:

Ellipsin iso-akselille piirretään pyöriö ja ordinaata MP pitennetään, kunnes se kohtaa pyöriön kehän pisteessä Q; tästä Q-pisteestä vedetään sitten tangentti pyöriölle, ja se piste T, jossa tämä tangentti leikkaa iso-akselin pitennyksen, yhdistetään annetun P-pisteen kanssa. Suora PT on silloin haettu tangentti.

Toinen yksinkertaisempi keino tangentin piirtämiseksi selitetään edempänä (49 §).

47. Normaaliksi sanotaan suoraa PH, joka sivuamispisteestä T on vedetty kohtisuoraksi tangentille TT'. Tiedämme, että $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$ on kulmakoefficientti ellipsin tangentille pisteessä (x', y'); samasta pisteestä vedetyn normaalin kulmakoefficientti on siis $+\frac{a^2y'}{b^2x'}$ ja sen yhtälö

$$(8) \qquad y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x').$$

Jos tässä tehdään $y=0$, niin tulee $x=\frac{a^2-b^2}{a^2}x'=\frac{c^2}{a^2}x' = e^2x'$, josta nähdään että normaali leikkaa x-akselia matkan e^2x' päässä originista.

Normaali jakaa polttosäteiden välisen kulman FPF' kahtia. — Meillä on nimittäin [44 § (5)]

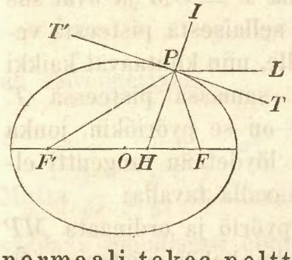
$$r=PF=a-ex',$$
$$r'=PF'=a+ex',$$

ja koska $OF=OF'=c=ae$, ja $OH=e^2x'$, niin saamme

$$FH=ae-e^2x'=e(a-ex')=er$$
$$F'H=ae+e^2x'=e(a+ex')=er',$$

joista

Kuva 23.



$$\frac{FH}{F'H}=\frac{r}{r'}=\frac{PF}{PF'}.$$

Suora PH jakaa siis kulman FPF' kahtia (Eukl. VI, 3).

Kolmiosta PHF saadaan vielä

$$\frac{\sin FPH}{\sin PHF}=\frac{FH}{FP}=\frac{er}{r}=e,$$

se on: sinit niille kulmille, jotka normaali tekee polttosäteen ja iso-akselin kanssa, ovat toisiinsa vakinaisessa suhteessa, joka on yhtäsuuri kuin excentrisyys.

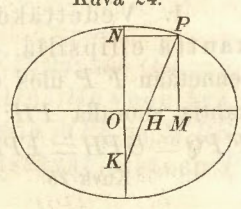
Nämä kaksi väitettä ovat hyvin tärkeitä opissa ellipsin heiastusvoimasta (miten nimittäin ellipsi heijastaa valon- kuin myös ääni- ja lämpösäteet).

I. Ellipsin toisesta polttopisteestä lähteneet säteet heiastuvat sen kehältä toiseen polttopisteesen. Fysikistä nimittäin tiedetään, että kohtaava säde ja heiastunut säde tekevät yhtäsuuria kulmia emälinjan (normaalin kanssa) ja samahan on, niinkuin näimme, polttosäteidenkin laita. Tästä nimi polttopiste.

II. Jos valonsäteitä *(LP)* yhdensuuntaisesti iso-akselin kanssa lankeaa ellipsin kehälle, joka voi taittaa valoa, niin yhtyvät nämä säteet, taituttuansa, ellipsin tuonnemmaisessa polttopisteessä F', kun vaan taittokoeffieientti on yhtäsuuri kuin excentrisyyden vastavuoroinen arvo $\frac{1}{e}$.

Koska LP on iso-akselin suuntainen ja PI normaalin pitennys, niin on $LPI = FHP$ ja $F'PH = HPF$, josta
$$\frac{\sin LPI}{\sin F'PH} = \frac{\sin FHP}{\sin HPF} = \frac{1}{e} = \text{taittokoefficientti.}$$
Jos siis LP on kohtaava, säde, niin on PF' taittuneen säteen tie.

Kuva 24.



48. Huomataksemme uusia ominaisuuksia normaalilla, otamme määrätäksemme akselien rajoittamat osat eli segmentit siitä PH, PK. Jos normaalin yhtälössä (8), jossa x' $(= OM)$, y' $(= ON)$ ovat P-pisteen koordinaateja, tehdään $y = 0$, niin saadaan
$$x' - x = HM = \frac{b^2 x'}{a^2},$$
josta
$$\overline{PH}^2 = \overline{HM}^2 + \overline{MP}^2 = \frac{b^4 x'^2}{a^4} + y'^2 = b^4\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}\right).$$
Jos taas yhtälössä (8) tehdään $x = 0$, saadaan samoin
$$y' - y = KN = \frac{a^2 y'}{b^2}$$
ja siis
$$\overline{PK}^2 = \overline{KN}^2 + \overline{NP}^2 = \frac{a^4 y'^2}{b^4} + x'^2 = a^4\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}\right).$$

Tästä saadaan

$$\frac{PH}{PK} = \frac{b^2}{a^2}.$$

[ja (vrt. 44 §, (6)]

$$PH.PK = a^2b^2\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^2}\right) = rr',$$

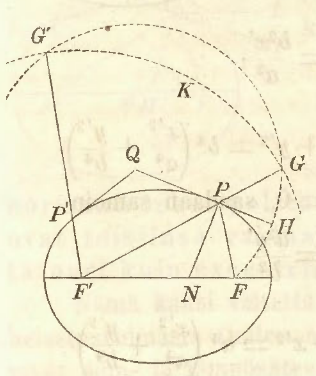
jossa r, r' merkitsevät P-pisteen polttosäteitä. Näistä kaavoista johdamme nyt seuraavan teoreeman:

Akselien leikkaamilla osilla (PH, PK) normaalia, joka on vedetty mistä P-pisteestä hyvänsä ellipsillä, on toisiinsa vakinainen suhde $= b^2 : a^2$, ja niiden muodostama suorakulmio on yhtäsuuri kuin suorakulmio P-pisteen polttosäteillä.

49. Tangentti tekee yhtäsuuria kulmia polttosäteiden kanssa. — Tämä seuraa korollaarina siitä, jo 47 §:ssä todistetusta, väitteestä, että normaali PN jakaa kahtia polttosäteiden välisen kulman FPF'. Kun nimittäin $FPN = NPF'$ ja $NPH = NPQ$, normaalin ollessa kohtisuoran tangentille; niin on myös $FPH = F'PQ$. Tämän nojalla opimme helposti vetämään tangentteja ellipsille.

1. Vedettäköön tangentti jonkun P-pisteen kautta ellipsillä. — Vedetään polttosäteet FP, $F'P$; pitennetään $F'P$ ulos G-pistettä kohti ja leikataan kulma FPG kahtia suoralla PH; tämä suora on ellipsin tangentti, sillä $F'PQ = GPH = FPH$.

Kuva 25.



2:o. Vedettäköön tangentti ellipsin ulkopuolella olevasta pisteestä Q. — Toinen polttopiste F' keskiönä, piirretään pyöriö säteellä $2a$; piste Q keskiönä piirretään toinen pyöriö, jonka kehä kulkee toisen polttopisteen (F) kautta. Pisteet G, G', joissa sanotut pyöriöt leikkaavat toisensa, yhdistetään F'-pisteen kanssa; siten saadaan sivuamis-pisteet P, P' määrätyiksi.

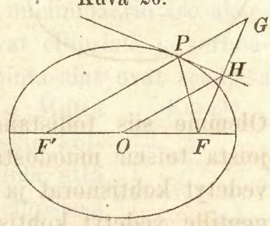
Kun nimittäin $F'G = 2a = F'P + PF$, niin on $PF = PG$; viimeksi mainitut suorat tekevät siis yhtä suuria kulmia säteen QH kanssa, joka siis sivuaa ellipsiä. Samoin todistetaan myöskin QP' ellipsin tangentiksi.

3:o Vedettäköön tangentti annetun suoran suuntaiseksi. — Piirretään pyöriö GKG' ja vedetään FG kohtisuoraksi annetulle suoralle sekä kohtisuora HQ viivan FG keskitse.

50. Edellisessä §:ssä todistettu ominaisuus ellipsin tangentilla, että se nimittäin tekee yhtäsuuria kulmia polttosäteiden kanssa, antaa aihetta muutamille uusille väitteille.

I. Ura sille pisteelle H, jossa kohtisuora polttopisteestä kohtaa tangentin, on ellipsiä verhoava pyöriö. — Koska PH jakaa kahtia kulman FPG, jonka välillensä tekevät toinen polttosäde ja toisen pitennys, ja FG ehdotuksen mukaan on kohtisuora PH:lle, niin ovat kolmiot PHF, PHG yhteellisiä ja $FH = HG$. Suora OH jakaa siis kahtio sekä FG:n että FF':n ja on siis puoli $F'G$:stä. Mutta $F'G = F'P + PF = 2a$; siis $OH = a$.

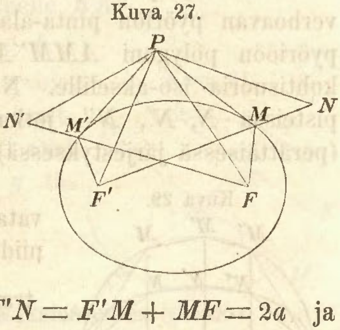
Kuva 26.



II. Kaksi, ulkopisteestä (P) ellipsille vedettyä, tangenttia tekevät yhtäsuuria kulmia MPF ja $M'PF'$ niiden suorain kanssa, jotka yhdistävät pisteen P kumpaankin polttopisteesen.

Pitennetään $F'M$ niin että $MN = MF$; pitennetään samoin FM', niin että $M'N' = M'F'$. Siten saadut kolmiot PFN' ja $PF'N$ ovat yhteelliset, sillä sivut toisessa ovat yhtäsuuret kuin vastaavat sivut toisessa. PF on nimittäin $= PN$, $PF' = PN'$ ja $FN' = FM' + M'F' = 2a$, $F'N = F'M + MF = 2a$ ja siis myöskin $FN' = F'N$. Siitä syystä ovat kulmat FPN',

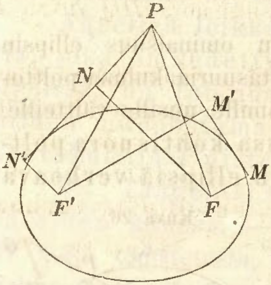
Kuva 27.



$F'PN$ yhtäsuuret. Otetaan pois yhteinen FPF', niin ovat jäännökset $F'PN'$, FPN ja siis niiden puoliskotkin yhtäsuuret $F'PM' = FPM$.

III. Polttopisteistä tangentille vedettyjen kohtisuorain muodostama suorakulmio on vakinainen ja yhtäsuuri kuin neliö vähä-akselin puolikkaalla.

Kuva 28.



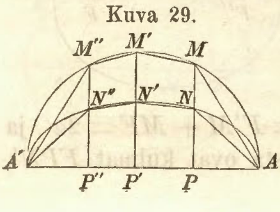
MP, $N'P$ ovat kaksi mielinmäärin vedettyä tangenttia ja FM, FN, $F'M$, $F'N$ polttopisteistä niille vedettyjä kohtisuoria. Edellisen teoreeman nojalla ovat kolmiot PFM ja $PF'N'$ keskenänsä sekä kolmiot PFN ja $PF'M'$ keskenänsä yhdenmukaisia. Sentähden on $FM : F'N' = PF : PF'$ ja $FN : F'M' = PF : PF'$; ja siis $FM : F'N' = FN : F'M'$, josta

$$FM . F'M' = FN . F'N'.$$

Olemme siis todistaneet yhtäsuuriksi kaksi suorakulmiota, joista toisen muodostavat polttopisteistä yhdelle tangentille vedetyt kohtisuorat ja toisen taas polttopisteistä toiselle tangentille vedetyt kohtisuorat. Tämä suorakulmio on siis vakinainen, s. o. aina yhtäsuuri, olkoon tangentti vedetty miten hyvänsä. Sama on siis asianlaita, vaikka tangentti on vedetty vähä-akselin pääpisteen kautta, ja silloin nähdään paikalla, että suorakulmion vakinainen arvo on $= b^2$.

51. Ellipsin pinta-ala saadaan, kun verrataan sitä verhoavan pyöriön pinta-alaan. Piirretään nimittäin puolipyöriöön polygoni $AMM'M''A'$ ja vedetään sen kärjistä kohtisuoria iso-akselille. Nämä leikkaavat ellipsiä eräissä pisteissä N, N', N'', jotka sitten yhdistetään keskenänsä (perättäisessä järjestyksessä).

Kuva 29.



Tarkastaessamme kahta vastaavata trapetsia MP' ja NP', saamme niiden pinta-aloille seuraavat arvot

$$\text{trapetsi } MP' = \frac{MP + M'P'}{2} . PP',$$

$$\text{trapetsi } NP' = \frac{NP + N'P'}{2} . PP'.$$

Mutta 43 §:n mukaan on

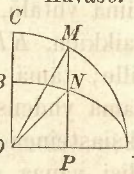
$$\frac{b}{a}=\frac{NP}{MP}=\frac{N'P'}{M'P'}=\frac{NP+N'P'}{MP+M'P'},$$

siis on trap. NP': trap. $MP' = b{:}a$. Sama on muidenkin trapetsien laita ja siis myöskin ellipsiin ja pyöriöön piirrettyjen monikulmioiden, olkoon sivujen luku niissä kuinka suuri hyvänsä. Kun nyt sivut tehdään äärettömän pieniksi ja niiden luku äärettömän suureksi, niin monikulmioiden pinta-alat tulevat äärettömän lähelle itse ellipsin ja pyöriön pinta-aloja. Siitä päätetään, että ellipsin ja pyöriön pinta-alat ovat toisiinsa, niinkuin $b{:}a$, ja kun pyöriön pinta-ala on $= \pi a^2$, niin on

$$\text{ellipsin pinta-ala} = \pi ab.$$

Tästä seuraa myös, että kaksi mielinmäärin iso-akseakselille vedettyä kohtisuoraa leikkaavat ellipsistä ja verhoavasta pyöriöstä segmenttejä, joiden pinta-alat ovat toisiinsa $= b : a$. Niinpä esim. on $BP : CP = b : a$. Mutta samassa suhteessa ovat toisiinsa myöskin kolmiot OPN ja OPM. Siitä päätetään vielä, että vastaavaiset sektorit OBN ja OCM ellipsissä ja pyöriössä ovat toisiinsa niinkuin vähä-akseli iso-akseliin.

Kuva30.



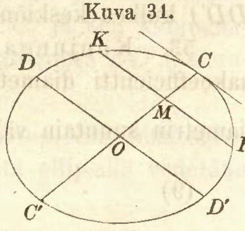
52. **Ellipsin diametrit.** — Yleensä on diametri sellainen suora, joka jakaa kahtia kaikki samassa suunnassa vedetyt jänteet. Hakekaamme yhtälö ellipsin diametrille.

Olkoon esim. yhtälönä jänteelle KK'

$$y = mx + k.$$

Jos tässä yhtälössä k saa eri arvoja, mutta m pysyy vakinaisena, niin osoittaa se eri jänteitä, jotka kaikki ovat yhdensuuntaisia. Eliminoidaan y tämän ja ellipsin yhtälön

Kuva 31.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

välillä; siten saadaan seuraava kaksiasteinen yhtälö:

$$(a^2m^2 + b^2)\,x^2 + 2a^2mkx + a^2\,(k^2 - b^2) = 0,$$

jonka juuret ovat abscissoja jänteen pääpisteille K, K'. Puoli näiden abscissain summasta on abscissa jänteen keskukselle M (12 §). Mutta toisaalta tiedämme, että juurten summa sellaisessa yhtälössä, jonka ensimmäisellä terminillä on koefficienttinä ykkönen, on yhtäsuuri kuin toisen terminin koefficientti vastaisella merkillä. Jos siis x_0, y_0 merkitsevät M-pisteen koordinaateja, niin on

$$x_0 = -\frac{a^2mk}{a^2m^2+b^2}.$$

Kun M on piste jänteellä, niin toteuttavat sen koordinaatit jänteen yhtälön, siis on

$$y_0 = mx_0 + k.$$

Eliminoituamme vaihtuvan k-suureen näiden kahden yhtälön välillä, saamme

$$y_0 = -\frac{b^2}{a^2m}x_0.$$

Siinä yhtälö, jonka välttämättömästi toteuttavat koordinaatit kaikkien, KK':n kanssa yhdensuuntaisten, jänteiden keskuksille; tämä yhtälö edustaa siis suoraa, joka jakaa kaikki nämä yhdensuuntaiset jänteet kahtia. Koska tämä yhtälö on yksiasteinen eikä sisällä yhtään semmoista terminiä, joka olisi vapaa suureista y_0 tai x_0, niin saattaa siitä päättää, että diametri elikkä yhdensuuntaisia jänteitä kahtia jakava viiva ellipsissä, on keskiön kautta kulkeva suora. Diametrin kulkeminen keskiön kautta seuraa muutoin jo sen määrityksestäkin; niistä yhdensuuntaisista jänteistä, jotka diametri jakaa kahtia, täytyy nimittäin yhden (DD') kulkea keskiön kautta.

53. Konjungaatiset diametrit. — Jos m' on kulmakoefficientti diameterille CC', niin saadaan jänteiden ja diametrin suuntain välille seuraava suhta $m' = -\frac{b^2}{a^2m}$ eli

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}, \tag{9}$$

Tämä suhta, ollen symmetrillinen suureiden m ja m' suhteen, osoittaa, että jos m' otetaan jänteiden kulmakoefficientiksi, niin on m diametrin kulmakoefficientti. Toisin sanoen: jos CC' jakaa kahtia DD':n suuntaiset jänteet, niin jakaa päinvastoin DD' kahtia CC':n suuntaiset jänteet. Nämä kaksi diametria, CC' ja DD', ovat siis senlaatuisia, että kumpikin jakaa kahtia toisensa-suuntaiset jänteet; senvuoksi niitä sanotaan konjugaatisiksi diametreiksi.

Iso-akseli ja vähä-akseli ovat nähtävästi pari kohtisuoria konjugaatisia diametreja.

Kun joku diametri DD' on annettu, on helppo löytää sen konjugaatinen diametri. Vedetään vaan jänne KK' sen suuntaiseksi ja yhdistetään tämän jänteen keskus ellipsin keskiöön; yhdistysviiva CC' on juuri haettu konjugaatinen diametri.

Jos x', y' ovat koordinaateja pisteelle C, niin on diametrilla CC' kulmakoefficienttinä $m' = \frac{y'}{x'}$, joka, pantuna yhtälöön (9), antaa

$$m = -\frac{b^2}{a^2 m'} = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}.$$

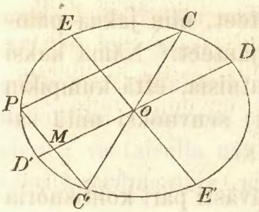
Mutta $-\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$ on myöskin kulmakoefficientti tangentille pisteessä C; siis:

Diametrin pääpisteen kautta vedetty tangentti on konjugaatisen diametrin suuntainen.

Tästä tärkeästä väitteestä saamme uuden, yksinkertaisen keinon tangentin piirtämiseen ellipsille jossakin C-pisteessä. Vedetään (kuva 31) diametri CC' ja sen konjugaatinen diametri DD' sekä C-pisteen kautta suora DD':n suuntaiseksi.

54. Supplementtiset jänteet. — Niin nimitetään suoria PC, PC', jotka jostakin pisteestä ellipsillä vedetään jonkun diametrin CC' päihin.

Kaksi supplementtistä jännettä ovat yhdensuuntaiset konjugaatisen diametri-parin kanssa. —



Kuva 32.

Vedetään diametri DD' samansuuntaiseksi kuin jänne PC; silloin jakautuvat kolmiossa $CC'P$ sivut CC' ja PC' samassa suhteessa. Mutta CC' on jaettu kahtia pisteessä O, siis leikkaa diametri DD kahtia myöskin jänteen PC'. Siitä seuraa, että PC:n ja PC':n suuntaiset diametrit ovat konjugaatisia.

Tehtäviä. 1:o Haettakoon ellipsin keskiö. — Vedetään kaksi yhdensuuntaista jännettä ja yhdistetään niiden keskukset; siten saatu diametri jaetaan kahtia, jolloin jakopiste on ellipsin keskiö.

2:o. Haettakoon akselit. — Mielinmäärin vedetylle diametrille CC' piirretään puolipyöriö; tämän ja ellipsin leikkauspiste yhdistetään diametrin päiden (C, C') kanssa; siten saadaan pari suorakulmaisia supplementtisiä jänteitä, joista toinen on toisen ja toinen toisen akselin suuntainen.

Taikka: piirretään ellipsin keskiöstä pyöriö (koncentrillinen ellipsin kanssa), joka leikkaa ellipsiä neljässä pisteessä; nämä pisteet ovat kulmankärkiä suorakulmiossa, jonka sivut ovat akselien suuntaisia.

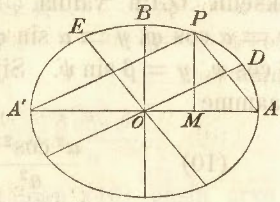
55. Yhtäsuuret konjugaatiset diametrit. — Yhtälö (9), jossa m ja m' ovat erinmerkkisiä, osoittaa, että kaksi konjugaatista diametria ovat aina eri akselikulmissa, toinen oikealla, toinen vasemmalla puolen vähä-akselia. Ollaksensa yhtäsuuria, pitää siis niiden olla symmetrillisesti asettuneina akselien suhteen (42 §) ja siis yhdensuuntaisina niiden supplementtisten jänteiden (AB, $A'B$) kanssa, jotka isoakselin päistä vedetään vähä-akselin päähän.

Ellipsillä on niin muodoin ainoastaan yksi pari yhtäsuuria konjugaatisia diametreja, jotka samalla ovat diagonaaleja akseleille muodostetussa suorakulmiossa. Toisen kulmakoefficientti on $m = \frac{b}{a}$ ja toisen $m = -\frac{b}{a}$.

56. Kahden konjugaatisen diametrin välinen kulma. — Saadaksemme selville, mitenkä kahden konjugaa-

tisen diametrin välinen kulma vaihtelee diametrien eri asemain mukaan, tulee ainoastaan tutkia, kuinka kulma kahden supplementtisen jänteen välillä vaihtelee. Selvyyden vuoksi tarkastetaan iso-akselin päästä lähteviä supplementtisiä jänteitä.

Kuva 33.



Kohtisuora PM jakaa kulman APA', jonka nimitämme θ, kahteen osaan, APM ja $A'PM$, joiden tangentit ovat $\frac{a-x}{y}$ ja $\frac{a+x}{y}$, kun x, y ovat P-pisteen koordinaateja. Siis saadaan

$$\text{tang } \theta = \frac{\frac{a-x}{y} + \frac{a+x}{y}}{1 - \frac{a^2-x^2}{y^2}}.$$

Mutta ellipsin yhtälöstä seuraa $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ eli $\frac{a^2-x^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}$, joten edellisestä kaavasta tulee

$$\text{tang } \theta = -\frac{2ab^2}{(a^2-b^2)y}.$$

Katsokaamme nyt, mitä arvoja kulma θ saa, kun piste P kulkee ellipsin yläpuoliskoa ABA'. Tangentti on koko tällä välillä negativinen ja kulma θ siis yleensä tylsä. Kun P on pisteessä A, on $y = 0$, tang $\theta = \infty$ ja $\theta = 90^0$; P-pisteen kulkiessa rataa AB, kasvaa y; tang θ vähenee ominaisessa arvossaan ja itse kulma θ kasvaa, kunnes se saavuttaa suurimman arvonsa pisteessä B. Kun P jatkaa kulkuansa A'-pistettä kohti, vähenee kulma θ jälleen maksimi-arvostansa suoraksi kulmaksi.

Tästä näkyy, että kulma, jonka välillensä tekevät kahden konjugaatisen diametrin puoliskot OD ja OE samalla puolen iso-akselia, on tylsä ja vaihtelee 90^0 asteesta erääsen maksimi-arvoon. Ainoina konjugaatisina diametreina, jotka tekevät välillensä suoran kulman, ovat ellipsin akselit. Isoimman tylsän kulman tekevät ne konjugaatiset diametrit, jotka ovat *B*-pisteestä lähteväin supplementtisten jänteiden suuntaiset ja siis yhtäsuuret.

57. Merkitkööt α ja β diametrin puolikkaita *OD*, *OE*, sekä φ ja ψ kulmia sanottujen puolikkaiden ja puoliakselin *OA*:n välillä. Silloin ovat *D*-pisteen koordinaatit $x = \alpha \cos \varphi$, $y = \alpha \sin \varphi$ ja *E*-pisteen koordinaatit $x = \beta \cos \psi$, $y = \beta \sin \psi$. Sijoitettuamme nämä ellipsin yhtälöön, saamme

$$\frac{\alpha^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1. \tag{10}$$

$$\frac{\beta^2 \cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\beta^2 \cos^2 \psi}{b^2} = 1. \tag{11}$$

Diametrit kun ovat konjugaatisia, on sitä paitsi (9)

$$\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \psi = -\frac{b^2}{a^2}$$

eli

$$\frac{\cos \varphi \cos \psi}{a^2} + \frac{\sin \varphi \sin \psi}{b^2} = 0. \tag{12}$$

Neljällä suureella α, β, φ, ψ on siis kolme suhtaa, jotka eri lailla yhdistettyinä saattavat eri väitteisin. Kulmista φ, ψ on, niinkuin olemme nähneet, toinen aina terävä, toinen tylsä; seuraavassa tutkinnossa pidetään φ terävänä ja ψ tylsänä kulmana.

58. Yhtälö (12), kerrottuna suurella $\alpha\beta$, muuttaa muotonsa seuraavaksi

$$\frac{\dfrac{\alpha \cos \varphi}{a}}{\dfrac{\beta \sin \psi}{b}} = \frac{\dfrac{\alpha \sin \varphi}{b}}{\dfrac{-\beta \cos \psi}{a}}.$$

Kumpikin näistä murtoluvuista on yhtäsuuri kuin eräs kolmas murtoluku, jonka osoittajana on neliöjuuri osoittajain neliöiden summasta ja nimittäjänä neliöjuuri nimittäjäin neliöiden summasta.*) Yhtälöjen (10) ja (11) mukaan ovat nämä summat kumpikin $= 1$; kolmaskin murtoluku on siis $= \pm 1$. Merkeistä on käytettävä ainoastaan $+$, koska annetut murtoluvut nähtävästi ovat positivisia. Siis saadaan

$$\frac{\dfrac{\alpha \cos \varphi}{a}}{\dfrac{\beta \sin \psi}{b}} = \frac{\dfrac{\alpha \sin \varphi}{b}}{\dfrac{-\beta \cos \psi}{a}} = 1,$$

josta

$$(13) \qquad \frac{\alpha \cos \varphi}{a} = \frac{\beta \sin \psi}{b}, \quad \frac{\alpha \sin \varphi}{b} = -\frac{\beta \cos \psi}{a}.$$

Sijoitetaan nyt näistä kaavoista yhtälöön (10) ensin arvo suurelle $\dfrac{\alpha \sin \varphi}{b}$ ja sitten arvo suureelle $\dfrac{\alpha \cos \varphi}{a}$; siten tulee

$$(14) \qquad \begin{cases} \alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \psi = a^2 \\ \alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \psi = b^2. \end{cases}$$

Nämä kaavat sanovat, että **jos kaksi konjugaatista diametria projicioidaan jommallekummalle akselille,**

---

*) Sillä jos on useampia yhtäsuuria murtolukuja

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \ldots,$$

niin kukin niistä on yhtäsuuri kuin se murtoluku

$$\frac{A + B + C + \ldots}{a + b + c + \ldots},$$

joka saadaan, kun osoittajain summa jaetaan nimittäjäin summalla (Eukl. V, 12). Samasta syystä on yleensä

$$\frac{A^m}{a^m} = \frac{B^m}{b^m} = \frac{C^m}{c^m} = \ldots = \frac{A^m + B^m + C^m + \ldots}{a^m + b^m + c^m + \ldots},$$

eli, kun molemmin puolin otetaan m:nes juuri

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \ldots = \frac{\sqrt[m]{A^m + B^m + C^m + \ldots}}{\sqrt[m]{a^m + b^m + c^m + \ldots}}.$$

Siten saattaa useammasta yhtäsuuresta annetusta murtoluvusta monella muotoa tehdä uuden murtoluvun, joka on yhtäsuuri kuin kukin annetuista; ja siinä on useinkin yksinkertainen ja sievä keino yhtälöjen muodostamiseksi ja ratkaisemiseksi.

niin summa projektionien neliöistä on vakinainen ja yhtäsuuri kuin akselin neliö.

Samat kaavat (14), laskettuina terminittäin yhteen, antavat

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2; \tag{15}$$

s. o.: summa kahden konjugaatisen diametrin neliöistä on vakinainen ja yhtäsuuri kuin summa akselien neliöistä.

59. Jos kahden konjugaatisen diametrin (2α, 2β) päistä vedetään tangentteja ellipsille, saadaan ellipsiä verhoava suunnikas, jonka pinta-ala on $4\alpha\beta \sin(\psi - \varphi)$. Tätä arvoa löytääksemme, palaamme jälleen kaavaan (10). Purjettuamme siinä neliöterminit tekijöihin, saamme

$$\frac{\alpha \cos \varphi}{a} \cdot \frac{\alpha \cos \varphi}{b} + \frac{\alpha \sin \varphi}{b} \cdot \frac{\alpha \sin \varphi}{b} = 1.$$

Kummassakin terminissä panemme toisen tekijän sijaan sen arvon kaavasta (13), siten tulee

$$\frac{\alpha\beta (\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi)}{ab} = 1,$$

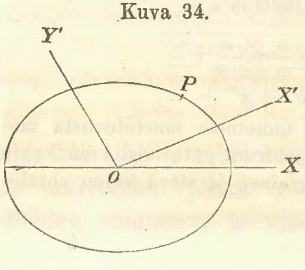
josta

$$\alpha\beta \sin(\psi - \varphi) = ab. \tag{16}$$

Tämä sanoo: Kahdelle konjugaatiselle diametrille piirretyn suunnikkaan pinta-ala on vakinainen ja yhtäsuuri kuin akselien tekemä suorakulmio. Kahden konjugaatisen diametrin pääpisteiden yhdistämisestä syntynyt sisustava suunnikas on puolet edellisestä verhoavasta suunnikkaasta, ja on siis senkin pinta-ala vakinainen.

60. Ellipsin yhtälö kahdessa konjugaatisessa diametrissa. — Suorakulmaisten koordinaatien sijaan otamme nyt uuden koordinaatiston, jonka akselit OX', OY' lähtevät nytkin ellipsin keskiöstä, mutta tekevät alkuperäisen x-akselin kanssa kulmat φ, ψ, nimittäin $\varphi = X'OX$, $\psi = Y'OX$. Jonkun P-pisteen al-

Kuva 34.



kuperäiset koordinaatit x, y, sekä saman pisteen uudet koordinaatit, jotka nimitämme ξ, η, ovat yhdistetyt (10 §, 2:o) seuraavilla yhtälöillä:

$$x = \xi \cos\varphi + \eta \cos\psi$$
$$y = \xi \sin\varphi + \eta \sin\psi.$$

Kos P on piste ellipsillä, niin on sitä paitsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

ja kun nyt edelliset arvot suureille x ja y sijoitetaan tähän, niin saadaan

$$\frac{(\xi \cos\varphi + \eta \cos\psi)^2}{a^2} + \frac{(\xi \sin\varphi + \eta \sin\psi)^2}{b^2} = 1$$

eli kehitettynä

$$\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)\xi^2 + \left(\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}\right)\eta^2$$
$$+ 2\left(\frac{\cos\varphi\cos\psi}{a^2} + \frac{\sin\varphi\sin\psi}{b^2}\right)\xi\eta = 1.$$

Tähän saakka ovat kulmat φ ja ψ olleet mielinmääräiset; mutta kun nyt teemme sen määräyksen, että uusien akselien tulee olla parin konjugaatisia diametreja, niin saadaan kulmain φ ja ψ välille suhta (12), jonka mukaan edellisessä yhtälössä koefficientti suureelle $\xi\eta$ katoaa. Silloin tulee yhtälöjen (10) ja (11) mukaan $\frac{1}{\alpha^2}$ koefficientiksi suureelle ξ^2 ja $\frac{1}{\beta^2}$ suureelle η^2, jolloin α ja β merkitsevät diametrien puolikkaita; niin muodoin saadaan

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1. \tag{17}$$

Siinä ellipsin yhtälö uudessa koordinaatistossa. Tehtyämme vuorottain $\eta = 0$ ja $\xi = 0$, näemme, että ellipsi leikkaa ξ-akselia $\pm\alpha$-matkan päässä ja η-akselia $\pm\beta$-matkan päässä originista; konjugaatisten diametrien pituudet ovat siis 2α ja 2β, niinkuin olemme otaksuneetkin.

Koska yhtälössä (17) on ainoastaan neliöitä suureista ξ ja η, niin vastaa kutakin ξ:n arvoa kaksi η:n arvoa, jotka ovat yhtäsuuret, mutta vastaismerkkiset; samoin vastaa kutakin η:n arvoa kaksi yhtäsuurta ja vastaismerkkistä ξ:n arvoa. Tästä seuraa, että toinen akseli jakaa kahtia toisen akselin suuntaiset jänteet; — siinä siis uusi näyte konjugaatisten diametrien tunnetusta ominaisuudesta.

61. Ellipsin yhtälö (17) konjugaatisissa diametreissa ei eroa ellipsin yhtälöstä akseleissa minkään muun suhteen kuin että uudet akselit ξ, η ovat vinokulmaisia. Hakeaksemme tässä vinokulmaisessa koordinaatistossa yhtälöä tangentille samalla muotoa kuin ennenkin (45 §), panemme suureiden a, b, x, y sijaan α, β, ξ, η; lasku on muutoin sama. Tangentin yhtälö tulee siten samanmuotoiseksi kuin suorakulmaisessakin koordinaatistossa, nimittäin

$$\frac{\xi\xi'}{\alpha^2}+\frac{\eta\eta'}{\beta^2}=1,$$

jossa ξ', η' ovat koordinaateja sivuamispisteelle ja ξ, η juoksevia koordinaateja.

Samalla tutkimuksella kuin ennen (52, 53 §§) saadaan myös, muitta muutoksitta kuin yllämainittu sijoitus, määrätyksi kahden konjugaatisen diametrin keskinäinen suhta. Jos siis μ, μ' merkitsevät niiden kulmakoefficienttejä vinokulmaisessa koordinaatistossa, saadaan [vrt. (9)] kaava

$$\mu\mu'=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

Täten tullaan muutamiin uusiin teoreemoihin:

I. J o s j o s t a k i n p i s t e e s t ä d i a m e t r i n p i t e n n y k s e l l ä v e d e t ä ä n e l l i p s i l l e k a k s i t a n g e n t t i a, n i i n j a k a a d i a m e t r i s i v u a m i s p i s t e i t ä y h d i s t ä v ä n j ä n t e e n k a h t i a.

Jos nimittäin tämä diametri otetaan ξ-akseliksi, sekä ξ', η' ovat toisen ja ξ'', η'' toisen sivuamispisteen koordinaateja, niin välimatka originista tangenttien yhtymäpisteesen on

$$\frac{\alpha^2}{\xi'}=\frac{\alpha^2}{\xi''},$$

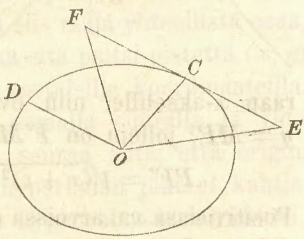
josta $\xi''=\xi'$ sekä ellipsin yhtälön nojalla $\eta''=-\eta'$.

II. Ellipsiä verhoavan suunnikkaan diagonaalit määräävät suunnan kahdelle konjugaatiselle diametrille.

Sillä toinen diagonaali jakaa kahtia jänteen, joka yhdistää kaksi viereistä sivuamispistettä; sitä paitsi on sanottu jänne toisen diagonaalin suuntainen.

III. Kaksi mielinmäärin vedettyä konjugaatista diametria OE, OF leikkaavat jonkun C-pisteen kautta ellipsillä vedetystä tangentista osia CE, CF, joiden tulo on vakinainen ja yhtäsuuri kuin neliö siitä diametrinpuolikkaasta OD, joka on tangentin suuntainen.

Kuva 35.



Diametrit OC, OD, joista toinen käy sivuamispisteen kautta ja toinen on tangentin suuntainen, ovat konjugaatisia diametreja; otetaan edellinen abscissain akseliksi, jälkimmäinen ordinaatain akseliksi ja merkitään OC kirjaimella α ja OD kirjaimella β. Jos nyt yhtälöinä konjugaatisille diametreille OE, OF on

$$\eta = \mu\xi, \quad \eta = \mu'\xi,$$

niin on

$$\mu\mu' = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

Mutta pisteillä E ja F on sama abscissa $OC = \alpha$; niiden ordinaatat ovat senvuoksi $\mu\alpha = -CE$, $\mu'\alpha = CF$, ja siis on

$$CE.\,CF = -\mu\mu'\alpha^2 = \beta^2,$$

joka oli todistettava.

Kuudes Luku.

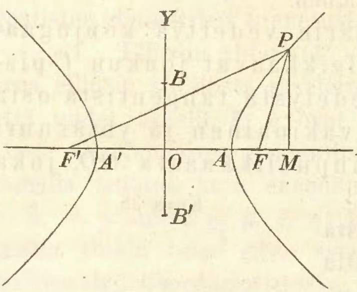
Hyperbola.

62. Hyperbola on ura sellaiselle pisteelle P, jonka välimatkoilla kahdesta kiinteästä pisteestä F, F' on vakinai-

nen eroitus. Kiinteitä pisteitä sanotaan polttopisteiksi ja jommastakummasta polttopisteestä hyperbolan kehälle vedettyä suoraa polttosäteeksi (radius vector).

Hyperbolan yhtälö. — Olkoon $2a$ vakinainen eroitus kahden polttosäteen, PF' ja PF, välillä ja $2c$ polttopisteiden välimatka FF'. Otetaan suorakulmainen koordinaatisto OX, OY, jossa origini O jakaa kahtia suoran FF', niin että $OF = OF' = c$; x-akseli langetkoon pitkin suoraa OF ja y-akseli kohtisuoraan sille. Jos nyt PM vedetään kohtisuoraan x-akselille, niin ovat P-pisteen koordinaatit $x = OM$, $y = MP$; jolloin on $F'M = x + c$, $FM = x - c$ ja

Kuva 36.



$$PF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ PF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Positivisissa x:n arvoissa on aina $(x+c)^2 > (x-c)^2$, siis $PF' > PF$ ja $PF' - PF = 2a$; negativisissa x:n arvoissa on taas $(x-c)^2 > (x+c)^2$, siis $PF > PF'$ ja $PF - PF' = 2a$. Hyperbolan analytillinen määritys on siis

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

jossa $+$ käytetään, kun x on positivinen, ja $-$, kun se on negativinen.

Siirtämällä jälkimmäinen juuriluku oikeaan jäseneen ja koroittamalla molemmin puolin neliöön saadaan

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2,$$

koroittamalla uudestaan neliöön ja sieventämällä saadaan

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Koska kolmiossa PFF' kahden sivun eroitus on pienempi kolmatta sivua, niin on $2a < 2c$ eli $c > a$. Senvuoksi saatamme panna

$$c^2 - a^2 = b^2,$$

joten edellisestä yhtälöstä tulee

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

eli, jaettuamme suureella a^2b^2,

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Siinä yksinkertaisin muoto hyperbolan yhtälöä suorakulmaisissa koordinaateissa. Sen ja ellipsin yhtälön välillä on silmiinpistävä yhtäläisyys. Toinen saadaan toisesta, niin että ainoastaan muutetaan b^2-suureen merkki.

63. Tutkimus. — Koska yhtälössä (1) on ainoastaan neliöitä suureista x ja y, niin vastaa kutakin pistettä (x, y) hyperbolalla symmetrillinen piste $(x, -y)$ vastaisella puolen x-akselia ja toinen symmetrillinen piste $(-x, y)$ vastaisella puolen y-akselia. Hyperbola on siis symmetrillinen kumpaisenkin akselin suhteen, ja siinä on siis neljä yhteellistä osaa, yksi kussakin akselikulmassa. Koska sitä paitsi pistettä (x, y) vastaa neljäskin piste $(-x, -y)$ vastaisilla koordinaateilla, ja nämä pisteet nähtävästi ovat samalla suoralla ja yhtä kaukana originista kumpikin, niin seuraa siitä, että origini jakaa kaikki sen kautta vedetyt hyperbolan jänteet kahtia. O-pistettä sanotaankin siitä syystä hyperbolan **keskiöksi**.

Jos yhtälössä (1) tehdään $y = 0$, saadaan $x = \pm a$; hyperbola leikkaa siis x-akselia kahdessa pisteessä A, A', jotka ovat yksi kummallakin puolen keskiötä O ja yhtäpitkän a-matkan päässä siitä. Suora $AA' = 2a$ on hyperbolan **transversaalinen akseli** ja pisteet A, A' sen **periä** (vertices). Kun $x = 0$, saa y kaksi aatteista arvoa $y = \pm b\sqrt{-1}$, josta nähdään, ett'ei hyperbola ollenkaan tapaa y-akselia. Tällä akselilla otetaan kumminkin kaksi pistettä B, B' yhtäpitkän b-matkan päässä originista ja nimitetään suoraa $BB' = 2b$ hyperbolan **konjugaatiseksi akseliksi**.

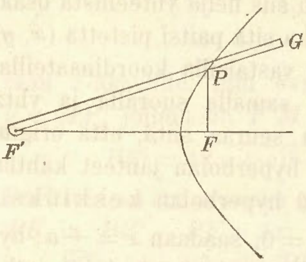
Yhtälö (1), muodossaan

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

näyttää, ett'ei x^2 saata olla pienempi kuin a^2, sillä muutoinhan olisi y aatteinen, ja ettei x siis voi saada yhtään arvoa rajain $-a$ ja $+a$ välillä. Siitä seuraa, että, jos pisteitten A, A' kautta vedetään kaksi kohtisuoraa transversaaliselle akselille, ei yksikään hyperbolan piste lankea näiden suorain väliin. Kun $x = a$, on $y = 0$; kukin x:n arvo, joka on suurempi kuin a, antaa y:lle kaksi yhtäsuurta, vastaismerkkistä arvoa, ja nämä arvot kasvavat äärettömiin, kun x kasvaa äärettömiin. Hyperbolassa on siis kaksi erillänsä olevaa, konjugaatisen akselin suhteen symmetrillistä, osaa, joista kumpikin ulottuu äärettömän kauas transversaalisen akselin ylä- sekä alapuolelle.

64. Hyperbolan piirustaminen. — Rihman ja viivaimen avulla saattaa hyperbolan piirustaa seuraavalla tavalla. Rihman toinen pää kiinnitetään polttopisteesen F ja toinen viivaimen päähän G. Viivaimen toinen pää voi kääntyä toisessa polttopisteessä F'. Kun nyt rihmaa pidetään piirustimella kireellä viivainta vastaan ja viivain pannaan kääntymään toisessa päässään, niin piirtää piirustin hyperbolan kaaren. Sillä $PF' - PF$ on viivaimen kaikissa asemissa yhtäsuuri kuin vakinainen eroitus viivaimen pituuden (GF') ja rihman pituuden (GPF) välillä.

Kuva 37.



Hyperbolan toinen puoli saadaan samalla tavalla, kun viivainta käännetään pisteessä F.

65. Hyperbolan polttopisteet ovat transversaalisella akselilla yhtäpitkän c-matkan päässä keskiöstä kummallakin puolella. 62 §:ssä esitetystä suhdasta $c^2 - a^2 = b^2$ eli

$$c^2 = a^2 + b^2$$

seuraa, että c on hypotenusa suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateeteja ovat hyperbolan puoli-akselit Kun akselit ovat annetut, saadaan siis polttopisteet siten, että transversaalisesta akselista keskiön kummallekin puolella leikataan niin pitkiä osia, kuin välimatka transversaalisen akselin päästä konjugaatisen akselin päähän on.

Excentrisyydeksi hyperbolassa sanotaan polttopisteiden välimatkaa, verrattuna transversaaliseen akseliin yksikkönä. Jos excentrisyys merkitään e:llä, on siis

$$e=\frac{c}{a},$$

josta

$$c=ae \text{ ja } b^2=c^2-a^2=a^2(e^2-1),$$

se on:

$$b=a\sqrt{e^2-1} \text{ eli } \frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}.$$

Excentrisyys täten määritettynä on puhdas luku, suurempi ykköstä, koska $c>a$.

66. Polttosäteet jollekin hyperbolan pisteelle P saadaan yksinkertaisimmin lausutuiksi saman pisteen abscissassa x. Jos nimittäin pannaan $PF=r$, $PF'=r'$, niin saadaan

$$r^2=(x-c)^2+y^2,\ r'^2=(x+c)^2+y^2,$$

josta

$$r'^2-r^2=(r'+r)(r'-r)=4cx.$$

Kun nyt hyperbolan määrityksen mukaan

$$r'-r=\pm 2a,$$

niin tulee

$$r'+r=\pm\frac{2cx}{a}=\pm 2ex.$$

Otettuamme näistä jälkimmäisistä kaavoista ensin puolen eroituksen ja sitten puolen summan, saamme

$$(2)\qquad \begin{cases} r=\pm\left(\frac{c}{a}x-a\right)=\pm(ex-a) \\ r'=\pm\left(\frac{c}{a}x+a\right)=\pm(ex+a), \end{cases}$$

joissa $+$ merkkiä käytetään, kun x on positivinen, ja $-$ merkkiä, kun x on negativinen.

Polttosäteiden muodostamalle suorakulmiolle saadaan tästä seuraava lauseke (vrt. 44 §)

$$rr'=\frac{c^2}{a^2}x^2-a^2\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right).$$

Näitä kaavoja tarvitsemme vast'edes.

Parametriksi hyperbolassa sanotaan polttopisteestä kohtisuoraan transversaaliselle akselille vedettyä jännettä. Jos yhtälössä $r = ex - a$ tehdään $x = c = ae$, niin saadaan parametrin puolikkaalle p arvoksi $p = a(e^2 - 1) = \frac{b^2}{a}$, josta $a : b = b : p$, s. o. parametri on kolmas suhdeluku transversaaliselle ja konjugaatiselle akselille.

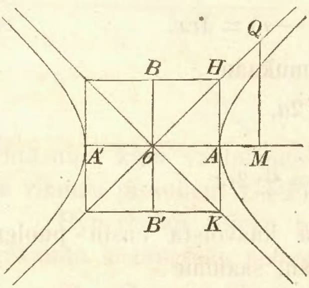
67. Hyperbolan asymptootit. — Jos hyperbolan yhtälöä muodossa

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

verrataan yksiasteiseen yhtälöön

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

Kuva 38



joka esittää diagonaaleja OH, OK akseleille tehdyssä suorakulmiossa, niin nähdään, että samaa abscissaa $x = OM$ vastaa suoralla OH eräs piste Q ja hyperbolalla eräs piste P, joiden ordinaatat ovat

$$MQ = \frac{b}{a} x, \; MP = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Näiden pisteiden välimatka on siis

$$PQ = \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2})$$

eli, jos osoittaja ja nimittäjä kerrotaan suureella $x + \sqrt{x^2 - a^2}$,

$$PQ = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Tämä lauseke vähenee vähenemistään, x:n kasvaessa, ja saattaa tulla pienemmäksi mitä lukua hyvänsä, kun x kasvaa äärettömiin. Siitä seuraa, että hyperbolan kaari AP lähenee alinomaa suoraa viivaa OQ ja saattaa tulla äärettömän lähelle sitä, sattumatta siihen kumminkaan koskaan. Suoraa OQ sanotaan siitä syystä asymptootiksi hyperbolalle, nimittäin kaarille ensimmäisessä ja kolmannessa akselikulmassa. Suora OK on samoin asymptooti hyperbolan kaarille toisessa ja neljännessä akselikulmassa.

Hyperbolalla on siis kaksi suoraviivaista asymptootia, jotka lankeavat yhteen akseleille tehdyn suorakulmion diagonaalien kanssa. Toisen asymptootin yhtälö on $y = \frac{b}{a}x$ ja toisen $y = -\frac{b}{a}x$. Nämä yhtälöt saattaa myös kirjoittaa

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Kertomalla nämä saadaan kaksiasteinen yhtälö

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

joka yht'aikaa edustaa kumpaakin asymptootia.

Kumpikin asymptooti tekee transversaalisen akselin kanssa kulman, jonka tangentti on $\frac{b}{a}$. Kun $a = b$, ovat asymptootit kohtisuoria toisilleen ja silloin sanotaan hyperbolaa yhtäsivuiseksi.

68. Hyperbolan tangentti. — Yhtälö hyperbolan tangentille johdetaan samalla tavalla kuin ellipsinkin tangentille (45 §). Itse lasku on aivan sama, sillä eroituksella vaan, että b^2 kaikkialla saa vastaisen merkin. Yhtälöksi hyperbolan tangentille saadaan siten

$$y - y' = \frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x')$$

eli

$$(4) \qquad \frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

jossa x', y' ovat sivuamispisteen koordinaatit ja x, y tangentin juoksevia koordinaateja.

Abscissa sille pisteelle, jossa tangentti leikkaa x-akselin, on $\frac{a^2}{x'}$; se on siis kolmas suhdeluku suureille x' ja a, ja tämän nojalla saattaa vetää tangentin hyperbolalle. Ordinaata tangentin ja y-akselin leikkauspisteelle on $-\frac{b^2}{y'}$.

Mitä enemmin x' ja y' kasvavat, toisin sanoen: mitä kauemmaksi sivuamispiste siirtyy originista, sitä pienempiä osia, $\frac{a^2}{x'}$, $-\frac{b^2}{y'}$, leikkaa tangentti akseleista ja sitä enemmin lähenee se originia. Kulmakoefficientti $\frac{b^2x'}{a^2y'}$ lähenee samalla raja-arvoa, jonka helposti saa määrätyksi. Kun nimittäin (x', y') on piste hyperbolalla, on

$$y' = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x'^2 - a^2} \text{ eli } \frac{y'}{x'} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x'^2}},$$

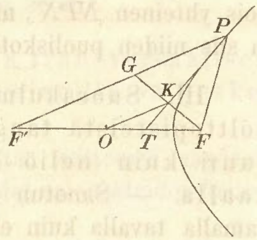
ja tästä näkyy, että, kun x' kasvaa äärettömiin, suhde $\frac{y'}{x'}$, lähenee äärellistä rajaa $\pm\frac{b}{a}$ ja että siis koefficientillä $\frac{b^2x'}{a^2y'}$ $= \frac{b^2}{a^2} : \frac{y'}{x'}$, on rajaarvona $\pm\frac{b}{a}$. Mutta tämähän on asymptootin kulmakoefficientti: asymptooti on siis se raja-asema, jota tangentti alinomaa lähenee, sivuamispisteen siirtyessä äärettömän kauas. Asymptootia sopii senvuoksi sanoa hyperbolan tangentiksi äärettömän kaukana olevassa pisteessä.

Ylläolevista kaavoista näkyy myös, että $\frac{b}{a}$ on suurin numeroarvo, mihin $\frac{y'}{x'}$ saattaa tulla, ja että siis $\frac{b}{a}$ on mini-mi-arvo tangentin kulmakoefficientille. Siitä taas päätetään, että tangentin kallistuminen transversaalista akselia kohtaan on aina isompi (s. o. lähemmällä 90°) kuin asymptootin.

69. Tangentti jakaa kahtia polttosäteiden vä-

lisen kulman. — Olkoon PT hyperbolan tangentti pisteessä $P(x', y')$, ja PF, PF' polttosäteitä. Koska nyt

Kuva 39.



$$OT = \frac{a^2}{x'},\ OF = OF' = c = ae,$$

ja (66 §)

$$F'P = r' = ex' + a,\ FP = r = ex' - a,$$

niin on

$$F'T = ae + \frac{a^2}{x'} = \frac{a}{x'}(ex' + a) = \frac{ar'}{x'}$$

$$FT = ae - \frac{a^2}{x'} = \frac{a}{x'}(ex' - a) = \frac{ar}{x'},$$

josta

$$\frac{F'T}{FT} = \frac{r'}{r}.$$

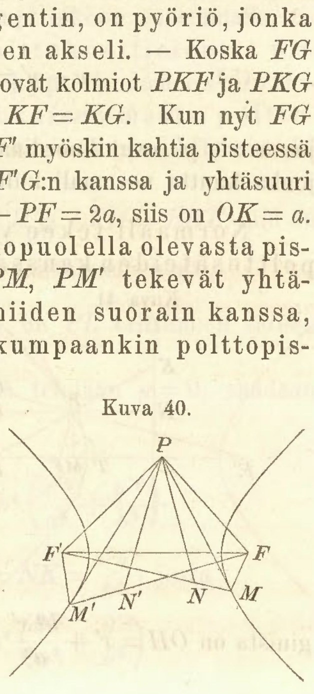
Siis on (Eukl. VI, 3) kulma TPF' = kulma TPF.

Tästä väitteestä johdetaan muutamia teoreemoja.

I. Ura sille pisteelle K, jossa polttopisteestä vedetty kohtisuora tapaa tangentin, on pyöriö, jonka diametrina on transversaalinen akseli. — Koska FG on kohtisuorassa viivalle PT, niin ovat kolmiot PKF ja PKG yhteellisiä; siis on $PF = PG$ ja $KF = KG$. Kun nyt FG on jaettu kahtia pisteessä K ja FF' myöskin kahtia pisteessä O, niin on OK yhdensuuntainen $F'G$:n kanssa ja yhtäsuuri kuin $^1/_2 F'G$. Mutta $F'G = F'P - PF = 2a$, siis on $OK = a$.

II. Kaksi hyperbolan ulkopuolella olevasta pisteestä vedettyä tangenttia PM, PM' tekevät yhtäsuuria kulmia MPF, $M'PF'$ niiden suorain kanssa, jotka yhdistävät pisteen P kumpaankin polttopisteesen.

Kuva 40.



Leikataan suorasta MF' palanen $MN = MF$ ja suorasta $M'F$ palanen $M'N' = M'F'$, silloin ovat kolmiot PMF, PMN yhteellisiä, koska $MF = MN$, MP yhteinen ja kulma PMF = kulma PMN. Samoin ovat kolmiot $PM'N'$, $PM'F'$ yhteellisiä. Siitä seuraa, että kolmiot PFN', PNF' ovat myöskin yhteellisiä, koska sivut toisessa ovat yhtäsuuret kuin vastaavat sivut toisessa, $PF = PN$, $PN' = PF'$, $FN' = F'N = 2a$. Siis ovat kulmat FPN', NPF' yhtäsuuria. Otetaan pois yhteinen NPN', niin ovat jäännöskulmat FPN, $F'PN'$ ja ja siis niiden puoliskotkin FPM, $F'PM'$ yhtäsuuret.

III. Suorakulmio kohtisuorilla, jotka vedetään polttopisteistä tangentille, on vakinainen ja yhtäsuuri kuin neliö konjugaatisen akselin puolikkaalla. — Sanotun suorakulmion vakinaisuus todistetaan samalla tavalla kuin ellipsistä puhuttaessa (50 §, III). Sen nähdään olevan $= b^2$, kun tarkastetaan perän kautta kulkevaa tangenttia, sillä polttopisteistä tälle tangentille vedetyt kohtisuorat ovat $c + a$, $c - a$ ja niiden tulo on $c^2 - a^2 = b^2$.

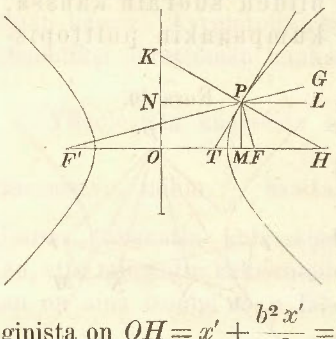
70. Normaali PH on kohtisuorassa tangentille; sen kulmakoefficientti on senvuoksi $-\frac{a^2 y'}{b^2 x'}$ ja sen yhtälö

$$(5) \qquad y - y' = -\frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x'),$$

jossa x', y' ovat koordinaateja sille hyperbolan pisteelle P, jonka kautta normaali kulkee.

Normaali tekee yhtäsuuria kulmia FPH, $F'PK$ polttosäteiden kanssa ja jakaa kahtia kulman FPG toisen polttosäteen ja toisen pitennyksen välillä. — Kun nimittäin tangentti PT on kohtisuora normaalille HK ja sitä paitsi jakaa polttosäteiden välisen kulman kahtia, niin on $TPF = TPF'$, $TPH = TPK$ ja siis $FPH = F'PK = GPH$.

Kuva 41.



Normaali leikkaa x-akselin pisteessä, jonka välimatka originista on $OH = x' + \frac{b^2 x'}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x' = \frac{c^2}{a^2} x' = e^2 x'$. Koska nyt $OF = ae$, niin on $FH = e^2x' - ea = e(ex' - a) = er$. Kolmiosta PFH saadan siis

$$\frac{\sin FPH}{\sin PHF} = \frac{FH}{FP} = \frac{er}{r} = e, \text{ se on:}$$

normaali tekee polttosäteen ja transversaalisen akselin kanssa kulmia, joiden sineillä on keskenänsä vakinainen suhde $= e$.

Näistä kahdesta, nyt todistetusta, väitteestä saadaan selville seuraavat hyperbolan ominaisuudet valonsäteiden heiastamisessa ja taittamisessa.

I. Toisesta polttopisteestä lähteneet säteet (FP) heiastuvat hyperbolasta semmoiseen suuntaan (PG), että näyttävät tulleen toisesta polttopisteestä.

II. Ajateltakoon hyperbolan kaari P asetetuksi kahden aine-alan (medion) välille, joiden taittovoima on erillainen (ohuempi olkoon vasemmalla, tiheämpi oikealla), ja olkoon taittokoefficientti niiden välillä yhtäsuuri kuin hyperbolan excentrisyys. Silloin taittuvat kaukaisemmasta polttopisteestä F' tulleet säteet transversaalisen akselin suuntaisiksi.

Koska nimittäin $F'PK = FPH$ ja $LPH = PHF$, niin on

$$\frac{\sin F'PK}{\sin LPH} = \frac{\sin FPH}{\sin PHF} = e = \text{taittokoefficientti.}$$

Jos siis $F'P$ on kohtaavan, niin on PL taittuneen säteen suunta.

71. Jos normaalin yhtälössä tehdään $y = 0$, saadaan $x - x' = MH = \frac{b^2x'}{a^2}$, josta

$$\overline{PH}^2 = \frac{b^4x'^2}{a^4} + y'^2 = b^4\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}\right).$$

Kun taas $x = 0$, saadaan $y - y' = NK = \frac{a^2y'}{b^2}$, josta

$$\overline{PK}^2 = \frac{a^4y'^2}{b^4} + x'^2 = a^4\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}\right).$$

Siis

$$\frac{PH}{PK}=\frac{b^2}{a^2},$$

ja

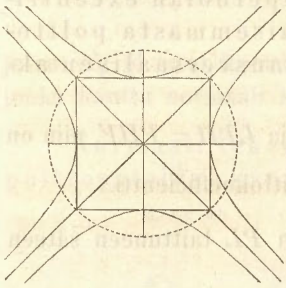
$$PH.\,PK.=a^2b^2\left(\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}\right)=rr' \text{ (vrt. 66 §)},$$

jossa r ja r' ovat polttosäteitä pisteelle P. Tästä johdetaan seuraava teoreema:

Akselien leikkaamat osat (PH, PK) normaalia, joka on vedetty mistä hyperbolan pisteestä P hyvänsä, ovat toisiinsa vakinaisessa suhteessa $b^2:a^2$, ja suorakulmio niillä on yhtäsuuri kuin suorakulmio P-pisteen polttosäteillä.

72. Kahta hyperbolaa, joista toisen transversaalinen akseli on toisen konjugaatisena akselina ja päinvastoin, sanotaan konjugaatisiksi hyperboliksi. Kun

Kuva 42.



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

on toisen hyperbolan yhtälö akseleissa, nimittäin sen, jonka transversaalinen akseli on x-akselilla, niin on samassa koordinaatistossa

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \text{ eli } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

yhtälö sen konjugaatiselle hyperbolalle.

Kahdella konjugaatisella hyperbolalla ovat myös asymptootit yhteisiä. Kummassakin on polttopisteitten välimatka keskiöstä sama $c=\sqrt{a^2+b^2}$, mutta exentrisyydet ovat erinarvoisia, nimittäin $\frac{c}{a}$ toisessa ja $\frac{c}{b}$ toisessa.

Selvä on, että, asymptooteja lukuun ottamatta, kukin keskiön kautta vedetty suora tapaa jommankumman hyperbolan kahdessa vastakkaisessa pisteessä, tapaamatta toista. Tämän saattaisi suorastaan todistaakin, etsien nimittäin hyperbolan ja originin kautta kulkevan suoran ($y = mx$) leikkausta.

73. Diametrit. — 52 §:ssä osoitetulla tavalla saattaa todistaa, että diametri elikkä yhdensuuntaisia jänteitä hyperbolassa kahtia-jakava viiva on keskiön kautta kulkeva suora. Sovittaaksemme hyperbolaan mainitun §:n johdatusta, tulee vain joka paikassa ottaa b^2 vastaisella merkillä. Siten saadaan selville, että yhdensuuntaisten jänteiden kulmakoefficientillä m ja niitä kahtia-jakavan diametrin kulmakoefficientillä m' on symmetrillinen suhta

$$(6) \qquad mm' = \frac{b^2}{a^2},$$

josta nähdään, että m päinvastoin on kulmakoefficientti niiden jänteiden diametrille, joiden kulmakoefficientti on m'. Suureet m ja m' määräävät siis kaksi diametria, joista kumpikin jakaa toisensa suuntaiset jänteet kahtia ja joita siitä syystä sanotaan konjugaatisiksi eli liitto-diametreiksi eli vaan liittolaisiksi.

Jos tahtoisi määrätä yhdensuuntaisten jänteiden ja niiden diametrin keskinäistä suuntaa konjugaatisessa (liitto-) hyperbolassa, niin olisi 52 §:ssä otettava a^2 vastaisella merkillä, ja silloin saataisiin suureille m ja m' sama suhta kuin vast'ikään löydetty. Tästä voi päättää, että kahdella liittohyperbolalla on yhteiset liitto-diametrit.

Suhta (6) osoittaa, että m ja m' ovat yhdenmerkkisiä ja että toisen numeroarvo on isompi, toisen pienempi kuin $\frac{b}{a}$, paitsi sitä erikoistapausta, jolloin $m = m'$; silloin on nimittäin kumpaisenkin numeroarvo $= \frac{b}{a}$. Tästä päätetään, että molemmat diametrit ovat samoissa akselikulmissa, joko ensimmäisessä ja kolmannessa tahi toisessa ja neljännessä, kukin eri puolella asymptootia, josta ne eriävät tahi jota ne lähenevät yht'aikaa, niin että asymptooti itse yhtyy liittodiametriinsa.

Koska liitto-diametreista kumpikin, niin toinen kuin toinenkin, on eri puolilla asymptootia, niin kohtaa ainoastaan toinen niistä hyperbolan, toinen ei; edellinen jakaa kahtia ne jänteet, jotka kulkevat hyperbolan kummassakin haarukkeessa, toinen sitä vastoin ne jänteet, jotka kulkevat hyperbolan haarukkeesta toiseen.

Samoin kuin 54 §:ssä, saadaan selville, että kaksi supplementillistä jännettä hyperbolassa, se on kaksi jännettä, jotka jostakin hyperbolan pisteestä vedetään diametrin päihin, ovat samansuuntaiset kuin pari liitto-diametreja.

Diametrin pääpisteen kautta hyperbolalle vedetty tangentti on konjugaatisen diametrin suuntainen. — Sillä jos x', y', ovat koordinaateja sivuamispisteelle, niin on $\frac{b^2x'}{a^2y'}$, kulmakoefficientti tangentille ja $\frac{y'}{x'}$ kulmakoefficientti saman pisteen kautta vedetylle diametrille; ja nämä arvot pantuina suureiden m ja m' sijaan toteuttavat yhtälön (6).

Jos φ ja ψ ovat kulmia, jotka liitto-diametrit tekevät transversaalisen akselin kanssa, niin tulee yhtälöstä (6)

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = \frac{b^2}{a^2}.$$

Kun $a = b$, supistuu edellinen yhtälö näin: $\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = 1$ eli $\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{cotg}\psi$. Tasasivuisessa hyperbolassa ovat siis kulmat φ, ψ toistensa komplementtejä, ja kun asymptooti silloin tekee yhtäsuuria kulmia kumpaisenkin akselin kanssa, niin jakaa se siinä tapauksessa myöskin liitto-diametrien välisen kulman kahtia.

74. Hyperbolan yhtälö kahdessa liitto-diametrissa. — Olkoot x, y koordinaateja jollekin hyperbolan pisteelle suorakulmaisessa koordinaatistossa; ξ, η olkoot koordinaateja samalle pisteelle, kun koordinaati-akseleiksi otetaan kaksi liitto-diametria; toinen näistä tehköön kulman φ ja toinen kulman ψ transversaalisen akselin kanssa. Silloin on

$$x = \xi\cos\varphi + \eta\cos\psi,\quad y = \xi\sin\varphi + \eta\sin\psi.$$

Sijoitettuamme nämä arvot yhtälöön

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

katoaa suureen $\xi\eta$ koefficientti, koska kahdella liitto-diametrilla on suhta $\tang\varphi \tang\psi = \frac{b^2}{a^2}$, eli

$$(7) \qquad \frac{\cos\varphi\cos\psi}{a^2} - \frac{\sin\varphi\sin\psi}{b^2} = 0,$$

ja hyperbolan yhtälöksi vinokulmaisessa koordinaatistossa tulee

$$\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)\xi^2 + \left(\frac{\cos^2\psi}{a^2} - \frac{\sin^2\psi}{b^2}\right)\eta^2 = 1.$$

Jos nyt φ määrää sen diametrin, joka kulkee asymptootin ja transversaalisen akselin välillä, niin on $\tang^2\varphi < \frac{b^2}{a^2}$, s. o. $\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} < \frac{b^2}{a^2}$ eli $\frac{\cos^2\varphi}{a^2} > \frac{\sin^2\varphi}{b^2}$. Mutta silloin on $\tang^2\psi > \frac{b^2}{a^2}$, s. o. $\frac{\cos^2\psi}{a^2} < \frac{\sin^2\psi}{b^2}$. Siis on koefficienteistä edellisessä yhtälössä ensimmäinen positivinen, toinen negativinen; senvuoksi saattaa panna

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\cos^2\varphi}{a^2} - \dfrac{\sin^2\varphi}{b^2} = \dfrac{1}{\alpha^2} \\[2ex] \dfrac{\cos^2\psi}{a^2} - \dfrac{\sin^2\psi}{b^2} = -\dfrac{1}{\beta^2}, \end{cases}$$

joten hyperbolan yhtälöksi liitto-diametreissa tulee vihdoin

$$(9) \qquad \frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1.$$

joka on samanmuotoinen kuin sen yhtälö akseleissakin. Muistettakoon, että ξ tässä yhtälössä on koordinaati, luettu sitä diametria myöten, joka kohtaa hyperbolan.

Hakeaksemme yhtälöä liitto-hyperbolalle samassa koordinaatistossa, ei enää ole perustukseksi otettava yhtälöä $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, vaan yhtälö $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, joka saadaan edellisestä, muuttamalla oikean jäsenen merkki. Lasku olisi muutoin entisen kaltainen ja suureille ξ^2 ja η^2 saataisiin samat koefficientit kuin ennenkin. Siitä seuraa, että, jos (9) on yhtälö jollekin hyperbolalle liitto-diametreissa, niin on

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2}-\frac{\eta^2}{\beta^2}=-1$$

yhtälö sen liitto-hyperbolalle samassa koordinaatistossa.

Hyperbola (9) leikkaa ξ-akselia pisteessä, jonka välimatka originista on $\pm\alpha$; η-akselia se ei kohtaa ollenkaan. Päinvastoin on liitto-hyperbolan laita: se kohtaa ainoastaan η-akselin, leikaten sen $\pm\beta$-matkan päässä originista. Toisen liitto-diametrin pituuden sanotaan senvuoksi olevan 2α, toisen 2β.

75. Suhdilla (7), (8) on yhtäläisyyttä niiden suhtain kanssa, jotka on 57 §:ssä saatu ellipsille, ja samain muutosten alaisia nekin ovat. Yhtälölle (7) saattaa antaa muodoksi

$$\frac{\dfrac{\alpha\cos\varphi}{a}}{\dfrac{\beta\sin\psi}{b}}=\frac{\dfrac{\alpha\sin\varphi}{b}}{\dfrac{\beta\cos\psi}{a}}.$$

Tässä on, niinkuin (8) osoittaa, niinhyvin osoittajain neliöiden kuin nimittäjäinkin neliöiden eroitukset $=1$ ja kumpikin murtoluku siis (vrt. 58 §:n viittaa) yhtäsuuri kuin ± 1, jolloin taaskin ainoastaan plus-merkki on käytettävä, koska annetut murtoluvut nähtävästi ovat positivisia. Siis on

$$\frac{\alpha\cos\varphi}{a}=\frac{\beta\sin\psi}{b},\quad\frac{\alpha\sin\varphi}{b}=\frac{\beta\cos\psi}{a}.$$

Näistä ynnä kaavoista (8) saadaan

$$\alpha^2\cos^2\varphi-\beta^2\cos^2\psi=\ a^2$$

$$\alpha^2\sin^2\varphi-\beta^2\sin^2\psi=-b^2;$$

se on: jos kaksi liitto-diametria projicioidaan jommallekummalle akselille, niin projektionien neliöiden eroitus on vakinainen.

Viimeksi saadut kaavat yhteenlaskettuina antavat:

$$\alpha^2 - \beta^2 = a^2 - b^2,$$

se on: kahden liitto-diametrin neliöiden eroitus on vakinainen ja yhtäsuuri kuin akselien neliöiden eroitus.

Samoin kuin 59 §:ssä, saadaan vielä

$$\alpha\beta \sin(\psi - \varphi) = ab,$$

joka sanoo, että kahdelle liitto-diametrille piirretyn suunnikkaan pinta-ala on vakinainen ja yhtäsuuri kuin suorakulmio akseleilla.

Yhtälöstä $\alpha^2 - \beta^2 = a^2 - b^2$ näkyy, että jos a ja b ovat erisuuria, ovat α ja β myöskin, erisuuria ja hyperbolalla ei ole silloin yhtään paria yhtäsuuria liitto-diametreja; mutta, että jos $a = b$, on myös $\alpha = \beta$ ja silloin ovat tasasivuisessa hyperbolassa mitkä kaksi liitto-diametria hyvänsä yhtäsuuret keskenään.

76. Kun 74 §:ssä esitetty koordinaatien muutos tehdään myöskin yhtälössä

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

joka 67 §:n mukaan edustaa asymptootiparia, niin asymptootien yhtälöksi kahdessa liitto-diametrissa (2α, 2β) tulee

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0,$$

josta

$$\eta = \pm \frac{\beta}{\alpha}\xi, \quad \xi = \pm \frac{\alpha}{\beta}\eta.$$

Jokaista arvoa toisella koordinaatilla vastaa siis kaksi yhtäsuurta ja vastaismerkkistä arvoa toisella. Tästä johdetaan seuraavat teoreemat:

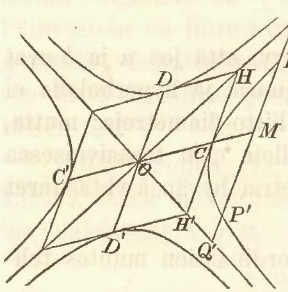
I. Kukin diametri jakaa kahtia ne suorat (asymptootijänteet), jotka asymptootien välille vedetään liitto-diametrin suuntaisiksi. Toisin sanoen: hyperbolalla ja sen asymptooteilla on yhteiset liitto-diametrit.

II. Jos kahdelle miten hyvänsä valitulle liitto-diametrille tehdään suunnikas, niin sen diagonaaleilla on sama asema kuin asymptooteillakin.

Näillä diagonaaleilla on nimittäin liitto-diametreissa yhtälönä $\eta = \pm \frac{\beta}{\alpha} \xi$, siis sama kuin asymptooteilla.

III. Asymptootit leikkaavat yhtäsuuria osia (CH, CH') tangentista, ja kumpikin osa on yhtäsuuri kuin tangentin suuntainen puoli-diametri (OD).

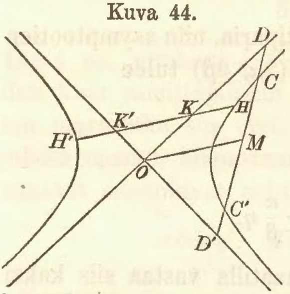
Kuva 43.



Jos nimittäin kahden liitto-diametrin (CC', DD') päitse vedetään tangentit hyperbolalle, niin syntyy suunnikas, jonka sivut ovat annettujen diametrien suuntaisia ja jonka diagonaaleilla on sama asema kuin asymptooteillakin; siis on $CH = CH' = OD$.

IV. Jos suora leikkaa hyperbolan ja asymptootit, niin ne suoran osat, jotka jäävät hyperbolan ja asymptootin väliin, ovat kummallakin puolen yhtäsuuret.

Kuva 44.



Koska sama diametri OM jakaa kahtia sekä hyperbolan jänteen CC' että asymptootijänteen DD', niin on $MD = MD'$, $MC = MC'$ ja siis $CD = C'D'$. Sama on asianlaita siinäkin jänteessä HH', joka on vedetty hyperbolan eri osain välille, elikkä $HK = H'K'$.

V. Jos suora QQ' (kuva 43), vedetty hyperbolan jonkun P-pisteen kautta, leikkaa asymptootit kahdessa pisteessä, niin suorakulmio näiden pisteiden välimatkoilla pisteestä P on yhtäsuuri kuin neliö sillä puoli-diametrilla, joka on annetun suoran suuntainen.

Sillä jos OC on diametri, joka jakaa kahtia suoran QQ', ja $OM=\xi$, niin on $MP=MP'=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\xi^2-\alpha^2}$ ja $MQ=MQ'=\frac{\beta}{\alpha}\xi$, josta

$$PQ=\frac{\beta}{\alpha}(\xi-\sqrt{\xi^2-\alpha^2}),\ PQ'=\frac{\beta}{\alpha}(\xi+\sqrt{\xi^2-\alpha^2})$$

ja siis

$$PQ.PQ'=\frac{\beta^2}{\alpha^2}[\xi^2-(\xi^2-\alpha^2)]=\beta^2.$$

77. Hyperbolan yhtälö asymptooteissa. — Merkitköön 2ω asymptootien välistä kulmaa, niin että toinen asymptooti tekee kulman $-\omega$ ja toinen kulman $+\omega$ transversaalisen akselin kanssa, ja otettakoon edellinen asymptooti x'-akseliksi, jälkimmäinen y'-akseliksi. Yleisissä kaavoissa koordinaatien muutokselle (10 §, 2:o) on siis tässä tehtävä $\alpha=-\omega$, $\beta=\omega$, joten saadaan

$$x=(y'+x')\cos\omega,$$
$$y=(y'-x')\sin\omega.$$

Huomattuamme sen lisäksi, että $\cos\omega=\frac{a}{c}$, $\sin\omega=\frac{b}{c}$, jolloin $c=\sqrt{a^2+b^2}$ on akseleille tehdyn suorakulmion puoli-diagonaali elikkä, toisin sanoen, polttopisteen välimatka keskiöstä, saatamme edelliset kaavat kirjoittaa näin:

$$\frac{x}{a}=\frac{y'+x'}{c},$$
$$\frac{y}{b}=\frac{y'-x'}{c}.$$

Sijoitettuamme nämä arvot yhtälöön $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, saadaan

$$(y'+x')^2-(y'-x')^2=c^2,$$

josta, supistamalla terminit ja heittämällä pois aksentit,

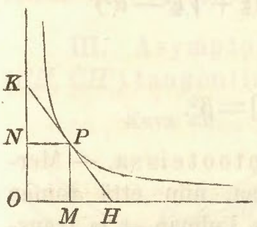
$$xy=\frac{c^2}{4}.$$

Siinä hyperbolan yhtälö asymptooteissa.

Hyperbolan tangentille pisteessä (x', y') tässä koordinaatistossa saadaan yhtälöksi

$$xy' + yx' = \frac{c^2}{2} = 2x'y'.$$

Kuva 45.



Tangentti leikkaa asymptootit kahdessa pisteessä, joista toisen välimatka originista on $OH = 2x'$ ja toisen $OK = 2y'$. Jos sivuamispisteestä P vedetään suorat PM, PN asymptootien suuntaisiksi, niin on $OM = x'$, $ON = y'$. Siis on $OH = 2OM$, $OK = 2ON$, s. o. sivuamispisteestä asymptootien suuntaisiksi vedetyt suorat jakavat kahtia tangentin leikkaamat osat asymptooteista.

Kolmion OHK (kuva 45) kaksinkertainen pinta-ala on $OH . OK \sin HOK = 4x'y' \sin 2\omega$. Koska nyt tulo $4x'y'$ hyperbolan yhtälön nojalla on vakinainen ja $= c^2$, ja kulma ω myöskin on muuttumaton, niin seuraa tästä, että hyperbolan tangentti muodostaa asymptootien kanssa kolmion, jonka pinta-ala on vakinainen.

Tarkasteltaessa erittäin perän kautta kulkevaa tangenttia, nähdään, että puheena-olevan kolmion pinta-ala on ab elikkä yhtäsuuri kuin suorakulmio akselien puolikkailla. Samaan päätökseen tullaan suorastaankin, kun huomataan, että kolmio OHK on neljännes kahdelle konjugaatiselle diametrille tehdystä suunnikkasta.

78. Lopuksi muutamia geometrillisiä tehtäviä hyperbolan suhteen.

I. Hyperbolan piirustaminen pisteillä, kun tunnettuina ovat asymptootit ja joku piste P hyperbolalla. — P-pisteen kautta (kuva 43) vedetään kuinka monta suoraa hyvänsä asymptootien välille ja kullakin suoralla määrätään sellainen symmetrillinen piste P', että P ja P' ovat yhtäkaukana suoran päistä. Jokainen siten määrätty piste P' on hyperbolalla (76 §, IV).

II. Haettakoon hyperbolan polttopisteet ja asymptootit, kun akselit ovat tunnetut. — Akseleille tehdään suorakulmio ja vedetään sen diagonaalit; siten saadaan asymptootit. Transversaalisesta akselista leikataan sitten kummallekin puolelle keskiötä pala, joka on yhtäsuuri kuin puoli-diagonaali sanotussa suorakulmiossa; siten löydetään polttopisteet.

III. Haettakoon akselien pituudet, kun polttopisteet ja asymptootit tunnetaan. — Asymptootien yhteinen leikkauspiste otetaan keskiöksi ja piirretään polttopisteiden kautta kulkeva pyöriö, joka tietysti leikkaa asymptootit neljässä pisteessä. Näiden yhdistämisellä kaksittain saadaan suorakulmio, jonka sivut ovat hyperbolan akselien suuntaiset ja pituiset.

IV. Vedettäköön hyperbolalle tangentti sillä annetun P-pisteen kautta. — Yhdistetään P kumpaankin polttopisteesen ja jaetaan kahtia polttosäteiden välinen kulma. Toisin: pisteestä P vedetään asymptootien suuntaiset suorat PM, PN (kuva 45), tehdään sitten $MH = MO$, $NK = NO$ ja yhdistetään HK; viimeksi mainittu suora on haettu tangentti.

V. Vedettäköön tangentteja hyperbolalle ulkopisteessä Q. — Pisteestä Q piirretään pyöriö polttopisteen F kautta; toisesta polttopisteestä F' piirretään pyöriö säteellä $2a$. Nämä pyöriöt leikkaavat toisensa kahdessa pisteessä G, G'. Sitten vedetään pisteestä Q kaksi suoraa, joka jakavat kahtia kaaret FG ja FG'; nämä suorat ovat haettuja tangentteja.

Lukija suvaitkoon itse tehdä piirroksen. Todistus on samanlaatuinen kuin 49 §:ssä, 2:o.

VI. Vedettäköön tangentti annetun suoran suuntaiseksi. — Vedetään asymptooti- (tahi hyperbola-) jänne annetun suoran suuntaiseksi ja diametri sanotun jänteen keskitse. Tämän diametrin päät ovat sivuamispisteitä niille kahdelle tangentille, jotka tässä tapauksessa ovat mahdollisia.

VII. Haettakoon annetulle diametrille liittolainen. — Tähän on kolme eri keinoa:

1:o. Vedetään asymptooti-jänne annetun diametrin suuntaiseksi ja sitten diametri tämän jänteen keskitse.

2:o. Vedetään, IV:n mukaan, tangentti hyperbolalle annetun diametrin pääpisteen kautta; tämä tangentti on liitto-diametrin suuntainen, ja asymptootein välinen osa sitä on liitto-diametrin pituinen.

3:o. Vedetään kaksi supplementillistä jännettä, joista toinen annetun diametrin suuntaiseksi; toinen tulee sitten haetun liitto-diametrin suuntaiseksi.

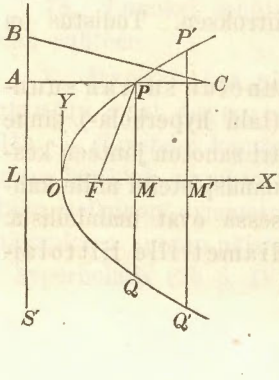
VIII. Haettakoon annetun hyperbolan akselit. — Vedetään mielin määrin kaksi yhdensuuntaista jännettä ja niiden keskitse suora. Tämä on silloin diametri ja sen keskus on hyperbolan keskiö. Tästä keskiöstä piirretään pyöriö, joka leikkaa hyperbolan neljässä pisteessä. Yhdistämällä nämä kaksittain saadaan suorakulmio ja kun sen vastakkaisten sivujen keskukset yhdistetään, niin saadaan akselit.

Seitsemäs Luku.

Parabola.

79: Parabola on ura pisteelle P, jonka välimatkat annetusta pisteestä F ja annetusta suorasta SS' ovat yhtäsuuret. Annettua pistettä sanotaan parabolan polttopisteeksi (focus) ja annettua suoraa parabolan johtajaksi (directrix). Välimatka jostakin parabolan pisteestä polttopisteesen on nimeltään polttosäde (radius vector).

Kuva 46.



Parabolan piirustaminen pisteillä tapahtuu näin. Vedetään ordinaatoja eli johtajan suuntaisia suoria PQ, $P'Q'$, ...; polttopiste F keskiönä piirretään sitten pyöriöitä, joiden säteet ovat yhtäpitkät kuin johtajan ja ordinaatain välit LM, LM', ... Nämä pyöriöt leikkaavat vastaavia ordinaatoja eräissä pisteissä P, Q, P', Q', ... jotka kuuluvat parabolan kehään, sillä kussakin sellaisessa pisteessä on polttosäde nähtävästi yhtäsuuri kuin pisteen välimatka johtajasta.

Parabolan saattaa piirtää myöskin rihman ja kulmikkaan (vinkkeliha'an) avulla seuraavasti. Kulmikkaan päähän C kiinnitetään rihma, joka on yhtäpitkä kuin kulmikkaan toinen sivu AC; rihman toinen pää kiinnitetään polttopisteesen F. Kun nyt kulmikkaan toista sivua AB siirretään johtajaa pitkin ja rihma sillä välin pidetään piirtimellä kireellä kulmikkaan sivua vastaan, kuvaa piirrin parabolan kaaren.

80. Parabolan yhtälö. — Parabolan muoto riippuu ainoastaan polttopisteen kohtisuorasta välimatkasta FL (jonka nimitämme p) johtajaan. Tämän FL-suoran keskus O otetaan originiksi, josta x-akseli langetkoon pitkin viivaa OF ja y-akseli kohtisuoraan sille, pitkin viivaa OY. Koordinaatit pisteelle P ovat silloin $x = OM$, $y = MP$; siis saadaan

$$PF = \sqrt{(x - {}^1\!/\!_2 p)^2 + y^2},\quad PA = LM = x + {}^1\!/\!_2 p.$$

Parabolan määrityksen mukaan on $PF = PA$ eli

$$(x - {}^1\!/\!_2 p)^2 + y^2 = (x + {}^1\!/\!_2 p)^2,$$

josta

$$(1) \qquad y^2 = 2px.$$

Siinä parabolan yhtälö.

Tästä näkyy, että x ainoastaan saattaa saada positivisia arvoja, muutoin tulisi y aatteiseksi. Parabola on siis kokonansa sillä puolen y-akselia, jossa x on positivinen. Kutakin x:n arvoa vastaa kaksi yhtäsuurta ja vastaismerkkistä arvoa y:llä; parabola on siis symmetrillinen OX:n suhteen ja senpä vuoksi suoraa OX sanotaan parabolan akseliksi. Kun $x = 0$, on $y = 0$; kun x kasvaa nollasta äärettömiin, kasvaa myöskin y ominaisessa arvossaan nollasta äärettömiin. Siitä seuraa, että parabola kulkee pisteen O kautta, jota sanotaan peräksi (vertex), ja että siinä on kaksi symmetrillistä haaraa, jotka ulottuvat äärettömän kauas, toinen ylä-, toinen alapuolella akselia.

Yhtälö $y^2 = -2px$ osoittaa toista parabolaa, jolla on sama perä ja akseli kuin edelliselläkin, mutta joka aukenee toiselle elikkä negativisten abscissain puolelle.

81. Parabola ja hyperbola ovat joissakin määrin ulkomuodoiltaan yhtäläisiä; mutta ratkaiseva eroitus on se, ettei parabolalla saata olla suoraviivaista asymptootia. Ensi silmäykseltä jo huomaa, ettei sillä voi olla x-akselin suuntaista asymptootia, sillä y kasvaa äärettömiin yht'aikaa x:n kanssa. Verrattaessa taas parabolata suoraan viivaan, joka leikkaa x-akselin ja jonka yhtälössä $y = mx + b$ kulmakoefficientti m ei siis ole nolla, nähdään, että samalla abscissalla x on parabolassa ordinaatana $\sqrt{2px}$ ja suorassa ordinaatana $mx + b$. Näiden ordinaatain eroitus elikkä parabolan ja suoran välimatka ordinaatan suunnassa on siis $mx + b - \sqrt{2px}$ eli

$$x\left(m + \frac{b}{x} - \sqrt{\frac{2p}{x}}\right).$$

Tämä lauseke kasvaa äärettömäksi samalla kuin x, sillä ensimmäinen tekijä x tulee äärettömän suureksi ja toisella (suluissa olevalla) on rajana m. Suora eroaa siis yhä kauemmaksi parabolasta eikä saata olla sen asymptootina.

82. Polttosäde lausuttu abscissassa. — Parabolan määrityksen mukaan on $PF = PA = ML = MO + OL$, siis

$$\text{polttosäde} = x + {}^1\!/_2 p.$$

Parametri on polttopisteestä kohtisuoraan akselille vedetty jänne. Kun edellisessä kaavassa pannaan x = polttopisteen abscissa $= {}^1\!/_2 p$, saadaan

$$\text{parametrin puolikas} = p.$$

Parabolan yhtälössä $y^2 = 2px$ on siis x:n koefficientti yhtäsuuri kuin parametri. Polttopisteen välimatka johtajasta on puoli ja sen välimatka perästä neljännes parametrin pituutta.

83. Tangentti. — Yhtälö suoralle, joka kulkee pisteitten (x', y'), (x'', y'') kautta parabolalla, on

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Parabolan yhtälön nojalla on sitä paitsi $y'^2 = 2px'$, $y''^2 = 2px''$, joista $y'^2 - y''^2 = (y' - y'')(y' + y'') = 2p(x' - x'')$, eli

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{2p}{y' + y''}.$$

Sijoitettuamme tämän arvon edelliseen yhtälöön, saamme sekantin yhtälöksi

$$y - y' = \frac{2p}{y' + y''}(x - x').$$

Saadaksemme tästä yhtälöä tangentille, yhtyköön piste (x'', y'') pisteesen (x', y'), se on tulkoot $x'' = x'$, $y'' = y'$. Silloin saamme

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x'),$$

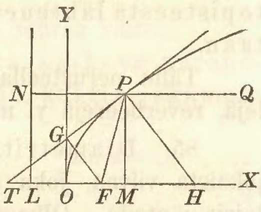
josta, poistamalla nimittäjän ja sijoittamalla $y'^2 = 2px'$,

$$(2) \qquad yy' = p(x + x').$$

Siinä yhtälö suoralle, joka sivuaa parabolata pisteessä (x', y').

Kun tässä yhtälössä tehdään $y = 0$, tulee $x = -x'$; siitä päätämme, että ne pisteet, joissa tangentti ja sivuamispisteen ordinaata tapaavat akselin, (siis T ja M) ovat yhtäkaukana perästä O. Tangentti itse perässä on kohtisuora akselille, sillä kulmakoefficientti $\frac{p}{y'}$, tulee silloin äärettömäksi.

Kuva 47.



Tangentti tekee polttosäteen ja akselin kanssa yhtäsuuret kulmat. — Koska nimittäin $OF = OL$ ja $OM = OT$, niin on $FT = ML = PN = PF$; kolmio PFT on siis tasakylkinen ja kulma $P =$ kulma T. Jos PQ vedetään akselin suuntaiseksi; niin seuraa, että tangentti tekee yhtäsuuret kulmat suorain PF ja PQ kanssa.

Koska OY ja MP ovat yhdensuuntaiset, niin jakautuvat kolmiossa TMP sivut TM ja TP samassa suhteessa; TM tiedetään olevan kahtia jaetun pisteen O, siis on myöskin TP kahtia jaettu pisteessä G. Yhdistetään G ja F; silloin ovat kolmiot FGP ja FGT yhteellisiä, sillä kukin sivu toisessa on yhtäsuuri kuin vastaava sivu toisessa. Suora FG on siis kohtisuorassa tangentille. Täten on todistettu, että ura sille pisteelle, jossa polttopisteestä vedetty kohtisuora tapaa tangentin, on perän kautta kulkeva tangentti.

84. Normaali. — Tangentin kulmakoefficientti on $\frac{p}{y'}$, kulmakoefficientti parabolan normaalille pisteessä (x', y') on siis $= -\frac{y'}{p}$, ja normaalin yhtälöksi saadaan

$$(3) \qquad y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x').$$

Pisteessä H, jossa normaali leikkaa akselin, on $y = 0$ ja $x = OH = x' + p$. Tästä saadaan subnormaali elikkä normaalin projektioni akselille $MH = OH - OM = x' + p - x' = p$. Siis: subnormaali on pituudeltaan vakinainen ja yhtäpitkä kuin parametrin puolikas.

Koska normaali on kohtisuora tangentille, ja tämä tekee yhtäsuuria kulmia suorain PF ja PQ kanssa, niin jakaa normaali PH kahtia kulman FPQ, jonka välillensä tekevät polttosäde PF ja akselin suuntainen suora PQ. Tähän nojakse seuraava parabolan ominaisuus valon heiastamisessa: Akselin suunnassa tulleet säteet heiastuvat kaikki parabolan polttopisteesen; ja päinvastoin: polttopisteestä lähteneet säteet heiastuvat akselin suuntaan.

Tälle perusteella tehdään peili-teleskoopeja, polttopeilejä, reverbeerejä y. m.

85. Diametrit. — Parabolan diametriksi sanotaan jokaista viivaa, joka siinä jakaa kahtia joukon yhdensuuntaisia jänteitä. Olkoon

$$y = mx + k$$

yhtälö jollekulle sanotuista yhdensuuntaisista jänteistä, jolloin koefficientti m on vakinainen, mutta k saa eri arvoja eri jänteissä. Kun tästä ja parabolan yhtälöstä

$$y^2 = 2px$$

eliminoidaan x, saadaan yhtälö

$$y^2 - \frac{2p}{m}y + \frac{2pk}{m} = 0,$$

jonka juuret y_1, y_2 ovat ordinaatoja jänteen pääpisteille. Juurten summa on, kuten tiedetään, yhtäsuuri kuin toisen terminin koefficientti vastaismerkkisenä, ja puoli tästä summasta osoittaa ordinaataa jänteen keskukselle. Jos tämän keskuksen koordinaatit merkitään x_0, y_0, niin on siis

$$y_0 = \frac{p}{m}.$$

Tämä yhtälö, ollen vapaa suureesta k, edustaa keskusta kullakin jänteellä, jonka kulmakoefficienttinä on m, se edustaa siis uraa yhdensuuntaisten jänteiden keskuksille. Yhtälön ulkomuoto näyttää tämän uran olevan x-akselin suuntaisen suoran, jonka vakinainen ordinaata eli välimatka akselista on $\frac{p}{m}$. P a r a b o l a s s a o v a t k a i k k i d i a m e t r i t e l i y h d e n s u u n t a i s t e n j ä n t e i d e n j a k a j a t a k s e l i n s u u n t a i s i a s u o r i a.

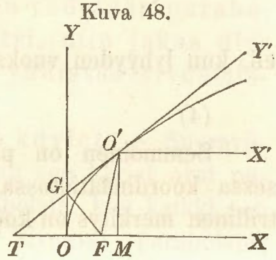
Jos diametrin välimatka y_0 akselista olisi tunnettu, niin olisi sen kahtia-jakamain jänteiden suunta määrätty kulmakoefficientillä

$$m = \frac{p}{y_0}.$$

Mutta $\frac{p}{y_0}$ on samalla myös kulmakoefficientti parabolan tangentille saman diametrin päässä; siitä seuraa väite:

D i a m e t r i n p ä ä p i s t e e n k a u t t a k u l k e v a p a r a b o l a n t a n g e n t t i o n s a m a n d i a m e t r i n k a h t i a - j a k a m a i n j ä n t e i d e n s u u n t a i n e n.

Kuva 48.



86. P a r a b o l a n y h t ä l ö, l a u s u t t u n a d i a m e t r i s s a j a s e n p ä ä p i s t e e n k a u t t a k u l k e v a s s a t a n g e n t i s s a. — Tullaksemme suorakulmaisesta koordinaatistosta vinokulmaiseen, täytyy tehdä kaksinkertainen muutos, siirtää nimittäin origini ja muuttaa y-akselin suunta.

Siirtyköön ensin suorakulmainen koordinaatisto itsensä suuntaisena perästä O uuteen originiin O', jonka koordinaatit OM, MO' merkitsemme h, k. Koordinaatit x, y edellisessä ja x', y' uudessa koordinaatistossa ovat minkä pisteen suhteen hyvänsä yhdistetyt toisiinsa suhdilla:

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k.$$

Saakoon nyt y-akseli toisessa koordinaatistossa vinon suunnan $O'Y'$, x-akselin ollessa entisessä suunnassaan $O'X'$, ja merkitköön θ uusien koordinaati-akselien välistä kulmaa $X'O'Y'$ sekä ξ, η koordinaateja tässä kolmannessa koordinaatistossa. Silloin on (10 §, 2:o)

$$x' = \xi + \eta \cos\theta,$$
$$y' = \eta \sin\theta,$$

joten edellisistä kaavoista tulee

$$x = \xi + \eta \cos\theta + h,$$
$$y = \eta \sin\theta + k.$$

Sijoitetaan nyt x ja y näillä arvoilla parabolan yhtälössä $y^2 = 2px$, niin saadaan

$$\eta^2 \sin^2\theta + 2k\eta \sin\theta + k^2 = 2p(\xi + \eta\cos\theta + h).$$

Tätä yhtälöä käy sieventäminen. Ensinkin on

$$k^2 = 2ph,$$

koska (h, k) on piste parabolalla; toiseksi on $\operatorname{tang}\theta = \frac{p}{k}$ eli

$$k \sin\theta = p \cos\theta,$$

sillä $O'Y'$ sivuaa parabolata. Täten tulee yhtälöstämme

$$\eta^2 \sin^2\theta = 2p\xi$$

eli, kun lyhyyden vuoksi panemme $\frac{p}{\sin^2\theta} = p'$,

$$\eta^2 = 2p'\xi. \tag{4}$$

Semmoinen on parabolan yhtälö uudessa vinokulmaisessa koordinaatistossa. Katsokaamme vielä, mikä geometrillinen merkitys on koefficientillä p'. Suorakulmaisessa kolmiossa FGT on $FG = FT \sin\theta = FO' \sin\theta$; suorakulmaisessa kolmiossa FGO on taasen kulma $G = \theta$ ja siis $\frac{p}{2} = FO = FG \sin\theta = FO' \sin^2\theta$, josta

$$p' = \frac{p}{\sin^2\theta} = 2FO';$$

p' on siis originista O' lähtevä polttosäde, otettu kaksi kertaa, samoin kuin alkuperäisessä yhtälössä, $y^2 = 2px$, p merkitsee kaksi kertaa otettua polttosädettä perästä O. Helposti saattaa myös todistaa, että p' on yhtäsuuri kuin puoli sitä jännettä, joka polttopisteestä vedetään η-akselin suuntaiseksi.

87. Niinkuin näkyy, on parabolan yhtälö (4) diametrissa ja tämän pääpisteen kautta kulkevassa tangentissa samanmuotoinen kuin sen yhtälö akselissa ja perän kautta kulkevassa tangentissa. Tästä samanmuotoisuudesta seuraa, että yhtälöt parabolan tangentille ovat myöskin samanmuotoisia kummassakin koordinaatistossa. Vinokulmaisissa koordinaateissa on siis tangentin yhtälö [vrt. (2)].

$$\eta\eta' = p'(\xi + \xi'),$$

jossa (ξ', η') on sivuamispiste ja ξ, η tangentin juoksevia koordinaateja. Tangentin ja diametrin leikkauspisteessä on $\eta = 0$ ja $\xi = -\xi'$; jos siis vinokulmaisessakin koordinaatistossa mistä parabolan pisteestä hyvänsä vedetään tangentti ja ordinaata, niin nämä suorat leikkaavat ξ-akselia yhtäkaukana eri puolilla originia.

Siitä seuraa myös, että kaksi jänteen pääpisteitten kautta kulkevaa tangenttia kohtaavat toisensa sillä diametrilla, joka jakaa jänteen kahtia, eli toisin sanoen:

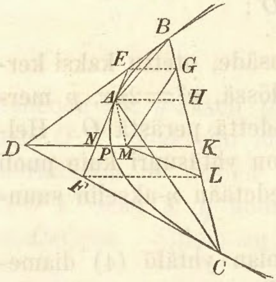
Jos ulkopuolisesta pisteestä vedetään parabolalle kaksi tangenttia ja diametri, niin jakaa diametri kahtia sen jänteen, joka yhdistää sivuamispisteet.

88. Sisustavat ja verhoavat kuviot. — Suoraviivainen kuvio sisustaa parabolata, kun sen kärjet ovat parabolan kehällä; kuvio verhoaa parabolata, kun kaikki sen sivut (pitennettyinä, jos tarvitaan,) sivuavat parabolata;

molemmat kuviot ovat yhdenpisteiset kun sisustavan kärjet ovat samalla verhoavan sivuamispisteitä.

Tutkikaamme ensin sisustavaa kolmiota ABC ja sen kanssa yhdenpisteistä verhoavaa kolmiota DEF, verratakseme niiden pinta-aloja. Pisteistä A, D, E, F vedämme diametreja parabolalle, se on: parabolan akselin suuntaisia suoria. Diametri EG jakaa kahtia sivun AB ja siis myöskin sivun BH; diametri FL jakaa kahtia sivun AC ja siis myöskin sivun CH; senvuoksi on $BC = 2GL$. Vedetään vielä suora AM samansuuntaiseksi kuin BC; silloin on AM ordinaata diametrille DK, koska tämä diametri jakaa kahtia jänteen BC; edellisen §:n mukaan on silloin $PM = PN$, $PK = PD$ ja siis $MK = DN$. Tästä seuraa, että $\triangle MGK = \triangle DEN$, $\triangle MLK = \triangle DFN$ ja siis $\triangle MGL = \triangle DEF$. Mutta $\triangle ABC = 2 \triangle MGL$, koska näillä kolmioilla on sama korkeus, mutta edellisen asema on kahta vertaa isompi kuin jälkimäisen; siis on myöskin $\triangle ABC = 2 \triangle DEF$. Täten on todistettu seuraava tärkeä teoreema:

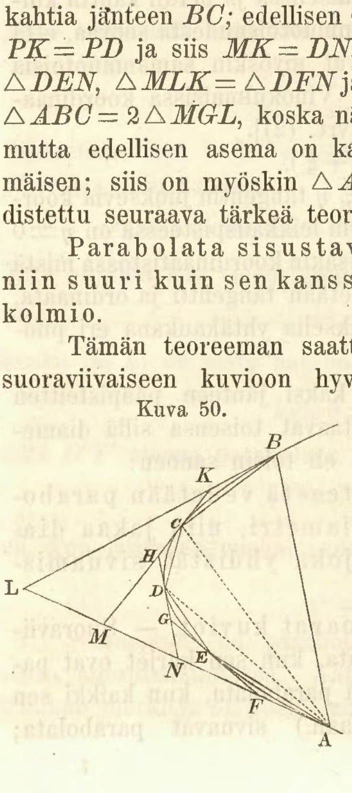
Kuva 49.



Parabolata sisustava kolmio on kaksi kertaa niin suuri kuin sen kanssa yhdenpisteinen verhoava kolmio.

Tämän teoreeman saattaa helposti sovittaa millaiseen suoraviivaiseen kuvioon hyvänsä. $ABCDE$ on sisustava monikulmio ja $FGHKLF$ yhdenpisteinen verhoava monikulmio. Jaetaan kumpikin monikulmio kolmioihin siten, että pisteesen A yhdistetään sisustavan kuvion kärjet C, D ja pitennetään verhoavan kuvion sivut, kunnes kohtaavat sivun AL pisteissä M ja N; silloin on vasta mainitun teoreeman nojalla $ABC = 2KLM$, $ACD =$

Kuva 50.



$2HMN$, $ADE = 2FGN$ ja siis $ABCDE = 2FGHKLF$, se on:

Parabolata sisustava monikulmio on kaksi kertaa niin suuri kuin sen kanssa yhdenpisteinen verhoava monikulmio.

89. Parabolan segmentin pinta-ala. — Yllämainittu suhde verhoavan ja sisustavan kuvion välillä pitää paikkansa, olkoon monikulmiossa kuinka monta sivua hyvänsä. Lisätessämme alinomaa sivujen lukua, ottamalla yhä useampia pisteitä A:n ja B:n välillä yhä lähemmällä toisiansa, lähenee sisustava kuvio yhä enemmin parabolan segmenttiä ADB; verhoavalla kuviolla on rajana sektori, jota rajoittavat tangentit AL, BL ja parabolan kaari ADB. Mitä on sanottu suureista yleensä, on myöskin voimassa niiden rajaarvojen suhteen, siis on segmentti ADB kaksi kertaa niin suuri kuin sektori $LADBL$, toisin sanoen:

Parabolan segmentti ADB on kaksi kolmannesta kolmiosta ABL, jonka muodostavat segmentin asema ja tämän pääpisteitten kautta vedetyt tangentit.

90. Lopuksi muutamia geometrillisiä tehtäviä parabolassa.

I. Vedettäköön tangentti parabolalle jonkun P-pisteen kautta itse käyrällä (kuva 47). — Tämän saattaa tehdä useammalla tavalla:

1:o. Vedetään ordinaata PM, tehdään $OT = OM$ ja yhdistetään PT.

2:o. Tehdään $FT =$ polttosäde FP ja yhdistetään PT.

3:o. Tehdään MH yhtäsuureksi kuin parametrin puolikas, siis $= 2OF$, vedetään PH, joka silloin on normaali (84 §), ja P-pisteen kautta viiva PT kohtisuoraksi PH:lle.

II. Vedettäköön tangentteja parabolalle ulkopisteestä Q. — Piirretään, piste Q keskiönä, pyöriö polttopisteen kautta, yhdistetään polttopiste niihin pisteisin, joissa pyöriö leikkaa johtajan, ja vedetään pisteestä Q kohtisuorat yhdistäville viivoille; nämä kohtisuorat ovat tangentteja.

Todistus nojakse siihen parabolan ominaisuuteen, että välimatkat polttopisteestä ja johtajasta ovat yhtäpitkät ja että tangentti jakaa kahtia mainittujen välimatkain muodostaman kulman.

III. Vedettäköön tangentti annetun suoran suuntaiseksi. — Polttopisteestä vedetään kohtisuora annetulle viivalle; polttopisteen ja johtajan välinen osa kohtisuoraa jaetaan kahtia ja jakopisteestä vedetään annetun suoran suuntainen viiva.

IV. Haettakoon annetun parabolan akseli ja polttopiste. — Vedetään kaksi yhdensuuntaista jännettä ja yhdistetään niiden keskukset; siten saadaan diametri. Kohtisuoraan sille vedetään jänne ja tämän keskuksen kautta edellisen diametrin suuntainen uusi diametri, joka juuri on parabolan akseli. Polttopiste löydetään siten, että ensimmäisen diametrin päästä vedetään tangentti (joka tietysti on oleva ensinmainittujen jänteiden suuntainen) ja sivuamispisteestä sitten suora, joka on yhtä vinossa tangenttia vastaan kuin tangentti on akselia vastaan; viimeksi vedetty suora nimittäin on kulkeva polttopisteen kautta.

Kahdeksas Luku.

Koonilliset leikkaukset.

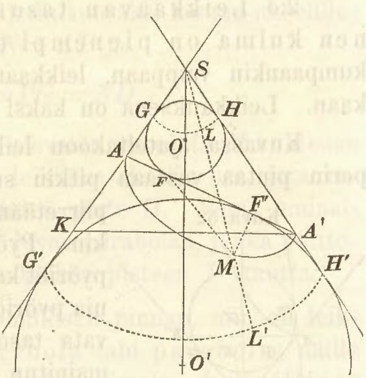
91. Kooni niminen pinta syntyy siten, että pituudelleen epämääräinen suora, joka leikkaa toisen suoran, pyörähtää leikkauspisteessä tämän ympäri, muutoin muuttamatta asemaansa sen suhteen. Kiinteätä suoraa, jonka ympäri pyörähdys tapahtuu, sanotaan koonin akseliksi, liikkuvaa suoraa emäksi eli emäviivaksi, kumpaisenkin välistä kulmaa emäkulmaksi ja leikkauspistettä kärjeksi. Koonissa on kaksi vaippaa eli eri pintaa, jotka ovat kärjestä kiinni toisissaan; kumpikin vaippa ulottuu äärettömän kauas. Tutkikaamme nyt, millaisen kuvion matkaansaattaa koonia leikkaava taso.

Jos leikkaava taso kulkee koonin kärjen kautta, niin leikkaus, kuten helposti huomaa, on joko piste tai suora tahi kaksi suoraa, jotka leikkaavat toisensa kärjessä, — aina sitä myöten kuin koonin akselin ja tason välinen kulma on isompi, yhtäsuuri tai pienempi kuin emäkulma.

Kaikissa muissa tapauksissa, se on kun taso ei kulje kärjen kautta, on leikkauksena käyrä, jonka laatu riippuu tason asemasta. Siinä on eroitettava kolme tapausta.

1:o Leikkaavan tason ja koonin akselin välinen kulma on isompi emäkulmaa. — Taso leikkaa tällöin ainoastaan koonin toisen vaippapinnan, sattumatta toiseen, ja leikkauksena on umpinainen käyrä. Ajateltakoon toinen taso asetetuksi koonin akselin kautta kohtisuoraan leikkaavaa tasoa vastaan. Tämä uusi taso, ollen kuvassamme itse paperin pinta, kohtaa koonia pitkin kahta emää SG', SH' ja leikkaavaa tasoa pitkin suoraa AA'. Ajateltakoon vielä kaksi pyöriötä O, O', jotka kumpikin sivuavat suoraa AA' sekä sivuja SG', SH'. Kun nyt kuvio pyörähtää SO'-akselin ympäri, muodostavat pyöriöt kaksi palloa, jotka sivuavat koonia pyöriöissä GLH, $G'L'H'$. Leikkaava taso sivuaa toista palloa pisteessä F, toista pisteessä F', ollen kohtisuorana pallojen säteille näissä pisteissä.

Kuva 51.



Otetaan nyt mielin määrin piste M koonin ja tason leikkauskäyrällä ja yhdistetään MF, MF', MS. Viimeksi mainittu suora MS on emänä koonille ja sivuaa palloja pisteissä L, L'. Suorat MF ja ML, ollen samasta pisteestä vedettyjä tangentteja pallolle O, ovat yhtäsuuret; samoin ovat MF' ja ML' yhtäsuuret, sillä kumpikin sivuaa palloa O'. Siis on

$$MF + MF' = ML + ML' = LL'.$$

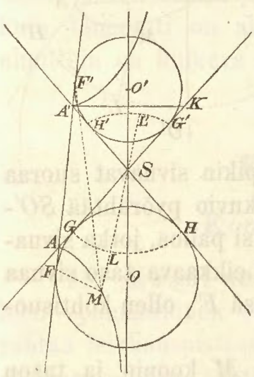
Mutta LL' on vakinainen ja yhtäsuuri kuin GG', koska pyöriöt GLH, $G'L'H'$ leikkaavat yhtäsuuria osia kaikista emäviivoista; siitä päätämme, että leikkauskäyrällä olevan M-pisteen välimatkat kahdesta kiinteästä pisteestä F, F' tekevät vakinaisen summan; tämä käyrä on siis ellipsi, jonka polttopisteinä ovat F ja F'.

Vakinainen summa GG' on yhtäsuuri kuin isoakseli AA'. Otetaan pois toiselta puolen AG, KG', toiselta näiden suuruiset AF, $A'F'$, niin ovat jäännökset AK ja FF' yhtäsuuret; AK on siis yhtäsuuri kuin polttopisteiden välimatka.

2:o Leikkaavan tason ja koonin akselin välinen kulma on pienempi emäkulmaa. — Taso sattuu kumpaankin vaippaan, leikkaamatta täydellisesti kumpaistakaan. Leikkauksena on kaksi ääretöntä haaruketta.

Kuvassa ajateltakoon leikkaava taso kohtisuoraksi paperin pintaa vastaan pitkin suoraa AA'. Pyöriöt O ja O' piirretään samalla tavalla kuin äskönkin. Pyörähtämällä muodostavat nämä pyöriöt kaksi palloa, jotka sivuavat koonia pyöriöissä GLH, $G'L'H'$ ja leikkaavata tasoa pisteissä F, F'. Viimeksi mainitun tason ja koonin leikkauskäyrällä otetaan mielin määrin joku piste M, ja yhdistetään se pisteisin F, F' ja S. Silloin on:

Kuva 52.

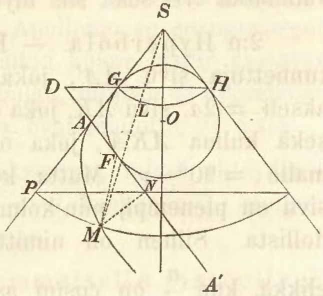


$$MF' - MF = ML' - ML = LL' = GG',$$

s. o. leikkauskäyrällä olevan M-pisteen välimatkoilla kahdesta kiinteästä pisteestä F, F' on vakinainen eroitus; tämä käyrä on siis hyperbola, jonka polttopisteinä ovat F ja F'. Vakinainen eroitus GG' on yhtäsuuri kuin transversaalinen akseli AA', ja AK on $=$ polttopisteiden välimatka FF'.

3:o Leikkaava taso on koonin sivun suuntainen (kuva 53). — Taso sattuu ainoastaan toiseen vaippaan, leikkaamatta sitä täydellisesti. Leikkauksen akseli AA' (suora, jota myöten leikkaava taso ja kuviossa paperin pinta leikkaavat toisiansa) on silloin samansuuntainen kuin SH; pyöriöistä ei tule nyt kysymykseen muuta kuin toinen, O. Sivuamispisteitten G, H kautta vedetään suora, joka kohtaa leikkauksen akselia pisteessä D. Otetaan nyt mielin määrin leikkauksella joku piste M, yhdistetään se pisteisin F, S ja vedetään kohtisuora MN akselille AA' ja suora NP samansuuntaiseksi kuin DG, siis kohtisuoraksi koonin akselille; silloin on $AD = AG = AF$, $AN = AP$ ja

Kuva 53.



$$MF = ML = PG = ND.$$

Siis on välimatka leikkauksella olevasta pisteestä M kiinteään pisteesen F yhtäsuuri kuin se leikkaus-akselin osa, jota rajoittavat ordinaata MN ja kiinteä piste D. Nämä ominaisuudet osoittavat leikkauksen olevan parabolan, jonka polttopisteenä on F ja jonka johtaja kulkee pisteen D kautta.

Kun siis taso leikkaa koonillisen pinnan, niin on leikkauksena joko ellipsi, hyperbola tahi parabola; näille onkin senvuoksi annettu yhteiseksi nimeksi koonilliset leikkaukset. Erikois-laatuina koonillisia leikkauksia on sitä paitsi pidettävä 1:o kaksi suoraa, jotka leikkaavat toisensa, 2:o yksi suora, 3:o piste. Viimeksi mainitut leikkaukset syntyvät, kun taso kulkee koonin kärjen kautta.

92. Edellisessä §:ssä selitetty koonillisten leikkausten syntyminen herättää luonnollisesti kysymyksen, saattaisko mille koonille hyvänsä asettaa annetun ellipsin, hyperbolan tai parabolan. Tutkikaamme erittäin kutakin näistä käyristä.

1:o Ellipsi. — Kolmiossa $AA'K$ (kuva 51) on sivu AA' ellipsin isoakseli, sivu AK on polttopisteiden väli ja kulma AKA' on komplementti koonin emäkulmalle. Tämän kolmion saattaa aina tehdä, kun ellipsi ja koonin kulma ovat annetut. Sitten jaetaan sivu $A'K$ kahtia ja jakopisteestä vedetään kohtisuora: siten saadaan määrätyksi piste S ja välimatka AS sekä siis myöskin leikkaavan tason asema.

2:o Hyperbola. — Kolmiossa $AA'K$ (kuva 52) ovat tunnettuja sivu AA', joka on hyperbolan transversaalinen akseli $= 2a$, sivu AK, joka on polttopisteiden välimatka $= 2c$, sekä kulma AKA', joka on komplementti koonin emäkulmalle $= 90^0 - \gamma$. Mutta koska annetun kulman vastainen sivu on pienempi, niin kolmion piirustaminen ei ole aina mahdollista. Siihen on nimittäin tarpeellista, että $a \geq c \cos\gamma$ elikkä, kun $\frac{a}{c}$ on cosini asymptootin ja hyperbolan-akselin väliselle kulmalle ω, että $\cos\omega \geq \cos\gamma$, siis että $\gamma \geq \omega$. Annetun hyperbolan saattaa siis asettaa semmoiselle koonille, jonka emäkulma ei ole pienempi kuin puoli asymptootien välistä kulmaa.

3:o Parabola. — Jos pallon keskiö O (kuva 53) yhdistetään pisteisin A ja G, niin syntyy kolmio, jonka kulma G on suora ja jossa sivu AG on neljännes parametria ja kulma O yhtäsuuri kuin koonin emäkulma. Piirustettuamme tämän kolmion, mikä aina on mahdollista, vedetään OS kohtisuoraksi OA:lle, kunnes se kohtaa pitennetyn AG-sivun. Siten saadaan määrätyiksi piste S ja välimatka AS ja siis myöskin leikkaustason asema.

Tästä seuraa, että annetulle koonille saattaa asettaa kaikki ellipsit, kaikki parabolat ja ne hyperbolat, joissa asymptootin ja transversaalisen akselin välinen kulma ei ole isompi koonin emäkulmaa.

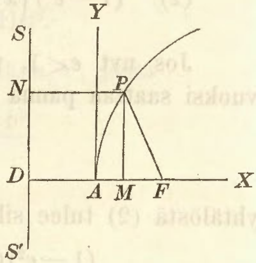
Koonillisia leikkauksia tutkivat jo kreikkalaiset geometrit. Apollonio Pergalainen (v. 250 e. Kr.) on jälkeensä jättänyt teoksen kahdeksassa kirjassa, joihin hän on koonnut kaikki, mitä häntä ennen oli tästä asiasta tunnettu, ja omatkin keksintönsä siinä. Häntä ennen olivat tutkinnon esineinä ainoastaan sellaiset leikkaukset, jotka syntyvät, kun leikkaustaso on kohtisuora koonin sivulle, s. o. emälle; senvuoksi jaettiin ne suorakulmaisen, teräväkulmaisen ja tylsäkulmaisen koonin leikkauksiin ja nimitettiin paraboliksi, ellipseiksi ja hyperboliksi aina sitä myöten kuin koonin kulma (emäkulma kaksinkertaisena) oli yhtäsuuri, pienempi tai suurempi kuin suora. Mutta Apollonio se ensimmäisenä todisti koonillisten leikkausten kaikki kolme laatua saatavan yhdestä koonista ja perusti parabolan, ellipsin ja hyperbolan nimet niihin ominaisuuksiin, jotka ovat mainitut 94 §:ssä.

Toiseltakin kannalta nähdäksemme, missä yhteydessä koonillisten leikkausten eri lajit ovat keskenänsä, otamme ratkaistavaksi seuraavan probleeman.

93. Haettakoon ura semmoiselle pisteelle P, jonka välimatkat annetusta pisteestä F ja annetusta suorasta SS' ovat toisiinsa vakinaisessa suhteessa $\frac{PF}{PN} = e$.

Pisteestä F vedetään viiva DX kohtisuoraksi SS':lle ja määrätään siinä piste A, niin että $\frac{AF}{AD} = e$; silloin on piste A myöskin haetulla uralla. Mainittu piste A otetaan originiksi, josta x-akseli lasketaan pitkin suoraa AX ja y-akseli kohtisuoraan sille pitkin viivaa AY. Pisteen P koordinaatit tässä koordinaatistossa olkoot x, y ja välimatka AF merkittäköön q. Ehdotuksemme

Kuva 54.



mukaan on $\frac{AF}{AD} = \frac{q}{AD} = e$ ja siis $AD = \frac{q}{e}$. Koska nyt $AM = x$, $MP = y$, niin on $FM = q - x$, $PN = MD = x + \frac{q}{e}$ ja siis

$$\frac{FP}{PN} = \frac{\sqrt{(x-q)^2 + y^2}}{x + \frac{q}{e}} = e,$$

josta

$$\sqrt{(x-q)^2 + y^2} = ex + q,$$

$$(1) \quad (1 - e^2)x^2 - 2(1+e)qx + y^2 = 0.$$

Siinä haetun uran yhtälö. Saadaksemme selville sen geometrillistä merkitystä, muutellaan sitä eri lailla, aina sen mukaan kuin vakinainen suhde e on yhtäsuuri, pienempi tai suurempi kuin ykkönen.

Jos $e = 1$, saadaan edellisestä yhtälöstä

$$y^2 = 4qx,$$

ja tämä edustaa parabolata, jossa polttopisteen välimatka perästä on q.

Muita tapauksia varten annamme yhtälölle (1) ensiksi seuraavan muodon

$$(1-e^2)\left(x^2 - \frac{2q}{1-e}x\right) + y^2 = 0,$$

josta, kun $(1-e^2)\left(\frac{q}{1-e}\right)^2$ lisätään kumpaankin jäseneen, saadaan

$$(2) \qquad (1-e^2)\left(x - \frac{q}{1-e}\right)^2 + y^2 = (1-e^2)\left(\frac{q}{1-e}\right)^2.$$

Jos nyt $e < 1$, niin on $1-e$ positivinen suure ja senvuoksi saattaa panna

$$\frac{q}{1-e} = a;$$

yhtälöstä (2) tulee silloin

$$(1-e^2)(x-a)^2 + y^2 = (1-e^2)a^2.$$

Siirretään nyt origini A:sta siihen pisteesen suoralla AX, jonka abscissa on a, joten yhtälö sievistyy seuraavaksi

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = (1-e^2)a^2.$$

Kun viimein positivinen suure $(1-e^2)a^2$ merkitään b^2, josta,

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}, \; e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

niin saadaan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

joka osoittaa uran tässä tapauksessa olevan ellipsin. Kaavat

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},\quad q=a(1-e)$$

näyttävät, että e on ellipsin excentrisyys ja q polttopisteen välimatka perästä, ja siitä seuraa taas, että F on toinen polttopiste. Suoraa SS' sanotaan ellipsin johtajaksi. Toisella polttopisteellä on eräs toinen johtaja; kumpikin johtaja on kohtisuorassa isoakselille, ja niillä on symmetrillinen asema ellipsin suhteen, jonka ulkopuolella ne kulkevat.

Jos vihdoin $e>1$, niin sopii panna

$$\frac{q}{e-1}=a,$$

jolloin a on positivinen; yhtälöstä (2) tulee silloin

$$(e^2-1)(x+a)^2-y^2=(e^2-1)a^2.$$

Originin siirtäminen siihen pisteesen x-akselilla, jonka abscissa on $-a$, sieventää yhtälön seuraavaksi

$$(e^2-1)x^2-y^2=(e^2-1)a^2.$$

Kun positivinen suure $(e^2-1)a^2$ merkitään b^2, josta

$$e^2-1=\frac{b^2}{a^2},\quad e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},$$

saadaan vihdoin

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

joka osoittaa haetun viivan tässä tapauksessa olevan hyperbolan. Kaavoista

$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},\quad q=a(e-1)$$

näkyy, että e on hyperbolan excentrisyys ja q polttopisteen välimatka perästä, ja siitä taas seuraa, että F on toinen polttopiste. Suoraa SS' sanotaan johtajaksi. Toista polttopistettä vastaa eräs toinen johtaja; kumpikin johtaja on kohtisuorassa transversaaliselle akselille, ja niillä on symmetrillinen asema hyperbolan suhteen, jonka kumpaisenkin haarukkeen välille ne lankeavat.

Haettu ura on siis kaikissa tapauksissa koonillinen leikkaus, nimittäin parabola, jos $e=1$, ellipsi, jos $e<1$, hyperbola, jos $e>1$. Kahdessa jälkimmäisessä tapauksessa on vakinainen suhde e ellipsin tai hyperbolan excentrisyys. Yhdenmukaisesti omannetaan parabolallekin excentrisyys $e=1$. Mitä näin on selville saatu, sopii lausua seuraavassa teoreemassa:

Koonillinen leikkaus on ura semmoiselle pisteelle, jonka välimatkoilla annetusta pisteestä ja annetusta suorasta on toisiinsa vakinainen suhde. Annettu piste on polttopiste, annettu suora johtaja ja vakinainen suhde koonillisen leikkauksen excentrisyys.

94. Koonillisen leikkauksen yhtälö, perän ollessa originina, on, niinkuin näimme (1),

$$(1-e^2)x^2-2(1+e)qx+y^2=0,$$

jolloin e on excentrisyys ja q polttopisteen välimatka perästä elikkä polttoväli. Pantuamme $x=q$, tulee $y=$ puoli parametria $=p$, ja sijoitettuamme nämä arvot saamme

$$(1-e^2)q^2-2(1+e)q^2+p^2=0, \text{ eli } p^2=(1+2e+e^2)q^2, \text{ josta}$$

$$p=(1+e)q.$$

Yhtälön (1) saattaa siis myöskin kirjoittaa näin

$$(1-e^2)x^2-2px+y^2=0$$

eli

$$y^2=2px-(1-e^2)x^2. \tag{3}$$

Tämä kaava näyttää, missä yhteydessä koonillisten leikkausten eri lajit ovat keskenään. Suure $2px$ merkitsee suorakulmiota parametrilla ja abscissalla. Parabolassa on ordinaatan neliö yhtäsuuri kuin tämä suorakulmio; ellipsissä se on pienempi, hyperbolassa isompi sitä. Tästä johtuvat, kuten Pappus selittää, nimitykset ellipsi, parabola ja hyperbola (παραβολή = yhtäsuuruus, ἔλλειψις = puute, ὑπερβολή = liika).

Jos samalle akselille tehdään samalla perällä useampia koonillisia leikkauksia, joilla ovat yhtäsuuret parametrit, mutta erisuuret excentrisyydet, niin sivuavat ne kaikki toisiansa perässä, mutta hajauvat tästä pisteestä lähtien; ellipsit jäävät kokonansa parabolan sisäpuolelle, hyperbolat kokonaan sen ulkopuolelle. Mitä enemmin ellipsin excentrisyys kasvaa ja mitä pienemmäksi hyperbolan excentrisyys käy, sitä lähemmälle parabolata ne tulevat; parabolata sopii senvuoksi pitää ellipsin vaihevälinä hyperbolaan.

Kun parametri $2p$ katoaa, syntyy muutamia koonillisten leikkausten sivulajeja. Minkälaatuisia ne ovat, sen saattaa suorastansa nähdä yhtälöstä (3), jonka muoto silloin on $y = \pm x\sqrt{e^2-1}$. Tämä yhtälö edustaa kahta suoraa, jotka leikkaavat toisiansa, jos $e > 1$; mutta jos $e = 1$, niin sanottu yhtälö osoittaa yhtä suoraa, nimittäin x-akselia. Kun $e < 1$, niin toteutuu mainittu yhtälö ainoastaan yksityisarvoissa $x = 0$, $y = 0$; se osoittaa silloin ainoastaan pistettä, nimittäin originia.

95. Koonillisen leikkauksen yhtälö polaarisissa koordinaateissa. — Se saataisiin yhtälöstä (1) muuttamalla koordinaatit, mutta me otamme johdattaaksemme sen suorastansa 93 §:ssä selitetystä yleisestä ominaisuudesta, jonka mukaan välimatka jostakin P-pisteestä (kuva 54) koonillisella leikkauksella polttopisteesen F ja välimatka samasta pisteestä johtajaan SS' ovat toisiinsa vakinaisessa suhteessa $= e$. Koordinaateiksi P-pisteen määräämiselle otetaan välimatka polttopisteestä eli radius vector $PF = r$ sekä polttosäteen ja polttovälin muodostama kulma $PFA = v$. Senjälkeen vedetään PM ja PN kohtisuoriksi akselille ja johtajalle. Silloin on $FM = r\cos v$, $FA = q$, $AD = \frac{q}{e}$ sekä $PN = DA + AF - FM = q + \frac{q}{e} - r\cos v$, josta

$$\frac{PF}{PN} = \frac{r}{q + \frac{q}{e} - r\cos v} = e,$$

elikkä, vähitellen sieventämällä,

$$r = (1+e)q - er\cos v,$$

$$(1+e\cos v)r = (1+e)q,$$

$$(4)\qquad r = \frac{(1+e)q}{1+e\cos v}.$$

Siinä yhtälö poolaarisissa koordinaateissa (r, v) koonilliselle leikkaukselle, jonka excentrisyys on e ja polttoväli q. Jos viimeksi mainitun suureen sijaan tahdotaan panna parametrin puolikas p, niin huomattakoon vaan, että kun $v = 90^0$, on $r = p$; sijoitettuamme nämä arvot edelliseen kaavaan, saamme $p = (1+e)q$ Yhtälön (4) saattaa siis myöskin kirjoittaa näin:

$$(5)\qquad r = \frac{p}{1+e\cos v},$$

jossa p = puoli parametria.

Parabolassa on $e = 1$ ja siis $1 + e\cos v = 1 + \cos v$ $= 2\cos^2\frac{v}{2}$; sen polaari-yhtälö on siis [vrt. (4)]

$$r = \frac{q}{\cos^2\frac{v}{2}}.$$

Ellipsissä on $e < 1$ ja siis $1 + e\cos v$ sekä r positivisia kaikissa v:n arvoissa. Määrätäksemme, kuinka pitkä on isoakseli $2a$, huomattakoon, että tämä on yhtäpitkä kuin ne polttosäteet yhteensä, jotka vastaavat kulmia $v = 0$ ja $v = 180^0$. Siis [katso kaavaa (5)] kun $v = 0$, on $r = \frac{p}{1+e}$ ja kun $v = 180^0$, on $r = \frac{p}{1-e}$; tästä saadaan

$$2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2} \text{ eli } p = a(1-e^2).$$

Ellipsin polaari-yhtälönä on siis myöskin

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}.$$

Hyperbolassa on $e > 1$, ja $1 + e\cos v$ on positivinen kaikissa v-kulman arvoissa, jotka ovat pienemmät kuin 90^0.

Kun v käy suuremmaksi kuin 90^0, on $1+e\cos v$ edelleen positivisena, kunnes se katoaa, kun v saa semmoisen arvon α, että $\cos\alpha = -\frac{1}{e}$. Kun v vieläkin kasvaa, käy $1+e\cos v$ negativiseksi. Polttosäde saa siis myöskin yhtälön (5) mukaan sekä positivisia että negativisia arvoja. Kun v kasvaa nollasta arvoon α, kasvaa r arvosta $\frac{p}{1+e}$ äärettömiin. Äärettömän kaukana olevan pisteen polttosäde on nähtävästi asymptootin suuntainen, ja siitä päätetään, että asymptooti tekee transversaalisen akselin kanssa kulman $180^0-\alpha$, jonka cosini on $\frac{1}{e}$. Kun v tulee isommaksi kuin α, muuttuu r negativiseksi; s. o. hyperbolan piste ei ole enää sanotun v-kulman määräämällä säteellä, vaan sen pitennyksellä vastaiseen suuntaan polttopisteestä. Positiviset r-suureen arvot kuuluvat hyperbolan toiseen, negativiset toiseen haarukkeesen. Hyperbolan lähimmässä perässä on $v=0$ ja siis (5) $r=\frac{p}{e+1}$, kaukaisemmassa on $v=180^0$ ja $r=\frac{p}{e-1}$. Näiden arvojen eroitus on transversaalinen akseli; sen pituus on siis

$$2a = \frac{p}{e-1} - \frac{p}{e+1} = \frac{2p}{e^2-1}, \text{ josta } p = a(e^2-1).$$

Hyperbolan polaari-yhtälön saattaa siis myöskin kirjoittaa

$$r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos v},$$

ja tässä muodossaan sillä on suurin yhtäläisyys ellipsin äskön mainitun yhtälön kanssa.

Kaksiasteisen yhtälön geometrillinen merkitys.

96. Kaksiasteisella yhtälöllä kahden tuntemattoman välillä on yleisenä muotona

$$(1)\quad Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0,$$

jossa eri terminien koefficienteillä saattaa olla mimmoisia todellisia positivi- tai negativi-arvoja hyvänsä. Yksi tai useampi näitä koefficienttejä saattaa olla nollakin. Sitä tapausta ei meidän kumminkaan tarvitse lukuun ottaa, jolloin A, B, C yht'aikaa ovat nolla, sillä silloin olisi yhtälö yksiasteinen. Murtolukujen välttämiseksi muutamissa muutoksissa vast'edes, on muutamat koefficientit jo ennakolta kerrottu 2:lla.

Saadaksemme helpommin selville, mikä geometrillinen merkitys tuollaisella yhtälöllä on, otaksutaan ensinkin x ja y suorakulmaisiksi koordinaateiksi. Sopivalla tavalla muuttaen akselien suunnan, saattaa aina poistaa sen terminin, jossa on koordinaatien tulo xy. Kääntyköön sitä vasten koordinaatisto originissa kulmalla α positiviseen suuntaan. Uudet, myöskin suorakulmaiset x- ja y-akselit tekevät nyt alkuperäisen x-akselin kanssa kulmat α ja $90^0 + \alpha$; siis (10 §, 2:o) saadaan entisten koordinaatien ja uusien koordinaatien x', y' välille seuraavat suhdat

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Sijoitettuamme nämä arvot yhtälöön (1), saa se muodon

$$(2) \qquad Mx'^2 + Ny'^2 + 2Px'y' + 2Gx' + 2Hy' + F = 0,$$

jossa

$$(3) \qquad \begin{cases} M = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha + C\sin 2\alpha, \\ N = A\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha - C\sin 2\alpha, \\ 2P = (B - A)\sin 2\alpha + 2C\cos 2\alpha. \end{cases}$$

Kun nyt α määrätään semmoiseksi, että

$$(A - B)\sin 2\alpha = 2C\cos 2\alpha,$$

eli

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2C}{A - B},$$

mikä aina onkin mahdollista, niin katoaa P ja yhtälöstä (2), poisjättämällä aksentit, tulee

$$(4) \qquad Mx^2 + Ny^2 + 2Gx + 2Hy + F = 0.$$

Jos ei koefficienteistä M, N kumpikaan ole nolla, niin saattaa originia siirtämällä tästä yhtälöstä vieläkin poistaa ne terminit, joissa x ja y ovat yksiasteisia. Yhtälön (4) saattaa nimittäin silloin kirjoittaa myöskin näin:

$$M\left(x+\frac{G}{M}\right)^2+N\left(y+\frac{H}{N}\right)^2=\frac{G^2}{M}+\frac{H^2}{N}-F.$$

Kun nyt origini siirretään siihen pisteesen, jonka koordinaatit ovat $-\frac{G}{M}$, $-\frac{H}{N}$, ja merkitään oikea jäsen lyhyyden vuoksi K, saadaan uusien koordinaatien välille seuraava yksinkertainen suhta

$$\text{(I)} \qquad Mx^2+Ny^2=K.$$

Jos sitä vastoin jompikumpi koefficienteistä M, N olisi $=0$, niin ei tämä muutos enää kävisi laatuun, sillä piste $\left(-\frac{G}{M}, -\frac{H}{N}\right)$ olisi silloin äärettömän kaukana. Mutta tässä tapauksessa saattaa yhtälön (4) supistaa kaksi-terminiseksi. Olkoon esim. $N=0$, silloin saattaa yhtälön (4) kirjoittaa

$$M\left(x+\frac{G}{M}\right)^2+2Hy+F-\frac{G^2}{M}=0,$$

josta

$$M\left(x+\frac{G}{M}\right)^2+2H\left(y+\frac{MF-G^2}{2HM}\right)=0.$$

Siirretään nyt vaan origini siihen pisteesen, jonka koordinaatit ovat $-\frac{G}{M}$, $\frac{G^2-MF}{2MH}$, niin saadaan yhtälölle yksinkertainen muoto

$$\text{(II)} \qquad Mx^2+2Hy=0.$$

Viimeksi mainittu muutos olisi mahdotonta ainoastaan silloin, kuin paitsi N myöskin H olisi nolla; mutta silloin saataisiin yhtälö $Mx^2=K$, ja tämän muodon sisältää jo I.

Yleiselle kaksiasteiselle yhtälölle saattaa siis koordinaateja muuttamalla aina antaa jommankumman muodoista (I), (II). Sen geometrillinen merkitys on nyt silmiinpistävä.

Tutkittakoon aluksi yhtälöä (I), ja olkoot ensiksi M ja N yhdenmerkkisiä. Jos silloin suureella K on vastainen merkki, niin yhtälö lausuu mahdottomuuden, eikä sillä siis ole mitään geometrillistä merkitystä. Kun $K=0$, saattaa yhtälön toteuttaa ainoastaan arvoilla $x=0$, $y=0$; se edustaa silloin pistettä, nimittäin originia. Mutta kun K on samanmerkkinen kuin M ja N, niin osoittaa yhtälö (I) ellipsiä. Tämä ellipsi muuttuu kahdeksi yhdensuuntaiseksi suoraksi, jos toinen koefficienteista M, N on nolla, ja nämä suorat yhtyvät, jos samassa myöskin K on nolla.

Jos sitä vastoin M ja N ovat erinmerkkisiä, niin yhtälö (I) osoittaa hyperbolata. Kun $K=0$, muuttuu hyperbola kahdeksi suoraksi, jotka leikkaavat toisiansa.

Yhtälö (II) merkitsee yleensä parabolata, joka, kun $H=0$, supistuu yhdeksi suoraksi.

97. Saattaaksemme annetusta yhtälöstä (1) suorastaan päättää, mikä näistä tapauksista milloinkin on olemassa, palaamme kaavoihin (3), jotka osoittavat, missä yhteydessä ovat keskenänsä uudet koefficientit M, N, P ja alkuperäiset A, B, C. Sanotuista kaavoista johdetaan yhteenlaskun ja vähennyksen kautta

$$M+N=A+B,$$
$$M-N=(A-B)\cos 2\alpha+2C\sin 2\alpha,$$
$$2P=-(A-B)\sin 2\alpha+2C\cos 2\alpha.$$

Kaksi jälkimmäistä yhtälöä, koroitettuina neliöön ja yhteenlaskettuina, antavat

$$(M-N)^2+4P^2=(A-B)^2+4C^2,$$

ja kun tämä otetaan yhtälöstä

$$(M+N)^2=(A+B)^2,$$

niin saadaan vihdoin

$$MN-P^2=AB-C^2.$$

Kaikki nämä suhteet ovat voimassa, olkoon α-kulmalla mikä arvo tahansa; mutta kun nyt tämä kulma on määrätty semmoiseksi, että P katoaa, niin saadaan viimeisestä kaavasta

$$MN=AB-C^2.$$

Tästä näkyy, että M ja N ovat yhden- tahi erinmerkkisiä sitä myöten kuin $AB - C^2$ on positivinen tahi negativinen, kuin myöskin, että jos $AB - C^2 = 0$, niin MN on nolla ja siis joko $M = 0$ tahi $N = 0$. Geometrillinen merkitys yhtälössä (1) riippuu siis siitä, mikä merkki on suureella $AB - C^2$, ja me saatamme tutkimuksemme seuraukset yhdistää seuraavalla tavalla.

Yhtälön $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$ geometrillisenä merkityksenä on:

$$\left.\begin{array}{l}\text{ellipsi,}\\ \text{piste,}\\ \text{ei mikään,}\end{array}\right\}\ \text{kun } AB - C^2 > 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{hyperbola,}\\ \text{kaksi suoraa, jotka}\\ \quad\text{leikkaavat toisiansa,}\end{array}\right\}\ \text{kun } AB - C^2 < 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{parabola,}\\ \text{kaksi yhdensuuntaista}\\ \quad\text{suoraa,}\\ \text{suora,}\\ \text{ei mikään.}\end{array}\right\}\ \text{kun } AB - C^2 = 0.$$

98. Tähän saakka olemme ehdottaneet koordinaatit suorakulmaisiksi. Jos sitä vastoin x ja y yhtälössä (1) olisivat vinokulmaisia koordinaateja, niin käy ne muuttaminen suorakulmaisiksi tämänmuotoisella sijoituksella:

$$x = mx' + ny',$$
$$y = m'x' + n'y'.$$

Koska tämmöinen linjallinen muutos ei saata isontaa eikä pienentää yhtälön astelukua, niin seuraa siitä, että kaksiasteinen yhtälö vinokulmaisissakin koordinaateissa, jos sillä vaan on mitään merkitystä, edustaa koonillista leikkausta tahi jotakin sen sivulaatuja.

Yleisessä kaksiasteisessa yhtälössä on kuusi koefficienttiä; mutta kun koko yhtälön saattaa jakaa yhdellä niistä, niin ei siinä oikeastaan olekaan kuin viisi toisistansa vapaata koefficienttiä. Koonillisen leikkauksen täydelliseksi määräämiseksi on siis yleensä viisi ehtoa tarpeen ja kylläksi; mutta ne saattaa valita äärettömän monella eri tavalla. Niin saattaa esimerkiksi vaatia, että koonillinen leikkaus kulkisi viiden annetun pisteen kautta tahi sivuaisi viittä annettua suoraa j. n. e.

Yhdeksäs Luku.

Harmonillisia ominaisuuksia kaksiasteisilla viivoilla.

99. Harmonilliset pisteet. — Suureet $a, b, c, \ldots$ ovat harmonillisessa sarjassa*) silloin kuin niiden vastavuoroiset arvot $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots$ muodostavat aritmetillisen sarjan.

Kun kolme suuretta a, b, c ovat harmonillisessa sarjassa, sanotaan keskimmäistä toisten harmonilliseksi keskisuhdeluvuksi. Silloin on

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c},$$

josta

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}.$$

Neljä pistettä A, B, C, D samalla suoralla ovat harmonillisia pisteitä, kun välimatkat AB, AC, AD äärimmäisestä muihiin kolmeen muodostavat harmonillisen sarjan. Koska vastavuoroiset arvot $\frac{1}{AB}, \frac{1}{AC}, \frac{1}{AD}$ silloin tekevät aritmetillisen sarjan, niin on

$$\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} = \frac{1}{AC} - \frac{1}{AD},$$

---

*) Nimitys lainattu musiikista. Kun soittokieli antaa perättäin duurillisen kolmiäänen kolme säveltä, esim. ut, mi, sol (C, E, G), ovat värähtelevät pituudet toisiinsa niinkuin $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, ja näiden lukujen vastavuoroiset arvot 4, 5, 6 ovat aritmetillisessä sarjassa.

josta

$$\frac{AC-AB}{AB.AC}=\frac{AD-AC}{AC.AD},$$

elikkä, kun $AC-AB=BC$ ja $AD-AC=CD$,

$$\frac{BC}{AB}=\frac{CD}{AD}$$

se on

$$AB:BC=AD:DC.$$

Tästä näkyy, että pisteet A, B, C, D ovat harmonillisia, jos matkat pisteestä B pisteisin A ja C ovat toisiinsa niinkuin matkat pisteestä D pisteisin A ja C. Pisteet A ja C ovat silloin liittolaisia, samoin myös pisteet B ja D. Tuskin tarvitsee huomauttaa, että pisteet, jotka ovat harmonillisia jossakin suunnassa (A, B, C, D), myöskin ovat harmonillisia vastaisessa suunnassa (D, C, B, A).

Liitto-pisteistä B ja D lankeaa toinen välttämättömästi pisteiden A ja C väliin, toinen niiden kumpaisenkin ulkopuolelle. Seuratkoot pisteet toisiansa järjestyksessä A, B, C, D. Yllämainitussa analogiassa $AB:BC=AD:DC$ on silloin kolmas termini suurin ja siis toinen termini pienin; BC on siis pienempi kuin sekä AB että CD. Keskimmäiset pisteet ovat siis lähemmällä toisiansa kuin kumpaakin äärimmäistä pistettä. Liitto-pisteet B ja D lähenevät yht'aikaa niiden välillä olevaa pistettä C tahi etenevät siitä yht'aikaa; kun B yhtyy pisteesen C, niin yhtyy myöskin D siihen, mutta kun B on A:n ja C:n keskivälissä, on piste D äärettömän kaukana.

Merkitkööt x_0, y_0 ja x_1, y_1 koordinaateja kahdelle pisteelle A ja C; näiden yhdistyssuoralla otetaan piste B kahden ensinmainitun välillä ja toinen piste D niiden kumpaisenkin ulkopuolella, niin että $AB:BC=AD:DC=\lambda:1$; silloin ovat koordinaatit pisteille B ja D respective (12 §)

$$\frac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda},\ \frac{y_0+\lambda y_1}{1+\lambda};\ \frac{x_0-\lambda x_1}{1-\lambda},\ \frac{y_0-\lambda y_1}{1-\lambda}.$$

Siinä nyt koordinaatit kahdelle pisteelle, jotka ovat harmonillisia pisteille (x_0, y_0) ja (x_1, y_1). Kun λ pannaan vaihtumaan nollasta äärettömiin, niin saadaan siten kaikki sellaiset pisteparit edustetuiksi.

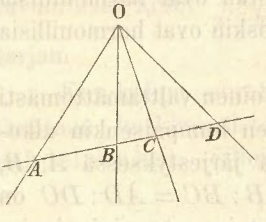
100. Harmonillinen kimppu. — Neljä suoraa OA, OB, OC, OD, jotka lähtevät samasta pisteestä O, ovat harmonillisia säteitä ja tekevät harmonillisen kimpun, jos sinit niille kulmille, jotka kaksi näistä suorista OB, OD tekevät toisten kahden, OA:n, OC:n, kanssa, ovat suhteellisia,

$$\sin AOB : \sin BOC = \sin AOD : \sin COD.$$

Säteitä OA ja OC sanotaan liittolaisiksi; samoin säteitä OB ja OD.

Harmonillisen kimpun leikkaa mikä suora (transversaali) hyvänsä neljässä harmonillisessa pisteessä A, B, C, D. — Sinit kulmille AOB, BOC nimittäin ovat toisiinsa niinkuin pisteestä B säteille OA, OC vedetyt kohtisuorat, ja sinit kulmille AOD, COD ovat toisiinsa niinkuin kohtisuorat pisteestä D samoille säteille OA, OC. Koska nyt nämä neljä siniä ovat suhteellisia, niin ovat sanotut neljä kohtisuoraakin suhteelliset.

Kuva 55.



Mutta kohtisuorat pisteistä B ja D säteelle OA ovat toisiinsa kuin $AB : AD$ ja kohtisuorat pisteistä B ja D säteelle OC toisiinsa kuin $BC : CD$; senvuoksi on $AB : BC = AD : DC$, ja puheenaolevat neljä pistettä siis harmonilliset.

Pisteestä O neljään harmonilliseen pisteesen A, B, C, D vedetyt suorat tekevät harmonillisen kimpun. — Analogiasta $AB : BC = AD : DC$ seuraa nimittäin ensin, että kohtisuorat pisteistä B ja D säteille OA ja OC ovat suhteellisia, ja siitä sitten päätetään, että sinit kulmille AOB, BOC, AOD, DOC myöskin ovat suhteelliset.

Harmonillisella kimpulla on muutamia samanlaatuisia yleisiä ominaisuuksia kuin harmonillisilla pisteilläkin. Kahdesta liitto-säteestä lankeaa toinen kahden toisen väliin, toinen näiden kumpaisenkin ulkopuolelle. Liitto-säteet OB, OD lähenevät yht'aikaa heidän välillänsä olevata sädettä OC tai etenevat siitä yht'aikaa. Tässäkin on kaksi rajatapausta:

1:o säteet OB ja OD yhtyvät yht'aikaa säteesen OC; 2:o jos OB lankeaa OA:n ja OC:n keskivälille, niin tulee OD kohtisuoraksi säteelle OB. Kaikki tämä seuraa välittömästi itse harmonillisten säteiden määrityksestä.

Suora, joka on samansuuntainen kuin joku säde harmonillisessa kimpussa, leikkaa muut kolme sädettä pisteissä, jotka ovat yhtä kaukana toisistansa. Sillä jos transversaali AD olisi samansuuntainen kuin OD, niin jäisi leikkauspiste D äärettömän kauas, ja liittolainen B-piste lankeaisi keskivälille pisteitä A ja C.

101. Harmonillisten suorain yhtälöt. — Olkoot $A = x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$, $A' = x\cos\alpha' + y\cos\beta' - p' = 0$ perusmuotoisia yhtälöitä kahdelle suoralle; yhtälö $A = \lambda A'$ edustaa silloin uraa sille pisteelle, jonka välimatkoilla näistä suorista on toisiinsa vakinainen suhde $\frac{A}{A'} = \lambda$ ja joka on samassa A:n ja A':n muodostamassa ristikulmaparissa kuin originikin taikka toisessa parissa, sitä myöten kuin λ on positivinen tai negativinen. Tämä ura on nähtävästi suora viiva, joka kulkee suorain A ja A' leikkauspisteen kautta, ja tekee niiden kanssa kulmia, joiden sinit ovat toisiinsa kuin $\lambda : 1$. Tästä nähdään, että yhtälöt

$$A - \lambda A' = 0,\ A + \lambda A' = 0$$

edustavat kahta liitto-sädettä, jotka yhdessä annettujen suorain ($A = 0$, $A' = 0$) kanssa tekevät harmonillisen kimpun.

Jos annettujen suorain yhtälöllä on joku toinen muoto

$$L = Ax + By + C = 0,\ L' = A'x + B'y + C' = 0,$$

niin tulevat ne perusmuotoisiksi, kerrottuina eräillä vakinaisilla tekijöillä R, R'. Yhtälöt

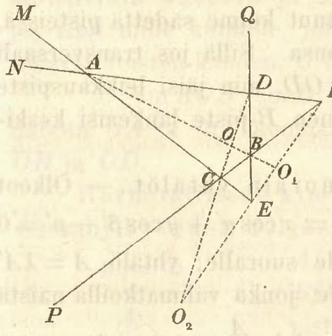
$$L = 0,\ L' = 0,\ L - \lambda L' = 0,\ L + \lambda L' = 0$$

merkitsevät silloin myös neljää harmonillista suoraa, joista kaksi ensimmäistä ja kaksi jälkimmäistä ovat liittolaisia; mutta sinien suhde ei ole enää $\lambda : 1$, vaan $\lambda R : R'$. Sen näkee heti, kun yhtälöt kirjoitetaan näin

$$RL = 0,\ R'L' = 0,\ RL \mp \frac{\lambda R}{R'} \cdot R'L' = 0.$$

102. Täydellinen nelisivukas. — Neljän epämääräisen suoran M, N, P, Q sanotaan muodostavan täydellisen nelisivukkaan. Ne leikkaavat toisiansa kuudessa pisteessä, joihin siten syntyy kolme paria vastakkaisia kulmia A, B; C, D; E, F. Näiden yhdistyssuorat muodostavat kolme diagonaalia, jotka tarpeeksi pitennettyinä leikkaavat toisiansa kolmessa pisteessä O, O_1, O_2.

Kuva 56.



Olkoot $M=0$, $N=0$, $P=0$, $Q=0$ yhtälöitä mainituille neljälle suoralle M, N, P, Q; silloin saattaa diagonaalin AB merkitä sekä yhtälöllä $mM-nN=0$ että yhtälöllä $pP-qQ=0$, joissa m, n, p, q ovat eräitä vakinaisia lukuja. Koska nämä kaksi viimeksimainittua yhtälöä kumpikin edustavat samaa suoraa, niin ei niiden välillä saata olla muuta eroitusta kuin joku vakinainen tekijä, ja jaettuamme tällä tekijällä, saamme yhtälöt aivan identtisiksi. Tämän jaon saatamme ajatella jo tapahtuneeksi, niin että meillä on identtisesti

$$mM-nN=pP-qQ$$

ja siitä

$$mM-pP=nN-qQ, \quad mM+qQ=nN+pP.$$

Helposti huomaa, että yhtälöt

$$mM-nN=0, \quad mM-pP=0, \quad nN+pP=0$$

silloin järjestyksessä edustavat kolmea diagonaalia AB, CD, EF. Yhtälö

$$mM+nN=0,$$

joka on syntynyt kahden jälkimmäisen yhdistämisellä, merkitsee siis suoraa, joka kulkee CD:n ja EF:n leikkauspisteen, se on pisteen O_2, kautta; se kulkee sitä paitsi sen pisteen kautta, jossa suorat $M=0$; $N=0$ leikkaavat toisensa, siis pisteen A kautta. Viimeksi mainittu yhtälö edustaa niin muodoin suoraa AO_2.

Näistä neljästä suorasta AD, AC, AO, AO_2, jotka lähtevät pisteestä A, saamme ensimmäiselle ja toiselle yhtälöt $N=0$, $M=0$; kolmannelle ja neljännelle $mM-nN=0$, $mM+nN=0$; siitä saatamme päättää, että nämä suorat tekevät harmonillisen kimpun ja että siis pisteet D, O, C, O_2 kuin myöskin pisteet F, O_1, E, O_2 ovat harmonillisia. Tästä taas seuraa, että suorat FD, FC, FO, FO_2 myöskin muodostavat harmonillisen kimpun ja että siis pisteet A, O, B, O_1 ovat harmonillisia. Täten päädymme seuraavaan tärkeään teoreemaan:

Täydellisessä nelisivukkaassa ovat kunkin diagonaalin päät sekä sen ja kahden toisen diagonaalin leikkauspisteet harmonillisia pisteitä, joista kaksi edellistä keskenänsä ja kaksi jälkimmäistä keskenänsä ovat liittolaisia.

Lyhemmin: kaksi diagonaalia jakavat kolmannen harmonillisesti.

Nyt saatamme helposti löytää neljännen harmonikaalin kolmelle pisteestä A lähtevälle suoralle AD, AB, AC. Jostakin pisteestä B sillä suoralla, jonka liittolainen on etsittävänä, vedetään suorat CF, DE mielin määrin; yhdistetään sitten pisteet C, D, E, F, joissa nämä leikkaavat toiset kaksi annettua sädettä, ja pitennetään suorat CD, EF kunnes yhtyvät pisteessä O_2; suora AO_2 on silloin haettu neljäs harmonikaali.

103. **Koonillisen leikkauksen ja suoran leikkauspisteet.** — Koonillista leikkausta edustaa yleensä, niinkuin olemme nähneet, kaksiasteinen yhtälö

(1) $$U = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

jonka vasen jäsen lyhyyden tähden merkitään: U. Sijoitettuamme sen ohella seuraavat lyhennykset

(2) $$\begin{cases} X = Ax + Cy + D, \\ Y = Cx + By + E, \\ P = Dx + Ey + F, \end{cases}$$

saattaa ensimmäisen yhtälön kirjoittaa

(3) $$U = Xx + Yy + P = 0,$$

jossa X, Y, P ovat algebrallisia yksiasteisia funktioneja suureista x ja y.

Etsikäämme nyt leikkauspisteet, joissa toisensa leikkaavat täten määrätty koonillinen leikkaus ja eräs suora, joka kulkee kahden mielin määrin otetun pisteen (x_0, y_0), (x_1, y_1) kautta. Tällä suoralla olevan kolmannen pisteen koordinaateille saadaan yleensä lausekkeiksi

$$x = \frac{mx_0 + nx_1}{m+n}, \quad y = \frac{my_0 + ny_1}{m+n},$$

jossa $n:m$ näyttää missä suhteessa toisiinsa ovat kolmannen pisteen välimatkat kahdesta annetusta (x_0, y_0) ja (x_1, y_1). Ajatellaanpa nyt, että tämä kolmas piste onkin itse koonillisella leikkauksella; saadaksemme tietää, millaiseksi suureiden m ja n välinen suhde silloin käy, sijoitamme äskön saadut x:n ja y:n arvot yhtälöön (1), joka silloin järjestettynä suureiden m ja n arvokertain mukaan, saa muodon

$$\begin{aligned} 0 = &(Ax_0^2 + By_0^2 + 2Cx_0y_0 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F)m^2 \\ &+ 2[Ax_0x_1 + By_0y_1 + C(x_0y_1 + y_0x_1) + D(x_0 + x_1) + E(y_0 + y_1) + F]mn \\ &+ (Ax_1^2 + By_1^2 + 2Cx_1y_1 + 2Dx_1 + 2Ey_1 + F)n^2. \end{aligned}$$

Koefficientit suureille m^2 ja n^2 saadaan, kun annetun yhtälön vasemmassa jäsenessä U suureet x ja y sijoitetaan suureilla respective x_0, y_0 ja x_1, y_1; nämä koefficientit ovat siis ne arvot, jotka U saa pisteissä (x_0, y_0) ja (x_1, y_1). Koefficientti suureelle $2mn$ on symmetrillinen indicien 0, 1 suhteen, ja sen saattaa kirjoittaa joko

$$(Ax_0 + Cy_0 + D)x_1 + (Cx_0 + By_0 + E)y_1 + Dx_0 + Ey_0 + F$$

tahi

$$(Ax_1 + Cy_1 + D)x_0 + (Cx_1 + By_1 + E)y_0 + Dx_1 + Ey_1 + F.$$

Merkitkööt nyt U_0, X_0, Y_0, P_0 niitä arvoja, jotka funktionit U, X, Y, P saavat pisteessä (x_0, y_0), ja U_1, X_1, Y_1, P_1, samain funktionien arvoja pisteessä (x_1, y_1); edellinen yhtälö supistuu siten seuraavaksi

$$(4) \qquad U_0m^2 + 2(X_0x_1 + Y_0y_1 + P_0)mn + U_1n^2 = 0.$$

Jaettuamme suureella n^2, saamme kaksi arvoa suhteelle $\frac{m}{n}$, ja siitä päätämme, että k o o n i l l i n e n l e i k k a u s j a s u o r a l e i k k a a v a t t o i s e n s a k a h d e s s a p i s t e e s s ä, jotka kumminkin yksityisissä tapauksissa saattavat yhtyä tai olla aatteisia.

Seuraava tutkimus kun pääasiallisesti perustakse juuri suureen $2mn$ koefficienttiin, niin huomattakoon siitä vielä, ettei se muutu, vaikka x_0, y_0 ja x_1, y_1 vaihdetaan keskenään, joten meillä siis identtisesti on

$$X_0x_1 + Y_0y_1 + P_0 = X_1x_0 + Y_1y_0 + P_1.$$

104. Harmonilliset polit ja polaarit. — Edellisessä §:ssä tarkastettu suora leikkaa koonillisen leikkauksen kahdessa pisteessä, jotka ovat harmonillisia pisteille (x_0, y_0) ja (x_1, y_1), jos yhtälöstä (4) saadut kaksi arvoa suhteelle $\frac{m}{n}$ ovat keskenään yhtäsuuret ja vastaismerkkiset, s. o. jos niiden summa on nolla, ja tämä tapahtuu joka kerta kuin toisen terminin koefficientti katoaa, se on joka kerta kuin pisteet (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) ovat semmoisessa asemassa, että ehto

$$X_0x_1 + Y_0y_1 + P_0 = 0 \tag{5}$$

on täytettynä.

Kahden pisteen sanotaan olevan harmonillisia poleja koonilliselle leikkaukselle, jos koonillinen leikkaus jakaa harmonillisesti niiden yhdistyssuoran. Yhtälö (5) sisältää siis ainoan tarpeellisen ehdon harmonilliselle poli-parille. Jos toinen poli (x_0, y_0) on annettu tai otettu mielin määrin, niin saattaa toisena (x_1, y_1) olla mikä piste tahansa, jonka koordinaatit vaan toteuttavat yhtälön

$$X_0x + Y_0y + P_0 = 0. \tag{6}$$

Tämä on yksiasteinen x:n ja y:n suhteen ja edustaa siis suoraa; koefficientit X_0, Y_0, P_0, riippuen ainoastaan annetun pisteen koordinaateista x_0, y_0, ovat nimittäin vakinaisia. Tätä suoraa sanotaan polaariksi pisteelle (x_0, y_0), ja tätä pistettä taas poliksi suoralle (6). Annetun pisteen polaari on siis sen polin ura elikkä, toisin sanoen, ura neljännelle harmonilliselle pisteelle annetun pisteen kautta vedetyillä säteillä; ja tämä ura on, niinkuin todistettiin, suora viiva.

Kullakin pisteellä (x_1, y_1) suoraa viivaa (6) on myöskin oma polaarinsa, jonka täytyy kulkea pisteen (x_0, y_0) kautta, koska tämä piste on yksi pisteen (x_1, y_1) poleista. Päinvastoin on kullakin suoralla, joka kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta, oma polinsa suoralla (6), koska tämän polin täytyy välttämättömästi myöskin olla harmonillisena polina pisteelle (x_0, y_0). Sanalla sanoen:

Pisteen kulkiessa jotakin suoraa pitkin, kääntyy sen polaari eräässä pisteessä, joka on poli sanotulle suoralle.

Suoran kääntyessä jossakin pisteessä, muodostaa sen poli suoran, joka on polaari sanotulle pisteelle.

105. Poli on toisinaan kauempana, toisinaan lähempänä polaaria, aina sitä myöten, missä asemassa se on koonillisen leikkauksen suhteen; saattaa se olla itse polaarillakin. Ehto sen yhtymiselle polaarin kanssa saadaan yhtälöstä (6), kun vaihtuvat koordinaatit x, y sijoitetaan polin koordinaateilla x_0, y_0; siten tulee

$$X_0 x_0 + Y_0 y_0 + P_0 = 0,$$

ja tämä, niinkuin (3) osoittaa, lausuu, että (x_0, y_0) on piste koonillisella leikkauksella. Kukin sellainen piste on siis omalla polaarillansa. Tässä tapauksessa on polaarillakin merkillinen ominaisuus. Olkoon nimittäin O joku piste koonillisella leikkauksella, P olkoon toinen piste O:n polaarilla; silloin ovat O ja P harmonillisia poleja ja suora OP leikkaa koonillista leikkausta kahdessa pisteessä, jotka ovat harmonillisia vastamainitun pisteparin (O, P) kanssa. Toinen näistä leikkauspisteistä yhtyy pisteesen O, toinen täytyy yhtyä myöskin siihen; se on: suora OP kohtaa koonillista leikkausta kahdessa yhtyneessä pisteessä ja on siis tangentti sille. Siten on siis seuraava teoreema todistettu:

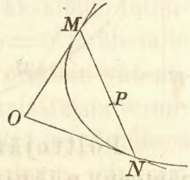
Polaari jollekin pisteelle koonillisella leikkauksella yhtyy saman pisteen kautta kulkevaan tangenttiin, ja päinvastoin on sivuamispiste tangentin poli.

Yhtälö (6) on siis yhtälönä tangentille pisteessä (x_0, y_0), jos tämä piste on koonillisella leikkauksella.

106. Viimeksi esitetystä teoreemasta johtuu muutamia seurauksia, joista tärkeimmät mainittakoon tässä.

Jos jostakin pisteestä O vedetään kaksi tangenttia koonilliselle leikkaukselle, niin sivuamispisteitä yhdistävä suora (tangenttijänne) on polaari annetulle pisteelle.

Kuva 57.



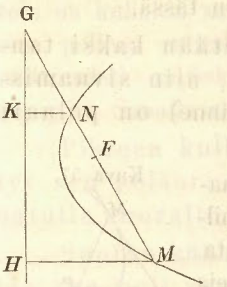
Koska tangentti OM on polaari sivuamispisteelle M, niin ovat O ja M harmonillisia poleja; sama on pisteiden O ja N laita. Pisteet M ja N ovat siis kumpikin poleja pisteelle O, jonka polaari siis yhtyy jänteesen MN.

Suorat, jotka yhdistävät jonkun jänteen MN päät sen poliin O, ovat tangentteja koonilliselle leikkaukselle. M-pisteen poli on O, sen polaari kulkee siis O-pisteen kautta; mutta tämä polaari yhtyy M-pisteen kautta kulkevaan tangenttiin, siis on OM tangentti koonilliselle leikkaukselle.

Jänteen kääntyessä jossakin pisteessä P, muodostaa piste O, jossa jänteen pääpisteitten kautta vedetyt tangentit yhtyvät, suoran, joka on polaari pisteelle P. Tämä seuraa suorastaan siitä, että tangenttien yhtymäpiste O on jänteen poli.

Pisteen polaarilla on siis eri ominaisuuksia pisteen eri asemain mukaan. Tässä saattaa olla kolme tapausta. Jos piste on koonillisen leikkauksen ulkopuolella (niin että siitä käy vetäminen kaksi tangenttia), niin on polaari tangenttijänteenä; pisteen ollessa itse koonillisella leikkauksella, on polaari saman pisteen kautta kulkevana tangenttina; jos piste on koonillisen leikkauksen sisäpuolella, on polaari urana sille pisteelle, jonka tangenttijänne kulkee annetun pisteen kautta.

107. Johtaja on polttopisteen polaari. — Vedetään polttopisteen F kautta suora, joka kohtaa koonillista leikkausta pisteissä M ja N ja johtajaa pisteessä G; vedetään vielä pisteistä M ja N kohtisuorat MH, NK johtajaan;



Kuva 58.

koonillisten leikkausten yleisen ominaisuuden mukaan on nyt $FM : MH = FN : NK$, josta

$$FM : FN = MH : NK = GM : GN.$$

Jänne MN on siis harmonillisesti leikattuna pisteissä F ja G, toisin sanoen G on harmonillinen poli pisteelle F. Koska nyt tämän polin ura yhtyy itse johtajaan, niin on väite täten todistettu.

Tästä teoreemasta johtuvat suorastansa seuraavat korollariot:

Polttojänteen (s. o. polttopisteen kautta kulkevan jänteen) pääpisteitten kautta vedetyt tangentit leikkaavat johtajaa samassa pisteessä.

Jos mistä pisteestä hyvänsä johtajalla vedetään kaksi tangenttia ja yhdistetään sivuamispisteet, niin kulkee yhdistyssuora polttopisteen kautta.

108. Keskiön polaari on äärettömän kaukana. — Koska keskiö jakaa kahtia kaikki sen kautta vedetyt jänteet, niin on tietysti neljäs harmonillinen piste kullakin sellaisella jänteellä äärettömän kaukana. Keskiötä sopisikin senvuoksi määrittää poliksi äärettömän kaukaiselle suoralle elikkä pisteeksi, jonka polaari on äärettömän kaukana.

Polaari $X_0 x + Y_0 y + P_0 = 0$ leikkaa koordinaati-akselit välimatkoissa $-\frac{P_0}{X_0}$, $-\frac{P_0}{Y_0}$ originista; jotta polaari olisi äärettömän kaukana, täytyy nimittäjäin X_0 ja Y_0 kadota. Koordinaatit x_0, y_0 polille, joka tässä tapauksessa on keskiö, toteuttavat siis yhtälöt $X = 0$, $Y = 0$, se on

$$Ax + Cy + D = 0,$$
$$Cx + By + E = 0,$$

joista saadaan

$$x = \frac{CE - BD}{AB - C^2}, \quad y = \frac{CD - AE}{AB - C^2}.$$

Nämä keskiön koordinaatien arvot ovat äärellisiä, jollei vaan yhteinen nimittäjä $AB - C^2$ ole nolla, jolloin keskiö olisi äärettömän kaukana, s. o. sitä ei toden perästä olisi olemassakaan. Tämän nojalla on koonilliset leikkaukset jaettu keskiöllisiin ja keskiöttömiin viivoihin. Edelliseen luokkaan, jonka tuntomerkkinä on ehto $AB - C^2 \gtrless 0$, kuuluvat ellipsit ja hyperbolat; jälkimmäiseen, jonka tuntomerkkinä on $AB - C^2 = 0$, luetaan parabolat.

Originin ollessa koonillisen leikkauksen keskiönä, toteutuvat yhtälöt $X = 0$, $Y = 0$ arvoilla $x = 0$, $y = 0$ ja niistä ei jää kuin $D = 0$, $E = 0$. Ehtona keskiön ja originin yhtenäoloon on siis se, että yhtälössä (1) ei ole yksiasteisia terminejä x:n ja y:n suhteen. Selväähän onkin, että jos yhtälössä ainoastaan on tasaisen luokan (0 eli 2) terminejä, niin vastaa käyrällä kutakin pistettä (x, y) toinenkin piste $(-x, -y)$ vastaisilla koordinaateilla ja että näiden pisteiden yhdistyssuora jakautuu kahtia originissa.

109. Jos poli (x_0, y_0) on äärettömän kaukana, niin ovat kaikki koonilliseen leikkaukseen sieltä tulleet säteet yhdensuuntaisia ja kullakin semmoisella säteellä on neljäs harmonillinen piste keskivälissä niitä pisteitä, joissa säde leikkaa koonillisen leikkauksen. Äärettömän kaukaisen pisteen polaari jakaa siis kahtia kaikki jänteet, jotka ovat suunnitetut sanottua pistettä kohti ja siis samansuuntaiset kuin pisteen ja esim. originin välinen yhdistyssuora.

Diametrin elikkä sen suoran, joka jakaa kahtia yhdensuuntaiset jänteet, saattaa senvuoksi määrittää polaariksi äärettömän kaukaiselle pisteelle, nimittäin sille, jossa yhdensuuntaisten jänteiden ajatellaan yhtyvän toisiinsa. Jos m on jänteiden kulmakoefficientti ja x_0, y_0 niiden äärettömän kaukaisen yhtymäpisteen koordinaatit, niin on m kulmakoefficienttinä myöskin sille suoralle, joka yhdistää pisteen (x_0, y_0) originiin; siis on $\frac{y_0}{x_0} = m$. Jo 103 §:ssä huomattiin, ett'ei yhtälö (6) muutu, jos x_0, y_0 ja x, y vaihdetaan keskenään; polaarin yhtälön saamme siis myöskin kirjoittaa näin:

$$Xx_0 + Yy_0 + P = 0.$$

Kun nyt jaamme suureella x_0 ja teemme $\frac{y_0}{x_0}=m$, $x_0=\infty$, niin saamme

(7) $$X+mY=0.$$

Siinä yhtälö niiden jänteiden diametrille, joiden kulmakoefficientti on m. Sen muoto osoittaa diametrin kulkevan keskiön kautta, koska siinä pisteessä on $X=0$, $Y=0$.

Yhtälö (7) täydellisessä muodossaan on

$$(Ax+Cy+D)+m(Cx+By+E)=0;$$

ratkaistuamme sen y:n suhteen, saamme diametrin kulmakoefficientille m' arvoksi

(8) $$m'=-\frac{A+Cm}{C+Bm},$$

josta

(9) $$Bmm'+C(m+m')+A=0.$$

Tämä symmetrillinen suhta suureiden m ja m' välillä osoittaa vastavuoroisuutta jänteiden ja diametrin suuntain välillä, niin että jos m' olisi jänteiden kulmakoefficientti, on m diametrin kulmakoefficientti.

Kaksi diametria, joiden kulmakoefficienteillä on suhde (9), ovat siis liittolaisia, s. o. kumpikin jakaa kahtia toisensa suuntaiset jänteet. Parabolassa ovat kaikki diametrit yhdensuuntaisia, sillä kaikki kulkevat äärettömän kaukaisen keskiön kautta; liitto-diametrit ovat siinä äärettömän kaukana. Suhdasta $AB-C^2=0$ seuraakin $\frac{A}{C}=\frac{C}{B}=\frac{A+Cm}{C+Bm}$. Olkoon siis jänteiden yhteinen suunta mikä hyvänsä, niin diametrin kulmakoefficientti, niinkuin (8) osoittaa, aina saa vakinaiseksi arvokseen $-\frac{A}{C}=-\frac{C}{B}$.

Tämän johdolla saattaa helposti tutkia, onko koordinaatisto samansuuntainen kuin joku liitto-diametristo. Kun nimittäin x-akselin kulmakoefficientti on $=0$ ja y-akselin $=\infty$, niin täytyy kaavasta (8), kun $m=0$, saada $m'=\infty$, mutta se on mahdollista ainoastaan, jos $C=0$. Jos siis koonillisen leikkauksen yhtälössä ei ole tuloa xy, niin tiedämme silloin koordinaatien olevan yhdensuuntaisia liitto-diametrin kanssa.

110. Liitto-diametrit, ollessaan kohtisuoria toisillensa, ovat akseleina. Tällöin on suorakulmaisessa koordinaatistossa diametrin kulmakoefficienttien välillä suhta $mm' = -1$. Kaavasta (8) saadaan silloin $m = -\frac{1}{m'} = \frac{C + Bm}{A + Cm}$, josta

$$m^2 + \frac{A - B}{C} m - 1 = 0.$$

Koska tässä yhtälössä kolmas termini on negativinen, niin antaa se aina kaksi todellista arvoa suurelle m, ja siten saadaan kumpaisenkin akselin suunta määrätyksi. Epämääräisiä olisivat m-suureen arvot ainoastaan silloin, kuin yht'aikaa olisi $C = 0$ ja $A = B$; tässä tapauksessa on käyränä pyöriö. Kaikkein koonillisten leikkausten joukossa on siis pyöriöllä yksinänsä äärettömän monta akseli-systemaa eli akselistoa.

111. Polaari pisteelle (x_0, y_0) on samansuuntainen kuin ne jänteet, jotka saman pisteen kautta vedetty diametri jakaa kahtia. — Diametrin yhtälö on nimittäin yleensä $X + mY = 0$, jossa m on jänteiden kulmakoefficientti; ja koska piste (x_0, y_0) on diametrilla, niin on myöskin $X_0 + mY_0 = 0$, josta $m = -\frac{X_0}{Y_0}$. Mutta $-\frac{X_0}{Y_0}$ on myös kulmakoefficientti polaarin yhtälössä $X_0 x + Y_0 y + P_0 = 0$; polaari on siis samansuuntainen kuin jänteet.

Koska tangenttia saattaa pitää polaarina sivuamispisteelle, niin seuraa siitä, että diametrin pääpisteen kautta vedetty tangentti on liittolaisen suuntainen.

Välittömästi seuraa samasta teoreemasta myöskin, että jänteen pääpisteitten kautta vedetyt tangentit leikkaavat toisensa saman jänteen diametrilla.

112. Asymptooti, ollen tangentti äärettömän kaukaisessa pisteessä, sallii myöskin määrätä asemansa edellisen analysin kautta. Ollen polaarina äärettömän kaukaiselle

pisteelle, täytyy nimittäin asymptootin yhtyä niiden jänteiden diametriin, jotka ovat suunnitetut tätä pistettä kohti, mutta toiselta puolen on asymptooti itsekin suunnitettu samaa pistettä kohti: siis: asymptooti on diametri, joka on yhtynyt omaan liittolaiseensa. Sen suunta määrätään siten, että yhtälössä (9) tehdään $m = m'$. Silloin saadaan

$$(10) \qquad Bm^2 + 2Cm + A = 0,$$

josta asymptootin kulmakoefficientille johdetaan kaksoisarvo

$$m = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - AB}}{B}.$$

Käyrällä on kaksi asymptootia, jos $C^2 - AB$ on positivinen, mutta ei yhtään, jos se on negativinen. Kaksiasteiset keskiölliset viivat jakauvat täten kahteen lahkoon, nimittäin asymptootittomat (ellipsit), joilla $AB - C^2 > 0$, ja asymptootilliset (hyperbolat), joilla $AB - C^2 < 0$.

Jos olisi $AB - C^2 = 0$, niin saisi m arvoksensa $-\frac{C}{B}$, s. o. m olisi yhtäsuuri kuin kaikkien diametrien vakinainen kulmakoefficientti. Parabolan tangentti äärettömän kaukaisessa pisteessä on siis akselin suuntainen; mutta se kun on äärettömän kaukana, niin ei parabolalla todenperästä olekaan asymptootia.

Originin kautta asymptootin suuntaiseksi vedetyllä suoralla on yhtälönä $y = mx$ eli $\frac{y}{x} = m$. Sijoitettuamme tämän yhtälöön (10) saamme

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy = 0.$$

Siis, jos koonillisen leikkauksen yhtälöstä heitetään pois kaikki muut terminit, paitsi kaksiasteiset, merkitsee se suoria, jotka originin kautta vedetään asymptootien suuntaisiksi. Samaan päätökseen tullaan, kun haetaan niitä originin kautta vedettyjä suoria, jotka kohtaavat koonillista leikkausta äärettömän kaukana.

113. Liitämme tähän vielä muutamia yksityisiä seikkoja polaarin yhtälössä $X_0 x + Y_0 y + P_0 = 0$. Kun $X_0 = 0$, saa y vakinaisen arvon ja polaari tulee x-akselin suuntai-

seksi. Suora $X = 0$ on siis ura sille pisteelle, jonka polaari on x-akselin suuntainen; se on samalla diametri, koska se kulkee keskiön ($X = 0$, $Y = 0$) kautta. Siitä seuraa, että yhtälö $X = 0$ eli

$$Ax + Cy + D = 0$$

merkitsee sitä diametria, joka jakaa kahtia x-akselin suuntaiset jänteet. Samoin $Y = 0$ eli

$$Cx + By + E = 0$$

on yhtälönä sille diametrille, joka jakaa kahtia y-akselin suuntaiset jänteet.

Kun $P_0 = 0$, kulkee polaari originin kautta; suora $P = 0$ on siis ura sille pisteelle, jonka polaari kulkee originin kautta elikkä, toisin sanoen, yhtälö $P = 0$, s. o.

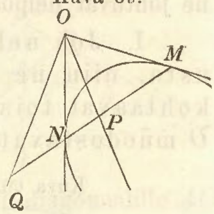
$$Dx + Ey + F = 0$$

edustaa originin polaaria.

114. *Harmonillisiksi polaareiksi* koonilliselle leikkaukselle sanotaan kahta suoraa OP, OQ, jotka tekevät harmonillisen kimpun näiden leikkauspisteestä vedetyn tangenttiparin (OM, ON) kanssa. Ne leikkaavat tangenttijänteen MN kahdessa harmonillisessa pisteessä P, Q.

Kolmesta pisteestä O, P, Q on kukin polina sille suoralle, joka yhdistää muut kaksi pistettä. Sillä O on poli tangenttijänteelle MN; P ja O ovat siis harmonillisia poleja; mutta P ja Q ovat myöskin harmonillisia poleja, siis on P poli suoralle OQ. Samoin todistetaan, että Q on poli suoralle OP. Täten on myöskin seuraavat väitteet todistettu:

Kuva 59.



Kaikki annetun suoran harmonilliset polaarit kulkevat sen polin kautta.

Kahden harmonillisen polaarin polit ovat harmonillisia poleja, ja kahden harmonillisen polin polaarit harmonillisia polaareja.

Kolme pistettä, jotka kaksittain ovat harmonillisia, muodostavat *harmonillisen poliston.* Sellaisia polistoja on äärettömän monta, ja niiden ominaisuus on, että suora, joka yhdistää kaksi näistä pisteistä, on polaari kolmannelle. Jos yksi pisteistä on keskiö, niin ovat toiset kaksi äärettömän kaukana, ja niiden suuntaviivat ensimäisestä määräävät silloin kaksi liitto-diametria.

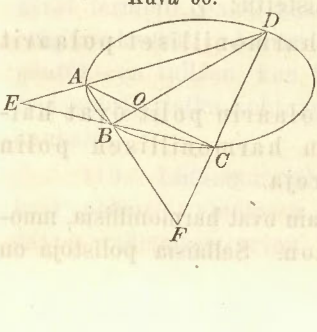
Jos OP olisi diametri, niin jakautuisi jänne MN kahtia pisteessä P. Neljäs harmonillinen piste Q olisi silloin äärettömän kaukana, s. o. OQ olisi samansuuntainen kuin jänne MN ja siis samansuuntainen kuin liittolainen diametrille OP. Täten on todistettu, että kaikki diametrin harmonilliset polaarit ovat liitto-diametrin suuntaisia.

Hyperbolan asymptooteja saattaa pitää keskiöstä vedettyinä tangentteina; ne muodostavat siis harmonillisen kimpun minkä liitto-diametri-parin kanssa hyvänsä. Tästä taas seuraa, että ne asymptooti-jänteet, jotka diametri jakaa kahtia, ovat liitto-diametrin suuntaiset elikkä, toisin sanoen, sama diametri jakaa kahtia yhdensuuntaiset asymptooti- ja hyperbolajänteet. Tämän väitteen välittömiä seurauksia ovat 69 §:n teoreemat III ja IV.

115. Lopuksi esitämme tässä kaksi teoreemaa koonillista leikkausta sisustavista ja verhoavista nelisivukkaista; ne johtuvat helposti poli- ja polaari-opista.

I. Jos nelikulmio sisustaa koonillista leikkausta, niin ne pisteet E, F, joissa vastaiset sivut kohtaavat toisensa, ja diagonaalien leikkauspiste O muodostavat harmonillisen pisteistön.

Kuva 60.



Täydellisessä nelikulmiossa nimittäin muodostavat suorat, ED, EC, EO, EF harmonillisen kimpun (102 §); suora EO leikkaa siis sivut AB ja CD pisteissä, jotka ovat harmonillisia pisteelle F; EO on siis polaari pisteelle F. Samoin todistetaan että FO on polaari pisteelle E.

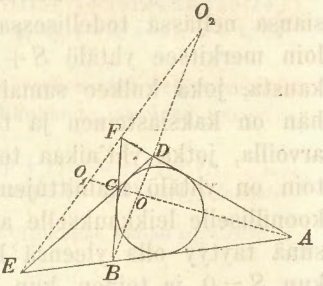
Koska nyt O siis on poli sekä pisteelle E että pisteelle F, niin seuraa niitä, että EF on polaari pisteelle O. Kolme pistettä E, F, O muodostavat siis harmonillisen pisteistön.

Täten saadaan keino tangentin vetämiseen koonilliselle leikkaukselle ulkopisteestä E pelkän viivaimen avulla. Pisteestä E vedetään kaksi suoraa EC, ED mielin määrin; senjälkeen tehdään nelikulmio $ABCD$ täydelliseksi ja yhdistetään O ja F suoralla. Viimeksi mainittu suora on polaari pisteelle E ja sen ja koonillisen leikkauksen leikkauspisteet määräävät kumpaisetkin sivuamispisteet.

Kun nelikulmiona on suunnikas, leikkaavat diagonaalit toisiansa keskiössä, ja vastaiset sivut yhtyvät keskenänsä äärettömän kaukana. Suunnikkaan viereiset sivut määräävät silloin kahden liitto-diametrin suunnan. Tässä siis entinen teoreemamme supplementillisistä jänteistä.

II. Koonillista leikkausta verhoavassa nelikulmiossa on kukin diagonaali polaarina toisten kahden leikkauspisteelle.

Kuva 61.



Koska nimittäin EO ja EF ovat harmonillisia polaareja, niin EF:n poli on suoralla EO; sitä paitsi täytyy sen myöskin olla suoraalla FO, koska FO ja FE ovat harmonillisia polaareja; siis O on poli diagonaalille EF. Koska sitten sekä BO_1 että DO_1 ovat harmonillisia polaareja diagonaalille BD, niin O_1 on poli sille. Samalla muotoa todistetaan, että O_2 on poli diagonaalille AC. Kolme pistettä O, O_1, O_2, joissa verhoavan nelikulmion diagonaalit leikkaavat toisensa, tekevät niin muodoin harmonillisen pisteistön.

Jos nelikulmiona olisi suunnikas, niin olisi O keskiönä ja pisteet O_1, O_2 äärettömän kaukaisia pisteitä diagonaalien suunnissa. Koonillista leikkausta verhoavan suunnikkaan diagonaalit muodostavat siis parin liitto-diametreja.

Kaksiasteiset yhtälöt lyhennetyssä muodossa.

116. **Kahden koonillisen leikkauksen leikkauspisteet.** — Kahden viivan leikkauspisteet löydetään yleensä siten, että haetaan suureille x ja y sellaiset arvot, jotka toteuttavat kumpaisenkin viivan yhtälön. Kun viivoina on koonillisia leikkauksia, niin ratkaistaviksi tulee kaksi kaksiasteista yhtälöä kahdella tuntemattomalla. Sittenkuin toinen tuntematon, esim. y, on poistettu, saadaan neli-asteinen loppuyhtälö, jossa on ainoastaan toinen tuntematon x ja joka sille antaa neljä arvoa. Kukin x-suureen arvo antaa sitten vastaavan arvon suureelle y. Niin muodoin saadaan neljä ratkaisua elikkä arvo-systeemaa suureille x ja y ja päätetään siitä, että kaksi koonillista leikkausta leikkaavat toisiansa yleensä neljässä pisteessä, joista yksityisissä tapauksissa kumminkin kaksi tai useampi saattavat olla yhdessä ja jotka asiain haarain mukaan saattavat myöskin olla kaksittain aatteisia.

Olkoot $S = 0$, $S_1 = 0$ yhtälöitä kahdelle koonilliselle leikkaukselle, jotka, niinkuin äskön sanottiin, leikkaavat toisiansa neljässä todellisessa tahi aatteisessa pisteessä. Silloin merkitsee yhtälö $S + kS_1 = 0$ kolmatta koonillista leikkausta, joka kulkee samain neljän pisteen kautta; sillä sehän on kaksiasteinen ja toteutuu niillä x- ja y suureiden arvoilla, jotka yht'aikaa tekevät $S = 0$ ja $S_1 = 0$. Päinvastoin on yhtälö mainittujen neljän pisteen kautta kulkevalle koonilliselle leikkaukselle aina muodoltaan $S + kS_1 = 0$; sillä siinä täytyy olla yleensä kaksi osaa, joista toinen katoaa, kun $S = 0$, ja toinen, kun $S_1 = 0$, siis kaksi terminiä, joista toisella on tekijänä S ja toisella S_1. Näillä tekijöillä taas ei saata olla kuin vakinaisia koefficienttejä, sillä muutoin olisi yhtälön asteluku isompi kuin kaksi.

117. Jos $a = 0$, $b = 0$ ovat yhtälöitä kahdelle suoralle, niin $ab = 0$ on kaksiasteinen yhtälö, joka yht'aikaa edustaa kumpaakin suoraa. Yhtälö

$$S + kab = 0$$

merkitsee silloin koonillista leikkausta, joka kulkee niiden neljän pisteen kautta, missä mainitut suorat leikkaavat koonillista leikkausta $S=0$; sillä se toteutuu nähtävästi niillä x:n ja y:n arvoilla, jotka yht'aikaa tekevät joko $S=0$ ja $a=0$ tahi $S=0$ ja $b=0$. $S+kab$ on niin muodoin yhtälö koonilliselle leikkaukselle, jolla annetun leikkauksen ($S=0$) kanssa on yhteisinä jänteinä $a=0$, $b=0$. Samoin huomataan, että

$$ac+kbd=0$$

merkitsee koonillista leikkausta, joka kulkee niiden neljän pisteen kautta, missä toisiansa leikkaavat suorat $a=0$, $b=0$; $b=0$, $c=0$; $c=0$, $d=0$; $d=0$, $a=0$, ja joka niin muodoin verhoaa nelikulmiota $abcd$.

Tämän nojalla on helppo löytää yhtälö koonilliselle leikkaukselle, joka kulkee viiden annetun pisteen kautta. Ensin muodostetaan yhtälöt $a=0$, $b=0$, $c=0$, $d=0$ sivuille siinä nelikulmiossa, joka tehdään neljän pisteen yhdistyksellä; haettu yhtälö tulee sitten muotoon $ac+kbd=0$. Koefficientille k saadaan sitten arvo, kun viidennen pisteen koordinaatit sijoitetaan äskön löydettyyn yhtälöön.

Esim. Haettakoon yhtälö koonilliselle leikkaukselle, joka kulkee pisteitten (1, 2), (3, 5), (—1, 4), (—3, —1), (— 4, 3) kautta.

Ajatellen koonillista leikkausta ensin verhoavaksi neljän ensimmäisen pisteen yhdistyksellä syntynyttä nelikulmiota, saadaan sen yhtälöksi

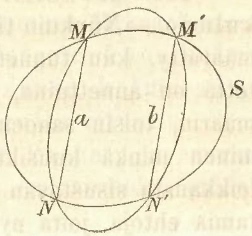
$$(3x-2y+1)(5x-2y+13)=k(x-4y+17)(3x-4y+5);$$

ja koska nyt viidennenkin pisteen koordinaatien (— 4, 3) täytyy toteuttaa tämä yhtälö, niin tulee $k=-\frac{221}{19}$; sijoitettuamme tämän edelliseen, saamme vihdoin haetuksi yhtälöksi

$$79x^2-320xy+301y^2+1101x-1665y+1586=0.$$

118. Edellä sanottiin, että $S+kab=0$ on yhtälö koonilliselle leikkaukselle, joka kulkee neljän pisteen M, N, M', N' kautta, joissa suorat a, b, leikkaavat koonillista leikkausta S, ja selvää on, että mitä lähemmälle toisiansa jänteet a ja b tulevat, sitä enemmin lähenevät toisiansa pisteet

Kuva 62.



M' ja M sekä N' ja N. Yhtyköötpä suorat a, b toisiinsa; silloin yhtyvät myös M' ja M sekä N' ja N; koonilliset leikkaukset sivuavat toisiansa pisteissä M ja N. Tästä päätämme, että yhtälö

$$S + ka^2 = 0$$

merkitsee koonillista leikkausta, joka sivuaa koonillista leikkausta S yhteisen jänteen ($a = 0$) päissä.

Sen mukaan on

$$ab + kc^2 = 0$$

yhtälö koonilliselle leikkaukselle, joka c-jänteen päissä sivuaa suoria a ja b. Koska nyt a-funktionin arvo jossakin pisteessä (x, y) määrää, kuinka pitkä se kohtisuora on, joka sanotusta pisteestä vedetään suoraan $a = 0$, niin lausuu viimeksi saatu yhtälö seuraavan teoreeman:

Suorakulmio, jonka tekevät välimatkat mistä pisteestä hyvänsä koonillisella leikkauksella kahteen vakinaiseen tangenttiin, ja neliö saman pisteen välimatkalla tangenttijänteesen ovat toisiinsa vakinaisessa suhteessa.

Samalla muotoa johdetaan yhtälöstä $ac + kbd = 0$ seuraava teoreema:

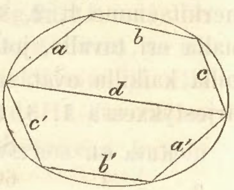
Jos mistä pisteestä hyvänsä koonillisella leikkauksella vedetään kohtisuoria sisustavan nelikulmion sivuihin, niin suorakulmio kahteen vastaiseen sivuun vedetyillä kohtisuorilla ja suorakulmio kahteen toiseen sivuun vedetyillä kohtisuorilla ovat toisiinsa vakinaisessa suhteessa.

119. Koonillista leikkausta sisustava kuusikulmio. — Niinkuin tiedämme, on koonillinen leikkaus yleensä määrätty, kun tunnetaan viisi pistettä siitä. Kun viisi pistettä on annettuina, ei enää kuudetta käy ottaminen mielin määrin, toisin sanoen: koonillista leikkausta ei käy sovittaminen minkä kuusikulmion ympärille hyvänsä. Koonillista leikkausta sisustavan kuusikulmion pitää siis täyttämän muutamia ehtoja, joita nyt lähdemme tutkimaan.

Sisustavan kuusikulmion sivut merkitsemme a, b, c, a', b', c' ja niiden yhtälöt $a=0$, $b=0$, $c=0$, $a'=0$, $b'=0$, $c'=0$. Olkoon vielä $d=0$ yhtälönä diagonaalille d, joka yhdistää vastaiset kulmat (ac') ja $(a'c)$. Koska koonillinen leikkaus verhoaa sekä nelikulmiota $abcd$ että nelikulmiota $a'b'c'd$, niin on sen yhtälöllä jompikumpi muodoista

$$ac+\lambda bd=0,\quad a'c'+\lambda' b'd=0,$$

Kuva 63.



jotka, merkiten samaa geometrillistä uraa, ovat identtisiä, lukematta vakinaista tekijää. Otaksutaan, että tämä tekijä jo sisältyy esim. suureissa a' ja b'; niin muodoin on meillä identtisyys

$$ac+\lambda bd=a'c'+\lambda' b'd,$$

josta

$$ac-a'c'=d(\lambda' b'-\lambda b).$$

Tästä näkyy, että kaksiasteinen yhtälö

$$ac-a'c'=0$$

hajoaa kahdeksi yksiasteiseksi yhtälöksi, nimittäin

$$d=0,\quad \lambda' b'-\lambda b=0,$$

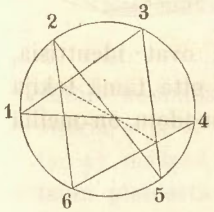
ja siis edustaa kahta suoraa, joista toinen on diagonaali d, toinen eräs suora, vedetty sen pisteen (bb') kautta, jossa vastaiset sivut b ja b' yhtyvät. Näissä suorissa, koska ne tekevät uran yhtälölle $ac-a'c'=0$, täytyy olla ei ainoastaan pisteiden (ac') ja $(a'c)$, vaan myöskin pisteiden (aa') ja (cc'). Kaksi edellistä pistettä ovat diagonaalilla d; kaksi jälkimmäistä nähtävästi eivät ole tällä diagonaalilla, niiden täytyy siis olla yllämainitulla pisteen (bb') kautta kulkevalla suoralla, toisin sanoen, kolme pistettä (aa'), (bb'), (cc') ovat samalla suoralla. Täten saadaan seuraava tärkeä teoreema:

Koonillista leikkausta sisustavan kuusikulmion vastaiset sivut leikkaavat toisensa kolmessa pisteessä, jotka ovat yhdellä suoralla viivalla.

Tämän teoreeman on keksinyt *Pascal*, ja senvuoksi kuusikulmio, jolla on edellämainitut ominaisuudet, onkin nimeltään *Pascal'in kuusikulmio.*

Pascalin väite pitää paikkansa, olkoot sisustavat kuusikulmiot minlaatuisia hyvänsä, vaikka tähtimäisiäkin. Olkoon koonillisella leikkauksella annettuina kuusi pistettä, jotka merkitsemme 1, 2, 3, 4, 5, 6. Nämä saattaa yhdistää useammalla eri tavalla, joten syntyy koko joukko kuusikulmioita, joilla kaikilla ovat samat kulmapisteet. Ne sopii ottaa esim. järjestyksessä 1, 3, 5, 6, 4, 2, 1 tahi 5, 1, 6, 2, 4, 3 j. n. e.

Kuva 64.



Siten syntyy, niinkuin on helppo huomata, 60 erillaista kuusikulmiota; ja koska jokaisella niistä on se ominaisuus, että vastaisten sivujen yhtymäpisteet ovat yhdellä suoralla, niin on Pascalin suorainkin luku 60.

Otettuamme pisteet esim. järjestyksessä 1, 3, 5, 2, 6, 4, 1, huomaamme, että ne pisteet, joissa toisiansa leikkaavat suorat 13, 26; 35, 64; 52, 41 ovat yhdellä suoralla.

120. Koonillista leikkausta verhoavalla kuusikulmiolla on myöskin omituisia ominaisuuksia, jotka poli- ja polaariopin johdolla helposti saa johdetuiksi Pascalin teoreemasta. Yhdistämällä sivuamispisteet, saadaan sisustava kuusikulmio, jonka sivut ovat polaareja verhoavan kuvion kulmille ja jonka kulmat ovat poleja verhoavan kuvion sivuille. Tästä seuraa, että ne pisteet, joissa sisustavan kuvion vastaiset sivut leikkaavat toisiansa, ovat poleja niille diagonaaleille, jotka yhdistävät vastaisia kulmia verhoavassa kuviossa. Koska nyt ensinmainitut pisteet ovat yhdellä suoralla, niin täytyy niiden polaarien, nim. diagonaalien, leikata toisiansa yhdessä pisteessä, joka on poli sanotulle suoralle. Täten saadaan n. s. Brianchon'in teoreema:

Kolme diagonaalia, jotka yhdistävät vastaiset kulmat koonillista leikkausta verhoavassa kuusikulmiossa, kulkevat saman pisteen kautta.

Eri kuvioiden luku on tässä yhtäsuuri kuin Pascalinkin teoreemassa.

121. Jos sisustavassa kuusikulmiossa kaksi kulma-

kärkeä tulevat äärettömän lähelle toisiansa, niin muuttuu niitä yhdistävä sivu tangentiksi; siitä seuraava teoreema:

Jos koonillista leikkausta sisustavan viisikulmion jostakin kulmasta vedetään tangentti, niin se piste, jossa tangentti kohtaa vastaisen sivun, ja ne pisteet, joissa toinen ja neljäs sekä kolmas ja viides sivu leikkaavat toisensa, ovat yhdellä suoralla.

Tästä taas, verraten sisustavan ja verhoavan kuvion polaari-ominaisuuksia, seuraa:

Jos koonillista leikkausta verhoavassa viisikulmiossa yhdistetään joku kulma vastaisen sivuamispisteen kanssa ja muista kulmista toinen ja neljäs sekä kolmas ja viides, niin kulkevat yhdistyssuorat saman pisteen kautta.

Tämä väite johtuu myös Brianchonin teoreemasta, jos verhoavan kuusikulmion kaksi sivuamispistettä päästetään yhtymään.

122. Jos sisustavassa kuusikulmiossa kaksi sivua käyvät äärettömän pieniksi ja muuttuvat tangenteiksi, saadaan Pascalin teoreemasta seuraava väite:

Jos nelikulmio sisustaa ja toinen nelikulmio verhoaa koonillista leikkausta, niin että sisustavan kulmat ja verhoavan sivuamispisteet ovat yhdessä, niin ne neljä pistettä, joissa kumpaisenkin kuvion vastaiset sivut leikkaavat toisensa, ovat yhdellä suoralla.

Verraten sisustavan ja verhoavan kuvion molemmanpuolisia polaari-ominaisuuksia, päätetään tästä taas, että mainittujen kahden nelikulmion neljä diagonaalia kulkevat saman pisteen kautta.

123. Jos verhoavassa kuusikulmiossa vihdoin päästetään sivuamispisteet kaksitellen yhtymään, niin että kuusikulmiosta tulee kolmikulmio eli kolmio, saadaan Brianchonin teoreemasta seuraava väite:

Jos koonillista leikkausta verhoavassa kolmiossa yhdistetään kukin kulma vastaisen sivun sivuamispisteen kanssa, niin nämä kolme yhdistyssuoraa leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

Vastaava ominaisuus sisustavassa kolmiossa seuraa suorastaan Pascalin teoreemasta, kun sisustavassa kuusikulmiossa annetaan joka toisen sivun käydä äärettömän pieneksi ja muuttua tangentiksi.

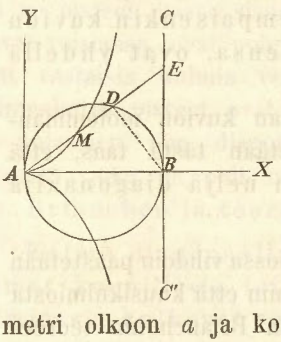
Kymmenes Luku.

Muutamia korkeampi-asteisia viivoja.

124. Tähän saakka olemme tutkineet sellaisia viivoja, joiden yhtälöt ovat olleet algebrallisia, yksi- tai kaksiasteisia. Tässä luvussa esitämme muutamia viivoja, joiden yhtälöt ovat joko algebrallisia korkeampi-asteisia tahi transcendenttisiä. Useimmat niistä ovat tavalla tai toisella kuuluisia geometrian historiassa. Näiden viivain ominaisuuksien lähempi tutkiminen, niinkuin esim. tangentin suunnan määrääminen missä pisteessä hyvänsä y. m., kävisi liian vaikeaksi differentiaalilaskua käyttämättä; meidän täytyy senvuoksi tyytyä tutkimaan niiden yleistä muotoa ja hakemaan niiden yhtälöt.

125. Kissoïdi. — Annettuina on pyöriö, diametri AB ja tangentti BC diametrin päässä. Jos nyt eräällä suoralla AE, joka kääntyy A-pisteessä, mitataan A:sta lähtien pala AM yhtäpitkäksi kuin se osa DE samaa suoraa, joka on pyöriön ja kiinteän tangentin välillä, niin on ura siten määrätylle pisteelle M kissoïdiniminen käyrä.

Kuva 65.



Haetaan ensin kissoïdin yhtälö polaarisissa koordinaateissa. A olkoon poli ja AB akseli; pyöriön diametri olkoon a ja koordinaatit mille käyrän pisteelle M

*) Nimensä saanut kreikkalaisesta sanasta κισσός = muratti, se kun on muratinlehden näköinen. Kissoïdin keksi Kreikkalainen Diocles, hakiessaan kahta keskisuhdelukua kahdelle annetulle suoralle.

hyvänsä r, v. Suorakulmaisista kolmioista ABE, ABD saadaan silloin

$$AE = \frac{a}{\cos v}, \quad AD = a \cos v,$$

josta

$$r = DE = \frac{a}{\cos v} - a \cos v = \frac{a \sin^2 v}{\cos v}.$$

Kissoïdin yhtälö polaarisissa koordinaateissa on siis

$$r = a \sin v \operatorname{tang} v.$$

Kun polaarisesta koordinaatistosta tahdotaan siirtyä suorakulmaiseen, otetaan suora AB x-akseliksi ja sille kohtisuora AY y-akseliksi sekä tehdään seuraavat sijoitukset

$$\operatorname{tang} v = \frac{y}{x}, \quad \sin v = \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

siten saadaan kissoïdille kolmi-asteinen yhtälö

$$x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0.$$

Koska siinä y ilmautuu ainoastaan neliönä, niin antaa kukin x:n arvo y:lle kaksi yhtäsuurta, vastaismerkkistä arvoa; puheenaolevassa käyrässä on siis kaksi haaraa, symmetrillistä AB:n suhteen, se on: AB on kissoïdin akseli. Tarkemmin tutkiaksemme käyrän kulkua, ratkaistakoon yhtälö y:n suhteen, jolloin saamme

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{a - x}}.$$

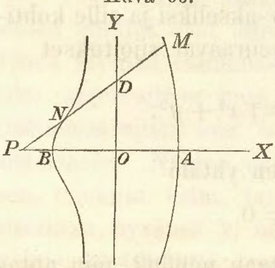
Ordinaata pysyy todellisena ainoastaan niissä abscissan arvoissa, joiden rajoina on 0 ja a; kissoïdin rajoitteina pitkin koko sen ulottuvaisuutta ovat siis y-akseli ja sen suuntainen, diametrin päästä B vedetty suora CC'. Kun x kasvaa rajoissa 0, a, niin kasvaa y rajoissa 0, ∞ ; kissoïdi lähtee pisteestä A, joka on sen kärkenä, ja ulottuu äärettömän kauas sekä ylös- että alaspäin. Samalla aikaa pienenee kissoïdin ja CC'-suoran väli $a - x$ alinomaa ja lähenee nollaa; CC' on siis asymptooti.

Akseli AB on tangenttina kissoïdin kumpaisellekin haaralle pisteessä A; sillä jos sekantti AM kääntyy pisteessä A, kunnes jänne AM katoaa, niin lähenee se raja-asemaansa AB.

126. Konkoïdi*) — Annettuina on piste P ja suora OY; jos pisteessä P kääntyvällä sekantilla PD tehdään osat $DM = DN = a$, niin siten määrätyille pisteille M ja N on urana konkoïdi. Tästä määrityksestä seuraa, että konkoïdissa on kaksi osaa, yksi kummallakin puolen suoraa OY.

Saadaksemme käyrän yhtälöä polaarisissa koordinaateissa, otetaan P poliksi ja PX, joka on kohtisuorassa OY:lle, polaari akseliksi. Olkoon $PO = b$; koordinaatat pisteelle M tai N olkoot r, v. Konkoïdin määrityksen mukaan on silloin $r = PD \pm a$, se on

Kuva 66.



$$r = \frac{b}{\cos v} \pm a.$$

Käyrän yhtälö suorakulmaisissa koordinaateissa, kun OX ja OY otetaan koordinaati-akseleiksi, saadaan tästä, kun pannaan

$$\cos v = \frac{b + x}{r}, \quad r^2 = (b + x)^2 + y^2.$$

Siten saadaan neliasteinen yhtälö

$$x^2y^2 - (b + x)^2(a^2 - x^2) = 0.$$

Koska y tässä on ainoastaan toisessa arvokerrassa, niin on käyrä symmetrillinen x-akselin suhteen. Sen yhtälö ratkaistuna y:n suhteen on

$$y = \pm \frac{b + x}{x} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ordinaata pysyy todellisena ainoastaan niissä abscissan arvoissa, joiden rajoina ovat $-a$ ja $+a$; kun siis otetaan $OA = OB = a$ ja pisteistä A ja B vedetään OY:n suuutaiset

*) Kreikkalaisesta sanasta κόγχη = karinkaukalo. Tämän käyrän keksi Nicomedes, koettaessaan ratkaista mainioita probleemoja kulman kolmiajaosta ja kuution kaksinkertomisesta.

suorat, niin jää konkoïdi kokonansa näiden suorain väliin. Kun x numeroarvossansa vähenee rajoissa a ja 0, kasvaa y rajoissa 0 ja ∞, josta seuraa, että OY on asymptooti konkoïdin kummallekin haaralle.

Radius vector PM on suurempi kuin PA, sillä $PD > PO$ ja $DM = OA = a$; kaarella AM ovat siis rajoitteina pyöriö, joka piirretään pisteestä P säteellä OA, ja sen tangentti pisteessä A; konkoïdin tangentti pisteessä A on siis kohtisuora OX-akselille.

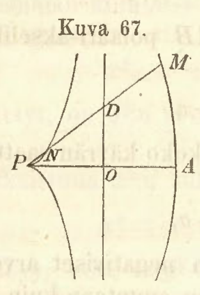
Sitä myöten kuin b on suurempi yhtäsuuri tai pienempi kuin a, saa konkoïdi eri muotoja; nämä tapaukset ovat senvuoksi erikseen tutkittavat.

1:o $b > a$. Käyrä on senmuotoinen, kuin edellinen kuva osoittaa. Mutta paitsi osia AM ja BN kuuluu siihen vielä yksinäinen piste P, koska senkin koordinaatit $x = -b$, $y = 0$ toteuttavat konkoïdin yhtälön.

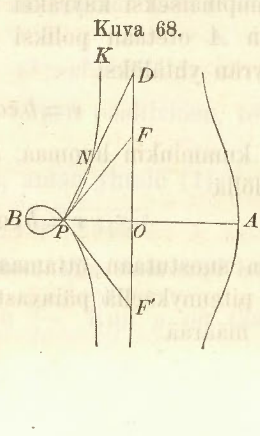
2:o $b = a$. P on konkoïdin toisen haaran kärkenä (kuva 67) ja tangentti samassa pisteessä yhtyy akseliin PA. Sillä kun sekantti PD kääntyy pisteessä P, kunnes jänne PN katoaa, niin lähenee se raja-asemaansa PO.

3:o $b < a$. Tässä tapauksessa on piste B vasemmalla puolen pistettä P (kuva 68). Olkoon $PF = a$; sekantin lähtiessä kääntymään asemastansa PF vasemmalle, kohoaa piste N, joka alkujaan oli yhdestä pisteen P kanssa, ja piirtää äärettömän haarukkeen PK; sekantin kääntyessä asemasta

Kuva 67.



Kuva 68.

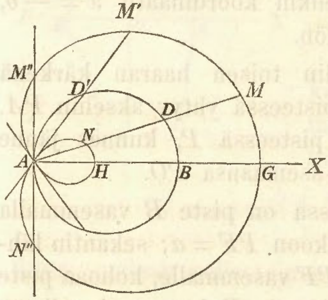


PF oikealle, siirräkse N toiselle puolelle pistettä P ja muodostaa akselin alapuolelle kaaren PB. P on siis kaksoispiste, jossa kaksi käyrän haaraa leikkaavat toisensa. Tangentit tässä pisteessä yhtyvät symmetrillisiin suoriin PF ja PF'.

127. Pascalin kotelo. — Annettuina on pyöriö, ja sen kehällä piste A, jossa kääntyy suora AD. Sanotulla suoralla määrätään pisteestä D kummallekin puolen kaksi yhtäsuurta osaa $DM = DN = a$; silloin on urana pisteille M ja N käyrä, jota sanotaan Pascalin koteloksi.

Olkoon a pienempi kuin pyöriön diametri b; AD' olkoon $= a$. Sekantin kääntyessä asemasta AB asemaan AD', muodostavat pisteet M ja N kaaret GM' ja HNA; jälkimmäistä näistä sivuaa AD', joka on sekantin raja-asema samassa kuin AN katoaa. Sekantin liikkuessa edelleen, siirtyy piste N diametrin AB alle. Sekantin käännyttyä suoran kulman, on $AD = 0$ ja $AM'' = AN'' = a$. Piste M on silloin muodostanut kaaren GM'' ja piste N kaaren HAN''. Sekantin käännyttyä suoran kulman toisaanne päin AB:stä, on syntynyt jälleen kaksi kaarta, jotka ovat symmetrillisiä edellisten kanssa AB-akselin suhteen ja yhdistyvät niiden kanssa umpinaiseksi käyräksi.

Kuva 67.



Kun A otetaan poliksi ja AB polaari-akseliksi, saadaan käyrän yhtälöksi

$$r = b \cos v \pm a.$$

Helposti kumminkin huomaa, että koko käyrän saattaa edustaa yhtälöllä

$$r = b \cos v + a,$$

kun vaan suostutaan ottamaan r:n negativiset arvot radius vectorin pitennyksellä päinvastaiseen suuntaan kuin se, jonka kulma v määrää.

Tästä johdetaan sen yhtälö suorakulmaisissa koordinaateissa

$$(x^2+y^2-bx)^2=a^2(x^2+y^2);$$

jolloin A on origina ja AB x-akselina.

128. Haettakoon ura semmoiselle pisteelle, että suorakulmio sen välimatkoilla kahdesta kiinteästä pisteestä F, F' (kuva 70) on vakinaisesti $=a^2$. Otetaan originiksi suoran FF' keskus O, x-akseliksi OF ja y-akseliksi sille kohtisuora OY ja merkitään välimatka $FF'=2c$. Haetun käyrän yhtälöksi tulee siten

$$(1) \qquad y^4+2(x^2+c^2)y^2+(x^2-c^2)^2-a^4=0.$$

Tässä kun x ja y ilmautuvat ainoastaan tasaisissa asteissa, niin on käyrä symmetrillinen kumpaisenkin akselin suhteen ja sillä on keskiö, joka on originissa. Ratkaistuna y^2:n suhteen, antaa edellinen yhtälö

$$y^2=-x^2-c^2\pm\sqrt{4c^2x^2+a^4}.$$

Kumpikin y^2-suureen arvo on todellinen; niiden summa on $-2(x^2+c^2)$, siis aina negativinen; niiden tulo on $(x^2-c^2)^2-a^4$. Jos tämä tulo on positivinen, niin ovat y^2-suureen kumpaisetkin arvot yhdenmerkkisiä ja siis kumpaisetkin negativisia, koska niiden summa on negativinen; y:n neljä arvoa ovat siis kaikki aatteisia. Todellisia arvoja y voi saada ainoastaan, jos $(x^2-c^2)^2-a^4$ on negativinen ja niin muodoin x^2-c^2 pysyy rajoissa $-a^2$ ja $+a^2$, se on: x^2-suureen täytyy silloin olla pienemmän kuin c^2+a^2 ja suuremman kuin c^2-a^2. Kun molemmat ehdot

$$(2) \qquad x^2<c^2+a^2, \quad x^2>c^2-a^2$$

ovat täytetyt, on y^2:n arvoista toinen positivinen, toinen negativinen.

Ratkaistuna x^2:n suhteen, antaa yhtälö (1)

$$x^2=c^2-y^2\pm\sqrt{a^4-4c^2y^2}.$$

Tästä näkyy, että $4c^2y^2$ ei saata olla suurempi kuin a^4 ja että y:n isoin numero-arvo on $\frac{a^2}{2c}$. Kun y on tässä maksimi-arvossaan, katoaa juurisuure ja $x^2 = c^2 - y^2$ eli $x^2 + y^2 = c^2$; ne käyrän pisteet, joissa y on maksimi $= \pm \frac{a^2}{2c}$, ovat siis pyöriöllä, joka piirretään pisteestä O säteellä c ja jonka kehä kulkee kiinteäin pisteiden F ja F' kautta. Näillä pisteillä on abscissana $x = \frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}$.

Lähemmin määrätäksemme käyrän muotoa, on meidän eroittaminen kolme tapausta.

1:o $a < c$. Abscissa on, kaavain (2) mukaan, suljettuna rajoihin $\sqrt{c^2 - a^2}$ ja $\sqrt{c^2 + a^2}$ tahi $-\sqrt{c^2 - a^2}$ ja $-\sqrt{c^2 + a^2}$. Tällöin saadaan kaksi erillänsä olevaa, pisteiden F ja F' ympärille piirrettyä, umpinaista käyrää (kuvassa merkityt 1).

2:o $a = c$. Ehdot (2) ovat nyt supistuneina: $x^2 < 2c^2$, $x^2 > 0$. Jälkimmäinen on aina täytetty ja x saattaa vaihdella rajoissa $-c\sqrt{2}$ ja $+c\sqrt{2}$. Ordinaatan maksimi-arvona on $\frac{c}{2}$. Käyrä, jonka yhtälönä tässä tapauksessa on

$$(3) \qquad (x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2),$$

kulkee originin kautta ja on muodoltaan: ∞ (kuvassa merkitty 2). Määrätäksemme tangenttia originissa, tarkastamme ensin sekanttia, joka kulkee originin ja pisteen (x, y) kautta käyrällä ja jonka kulmakoefficienttinä siis on $\frac{y}{x} = m$; se raja, jota tämä suure lähenee, kun x ja y käyvät äärettömän pieniksi, on tangentin kulmakoefficientti. Kun nyt yhtälö (3) jaetaan suureella x^2 ja sitten tehdään $x = 0$, $y = 0$, niin katoaa vasen jäsen ja seuraukseksi saadaan $0 = 1 - m^2$, josta $m = \pm 1$; origini on siis kaksoispiste; käyrällä on siinä kaksi tangenttia, jotka jakavat kahtia koordinaati-akselien väliset kulmat.

Tällä käyrällä on nimenä lemniskata ($\lambda\eta\mu\nu\acute{\iota}\sigma\varkappa o\varsigma$ = kääre); sen keksijä on Jaakko Bernoulli.

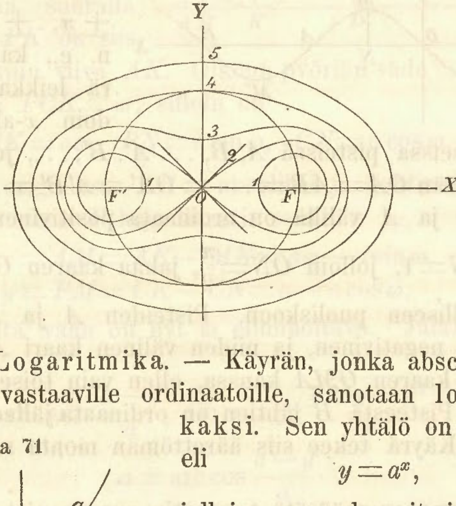
3:o $a > c$. Jälkimmäinen ehdoista (2) on aina täytetty, ja abscissa saattaa vaihdella rajoissa $-\sqrt{a^2 + c^2}$ ja $+\sqrt{a^2 + c^2}$.

Jos $4c^4 - a^4$ on positivinen, s. o. jos $a < c\sqrt{2}$, niin leikkaa pyöriö c käyrää neljässä pisteessä, joiden koordinaatit ovat

$$x = \pm \frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c},\ y = \pm \frac{a^2}{2c},$$

ja jotka määräävät ordinaatan maksimi-arvon; silloin on käyränä 3:lla merkitty viiva. — Kun $a = c\sqrt{2}$, yhtyvät nämä pisteet parittain y-akselilla ja pyöriö sivuaa käyrää, joka silloin on nimeltään Cassinin ovaali (kuviossa merkitty 4:llä). — Kun vihdoin $a > c\sqrt{2}$, on käyrä kokonaan ulkopuolella pyöriötä (merkitty 5:llä).

Kuva 70.

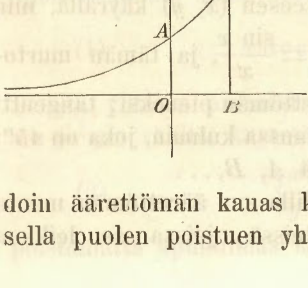


129. Logaritmika. — Käyrän, jonka abscissat ovat logaritmeja vastaaville ordinaatoille, sanotaan logaritmikaksi. Sen yhtälö on $x = \log y$, eli

$$y = a^x,$$

jolloin a on logaritmiston kantaluku.

Kuva 71



Kun x kasvaa rajoissa $-\infty$, $+\infty$, kasvaa y rajoissa 0, ∞ (kun vaan $a > 1$; jos olisi $a < 1$, niin y päinvastoin vähenisi äärettömästä nollaan). Käyrä ulottuu niin muodoin äärettömän kauas kummallekin puolelle y-akselia, toisella puolen poistuen yhä kauemmaksi x-akselista, toisella puolen alinomaa lähestyen sitä; x-akseli on siis käyrän asymptooti. Kun $x=0, 1, 2, 3\ldots$, saadaan $y=1, a, a^2, a^3, \ldots$; abscissain kasvaessa aritmetillisessa sarjassa, muodostavat ordinaatat geometrillisen sarjan.

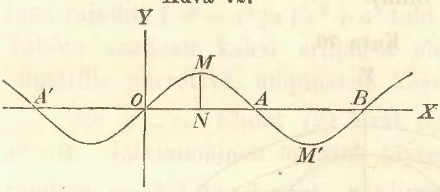
Logaritmikoita saattaa olla useampia eri lajeja eri arvojen mukaan kantaluvulla a.

130. Sinusoïdi. — Sen yhtälö on

$$y=\sin x.$$

Kukin abscissa merkitsee sen kaaren pituutta (1-säteisessä pyöriössä), jonka sini on ordinaatan pituinen. Kun $x=0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$ j. n. e., katoaa y; käyrä leikkaa niin muodoin x-akselia äärettömän useissa pisteissä $A, B, \ldots A', B', \ldots$, jotka saadaan, kun tehdään $OA=AB=\ldots=OA'=A'B'=\ldots=\pi$. Pisteiden O ja A välillä on ordinaata positivinen; sen suurin

Kuva 72.



arvo $MN=1$, jolloin $ON=\frac{\pi}{2}$, jakaa kaaren OMA kahteen symmetrilliseen puoliskoon. Pisteiden A ja B välillä on ordinaata negativinen, ja niiden välinen kaari $AM'B$ on yhteellinen kaaren OMA kanssa, ollen vain toisella puolen x-akselia. Pisteestä B lähtien on ordinaata jälleen positivinen j. n. e. Käyrä tekee siis äärettömän monta samanlaatuista heilausta.

Helppo on määrätä tangentin suunta pisteessä O. Jos siitä vedetään jänne johonkin pisteesen (x, y) käyrällä, niin jänteen kulmakoefficienttinä on $\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$, ja tämän murtoluvun rajana on 1, kun x käy äärettömän pieneksi; tangentti pisteessä O tekee siis x-akselin kanssa kulman, joka on 45^0; sama on tangenttien laita pisteissä $A, B, \ldots$

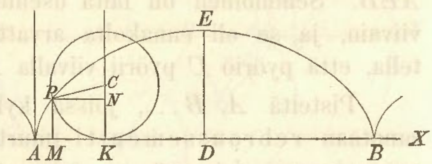
Huomattakoon, että sinusoïdilla on äärettömän monta keskiötä, nimittäin kaikissa pisteissä, joissa se leikkaa

x-akselia; samoin on sillä äärettömän monta akselia, nimittäin ordinaatain sekä positiviset että negativiset maksimit.

131. Kykloïdi. — Kun pyöriö C liukumatta pyörii suoralla AB, niin muodostaa sen kehällä oleva piste P kykloïdi-nimisen käyrän.

Otaksutaan, että emäpyöriö alkujansa on sivunnut suoraa AB pisteessä A, ja että piirtävä piste P silloin myöskin on ollut A:ssa. Sivuamispisteen siirryttyä pisteesen K, ovat kaikki kaaren PK osat olleet yhteydessä vastaavain osain kanssa suoralla AK; kaari PK on siis yhtä pitkä kuin viiva AK. Olkoon pyöriön säde $= a$ ja vaihteleva kulma $PCK = \omega$; silloin on

Kuva 73.



$$PK = a\omega, \quad PN = a \sin \omega, \quad CN = a \cos \omega.$$

Otetaan A originiksi, AB x-akseliksi ja kohtisuora AY y-akseliksi. Pisteen P koordinaatit ovat:

$$x = AM = AK - MK = a\omega - a \sin \omega,$$
$$y = PM = CK - CN = a - a \cos \omega,$$

Näiden väliltä vaan on nyt ω eliminoitava. Jälkimmäisestä saadaan

$$\cos \omega = \frac{a-y}{a}, \quad \sin \omega = \pm \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a},$$

$$\omega = \operatorname{arc\,cos} \frac{a-y}{a}.$$

Sijoitettuamme nämä arvot edelliseen yhtälöön, tulee

$$(1) \qquad x = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a-y}{a} \mp \sqrt{2ay - y^2}.$$

Tämän yhtälön asemesta, joka osoittaa välittömän suhdan x:n ja y:n välillä, käytetään tavallisesti alkuperäisiä yhtälöitä

$$(2) \qquad \begin{cases} x = a(\omega - \sin \omega), \\ y = a(1 - \cos \omega), \end{cases}$$

poistamatta apukulmaa ω.

Pyöriön tehtyä puoli pyöräystä, on P kohonnut pisteestä A pisteesen E ja ordinaata kasvanut nollasta arvoon $2a$; seuraavan puolipyöräyksen aikana se jälleen vähenee $2a$:sta nollaan. Suurin ordinaata DE jakaa kykloïdin kahteen symmetrilliseen puoliskoon; AB on yhtä suuri kuin koko emäpyöriön kehä ja AD on puoli sitä.

Samaa kosinia vastaa äärettömän monta kaarta; yhtälö (1) merkitsee siis äärettömän monta sellaista osaa kuin AEB. Semmoinen on laita useiden transcendenttisten viivain, ja se oli ennakolta arvattava, sillä saattaahan ajatella, että pyöriö C pyörii viivalla AX rajattomasti.

Pisteitä A, B..., joissa kykloidi muodostaa kärkiä, sanotaan rebroussementti-(murto-)pisteiksi. Kussakin semmoisessa pisteessä on tangentti kohtisuora x-akselille, niinkuin helposti huomaa, hakien raja-arvoa suurelle $\frac{x}{y}$, kun x ja y katoavat.

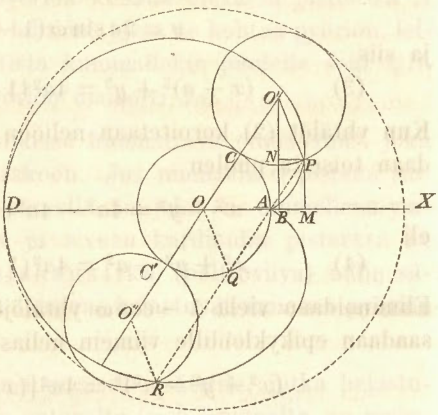
132. Epikykloïdi. — Kun pyöriö O' liukumatta pyörii kiinteällä pyöriöllä O, muodostaa edellisen kehällä oleva piste P epikykloïdi-nimisen käyrän.

Kullakin kierroksellaan muodostaa P yhden osan epikykloïdia; semmoisia osia, jotka kaikki ovat yhtäsuuret, saattaa olla enemmin tai vähemmin, aina sen mukaan mikä suhde pyöriöiden kehillä, toisin sanoen säteillä, on keskenään. Jos liikkuvan pyöriön säde olisi kiinteän pyöriön säteesen kuin $5:11$, niin että 11 kertaa edellisen kehä oli yhtä kuin 5 kertaa jälkimmäisen kehä, niin olisi epikykloïdissa 11 osaa, jotka kaikkiansa 5 kertaa ympäröisivät kiinteän pyöriön, kunkin osan täyttäessä $\frac{5}{11}$ sen kehästä. Sitä vastoin olisi osia äärettömän monta, jos pyöriöiden säteet olisivat yhteismitattomia.

Otaksutaan, että muodostava piste P alkujaan on kajonnut kiinteään pyöriöön A:ssa; silloin ovat kaaret CA ja CP yhtäsuuret. Olkoon kiinteän pyöriön säde $= a$, liikkuvan pyöriön säde $= b$ ja vaihtelevat kulmat $COA = \omega$, $CO'P = \omega'$; niin muodoin $CA = a\omega$, $CP = b\omega'$ ja siis $a\omega = b\omega'$

eli $\omega' = \frac{a}{b}\omega$. Vedetään $O'B$ ja PM kohtisuoriksi OA:lle ja PN viimeksi-mainitun suuntaiseksi; silloin tulee kulma $O'PN$ nähtävästi supplementiksi kulmalle $\omega + \omega'$, toisin sanoen kulmalle $\frac{a+b}{b}\omega$; niin muodoin on

Kuva 74.



$$NP = -b\cos\frac{a+b}{b}\omega,$$

$$O'N = b\sin\frac{a+b}{b}\omega.$$

Nyt on epikykloïdin yhtälö helposti johdettu. Otetaan O originiksi, OA x-akseliksi ja sille kohtisuora viiva y-akseliksi. Koordinaateiksi pisteelle P ($x = OM = OB + BM$, $y = PM = O'B - O'N$) saamme siten

$$(1) \quad \begin{cases} x = (a+b)\cos\omega - b\cos\frac{a+b}{b}\omega, \\ y = (a+b)\sin\omega - b\sin\frac{a+b}{b}\omega. \end{cases}$$

Haettu x:n ja y:n keskinäinen suhta saadaan täten, vaikka välillisesti, määrätyksi apukulmalla ω. Kun suureet a ja b ovat yhteismitallisia, niin saattaa tämän apukulman poistaa ja siten saadaan epikykloïdille algebrallinen yhtälö. Mutta mahdotonta on tämä poistaminen silloin kun a ja b ovat yhteismitattomia; epikykloïdin yhtälö on silloin transcendentinen, jonka jo voi päättää siitäkin yllämainitusta asianhaarasta, että epikykloïdilla silloin on äärettömän monta osaa ja että suora saattaa leikata sitä äärettömän monessa pisteessä.

133. Tarkastakaamme erittäin sitä tapausta, jolloin $b = a$. Suureiden x ja y arvot (1) ovat silloin:

$$(2)\quad \begin{cases} x = 2a\cos\omega - a\cos 2\omega = a(2\cos\omega - 2\cos^2\omega + 1), \\ y = 2a\sin\omega - a\sin 2\omega = a(2\sin\omega - 2\sin\omega\cos\omega), \end{cases}$$

josta

$$x - a = 2a\cos\omega\,(1 - \cos\omega),$$

$$y = 2a\sin\omega\,(1 - \cos\omega),$$

ja siis

$$(3)\qquad (x-a)^2 + y^2 = 4a^2(1-\cos\omega)^2.$$

Kun yhtälöt (2) koroitetaan neliöön ja lasketaan yhteen, saadaan toiselta puolen

$$x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a^2\cos\omega + a^2$$

eli

$$(4)\qquad x^2 + y^2 - a^2 = 4a^2(1-\cos\omega).$$

Eliminoidaan vielä $1 - \cos\omega$ yhtälöjen (3) ja (4) välillä, niin saadaan epikykloïdille viimein neliasteinen yhtälö:

$$(x^2+y^2-a^2)^2 = 4a^2[(x-a)^2+y^2].$$

Sen yhtälö polaarisissa koordinaateissa johtuu välittömästi yhtälöstä (3), jossa vasen jäsen nähtävästi on yhtäsuuri kuin neliö välimatkalla AP. Olkoon tämä välimatka $= \varrho$. Otettuamme neliöjuuren, saamme

$$\varrho = 2a(1-\cos\omega).$$

Siinä epikykloïdin polaarinen yhtälö, kun A on polina ja AX polaari-akselina. Koska nimittäin $a = b$ ja $CA = CP$, niin on AP nähtävästi samansuuntainen kuin OO' ja kulma PAX $=$ kulma $O'OX$; ω merkitseekin siis kulmaa, jonka välillensä tekevät radius vector ϱ ja akseli AX.

Herttamaisen ulkomuotonsa tähden on se epikykloïdi, joka syntyy molempain pyöriöiden, liikkuvan ja kiinteän, ollessa yhtäsuuria, saanut erityisen nimen: kardioïdi. Sen polaariyhtälö osoittaa, että se samalla on erikoislaatu Pascalin koteloa, niin kuin huomaa yksinkertaisen geometrillisen piirustuksen avulla. Tarkastetaanpa liikkuvaa pyöriötä kahdessa diametrillisesti vastaisessa asemassa O', O'' ja pitennetään PA, kunnes se kohtaa pyöriöt O ja O'' pisteissä Q, R. Koska tämä suora on samansuuntainen kuin $O'O''$, niin ovat myös säteet OQ, $O''R$ samansuuntaiset kuin $O'P$

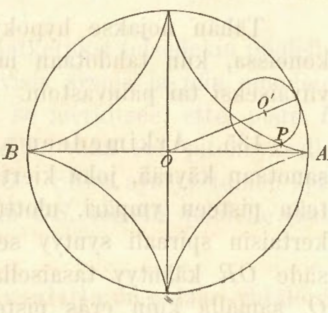
ja $PQ = QR = 2a$; ja R on piste epikykloïdilla, sillä kaaret $C'R$ ja $C'A$ ovat nähtävästi yhtäsuuret. Puheenaolevan käyrän saattaa senvuoksi ajatella syntyneeksi siten, että sekantti AQ kääntyy O-pyöriön kehällä olevassa pisteessä A ja että siitä pisteestä Q lähtien, jossa se kohtaa pyöriön, leikataan sanotusta sekantista kummallekin puolelle osat QR, QP yhtäpitkiksi kuin pyöriön diametri $2a$.

Kardioïdilla on fysiikissä huomattava ominaisuus, joka tässä sivumennen mainittakoon. Jos nimittäin O-pisteen ympärille piirretään pyöriö säteellä $3a$, joka siis ummelleen ympäröi liikkuvata pyöriöä ja sivuaa kardioïdia pisteessä D, niin on tämä käyrä katakaustika (polttoviiva) niille säteille, jotka, pisteestä D lähtien, heiastuvat sanotun pyöriön kehältä.

Polttoviivana yhdensuuntaisille säteille, jotka heiastuvat jonkun pyöriönkaaren ontevalta (sisä-) pinnalta, on myöskin epikykloïdi, syntyvä silloin kun kiinteän pyöriön säde on puoli ja liikkuvan pyöriön säde neljäsosa heiastavan pyöriön sädettä.

134. Hypokykloidi. — Kun pyöriö O' liukumatta pyörii sisäpuolella toisen, kiinteän O-pyöriön kehää, niin muodostaa edellisen kehällä oleva piste P hypokykloïdinimisen käyrän.

Kuva 75.



Otetaan O originiksi ja OA x-akseliksi, jolloin A on se piste, jossa P alkujansa on kajonnut kiinteään pyöriöön. Olkoon kuin ennenkin kiinteän pyöriön säde $= a$, liikkuvan säde $= b$ ja kulma $O'OA = \omega$. Silloin saadaan pisteen P koordinaateille x ja y samat lausekkeet kuin 132 §:ssä (1), sillä eroituksella vain, että b nyt saa joka kohdassa vastaisen merkin, siis

$$x = (a-b)\cos\omega + b\cos\frac{a-b}{b}\omega,$$

$$y = (a-b)\sin\omega - b\sin\frac{a-b}{b}\omega.$$

Jos esim. olisi $b=\frac{a}{4}$, niinkuin kuvassa on asianlaita, saadaan näistä kaavoista

$$x = \frac{a}{4}(3\cos\omega + \cos 3\omega) = a\cos^3\omega,$$

$$y = \frac{a}{4}(3\sin\omega - \sin 3\omega) = a\sin^3\omega.$$

Kun ω eliminoidaan näiden välillä, jää hypokykloïdille seuraava yksinkertainen yhtälö

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Käyrä on symmetrillinen kumpaisenkin koordinaati-akselin suhteen ja tekee neljä kärkeä, niinkuin kuvasta näkyy.

Jos $b=\frac{a}{2}$, niin saavat x ja y seuraavat arvot

$$x = a\cos\omega,$$

$$y = 0;$$

ja tämä osoittaa P-pisteen koko aikana pysyvän x-akselilla ja hypokykloïdin niin muodoin yhtyvän pitkin matkaa diametriin AB.

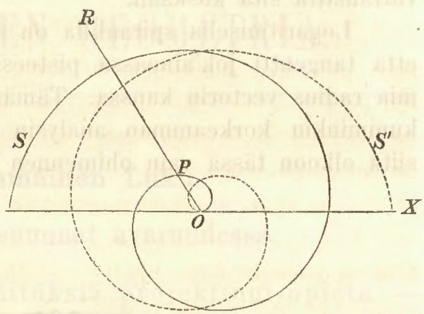
Tähän nojakse hypokykloïdin käyttäminen muutamissa koneissa, kun tahdotaan muuttaa pyörivää liikuntoa suoraviivaiseksi tai päinvastoin.

135. Arkimedeen spiraali. — Spiraaliksi yleensä sanotaan käyrää, joka kiertää äärettömän monta kertaa kiinteän pisteen ympäri, ulottuen yhä ulommaksi sitä. Yksinkertaisin spiraali syntyy seuraavalla tavalla. Epämääräinen säde OR kääntyy tasaisella nopeudella kiinteässä pisteessä O, samalla kuin eräs piste P, tasaisella nopeudella sekin, kulkee pitkin sanottua sädettä. Tämän kahdenkertaisen liik-

keen vaikutuksesta piirtää piste P käyrän, jota sanotaan Arkimedeen spiraaliksi.

Otaksutaan, että P-pisteen ollessa O:ssa, liikkuvalla säteellä oli asema OX. Otetaan O poliksi, OX polaari-akseliksi, ja olkoot P-pisteen polaariset koordinaatit $r = OP$, $v = POX$. Käyrän määrityksestä seuraa, että r:llä ja v:llä on keskenänsä vakinainen suhde, niin että $\frac{r}{v}$ on yhtäsuuri kuin joku vakinainen pituus a; siitä saadaan suorastaan spiraalin yhtälö

Kuva 76.



$$r = av.$$

Kun $v = 1$, on $r = a$. Jos kulman mitaksi, niinkuin analysissä on tavallista, otetaan vastaavan kaaren pituus 1-säteisessä pyöriössä, niin että π vastaa 180 asteen kulman, niin merkitsee siis a edellisessä yhtälössä sitä radius vectoria, joka vastaa kulmaa $v = \frac{180^0}{\pi} = 57^0 17' 45''$.

Originissa O sivuaa spiraalia OX-akseli; sillä OX on raja-asema sekantille OR, tämän kääntyessä pisteessä O, kunnes kaari OP katoaa.

Liikunnon saattaa ajatella jatketuksi toisellekin puolelle OX-akselia; v saa silloin negativisia arvoja ja niin muodoin tulee myöskin r negativiksi, ja se merkitsee, ettei piste P ole v-kulman määräämällä säteellä, vaan sen pitennyksellä päinvastaiselle puolelle pistettä O. Siten syntyy toinen spiraali OS', aivan samanlainen kuin OS, toiselle puolelle vaan kääntynyt.

136. Logaritmisella spiraalilla on polaari-yhtälönä

$$r = a^v.$$

Kun v kasvaa nollasta äärettömiin, kasvaa r ykkösestä myöskin äärettömiin; kun v vähenee rajoissa $0, -\infty$, vähenee myöskin r ykkösestä nollaan. Spiraali kiertää siis äärettömän monta kertaa polin ympäri, läheten sitä alinomaa, mutta saavuttamatta sitä koskaan.

Logaritmisella spiraalilla on se merkillinen ominaisuus, että tangentti jok'ainoassa pisteessä tekee yhtäsuuria kulmia radius vectorin kanssa. Tämän todistamiseksi tarvitaan kumminkin korkeamman analysin tuntemista, jonka vuoksi siitä olkoon tässä vain ohimennen mainittu.

JÄLKIMMÄINEN OSA.

AVARUUDEN GEOMETRIA.

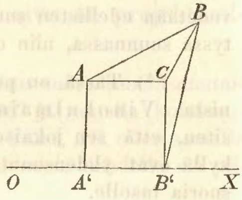
Ensimmäinen Luku.

Pisteet ja suunnat avaruudessa.

137. Perustus-väitöksiä projektioni-opista. — Avaruudessa oleva piste projicioidaan suoralle viivalle elikkä akselille OX siten, että lasketaan sen kautta taso (tahikka vaan suora viiva) kohtisuoraksi akselille OX. Pisteen liikkuessa suoraa AB myöten, kulkee sen projektioni matkan $A'B'$ joko suunnassa OX tai XO. Toinen näistä suunnista, esim. OX, pidetään positivisena, toinen XO negativisena, ja niinpä annetaan matkalle $A'B'$ merkiksi joko $+$ tai $-$, aina sitä mukaan kuin se ajatellaan kulkeneeksi edellisessä tai jälkimmäisessä suunnassa. Tämä näin merkitty matka on silloin suoran AB projektioni akselilla OX. Näin ollen väitetään:

Määrätyn suoran projektioni toisella suoralla on sekä pituuden että merkin suhteen = edellisen suoran pituus, kerrottuna molempain suorain välisen kulman cosinilla.

Kuva 77.



Todistusta varten pannaan annetun suoran päitten (A, B) kautta kohtisuorat tasot akselille OX, jonka ne kohdatkoot pisteissä A', B'; pisteestä A vedetään AC, OX:n suuntaisena, kunnes se pisteessä C kohtaa B-pisteen kautta pantua tasoa. Nyt on $AC = A'B' =$ suoran AB projektioni suoralla OX; kulma BAC on yhtä suuri kuin se kulma α, jonka AB ja OX välillensä tekevät. *) Koska kolmio ABC on suorakulmainen (C-kulma on nimittäin suora, koska AC vedettiin kohtisuoraksi tasolle $BB'C$), niin on siis $A'B' = AB \cos \alpha$.

Aina kuin kulma α on terävä, lankeaa B' oikealle puolelle pistettä A' ja projektioni on silloin positivinen; asia on päinvastoin, kun α on tylsä. Mutta kun $\cos \alpha$ myöskin on edellisessä tapauksessa positivinen, jälkimmäisessä negativinen, niin lausuu $AB \cos \alpha$ joka tapauksessa tarkasti, niin pituuden kuin merkinkin suhteen, AB:n projektionin akselilla OX.

138. Jos umpinainen polygoni projicioidaan suoralle, niin summa sivujen projektioneista on $= 0$. Polygoneilla, joilla on samat pääpisteet, ovat summat sivujen projektioneista yhtäsuuret.

Väite ulottuu siihenkin tapaukseen, että polygonien kaikki sivut eivät olekaan samalla tasolla. Todistus on sama kuin taso-polygoneistakin on osoitettu (6 §), joten ei sitä enään tarvinne uudistaa.

139. Jos avaruudessa olevan käyrän kaikista pisteistä vedetään tasolle kohtisuorat, niin muodostavat nämä cylinderimäisen pinnan. Tämän pinnan ja tason leikkausta sanotaan käyrän projektioniksi tasolla. **) Jos projicioitu avaruus-viiva on suora, niin muuttuu cylinderipinta tasoksi ja projektioni on silloin myös suora viiva, ollen kahden tason leikkaus.

---

*) Kulma kahden, avaruudessa olevan, suoran välillä, jotka eivät ole samalla tasolla eivätkä siis saata yhtyä, on nimittäin yhtä suuri kuin kulma kahden muun suoran välillä, jotka jonkun pisteen kautta vedetään edellisten suuntaisiksi. Kun kumpikin suora otetaan määrätyssä suunnassa, niin on kulmakin niiden välillä tarkoin määrätty.

**) Tässä on puhe ainoastaan suorakulmaisesta projektionista. Vinokulmainen projektioni avaruus-viivasta tasolle saadaan siten, että sen jokaisen pisteen kautta vedetään tasolle suoria, jotka kyllä ovat yhdensuuntaisia keskenänsä, olematta kumminkaan kohtisuoria tasolle.

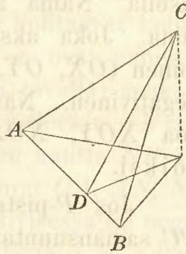
Suoran ja tason välisen kallistuksen määrää se kulma, jonka välillensä tekevät suora ja sen projektioni tasolla. Määrätyn suoran projektioni on siis suoran pituus, kerrottuna suoran ja tason kallistuskulman cosinilla.

140. Pinta-ala tasokuvion projektionilla toiselle tasolle on = annetun kuvion pinta-ala kerrottuna tasojen välisen kulman cosinilla.

Tasokuvio projicioidaan toiselle tasolle siten, että kaikista sen perimetrin pisteistä vedetään kohtisuorat jälkimmäiselle tasolle. Saman kuvion projektionit yhdensuuntaisille tasoille ovat tietysti yhteelliset.

Olkoon annettuna ensinnäkin kolmio ABC, jonka asema AB on samansuuntainen kuin se taso P, jolle se on projicioitava. Suoran AB kautta panemme tason ABC', joka on samansuuntainen kuin P, ja vedämme pisteestä C kohtisuoran CC' tasolle ABC' ja pisteestä C' kohtisuoran $C'D$ viivalle AB. Viiva AB on silloin kohtisuora tasolle CDC' *) ja kulma CDC' on tasojen ABC ja ABC' kallistuskulma. Merkitkööön nyt T kolmion ABC pinta-alaa, T' sen projektionin ABC' pinta-alaa ja θ tasojen kallistuskulmaa CDC'; niin muodoin saamme $T = \frac{1}{2} AB \,.\, CD$, $T' = \frac{1}{2} AB \,.\, C'D$; mutta $C'D = CD \cos\theta$; siis on $T' = T \cos\theta$.

Kuva 78.



Jos ei yksikään kolmion sivuista ole P-tason suuntainen, niin ajateltakoon kolmion pinta vedetyksi ulos, kunnes se leikkaa P-tasoa suoraa viivaa myöten. Vedettäköön nyt kolmion kärjistä tämän leikkausviivan suuntaisia suoria; yksi niistä tietysti jakaa kolmion T kahteen pienempään kolmioon T_1, T_2, joissa siis kumpaisessakin yksi sivu on projektioni-

*) Jos nimittäin D-pisteen kautta vedetään suora samansuuntaiseksi kuin CC', niin on tämä suora tasolla CDC' ja samalla kohtisuorassa tasolle ABC' ja siis myöskin viivalle AB. Tämä AB, ollen samalla myös kohtisuora viivalle DC', on siis kohtisuorassa kahdelle eri viivalle tasolla CDC', siis itse tasollekin.

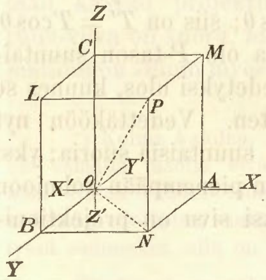
tason suuntainen ja joiden projektionit edellisen todistuksen mukaan ovat $T_1 \cos\theta$ ja $T_2 \cos\theta$. Koko kolmion projektioni on siis $T_1 \cos\theta + T_2 \cos\theta = (T_1 + T_2)\cos\theta = T\cos\theta$.

Koska kerran väite on todistettu kolmion suhteen, niin saattaa sen helposti todistaa minkä monisivuisen tasokuvion suhteen hyvänsä, sillä senhän saattaa aina jakaa kolmioihin. Mutta väite on voimassa käyräviivaistenkin tasokuvioiden suhteen, sillä käyräviivaista kuviota saattaa ajatella suoraviivaiseksi, jossa sivut ovat äärettömän pieniä ja sivujen luku äärettömän suuri.

141. Suuntais-koordinatit. — Jonkun avaruudessa olevan pisteen P määräämiseksi käytetään kolmea koordinaati-akselia XX', YY', ZZ', jotka leikkaavat toisiansa origini nimisessä pisteessä O eivätkä ole samalla tasolla. Nämä akselit pidetään annettuina ja muuttumattomina. Joka akselissa eroitetaan kaksi vastaista suuntaa, toinen (OX, OY, OZ) positivinen ja toinen (OX', OY', OZ') negativinen. Nämät akselit parittain määräävät kolme tasoa XOY, XOZ, YOZ, joita sanotaan koordinaati-tasoiksi.

Jos P-pisteen kautta pannaan kolme tasoa PA, PB, PC samansuuntaisiksi kuin koordinaati-tasot, niin syntyy parallelipipedi, joka on kaikin puolin määrätty, niin kohta kuin tunnetaan sen kolme särmää OA, OB, OC. Merkittäköön ne x, y, z ja pidettäköön positivisina tai negativisina sitä myöten kuin ne lankeavat vastaavain koordinatiakselien positiviseen tai negativiseen suuntaan. Nämät x, y, z nähtävästi tarkoin määräävät P-pisteen aseman; siksipä sanotaankin niitä P-pisteen koordinaateiksi. Pisteen välimatka OP originista on nimeltään radius vector.

Kuva 79.



Koordinaati-akseleita OX, OY, OZ sanotaan x-, y-, z-akseleiksi ja koordinaati-tasoja XOY, XOZ, YOZ nimitetään xy-, xz-, yz-tasoiksi. Piste, jonka koordinaatit ovat $x = a$, $y = b$, $z = c$, merkitään (a, b, c).

Puheenalaiset kolme koordinaati-tasoa, ulotettuina joka haaralle, muodostavat kahdeksan triedrillistä kulmaa (nurkkaa), vastaten kahdeksaa eri yhdistelyä (kombinationia) koordinaatien merkkien välillä. Pisteellä nurkkakulmassa XYZ ovat kaikki koordinaatit positivisia; nurkkakulmassa $X'YZ$ on $x = -$, $y = +$, $z = +$; nurkkakulmassa $X'Y'Z$ on $x = -$, $y = -$, $z = +$, j. n. e. Kaikki pisteet avaruudessa saadaan siis määrätyiksi, kun x, y, z kukin erikseen pannaan vaihtelemaan negativisesta äärettömästä $(-\infty)$ positiviseen äärettömään $(+\infty)$.

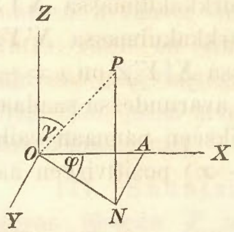
Koska $x = OA = PL$, $y = OB = PM$, $z = OC = PN$, niin saattaa koordinaatit x, y, z piirtää sitenkin, että P-pisteestä vedetään suorat PL, PM, PN samansuuntaisiksi kuin OX, OY, OZ ja pitennetään kunnes ne kohtaavat kolme koordinaati-tasoa. Kun koordinaatit x, y, z ovat annetut, niin löydetään piste P paraiten seuraavalla tavalla: x-akselista leikataan kappale $OA = x$, A-pisteestä vedetään $AN = y$ samansuuntaiseksi kuin y-akseli ja N-pisteen kautta $NP = z$ samansuuntaiseksi kuin z-akseli. Nämät suorat OA, AN, NP otetaan vastaavain koordinaati-akselien positivisessa tai negativisessa suunnassa sitä myöten minkämerkkisiä x, y, z ovat. Siten syntyy koordinaati-polygoni $OANP$, joka yhdistää toisiinsa originin ja P-pisteen.

Koordinaati-akselien ollessa suorakulmaisia (kohtisuoria toisilleen), on parallelipipedi OP suorakulmainen ja silloin ovat x, y, z radius vectorin (OP) projektioneja koordinaatiakseleilla. Tässä tapauksessa saattaa myös sanoa, että x, y, z ovat kohtisuorat välimatkat pisteestä P koordinaati-tasoihin, otettuina merkkeinensä.

142. Polaariset koordinaatit. — P-pisteen asema kolmen kohtisuoran akselin (OX, OY, OZ) suhteen määrätään toisinaan myös polaarisilla koordinaateilla, joita ovat: 1:o) radius vectorin (OP) pituus r, 2:o) radius vectorin ja OZ-akselin välinen kulma γ ja 3:o) kulma φ, jonka välil-

lensä tekevät tasot ZOP ja ZOX, toisin sanoen kulma, jonka radius vectorin projektioni xy-tasolla, ON, tekee x-akselin kanssa, otettuna määrätyssä suunnassa, ajateltuna esim. syntyneeksi niin, että ON on siirtynyt x-akselin suunnasta y-akselin suuntaan. Missä suhteessa nämä polaariset koordinaatit r, γ, φ ja suorakulmaiset x, y, z ovat toisiinsa, näkyy seuraavista yhtälöistä:

Kuva 80.



$$x = r \sin\gamma \cos\varphi,$$
$$y = r \sin\gamma \sin\varphi,$$
$$z = r \cos\gamma.$$

Nämä yhtälöt johdetaan helposti. Suorakulmaisesta kolmiosta OPN (kulma ONP on näet suora) saadaan ensinnäkin $z = PN = OP \sin PON = r\cos\gamma$ ja $ON = r\sin\gamma$. Suorakulmaisesta kolmiosta ONA (kulma A on suora) saadaan $y = AN = ON\sin\varphi$ ja $x = OA = ON\cos\varphi$. Kun nyt suureiden x, y, z arvoihin sijoitetaan $ON = r\sin\gamma$, niin saadaan ylläolevat yhtälöt.

143. Radius vectorin pituus ja suunta. — Suorakulmaisessa parallelipipedissä on diagonaalin neliö yhtäsuuri kuin summa kolmen, samasta nurkkapisteestä lähtevän, särmän neliöistä. Koska nimittäin (kuva 79) $\overline{OP}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{NP}^2$ ja $\overline{ON}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AN}^2$, niin on $\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AN}^2 + \overline{NP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2$. Jos nyt r merkitsee P-pisteen radius vectoria, toisin sanoen välimatkaa originista siihen pisteeseen, jonka suorakulmaisina koordinaateina ovat x, y, z, niin on siis

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \text{ josta } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Radius vectorin suunnan määräävät ne kulmat $\alpha = POX$, $\beta = POY$, $\gamma = POZ$, jotka radius vector tekee koordinaatiakselien positivisen suunnan kanssa. Suorakulmaisessa koordinaatistossa ovat x, y, z radius vectorin projektioneja akseleille; niin muodoin on

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\alpha, \\ y &= r\cos\beta, \\ z &= r\cos\gamma, \end{aligned}\right\} \text{ joista } \left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{r}, \\ \cos\beta &= \frac{y}{r}, \\ \cos\gamma &= \frac{z}{r}. \end{aligned}\right.$$

Kolmesta jälkimmäisestä kaavasta saadaan lasketuiksi arvot suureille α, β, γ. Korotettuamme kumpaisetkin jäsenet neliöihin ja laskettuamme yhteen, saamme

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2};$$

mutta kun $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, niinkuin äskön näimme, niin on

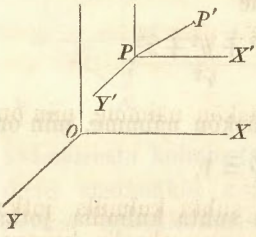
$$\text{(1)} \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

ja semmoinen on yleensä keskinäinen suhta kulmilla, jotka suora tekee kolmen toisillensa kohtisuoran akselin kanssa. Tästä näkyy, että kulmat α, β, γ eivät ole itsenäisiä elikkä toisistaan riippumattomia. Niissä on kuitenkin enemmän kuin tarpeeksi *OP*-viivan suunnan määräämistä varten, niinkuin helposti huomataan. Ajateltakoon nimittäin, että *OP* heilahtaa vuorotellen akselien *OX*, *OY*, *OZ* ympäri. Siten syntyy kolme koonia, jotka leikkaavat toisiansa *OP*-viivaa myöten. Jos nyt ainoastaan α-kulma olisi annettuna, niin saattaisi jok'ainoa ensimmäisen koonin emäviiva edustaa suoraa *OP*. Mutta jos samalla tunnetaan myöskin β-kulma, niin on selvä, että *OP*-suoran tulee kuulua sekä ensimmäiseen että toiseen kooniin ja siis olla jommankumman niistä suorista, joita myöten nämä koonit leikkaavat toisiansa. Vastamainitut kaksi suoraa tekevät z-akselin kanssa kumpikin kulman, jotka ovat toistensa supplementit. Toisen tai toisen näistä kulmista täytyy niin muodoin olla γ-kulman. *OP*-viivan suunnan määräämiseksi siis ei tarvitsisi tietää muuta kuin onko γ terävä vai tylsä, toisin sanoen onko $\cos\gamma$ positivinen vai negativinen. Mitä taas vastamainitun cosinin ominaiseen arvoon tulee, niin saattaa sen laskea kaavasta (1), kun α ja β tunnetaan.

144. Kahden pisteen välinen matka ja suunta. — Olkoot P ja P' (kuva 81) kaksi pistettä, joiden koordinaatit x, y, z ja x', y', z' ovat annetut. Haettakoon niiden välimatka $\varrho = PP'$ ja kulmat α, β, γ, jotka tämä välimatka, suunnassa PP', tekee koordinaati-akselien kanssa.

Vedetään P-pisteen kautta suorat PX', PY', PZ' samansuuntaisiksi kuin OX, OY, OZ ja otetaan edelliset suorat akseleiksi uudessa suorakulmaisessa koordinaatistossa. Silloin ovat P'-pisteen koordinaatit uudessa koordinaatistossa: $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ ja siis on

Kuva 81.



$$\varrho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

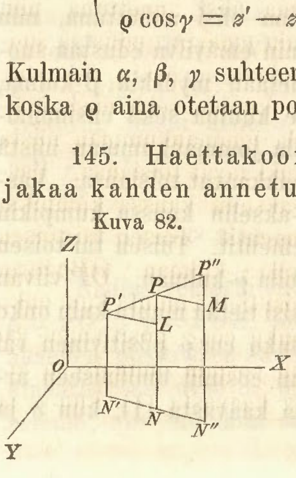
josta haettu välimatka saadaan, ottamalla neliöjuuri. Huomaten, että koordinaatit $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ ovat PP'-suoran projektioneja uusilla akseleilla ja samalla myös niiden suuntaisilla akseleilla OX, OY, OZ, saadaan

$$\left\{\begin{array}{l} \varrho \cos\alpha = x' - x, \\ \varrho \cos\beta = y' - y, \\ \varrho \cos\gamma = z' - z, \end{array}\right. \quad \text{joista} \quad \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{x' - x}{\varrho}, \\ \cos\beta = \dfrac{y' - y}{\varrho}, \\ \cos\gamma = \dfrac{z' - z}{\varrho}. \end{array}\right.$$

Kulmain α, β, γ suhteen ei saata tulla mitään epäselvyyttä, koska ϱ aina otetaan positivisena.

145. Haettakoon koordinaatit pisteelle P, joka jakaa kahden annetun pisteen P' ja P'' välisen matkan niin, että $PP' : PP'' = m : n$.

Kuva 82.



Suora- tai vinokulmaisessa koordinaatistossa olkoot P-pisteen koordinaatit x, y, z; P'-pisteen x', y', z' ja P''-pisteen x'', y'', z''. Vedetään pisteitten P, P', P'' kautta z-akselin suuntaiset suorat; nämä suorat ovat samalla tasolla, joka leikkaa xy-pintaa pitkin suoraa $N'N''$. Silloin on $P'N' = z'$, $PN = z$, $P''N'' = z''$; siis $PL = z - z'$, $P''M = z'' - z$. Yhdenmuotoisista kolmioista $P'PL$ ja $PP''M$ saadaan nyt $PL : P''M = m : n$, se on

$$z - z' : z'' - z = m : n,$$

josta $n(z - z') = m(z'' - z)$ eli $(m + n)z = nz' + mz''$. Samanlaatuiset yhtälöt saadaan myös x- ja y-suureiden suhteen. P-pisteen koordinaatit ovat siis

$$x = \frac{mx'' + nx'}{m + n}, \quad y = \frac{my'' + ny'}{m + n}, \quad z = \frac{mz'' + nz'}{m + n}.$$

Nämä arvot on koordinaateilla silloin kuin piste P on pisteitten P' ja P'' välillä. Jos taasen haettaisiin koordinaateja pisteelle P, joka on semmoisen matkan päässä kahdesta annetusta pisteestä P' ja P'' ($P'P''$-suoran pitennyksellä), että $PP' : PP'' = m : n$, niin saataisiin, todistaen samalla tavalla kuin ennenkin:

$$x = \frac{mx'' - nx'}{m - n}, \quad y = \frac{my'' - ny'}{m - n}, \quad z = \frac{mz'' - nz'}{m - n}.$$

Jos P on puolivälissä $P'P''$-matkaa, niin sen koordinaatit ovat:

$$x = \frac{x' + x''}{2}, \quad y = \frac{y' + y''}{2}, \quad z = \frac{z' + z''}{2},$$

toisin sanoen, ne ovat aritmetilliset keskiarvot annettujen pisteiden vastaavista koordinaateista. Kun $x'' = -x'$, $y'' = -y'$, $z'' = -z'$, niin nämä keskiarvot katoavat ja silloin on $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; siis: jos kahdella pisteellä vastaavaiset koordinaatit ovat yhtäsuuret, mutta vastaismerkkiset, niin niiden yhdistyssuora jakautuu originissa kahtia.

146. Radius vectorin projektioni. — Radius vectorin OP projektioni (kuva 80) mille suoralle hyvänsä on yhtä suuri kuin projektioni koordinaati-polygonista $OANP$ samalle suoralle. Jos suora, jolle OP projicioidaan, tekee

koordinaati-akselien kanssa kulmat α, β, γ ja jos P-pisteen koordinaatit ovat x, y, z, niin projektioni OA-sivusta on $x \cos\alpha$, AN-sivusta $y \cos\beta$ ja NP-sivusta $z \cos\gamma$ (vrt. 9 §); summa

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

lausuu niin muodoin koko koordinaati-polygonin elikkä radius vectorin projektionin. Sama on asianlaita vinokulmaisessakin koordinaatistossa.

Jos suora, jolle projicioidaan, on yhtenä OP-suoran kanssa, niin mainittu projektionikin on yhtäsuuri kuin radius vector r, siis

$$r = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Mutta koska α, β, γ merkitsevät radius vectorin ja koordinaati-akselien välisiä kulmia, niin saadaan, koordinaatiston ollessa suorakulmaisen, 143 §:n mukaan $x = r\cos\alpha$, $y = r\cos\beta$, $z = r\cos\gamma$; sijoitettuamme nämä arvot edelliseen kaavaan, tulee

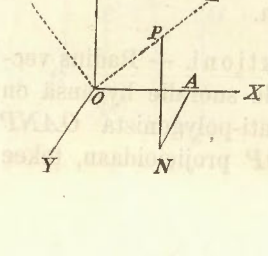
$$r = r(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma), \text{ josta}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

ja samaan päätökseenhän tulimme jo 143 §:ssä.

147. Kahden suoran välinen kulma. — Olkoon annettuina kaksi suoraa OL, OL' (tai niiden suuntaiset suorat avaruudessa), joista edellinen tekee kulmat α, β, γ ja jälkimmäinen kulmat α', β', γ' koordinaati-akselien kanssa. Mainittujen suorain suunta on nyt täydellisesti määrätty; kysymys on: mitenkä niiden välinen kulma θ saadaan lasketuksi? Se lasketaan seuraavalla tavalla, koordinaatiston ollessa suorakulmaisen.

Kuva 83.



Otetaan suoralla OL joku piste P, jonka koordinaatit merkittäköön x, y, z ja radius vector r. Radius vectorin OP ja koordinaati-polygonin $OANP$ projektionit suoralle OL', ollen indenttisiä, antavat

$$r\cos\theta = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma'.$$

Kun tähän sijoitetaan $x = r\cos\alpha$,

$y = r\cos\beta$, $z = r\cos\gamma$ ja sitten jaetaan suureella r, saadaan

$$(2)\ \cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

ja tämän kaavan mukaan saattaa laskea θ-kulman arvon. Tämä kulma otetaan aina rajoissa 0 ja 180°, jolloin se aina erehdyksettä on määrätty cosininsa kautta.

Kun α, β, γ, α', β', γ' ovat semmoiset, että oikea jäsen yhtälössä (2) katoaa, tulee $\cos\theta = 0$ ja $\theta = 90°$. Jos siis asianlaita on semmoinen, että

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,$$

niin ovat suorat kohtisuoria toisillensa. Ne ovat nähtävästi yhdensuuntaisia, jos kumpikin tekee yhtä suuria kulmia koordinaati-akselien kanssa, siis kun $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$.

148. Suuntakulmat ja suuntakosinit. — Kulmia α, β, γ suoran viivan ja kolmen suorakulmaisen koordinaati-akselin välillä sanotaan lyhyesti suuntakulmiksi. Analytillisessä geometriassa käytetään tavallisesti näiden kulmain kosineja, jonka vuoksi, Englantilaisten kirjailijain mukaan, nimitämme niitä suoran viivan suuntakosineiksi (engl. kielellä direction-cosines).

Olkoot a, b, c suoran kolme suuntakosinia. Yhtälön (1) mukaan 143 §:ssä on $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, ja tästä kaavasta saamme niiden arvot lasketuiksi, kun vaan tiedetään niiden keskinäinen suhde. Olkoot a, b, c suhteellisia kolmeen annettuun suureesen, siten että

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C};$$

jokainen näistä murtoluvuista on myös (katso 58 §:n viittaa) yhtäsuuri kuin

$$\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

niin muodoin on

$$a = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad b = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad c = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Tässä saattaa yhdistellä keskenään joko kaikki $+$ merkit tahi kaikki $-$ merkit, joten suureille a, b, c saadaan kaksi arvoryhmää. Nämä eri arvot eivät kumminkaan osoita muuta kuin suoran kahta vastakkaista suuntaa.

Cosini θ-kulmalle kahden suoran välillä, joiden suuntakosinit ovat a, b, c ja a', b', c', on, niinkuin yhtälö (2) osoittaa:

$$\cos\theta = aa' + bb' + cc',$$

josta

$$\cos^2\theta = a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2 + 2aba'b' + 2aca'c' + 2bcb'c'.$$

Sen ohella on myös

$$\begin{aligned} 1 &= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) \\ &= a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2 + a^2c'^2 + a'^2c^2 + b^2c'^2 + b'^2c^2. \end{aligned}$$

Kun tästä otetaan pois edellinen yhtälö, niin saadaan

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2\theta = {} & a^2b'^2 + a'^2b^2 + a^2c'^2 + a'^2c^2 + b^2c'^2 + b'^2c^2 \\ & - 2aba'b' - 2aca'c' - 2bcb'c', \end{aligned}$$

se on:

$$\sin^2\theta = (ab' - a'b)^2 + (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2. \tag{3}$$

Tätä kaavaa tarvitaan seuraavassa probleemassa.

149. Haettakoon suuntakosinit suoralle, joka on kohtisuorassa kahdelle annetulle suoralle.

Annetut suorat OL, OL' ajateltakoon selvyyden vuoksi kulkeviksi originin kautta; edellisen suuntakosinit olkoot a, b, c, jälkimmäisen a', b', c'. Kolmas suora OL'' on kohtisuorassa kumpaisellekin ensinmainitulle; laskeaksemme sen suuntakosineja a'', b'', c'', on meillä kolme yhtälöä

$$\begin{aligned} aa'' + bb'' + cc'' &= 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a''a'' + b''b'' + c''c'' &= 1. \end{aligned}$$

Eliminoidaan nyt c'' ensimmäisestä ja toisesta yhtälöstä, joten saadaan

$$\frac{a''}{bc' - b'c} = \frac{b''}{ca' - c'a}.$$

Kun sitten samoista yhtälöistä eliminoidaan b'', niin saadaan

$$\frac{a''}{bc'-b'c}=\frac{c''}{ab'-a'b}.$$

Meillä on siis

$$\frac{a''}{bc'-b'c}=\frac{b''}{ca'-c'a}=\frac{c''}{ab'-a'b}.$$

(Samaan päätökseen olisi tultu, jos viimeksi olisi eliminoitu a'').

Kukin näistä murtoluvuista on yhtäsuuri kuin se murtoluku, jonka osoittajana on neliöjuuri osoittajain neliöiden summasta, siis $\pm\sqrt{a''^2+b''^2+c''^2}$ joka on $=1$, ja nimittäjänä neliöjuuri nimittäjäin neliöiden summasta, joka kaavan (3) mukaan on $=\pm\sin\theta$. Kun θ merkitsee kulmaa suorain OL ja OL' välillä saamme siis lopullisesti

$$\text{(4)}\qquad \frac{a''}{bc'-b'c}=\frac{b''}{ca'-c'a}=\frac{c''}{ab'-a'b}=\pm\frac{1}{\sin\theta}.$$

Tästä nyt saadaan a'', b'', c'' lasketuiksi siten, että kukin kolmesta ensimmäisestä murtoluvusta verrataan neljänteen ja karkoitetaan nimittäjä.

Kaava (4) pitää paikkansa, olkoon suorakulmaisella koordinaatistolla mikä asema tahansa, siis siinäkin tapauksessa kuin y-akseli lankeaa suoraa OL' ja z-akseli suoraa OL'' myöten, jolloin on $a'=0$, $b'=1$, $c'=0$, $a''=0$, $b''=0$, $c''=1$. Kolmannesta jäsenestä kaavassa (4) tulee silloin $\frac{1}{a}$, jolloin on $a=\pm\sin\theta$. Mutta a merkitsee tässä cosinia sille kulmalle, jonka OL tekee uuden x-akselin kanssa ja tämä kulma on nähtävästi terävä tai tylsä sitä myöten kuin OL on samalla puolen yz-tasoa kuin x-akselikin tai vastaisella puolella. Koska $\sin\theta$ aina on positivinen, niin on kaavassa (4) edellisessä tapauksessa käytettävä $+$, jälkimmäisessä $-$.

Merkin laita on sama, olkoon koordinaatistolla mikä muu asema hyvänsä eikä ainoastaan vasta puheena ollut erikoisasema. Saattaahan nimittäin ajatella, että koordinaatisto muuttuu asemasta toiseen perättäisen kiertymisen kautta, jolloin lausekkeella $\frac{c''}{ab'-a'b}$, niinkuin kaava (4) osoittaa, aina on joko toinen tai toinen vakinaisia arvoja $\pm\frac{1}{\sin\theta}$. Mutta kosk'ei tämän lausekkeen arvo äkkiä saata muuttua toisesta toiseksi, niin on helppo ymmärtää, ettei se ollenkaan saata muuttaa merkkiänsä. Mikä merkki kaavassa (4) milloinkin on käytettävä, huomataan pian, kun ajatellaan koordinaatiston muuttuvan sillä tapaa, että y-akseli lankeaa OL'-suoraa ja z-akseli OL''-suoraa myöten, ja tutkitaan sitten, onko OL samalla puolen yz-tasoa kuin x-akselikin vaiko vastaisella. Tämän saattaa lausua seuraavassa säännössä: Jos kolme suoraa OL, OL', OL'', katsottuina O-pisteestä, seuraavat toisiansa samassa järjestyksessä (myötä tai vasten päivää) kuin kolme koordinaati-akselia OX, OY, OZ, niin käytetään kaavassa (4) + merkkiä, muussa tapauksessa — merkkiä.

Kaava (4) on voimassa, olkoon annetuilla suorilla mikä asema avaruudessa tahansa, sillä originin kautta saattaa aina vetää niiden suuntaisia suoria.

150. Tasokuvion pinta-alan neliö on yhtäsuuri kuin summa, joka saadaan, kun neliöt kuvion projektioneista kolmelle toisillensa kohtisuoralle tasolle lasketaan yhteen.

Olkoon $\varDelta$ annetun kuvion pinta-ala ja α, β, γ kulmat, jotka sen taso tekee kolmen toisillensa suorakulmaisen tason YOZ, ZOX, XOY kanssa, elikkä toisin sanoen kulmat, jotka $\varDelta$-tason normaali tekee kolmen suorakulmaisen akselin OX, OY, OZ kanssa. Projektionit $\varDelta$-kuviosta ovat silloin

$$A=\varDelta\cos\alpha;\quad B=\varDelta\cos\beta,\quad C=\varDelta\cos\gamma;$$

niiden neliöiden summa on

$$A^2+B^2+C^2=\varDelta^2,$$

koska $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Koordinaatien muutos.

151. Originin siirto. — Jos koordinaatisto siirretään itsensä suuntaisesti originista O uuteen originiin O', jonka koordinaatit ovat α, β, γ, niin on P-pisteen alkuperäisillä koordinaateilla x, y, z ja uusilla koordinaateilla x', y', z' seuraavat suhdat:

$$x = x' + \alpha,$$
$$y = y' + \beta,$$
$$z = z' + \gamma.$$

Koska nimittäin yz-taso itsensä suuntaisesti siirtyy pisteestä O pisteesen O', niin vähenevät kaikki abscissat (algebrallisesti) vakinaisella suureella α, niin että $x' = x - \alpha$ eli $x = x' + \alpha$. Samoin todistetaan että $y = y' + \beta$ ja $z = z' + \gamma$.

152. Akselien suuntain muutos. — Tässä otetaan vaan puheeksi suorakulmaisen koordinaatiston muutos toiseksi, suora- tai vinokulmaiseksi, samalla originilla. Olkoot P-pisteen koordinaateina edellisessä koordinaatistossa x, y, z, jälkimmäisessä x', y', z'. Uusien akselien suunta määrätään cosineilla niille kulmille, joita ne tekevät alkuperäisten akselien kanssa, merkiten suuntakosinit x'-akselille a, b, c, y'-akselille a', b', c' ja z'-akselille a'', b'', c''. Kun nyt x-akselille projicioidaan sekä välimatka OP että se koordinaati-polygoni, joka uudessa koordinaatistossa yhdistää toisiinsa originin ja P-pisteen, niin saadaan ensimmäinen alempana olevista yhtälöistä; toiset kaksi saadaan, projicioimalla samat viivat y- ja z-akseleille:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = ax' + a'y' + a''z', \\ y = bx' + b'y' + b''z', \\ z = cx' + c'y' + c''z'. \end{cases}$$

Koska alkuperäinen koordinaatisto oli suorakulmainen, niin on edellisissä kaavoissa olevain yhdeksän suuntakosinin välillä seuraavat suhdat:

$$(2) \qquad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1. \end{cases}$$

Jos uusikin koordinaatisto on suorakulmainen, niin saadaan vielä seuraavat ehto-yhtälöt:

$$(3)\quad \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0, \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \end{cases}$$

joista edellinen lausuu, että x'- ja y'-, toinen että x'- ja z'-, kolmas että y- ja z'-akselit ovat kohtisuorat toisillensa.

153. Jos taas päinvastoin tahtoo lausutuiksi uudet koordinaatit alkuperäisten kautta, kun kumpikin koordinaatisto on suorakulmainen, niin on OP-matka ja koordinaatipolygoni xyz projicioitava kullekin uudelle akselille. Samaan päätökseen tullaan myös yhtälöistä (1). Koordinaatille x' saadaan arvonsa siten, että mainituista yhtälöistä ensimmäinen, toinen ja kolmas järjestyksessä kerrotaan suureella a, b, c, jonka jälkeen yhtälöt lasketaan yhteen. Koordinaatit y' ja z' saadaan samoin, yhteenlaskemalla yhtälöt (1), sittenkuin ne järjestyksessä on kerrottu suureilla a', b', c' ja a'', b'', c''. Huomaten samassa ehtoyhtälöt (2) ja (3), saadaan siten

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + cz, \\ y' &= a'x + b'y + c'z, \\ z' &= a''x + b''y + c''z. \end{aligned}$$

Koska cosinit niille kulmille, jotka x- ja y- sekä z-akseli tekevät uusien koordinaati-akselien kanssa, ovat järjestyksessä a, a', a'' ja b, b', b'' sekä c, c', c'', niin on näiden yhdeksän suureen välillä vielä seuraavat suhdat:

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, & ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, & ac + a'c' + a''c'' &= 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, & bc + b'c' + b''c'' &= 0, \end{aligned}$$

joista kolme ensimmäistä seuraa uuden koordinaatiston suorakulmaisuudesta ja kolme jälkimmäistä osoittavat, että alkuperäiset koordinaati-akselit parittain ovat kohtisuorassa toisilleen. Nämä kuusi kaavaa lausuvat siis vain toisella tavalla samat ehdot kuin yhtälöt (2) ja (3), joista ne saattaa johtaakin.

154. Keskinäisen suhteen koefficienteillä $a, b, c, a', \ldots$ saattaa lausua vielä toisellakin tavalla. Koska nimittäin x'-akseli on yht'-aikaa kohtisuora sekä y'- että z'-akselille ja viimeksi mainittujen akselien välinen kulma on 90^0, niin 149 §:n mukaan on

$$\frac{a}{b'c''-b''c'} = \frac{b}{c'a''-c''a'} = \frac{c}{a'b''-a''b'} = \pm 1.$$

Tässä on käytettävä plus tai minus merkkiä, sitä myöten kuin koordinaatien x', y', z' akselit, katsottuina O-pisteestä, seuraavat toisiansa samassa järjestyksessä kuin koordinaatien x, y, z akselit tahi päinvastaisessa, toisin sanoen, sitä myöten kuin kumpaisenkin koordinaatiston, (molemmat suorakulmaisina) saattaa ajatella yhtyvän toisiinsa tahi ei. Edellisessä tapauksessa on siis

$$\begin{array}{lll} a = b'c''-b''c', & a' = b''c-bc'', & a'' = bc'-b'c, \\ b = c'a''-c''a', & b' = c''a-ca'', & b'' = ca'-c'a, \\ c = a'b''-a''b', & c' = a''b-ab'', & c'' = ab'-a'b. \end{array}$$

Tuskin tarvinnee muistuttaa, että kaikki nämä kaavat seuraavat ehdoista, jotka jo ovat lausuttuina kuudessa yhtälössä (2) ja (3). *)

155. Eulerin kaavat. — Koska yhdeksällä koefficientillä $a, b, c, a', \ldots$ on kuusi ehto-yhtälöä (2) ja (3), niin saattaa ainoastaan kolme niistä ottaa mielin määrin. Tästä seuraa, että kahden suorakulmaisen koordinaatiston keski-

*) Koska tässä kirjassa ei tule käytettäviksi kaavoja vinokulmaisen koordinaatiston muuttamiselle toiseksi vinokulmaiseksi, niin mainitsemme ne vain viitassa.

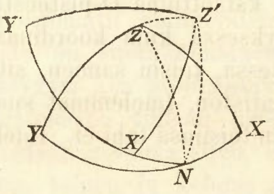
Olkoot λ, μ, ν kulmat, jotka x-akseli tekee yz-tason, y-akseli xz-tason ja z-akseli xy-tason kanssa ja $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ ne kulmat, jotka koordinaatien x', y', z' akselit tekevät edellämainittujen koordinaatitasojen kanssa. Jos nyt koordinaati-polygoonit xyz ja $x'y'z'$ projicioidaan sanottuja tasoja vastaan vedetyille normaaleille, niin saadaan

$$\begin{aligned} x \sin\lambda &= x' \sin\alpha + y' \sin\alpha' + z' \sin\alpha'', \\ y \sin\mu &= x' \sin\beta + y' \sin\beta' + z' \sin\beta'', \\ z \sin\nu &= x' \sin\gamma + y' \sin\gamma' + z' \sin\gamma''. \end{aligned}$$

näisen aseman määräämiseksi tarvitaan ja on kylläksi yleensä kolme vakinaista.

Ajateltakoon origini keskiöksi pallolle, jonka säde on otettu mielinmäärin. Pisteet X, Y, Z ja X', Y', Z', joissa koordinaatistot kohtaavat pallon pintaa, määräävät kaksi pallokolmiota XYZ ja $X'Y'Z'$, joissa kaikki sivut ja kaikki kulmat ovat $= 90^0$. Pitennetään isopyöriön kaari $X'Y'$ kunnes se kohtaa XY-kaarta N-pisteessä; merkitköön ψ kaarta XN, φ kaarta NX' ja θ kulmaa YNY', jota myös vastaa isopyöriön kaari ZZ'. Suureet θ, φ, ψ saattavat nyt määrätä uuden ja alkuperäisen koordinaatiston keskinäisen aseman, ja niillä täytyy siis voida lausua kaikki koefficientit kaavoissa (1).

Kuva 84.



Tätä varten ei tarvitsekaan muuta, kuin sovittaa tähän pallo-trigonometriasta tuo tunnettu sääntö, että pallokolmion sivun cosini on = tulo toisten kahden sivun cosineista + niiden sinien tulo kerrottuna välisen kulman cosinilla.

Huomattakoon ensin, että isopyöriön kaaret*) XX', YX', ZX', XY', YY', ZY', XZ', YZ', ZZ' ovat asteluvultaan yhtäsuuret kuin ne kulmat, joita x'-, y'-, z'-koordinaatien akselit tekevät alkuperäisten koordinaati-akselien kanssa, että niin muodoin $a = \cos XX'$, $b = \cos YX'$, $c = \cos ZX'$ j. n. e. Määrätäksemme nyt esim. a-suuretta, tarkastamme pallokolmiota NXX', jossa $NX' = \varphi$, $NX = \psi$ ja välinen kulma $= 180^0 - \theta$; samoin saadaan b kolmiosta $NX'Y$, jossa kaksi sivua ja välinen kulma ovat $\varphi - 90^0$, ψ, θ; c saadaan kolmiosta $NX'Z$, jossa $NX' = \varphi$, $NZ = 90^0$ (koska Z on polina isopyöriölle XY) ja kulma $X'NZ = 90^0 - \theta$ j. n. e. Yleensä on joka kerta tarkastaminen pallokolmiota, jonka

*) Epäselvyyden karttamiseksi ei näitä kaaria ole kuvassa piirretty; lukija olkoon hyvä ja itse piirrustakoon ne tai, vielä paremmin, kuvailkoon ne vain mielessänsä.

kärkenä on N ja asemana se kaari, jonka cosinia haetaan. Siten saadaan:

$$
\begin{aligned}
a &= \cos XX' = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
b &= \cos YX' = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
c &= \cos ZX' = \sin\varphi\sin\theta,\\
a' &= \cos XY' = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
b' &= \cos YY' = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
c' &= \cos ZY' = \cos\varphi\sin\theta,\\
a'' &= \cos XZ' = \sin\psi\sin\theta,\\
b'' &= \cos YZ' = -\cos\psi\sin\theta,\\
c'' &= \cos ZZ' = \cos\theta.
\end{aligned}
$$

Sijoitettuamme nämä arvot kaavoihin (1), saamme n. s. Euler'in kaavat koordinaatien muutokselle; ja näissä on ainoastaan kolme vakinaista θ, φ, ψ, jotka ovat tarpeelliset uuden koordinaatiston määräämiseksi.

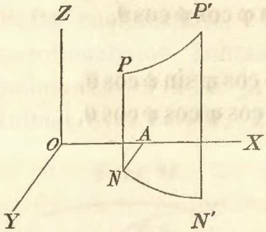
Tässä otaksutaan, että kumpaisenkin koordinaatiston akselit ovat samassa järjestyksessä, niin että ne saattaa langettaa yhteen. Siinä tapauksessa saattaa ajatella koordinaatiston muuttuneeksi kolmen perättäisen kääntymisen kautta, nimittäin niin, että se on kääntynyt 1:o) z-akselin ympäri ψ-kulman, 2:o x-akselin ympäri, joka nyt on yhdessä ON-sivun kanssa, θ-kulman sekä 3:o) uuden z-akselin ympäri, jolla nyt on asema OZ', φ-kulman. Kukin kääntyminen pidetään positivisena, jos se tapahtuu suunnassa XY, YZ tai ZX, mutta negativisena vastaisessa tapauksessa.

Viivain ja pintain yhtälöt.

156. Avaruudessa olevan pisteen asema on määrätty, kun tunnetaan sen kolme koordinaatia, jotka saattavat olla annettuina välittömästi, tai kolmella yhtälöllä, jotka ensin ovat ratkaistavat. Jos sitä vastoin koordinaatit x, y, z ovat lausuttuina ainoastaan kahdella yhtälöllä, niin yksi niistä, esim. x, on mielivallan alainen, sille saattaa antaa jonkun arvon, minkä hyvänsä ja johtaa sitten yhtälöistä vastaavat arvot suureille y ja z. Kukin semmoinen arvosto määrää

avaruudessa jonkun pisteen; niin esim. arvot $x = OA$, $y = AN$, $z = NP$ määräävät avaruudessa P-pisteen. Suureet x ja y itseksensä taas määräävät N-pisteen, joka on P-pisteen projektioni tasolla xy, z-ordinaatan suunnassa. Jos nyt x pannaan vaihtumaan perättäisesti, niin vaihtuu samalla myös y, (koska se riippuu x:stä elikkä, niinkuin sanotaan, on x:n funktioni) ja silloin muodostaa N-piste xy-tasolla jonkun viivan. Mutta samalla vaihtuu myöskin z, jolloin P muodostaa avaruudessa erään viivan, jonka projektionina on N-pisteen muodostama viiva xy-tasolla. Näemme siis, että kaksi yhtälöä suureissa x, y, z edustavat viivaa avaruudessa.

Kuva 85.



Kun taas päinvastoin joku viiva avaruudessa on annettuna, niin on samalla sen projektionikin xy-tasolla määrätty. Jok'ainoa arvo suureella x antaa vastaavat arvot suureille y ja z, niin että kaksi koordinaatia riippuvat kolmannesta. Tämmöisen riippuvaisuuden lausumiseen analytillisesti tarvitaan kaksi yhtälöä, ja niinpä saattaa sanoa, että **avaruusviivan edustajana on kaksi yhtälöä suureissa** x, y, z.

Jos on annettuna yksi ainoa yhtälö koordinaateissa x, y, z, niin saattaa kahdelle niistä (esim. x, y) antaa mielinmääräisiä arvoja, jonka jälkeen yhtälöistä saadaan vastaava arvo suureelle z. Jok'ainoata mielinmäärin otettua pistettä xy-tasolla vastaa siis piste avaruudessa ja viimeksi mainitun pisteen ura on nähtävästi pinta. **Yksi yhtälö suureissa** x, y, z **edustaa siis pintaa.**

Päinvastoin on kullakin, määrätyn säännön mukaan tehdyllä pinnalla yhtälönsä. Koska nimittäin xy-tasolla saattaa ottaa pisteitä mielinmäärin ja niiden kautta vetää z-akselin suuntaisia suoria, kunnes ne sattuvat annettuun pintaan, niin huomataan, että yksi koordinaateista, esim. z, riippuu toisista kahdesta, joiden arvot ovat mielinmääräisiä, ja tämän riippuvaisuuden saattaa lausua yhtälöllä.

Poikkeustapauksissa saattaa kumminkin yksi yhtälö edustaa viivaa tahi pistettä, nimittäin silloin kuin annettu yhtälö voi hajautua kahdeksi tai kolmeksi yhdenaikuiseksi (yht'aikaa voimassaolevaksi) yhtälöksi. Semmoinen on esim. seuraavain yhtälöjen laita:

$$(x+y)^2+z^2=0,$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0.$$

Edellinen vaatii että yht'aikaa on $x+y=0$ ja $z=0$; se edustaa siis suoraa xy-tasolla. Jälkimmäinen taas merkitsee pistettä; sillä se toteutuu ainoastaan määrätyillä arvoilla $x=a$, $y=b$, $z=c$.

Saattaa niinkin tapahtua, ettei yhtälöllä ole yhtään todellista juurta; siinä tapauksessa ei sillä ole mitään geometrillistä merkitystä. Niin esim. yhtälöllä

$$x^2+y^2+z^2+1=0.$$

157. Yhtälö, jossa ei ole kuin x, esim. $x=a$, merkitsee jokaista pistettä, jonka abscissalla on vakinainen arvo a. Kaikki nämä pisteet ovat silminnähtävästi samalla tasolla, joka on yz-tason suuntainen ja leikkaa x-akselia a-matkan päässä originista. Samoin merkitsevät yhtälöt $y=b$ ja $z=c$ kahta tasoa, joista edellinen on xz-, ja jälkimmäinen xy-tason suuntainen. Yhtälöt $x=0$, $y=0$, $z=0$ edustavat siis kukin eriksensä itse koordinaati-tasoja.

Yhtälö, jossa on ainoastaan kaksi koordinaatia x, y, mutta ei kolmatta z, määrää ensinnäkin erään viivan NN' (kuva 85) xy-tasolla; mutta ei siinä kyllin, sillä saattaahan mistä N-pisteestä hyvänsä mainitulla viivalla vetää z-akselin suuntaisen suoran, jonka jok'ainoalla pisteellä ovat x ja y saman arvoisia kuin N-pisteelläkin; näiden koordinaatit toteuttavat niin muodoin annetun yhtälön, jossa z-suuretta ei ole. Tämä yhtälö edustaa siis c y l i n d e r i m ä i s t ä p i n t a a, jonka on muodostanut NN'-viivaa myöten kulkeva, z-akselin suuntainen suora. Yhtälö, jossa on ainoastaan x ja z taikka y ja z edustaa samaten cylinderimäistä pintaa, jonka emäviiva (emä) on y- tahi x-akselin suuntainen.

158. Koska viivaa aina saattaa pitää kahden pinnan läpileikkauksena, niin onkin avaruus-geometrian päätehtävänä pintain esittäminen yhtälöillä. Pinnan yhtälö suorakulmaisissa koordinaateissa saattaa olla algebrallinen tahi transcendenttinen ja edellisessä tapauksessa yksi-, kaksi-, kolmitahi useampi-asteinen. Tässä kirjassa on puhe vain semmoisista pinnoista, joiden yhtälöt ovat yksi- tai kaksi-asteisia.

Lopuksi vielä muuan tärkeä muistutus. Suorakulmaisesta koordinaatistosta siirrytään toiseen 151 ja seuraavan pykälän mukaan siten, että x-, y-, z-suureiden sijaan pannaan eräitä linjallisia (yksiasteisia) funktioneja uusista koordinaateista x', y', z', se on eräitä algebrallisia lausekkeita, joissa uudet koordinaatit ovat ensimmäisessä arvokerrassa. Semmoinen sijoitus tietysti ei saata muuttaa yhtälön astelukua. Tästä päätetään, että annetun pinnan yhtälö on samanasteinen, otettakoon se missä koordinaatistossa hyvänsä.

Toinen Luku.

Taso.

159. Tason yhtälö. — Tason asema on määrätty, niin kohta kuin tunnetaan kuinka pitkä ja minkäsuuntainen on se normaali elikkä kohtisuora, joka originista vedetään siihen. Normaalin pituutta, jonka aina sopii pitää positivisena suureena, merkitköön p; sen suunnan määräävät enemmänkin kuin tesmällensä sen ja koordinaati-akselien väliset kulmat α, β, γ.

Tasolla on se ominaisuus, että jos radius vector mille pisteelle tahansa siinä projicioidaan mainitulle normaalille, niin on projektioni vakinainen ja yhtä suuri kuin itse normaali p; sillä tätä ominaisuutta ei ole yhdenkään pisteen radius vectorilla ulkopuolella tasoa. Kun siis tämä ominaisuus on saatu analytillisesti lausutuksi, niin on samalla tason yhtälökin saatu.

Olkoot x, y, z koordinaateja jollekin tason pisteelle; silloin osoittaa $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$ projektionia sen koordinaati-polygonista ja siis radius vectoristakin mainitulla normaalilla; niin muodoin saadaan

$$(1) \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

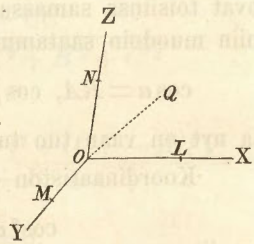
ja koska tämä on voimassa jok'ainoan pisteen suhteen tasossa, niin on se siis tason yhtälö.

160. Päin vastoin käy todistaminen, että jokainen yksiasteinen yhtälö suureissa x, y, z edustaa tasoa. Semmoisen yhtälön yleinen muoto on nimittäin

$$(2) \qquad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Otetaan koordinaati-akseleilla pisteet L, M, N, joiden välimatkat originista (kunkin akselin positiviselle tai negativiselle puolelle) ovat suhteellisia suureille A, B, C, niin että

Kuva 86.



$$OL = kA, \quad OM = kB, \quad ON = kC,$$

jossa k on mielinmääräinen tekijä. Pannaan vielä kohtisuorat tasot: L-pisteen kautta x-akselille, M-pisteen kautta y-akselille ja N-pisteen kautta z-akselille; silloin nämä tasot leikkaavat toisiansa jossakin pisteessä Q, ja projektionit sen radius vectorista OQ koordinaati-akseleille ovat kA, kB, kC. Cosinit niille kulmille, jotka OQ tekee x-, y-, z-akselin kanssa, ovat siis, pannen $OQ = l$, järjestyksessä $\frac{kA}{l}$, $\frac{kB}{l}$, $\frac{kC}{l}$. Olemme siis aluksi löytäneet suoran, jonka suunta-cosinit ovat suhteellisia suureille A, B, C.

Otetaan nyt tarkastettavaksi joku piste (x, y, z), jonka koordinaatit toteuttavat yhtälön (2) ja projicioidaan sen radius vector (taikka koordinaati-polygoni) suoralle OQ; silloin saadaan

$$\frac{kA}{l}x + \frac{kB}{l}y + \frac{kC}{l}z = \frac{k}{l}(Ax + By + Cz) = -\frac{kD}{l},$$

sillä olemmehan otaksuneet, että $Ax + By + Cz = -D$. Projicioitakoon siis suoralle OQ radius vector miltä pisteeltä hyvänsä, jonka koordinaatit vaan täyttävät ehdon (2), niin on projektioni aina sama; nimittäin $-\frac{kD}{l}$, ja siitä seuraa selvästi, että kaikki nämä pisteet ovat tasolla, joka on kohtisuora viivalle OQ.

Täten on todistettu, että yhtälö (2) edustaa tasoa, ja sen lisäksi sekin, että tasolle vedetty normaali tekee koordinaati-akselien kanssa kulmat, joiden cosinit ovat suhteellisia suureille A, B, C; ja näin on laita, olkoot koordinaatit suora- tai vinokulmaisia.

161. Yhtälöä (1) pidämme perus-yhtälönä tasolle ja lähdemme nyt osoittamaan kuinka mikä yksiasteinen yhtälö hyvänsä saadaan siihen muotoon. Jos yhtälöt (1) ja (2) edustavat samaa tasoa, niin huomaamme että A, B, C, D ovat toisiinsa samassa suhteessa kuin $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $-p$; niin muodoin saatamme panna

$$\cos\alpha = RA, \quad \cos\beta = RB, \quad \cos\gamma = RC, \quad -p = RD,$$

ja nyt on vaan tuo tuntematon tekijä R määrättävä.

Koordinaatiston ollessa suorakulmaisena, on aina

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ja siis

$$R^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1,$$

josta

$$R = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Kaava $-p = RD$ osoittaa, että R on otettava positivisena, jos D on negativinen ja päinvastoin. Täten on siis määrätty se tekijä, jolla yhtälö (2) on kerrottava, kun sitä tahdotaan perusmuotoiseksi. Normaalin kulmille saadaan nyt lausekkeiksi

$$\cos\alpha = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

tason kohtisuora välimatka originista on taas

$$p = \frac{\mp D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Koska vastaavia kaavoja vinokulmaisissa koordinaateissa harvoin käytetään, niin jätämme ne johdattamatta.

162. Määrättäköön kulma θ kahden tason välillä, joiden yhtälöt suorakulmaisissa koordinaateissa ovat

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Tasojen välinen kulma on sama kuin niiden normaalien välinen kulma. Edellisen §:n mukaan määrätään cosinit kulmille, jotka kumpikin normaali tekee koordinaati-akselien kanssa ja 147 §:n mukaan saadaan sitten

$$\cos\theta = \pm \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\ \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Tästä johdetaan

$$\sin^2\theta = \frac{(AB' - BA')^2 + (BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2}{(A^2 + B^2 + C^2)\ (A'^2 + B'^2 + C'^2)}.$$

Jos

$$AA' + BB' + CC' = 0,$$

niin on $\cos\theta = 0$ ja tasot siis kohtisuoria toisillensa.

Sitä vastoin on $\sin\theta = 0$ ja tasot niin muodoin yhdensuuntaisia, jos yht'aikaa on

$$AB' - BA' = 0, \quad BC' - CB' = 0, \quad CA' - AC' = 0,$$

toisin sanoen, jos x-, y-, z-suureiden koefficientit kummankin tason yhtälössä ovat suhteellisia, nimittäin

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

Ja helppohan onkin edellisestä selityksestä huomata, että kumpaisenkin tason normaalit tekevät silloin koordinaati-akselien kanssa yhtäsuuret kulmat ja että näin on asian laita ei ainoastaan suora-, vaan vinokulmaisessakin koordinaatistossa.

163. Määrätäksemme pistettä, jossa taso

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

leikkaa x-akselin, panemme $y = 0$, $z = 0$, joten yhtälöstä saamme $Ax + D = 0$ ja siitä $x = -\frac{D}{A}$, ja siinähän on arvo mainitun pisteen abscissalle. Samoin saadaan $y = -\frac{D}{B}$ pisteelle, jossa taso leikkaa y-akselin, ja $z = -\frac{D}{C}$ sille pisteelle, jossa taso leikkaa z-akselin. Jos nyt a, b, c merkitsevät tason leikkaamia osia koordinaati-akseleista, niin on siis

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C},$$

josta

$$A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

Sijoitettuamme nämä arvot ensimmäiseen yhtälöön, saamme tason yhtälölle muodon

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{3}$$

164. Jos taas on määrättävänä se suora, jota myöten taso $Ax + By + Cz + D = 0$ leikkaa xy-tasoa, niin sijoitetaan tason yhtälöön $z = 0$. Kun samalla lailla sijoitetaan $y = 0$ ja $x = 0$, niin saadaan määrätyiksi suorat, joita myöten taso leikkaa xz- ja yz-tasoja. Tason leikkauksia xy-, xz- ja yz-tasojen kanssa osoittavat siis järjestyksessä yhtälöt

$$Ax + By + D = 0, \quad Ax + Cz + D = 0, \quad By + Cz + D = 0.$$

165. Yhtälössä (2) on neljä koefficienttiä A, B, C, D, joilla eri tasojen yhtälöissä on eri arvot. Koska kumminkin yhtälöä saattaa, sen arvoa muuttamatta, jakaa yhdellä niistä, niin ei itsenäisiä vakinaisia olekaan oikeastaan kuin kolme,

ja määräten nämä sopivalla tavalla, saattaa löytää tason, joka täyttää kolme ehtoa.

Jos esim. vaaditaan, että taso

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

kulkisi kolmen annetun pisteen kautta, nimittäin (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''), niin pitää koefficienttien A, B, C, D saada semmoiset arvot, että jok'ainoan annetun pisteen koordinaatit toteuttavat yhtälön; siten saadaan

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0, \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0. \end{aligned}$$

Tässä on nyt kolme tuntematonta, nimittäin suhteet $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$; niiden arvot, saatuina ylläolevista kolmesta yhtälöstä, sijoitetaan sitten tason yhtälöön, joka silloin on kaikin puolin määrätty Tarpeetonta on kumminkin ruveta näitä laskuja tässä tekemään.

Jos annettuna olisi ainoastaan yksi piste (x', y', z'), jonka kautta taso on määrätty kulkevaksi, niin olisi koefficienteillä yleisessä yhtälössä

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ehtona ainoastaan

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0.$$

Näistä saattaa eliminoida ainoastaan yhden vakinaisen, esim. D, joten tason yhtälö saa tämän usein käytetyn muodon

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0.$$

Koefficientit A, B, C pysyvät tässä epämääräisinä ja riippuvat siitä, mihin suuntaan taso pannaan; tunnettuhan on, että nämä koefficientit ovat toisiinsa kuin cosinit niille kulmille, jotka tason normaali tekee koordinaati-akselien kanssa.

166. Pisteen ja tason välimatka. — Olkoot x', y', z' annetun pisteen koordinaatit ja δ sen kohtisuora väli-

matka annetusta tasosta, jonka perusmuotoinen yhtälö olkoon

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0.$$

Pisteen (x', y', z') radius vector ja δ-matka muodostavat murtoviivan, jonka projektioni originista tasolle vedetyllä kohtisuoralla on yhtä suuri kuin itse tämä kohtisuora. Radius vectorin projektionilla on lausekkeena $x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma$; δ-matkan projektioni taas on joko $+\delta$ tahi $-\delta$, sitä myöten kuin piste (x', y', z') on samalla puolen tasoa kuin originikin tai vastaisella puolella. Siis on

$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma \pm \delta = p,$$

josta

$$\mp \delta = x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma - p.$$

Sanoihin puettuna tämä kuuluu:

Pisteen ja tason välimatka saadaan, jos vasempaan jäseneen tason perusmuotoista yhtälöä suureiden x, y, z sijaan pannaan annetun pisteen koordinaatit. Näin saatu lauseke on negativinen tai positivinen sitä myöten kuin piste ja origini ovat samalla puolen tai eri puolilla tasoa.

Yleensä lausuu $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p$ (merkkiä vailla) välimatkan siitä pisteestä, jonka koordinaatit ovat x, y, z, siihen tasoon, jonka yhtälö on

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0.$$

Jos tason yhtälö ei ole perusmuodossa, vaan jossakin muussa, esim.

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

niin saadaan se perusmuotoiseksi, kun se kerrotaan eräällä vakinaisella tekijällä R, joka riippuu ainoastaan koefficienteista A, B, C (161 §). Pisteen (x', y', z') ja puheenalaisen tason välimatkalla on silloin lausekkeena

$$\mp \delta = R(Ax' + By' + Cz' + D).$$

Yleensä lausuu $Ax + By + Cz + D$, kerrottuna eräällä vakinaisella tekijällä, välimatkan pisteestä (x, y, z) siihen tasoon, jonka yhtälönä on $Ax + By + Cz + D = 0$.

Suorakulmaisessa koordinaatistossa on R-tekijällä se arvo, joka on saatu sille 161 §:ssä; edellinen kaava on siinä tapauksessa

$$\pm\delta=\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

se on: pisteen ja tason välimatka saadaan, jos vasemmassa jäsenessä tason yhtälöä x, y, z sijoitetaan annetun pisteen koordinaateilla ja siten syntynyt lauseke jaetaan neliöjuurella summasta, joka saadaan, kun x-, y-, z-suureiden koefficienttien neliöt lasketaan yhteen.

Koska R ja D ovat vastaismerkkisiä, niin on selvä, että vasta mainittu välimatkan lauseke saa saman merkin kuin D:llä on, jos piste ja origini ovat samalla puolen tasoa, mutta vastaisen merkin, kun ne ovat eri puolilla tasoa.

Lyhempi merkitsemistapa.

167. Avaruudenkin geometriassa on usein edullista merkitä yhtälöitä lyhemmällä tavalla, josta jo 29 §:ssä oli puhetta. Otamme muutamia esimerkkejä asian selvikkeeksi.

Merkitkööt A ja A' seuraavia lausekkeita

$$A=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p,$$
$$A'=x\cos\alpha'+y\cos\beta'+z\cos\gamma'-p';$$

silloinhan A ja A' myös osoittavat kohtisuoria välimatkoja pisteestä (x, y, z) tasoihin, joiden yhtälöinä ovat $A=0$ ja $A'=0$. Jos pannaan $A=A'$, niin lausutaan sillä, että mainitut välimatkat ovat yhtäsuuret ja yhdenmerkkiset. Siinä tapauksessa on pisteen (x, y, z) urana nähtävästi taso, joka jakaa kahtia tasojen välisen kulman, nimittäin sen, jonka aukeamassa origini on. Niinmuodoin on

$$A-A'=0$$

tämän jakajatason yhtälö. Jos taas pannaan

$$A+A'=0,$$

niin on sillä lausuttu, että välimatkat pisteestä (x, y, z) tasoihin ovat yhtäsuuret, mutta vastaismerkkiset. Tämä yhtälö edustaa siis tasoa, joka jakaa kahtia toisen annettujen tasojen välisistä kulmista. Siis:

Jos $A=0$ ja $A'=0$ ovat kahden annetun tason perusmuotoisia yhtälöitä, niin merkitsevät yhtälöt $A-A'=0$ ja $A+A'=0$ tasoja, jotka jakavat kahtia annettujen tasojen väliset kulmat.

Jakajatasojen välinen kulma on nähtävästi suora. Jos siis tahtoo todistaa, että kaksi tasoa jossakin annetussa tapauksessa ovat kohtisuoria toisilleen, niin on niiden yhtälöt pantavat muotoon $A-A'=0$, $A+A'=0$.

168. Jos $L=0$ ja $M=0$ ovat kahden L- ja M-tason yhtälöt, missä muodossa hyvänsä, siis kaksi yksi-asteista yhtälöä suureissa x, y, z, niin yleensä

$$L+kM=0$$

on yhtälö kolmannelle tasolle, joka kulkee kahden edellisen tason leikkaussuoran kautta. Tämä yhtälö on nimittäin yksiasteinen ja edustaa siis tasoa; sen toteuttavat sitä paitsi kaikki ne x-, y-, z-suureiden arvot, jotka yht'aikaa tekevät $L=0$ ja $M=0$, toisin sanoen kaikkien niiden pisteiden koordinaatit, jotka ovat yhteisiä sekä L- että M-tasolle. Uuden tason suunta riippuu ainoastaan koefficientista k; antaen tälle eri arvoja, saadaan vähitellen määrätyiksi kaikki tasot, jotka kulkevat L- ja M-tason leikkausviivan kautta.

Jos esim. olisi annettuina kaksi tasoa

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad A'x+B'y+C'z+D'=0$$

ja haettaisiin yhtälöä kolmannelle tasolle, joka kulkee edellisten leikkausviivan ja sitä paitsi pisteen (x', y', z') kautta, niin muodostetaan ensin uusi yhtälö

$$Ax+By+Cz+D+k(A'x+B'y+C'z+D)=0$$

ja määrätään k semmoiseksi, että koordinaatit x', y', z' toteuttaisivat edellisen yhtälön, että siis

$$Ax'+By'+Cz'+D+k(A'x'+B'y'+C'z'+D')=0.$$

Kun nyt k on näiden välillä eliminoitu, niin saadaan haetuksi yhtälöksi

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{Ax' + By' + Cz' + D} = \frac{A'x + B'y + C'z + D'}{A'x' + B'y' + C'z' + D'}.$$

169. Kolme tasoa, joiden yhtälöt $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ täyttävät identtisyyden

$$lL + mM + nN = 0,$$

leikkaavat toisiansa samaa suoraa myöten.

Tämän identtisyyden nojalla katoaa nimittäin N kaikissa niissä x-, y-, z-suureiden arvoissa, jotka yht'aikaa tekevät $L = 0$ ja $M = 0$, ja siitä seuraa, että kaikki pisteet L- ja M-tasojen leikkaussuoralla kuuluvat myöskin N-tasoon.

Neljä tasoa, joiden yhtälöt $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$ täyttävät identtisyyden

$$lL + mM + nN + pP = 0,$$

leikkaavat toisiansa samassa pisteessä.

Kolmen ensinmainitun tason yhteinen leikkauspiste saadaan nimittäin siten, että haetaan ne x-, y-, z-suureiden arvot, jotka yht'aikaa toteuttavat yhtälöt $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$. Mutta voimassaolevan identtisyyden nojalla täytyy samain arvojen toteuttaa myös yhtälö $P = 0$, ja tämä todistaa saman leikkauspisteen kuuluvan neljänteenkin tasoon.

Näiden kahden väitteen avulla saattaa usein helposti todistaa, että muutamat tasot leikkaavat toisiansa samaa suoraa myöten tahi samassa pisteessä. Siitä muutama esimerkki.

170. Olkoon tunnettuina kolmen tason perusmuotoiset yhtälöt

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0.$$

Nämä tasot muodostavat kahdeksan triedrillistä kulmaa eli nurkkaa, joista otamme tarkastettavaksi sen, jossa origini on. Tasot, jotka jakavat kahtia kussakin nurkassa kahden annetun tason välisen kulman, merkitään (167 §) yhtälöillä

$$A_0 - A_1 = 0, \quad A_1 - A_2 = 0, \quad A_2 - A_0 = 0.$$

Koska nyt summa näiden yhtälöiden vasemmista jäsenistä on identtisesti $=0$, niin seuraa siitä ensimmäisen väitteen mukaan edellisessä §:ssä, että kolme jakajatasoa leikkaavat toisiansa samaa suoraa myöten.

Saadaksemme tätä sopivammin lausutuksi sanoilla, ajateltakoon pallo, jonka keskiönä on kolmen annetun tason yhteinen leikkauspiste. Nämä kolme tasoa leikkaavat pallon pintaan sferillisen kolmion. Kolme jakajatasoa taas muodostavat pallon pinnalla kolme isopyöriötä, jotka jakavat kahtia sferillisen kolmion kulmat. Niin muodoin:

Isopyöriöt, jotka jakavat kahtia sferillisen kolmion kulmat, leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

Yhtälöt taas niille tasoille, jotka jakavat kahtia yllämainittujen nurkkien ulkopuoliset kallistuskulmat, ovat

$$A_0 + A_1 = 0, \quad A_1 + A_2 = 0, \quad A_2 + A_0 = 0.$$

Kun vasemmat jäsenet kahdessa jälkimmäisessä yhtälössä yhdistetään vasemman jäsenen kanssa yhtälössä $A_0 - A_1 = 0$, niin saadaan identtisyys

$$(A_1 + A_2) - (A_2 + A_0) + (A_0 - A_1) = 0$$

ja siitä päätetään:

Isopyöriöt, jotka jakavat kahtia sferillisen kolmion kaksi ulkokulmaa ja kolmannen sisäkulman, leikkaavat toisiansa samassa pisteessä.

171. Samoin saattaa tutkia niitä neljää tasoa, jotka muodostavat tetraedrin ja joiden perusmuotoisina yhtälöinä olkoot

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0.$$

Originin ollessa tetraedrin sisässä, saamme tasoille, jotka jakavat kahtia sivutasojen väliset sisäkulmat, yhtälöiksi:

$$(1) \quad \begin{cases} A_0 - A_1 = 0, & A_1 - A_2 = 0, \quad A_2 - A_3 = 0, \\ A_0 - A_2 = 0, & A_1 - A_3 = 0, \\ A_0 - A_3 = 0, & \end{cases}$$

ja yhtälöiksi tasoille, jotka jakavat kahtia ulkokulmat:

$$(2)\quad \begin{cases} A_0+A_1=0, & A_1+A_2=0, \quad A_2+A_3=0, \\ A_0+A_2=0, & A_1+A_3=0, \\ A_0+A_3=0, & \end{cases}$$

Koska nyt kolmesta ensimmäisestä yhtälöstä systeemassa (1) saattaa johtaa saman systeeman muut kolme yhtälöä, niin seuraa (toisen väitteen mukaan 169 §:ssä), että:

Kuusi tasoa, jotka jakavat kahtia sivutasojen väliset kulmat tetraedrissa, kulkevat kaikki saman pisteen kautta. Tämä piste on, niinkuin tiedetään, tetraedriin sovitetun pallon keskiö.

Mutta seuraavatkin yhtälöt

$$\begin{aligned} A_0-A_1&=0, & A_0+A_3&=0, \\ A_1-A_2&=0, & A_1+A_3&=0, \\ A_2-A_0&=0, & A_2+A_3&=0, \end{aligned}$$

merkitsevät tasoja, jotka leikkaavat toisiansa samassa pisteessä, koska vasemman puoliset kolme yhtälöä saattaa johtaa kolmesta oikeanpuolisesta. Täten on todistettu, että:

Tasot, jotka jakavat kahtia kolmen sivutason väliset kulmat tetraedrissa, ja ne tasot, jotka jakavat kahtia ulkokulmat neljännen sivutason ja muiden kolmen välillä, leikkaavat toisiansa samassa pisteessä. Tämä piste on keskiönä pallolle, joka ulkopuolella sivuaa tetraedrin sivutasoja.

172. Harmonilliset tasot. — Tarkastelkaamme vielä kahta tasoa, joiden perusmuotoisina yhtälöinä ovat $A_0=0$ ja $A_1=0$. Yhtälö

$$A_0-\lambda A_1=0,$$

elikkä $A_0:A_1=\lambda:1$, lausuu silloin, että kummallekin tasolle pisteestä (x, y, z) vedetyt kohtisuorat ovat toisiinsa niinkuin $\lambda:1$. Semmoisen pisteen urana on nähtävästi taso, joka kulkee annettujen tasojen leikkaussuoran kautta ja tekee niiden kanssa kulmat, joiden sinit ovat toisiinsa kuin $\lambda:1$. Samalla lailla nähdään, että yhtälö

$$A_0+\lambda A_1=0$$

edustaa toista tasoa, joka kulkee saman leikkaussuoran kautta ja jakaa toisen kulman annettujen tasojen välillä niin, että osakulmain sinit ovat toisiinsa kuin $\lambda : 1$.

Neljä tasoa A, B, C, D, jotka kulkevat saman suoran kautta, ovat harmonillisia, jos sinit niille kulmille, jotka kaksi niistä, esim. B ja D, tekevät toisten kahden kanssa, ovat suhteellisia, nimittäin

$$\sin(BA) : \sin(BC) = \sin(DA) : \sin(DC).$$

Silloin sanotaan, että A ja C toiselta sekä B ja D toiselta puolen ovat keskenänsä liittolaisia (konjugillisia) elikkä että ne muodostavat harmonilliset parit.

Edellisestä seuraa, että yhtälöt

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_0 - \lambda A_1 = 0, \quad A_0 + \lambda A_1 = 0$$

edustavat neljää harmonillista tasoa, joista kaksi edellistä tekevät toisen ja kaksi jälkimmäistä toisen liittolaisparin.

Yleensä, jos tasot on annettu minkä-muotoisissa yhtälöissä tahansa

$$L = 0, \quad M = 0,$$

niin yhtälöt

$$L - kM = 0, \quad L + kM = 0$$

osoittavat toista kahta tasoa, jotka ovat harmonillisia kahden edellisen suhteen. Sen huomaa pian, jos edelliset kaksi yhtälöä tehdään perusmuotoisiksi, kertoen nimittäin eräillä vakinaisilla tekijöillä l, m. Silloin saattaa nämä neljä yhtälöä kirjoittaa näin:

$$lL = 0, \quad mM = 0, \quad lL - \frac{kl}{m} mM = 0, \quad lL + \frac{kl}{m} mM = 0$$

ja nyt nähdään niiden edustavan neljää harmonillista tasoa, joiden välikulmain sineillä on suhda $kl : m$.

Neljästä harmonillisesta tasosta saattaa valita kolme mielinmäärin, ja nämä määräävät neljännen. Jos pari A, C on annettuna ja B kääntyy tasojen leikkaussuorassa, niin saattaa, tutkien kulmain sinien välistä yhtäläisyyttä, pian huomata, minkä aseman neljäs taso erikoistapauksissa ottaa. Jos esim. B jakaa kahtia toisen kulman A- ja C-tason välillä, niin neljäs taso D jakaa kahtia toisen; jos B-taso yhtyy C-tasoon, niin D-tasokin yhtyy C-tasoon.

Ajateltakoon, että suora leikkaa harmonilliset tasot A, B, C, D neljässä pisteessä a, b, c, d ja että b-pisteestä vedetään kohtisuorat p, q sekä d-pisteestä kohtisuorat p', q' tasoille A ja C. Silloin nähdään, että sinit niille kulmille, jotka B ja D tekevät A- ja C-tason kanssa ovat toisiinsa kuin nämä kohtisuorat; ja koska mainitut neljä siniä ovat suhteellisia, niin on myös $p:q = p':q'$ eli

$$p:p' = q:q'.$$

Mutta nyt on silminnähtävästi $p:p' = ba:da$ ja $q:q' = bc:dc$; niin muodoin on myös $ba:da = bc:dc$ elikkä muuttamalla

$$ba:bc = da:dc,$$

s. o. välimatkat pisteistä b ja d pisteisin a ja c ovat suhteellisia, ja siitä seuraa, että puheenalaiset neljä pistettä a, b, c, d ovat harmonilliset.

Jos taas tiedetään, että pisteet a, b, c, d ovat harmonilliset, niin saattaa päinvastaisessa järjestyksessä todistaa, että tasot A, B, C, D ovat myöskin harmonilliset. Täten olemme saaneet seuraavat kaksi väitettä:

Kukin suora leikkaa neljää harmonillista tasoa neljässä harmonillisessa pisteessä.

Neljä tasoa, jotka leikkaavat toisiansa samaa suoraa myöten, ovat harmonilliset, jos ne kulkevat neljän harmonillisen pisteen kautta.

Kolmas Luku.

Suorat avaruudessa.

173. Avaruus-suoran yhtälöt. — Suoraa avaruudessa saattaa aina pitää kahden tason leikkauksena; sen

vuoksi sitä merkitäänkin yleensä kahdella yht'aikaisella yksiasteisella yhtälöllä

$$(1)\quad \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A'x+B'y+C'z+D'=0. \end{cases}$$

Kun näistä yhtälöistä eliminoidaan ensin y ja sitten x, niin saadaan toista kaksi yhtälöä, joiden muoto on:

$$(2)\quad \begin{cases} x=mz+p, \\ y=nz+q. \end{cases}$$

Nämä toteutuvat samoilla x-, y-, z-suureiden arvoilla kuin edellisetkin ja saattavat niin muodoin olla niiden sijassa. Yhtälöt (2), erikseen tarkastettuina, edustavat kahta tasoa, joista edellinen on y- ja jälkimmäinen x-akselin suuntainen ja joiden kautta niiden leikkaussuora projicioidaan (sanottujen akselien suunnassa) xz- ja yz-tasolle. Ahtaammassa merkityksessä edustaa yhtälö $x=mz+p$ suoran projektionia xz-tasolla ja yhtälö $y=nz+p$ sen projektionia yz-tasolla.

Koordinaatit sille pisteelle, jossa suora sattuu xy-tasoon, ovat $x=p$, $y=q$, $z=0$, niinkuin huomataan, jos yhtälöissä (2) tehdään $z=0$. Suoran suunta riippuu koefficienteistä m, n. Koska yhdensuuntaisten suorain projektionit samalla tasolla ovat yhdensuuntaisia, niin on selvä, että mainittujen koefficienttien täytyy olla samat kahden yhdensuuntaisen suoran yhtälöissä. Tämän mukaan merkitsevät yhtälöt

$$x=mz,\quad y=nz$$

suoraa, joka originin kautta vedetään samansuuntaiseksi kuin suora (2).

Itse koordinaati-akseleja edustavat seuraavat yhtälöt:

x-akselia: $y=0,\quad z=0,$
y-akselia: $z=0,\quad x=0,$
z-akselia: $x=0,\quad y=0.$

174. Suoran yhtälössä (2) on neljä vakinaista m, n, p, q, joiden arvo riippuu suoran suunnasta, ja nämä vakinaiset saattaa määrätä niin, että suora täyttää jotkut ehdot.

Vaadittakoon ensin, että suora kulkisi kahden annetun pisteen kautta, nimittäin (x', y', z') ja (x'', y'', z''). Yhtälöt (2) toteutuvat silloin, jos niihin x-, y-, z-suureiden sijaan pannaan annettujen pisteiden koordinaatit, joten saadaan

$$(\alpha) \qquad x' = mz' + p, \quad y' = nz' + q,$$
$$(\beta) \qquad x'' = mz'' + p, \quad y'' = nz'' + q.$$

Näistä yhtälöistä saattaa nyt laskea suureet m, n, p, q ja sijoittaa niiden arvot yhtälöihin (2). Mutta eliminationi toimitetaan paraiten siten, että (α) otetaan pois yhtälöistä (2) ja sitten (β) pois yhtälöistä (α); siten tulee

$$x - x' = m(z - z'), \quad y - y' = n(z - z'),$$
$$x' - x'' = m(z' - z''), \quad y' - y'' = n(z' - z''),$$

ja kun nämä jaetaan kaksittain, niin saadaan kaksois-kaava

$$(3) \qquad \frac{x - x'}{x' - x''} = \frac{y - y'}{y' - y''} = \frac{z - z'}{z' - z''},$$

joka vastaa kahta yhtälöä ja edustaa haettua suoraa.

Jos taas vaadittaisiin, että suora kulkisi yhden annetun pisteen (x', y', z') kautta, niin toimitetaan eliminationi ainoastaan yhtälöjen (α) ja (2) välillä. Siten eliminoidaan p ja q ja saadaan

$$x - x' = m(z - z'), \quad y - y' = n(z - z')$$

eli

$$(4) \qquad \frac{x - x'}{m} = \frac{y - y'}{n} = \frac{z - z'}{1}.$$

Tämä kaava merkitsee siis yleensä suoraa, joka kulkee pisteen (x', y', z') kautta. Koefficientit m, n ovat tässä vielä epämääräisiä ja riippuvat siitä, minkä suunnan tahtoo suoralle antaa.

175. Suoran ja tason leikkauspiste saadaan, kun tutkitaan, mitkä x-, y-, z-suureiden arvot yht'aikaa toteuttavat sekä suoran yhtälöt

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

että tason yhtälön

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Kun x ja y näistä eliminoidaan, niin saadaan

$$A(mz+p)+B(nz+q)+Cz+D=0,$$

josta

$$z=-\frac{Ap+Bq+D}{Am+Bn+C},$$

ja kun tämä sijoitetaan suoran yhtälöihin, niin saadaan niistä x- ja y-suureiden arvot.

Jos nimittäjä $Am+Bn+C$ on $=0$, niin on $z=\infty$ ja silloin on leikkauspiste äärettömän kaukana. Yhtälö

$$Am+Bn+C=0$$

lausuu siis, että suora ja taso ovat yhdensuuntaisia.

Jos olisi yht'aikaa

$$Ap+Bq+D=0,\quad Am+Bn+C=0,$$

niin olisi z-suureen arvo epämääräinen. Suoralla ja tasolla olisi silloin äärettömän monta yhteistä pistettä, toisin sanoen suora olisi itse tasolla. Viimeksi mainituista yhtälöistä lausuu jälkimmäinen, että suora ja taso ovat yhdensuuntaisia, ja edellinen, että tasolla on se piste $(p, q, 0)$, jossa suora kohtaa xy-tasoa.

176. **Kahden suoran leikkauspiste.** — Suorain yhtälöinä olkoot

$$\left.\begin{aligned} x&=mz+p\\ y&=nz+q\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} x&=m'z+p'\\ y&=n'z+q'\end{aligned}\right\}.$$

Näiden suorain leikkauspiste löydetään jälleen, kun tutkitaan, mitkä x-, y-, z-suureiden arvot toteuttavat kumpaisenkin suoran yhtälöt. Mutta tätä ei saakaan aina ratkaistuksi, koska tässä on yhtälöitä enemmin kuin tuntemattomia. Ja erikoistapauksenahan onkin pidettävä se, että kaksi suoraa avaruudessa kohtaavat toisensa.

Eliminoimalla x ja y saadaan

$$(m-m')z+p-p'=0,$$
$$(n-n')z+q-q'=0;$$

ja kun näistä vielä eliminoidaan z, niin saadaan yhtälö pelkissä tunnetuissa suureissa, joka lausuu, millä ehdolla suorat leikkaavat toisiansa, nimittäin

$$(5) \qquad \frac{m-m'}{p-p'}=\frac{n-n'}{q-q'}.$$

Kun tämä ehto on täytetty, niin leikkaavat suorat toisiansa pisteessä, jonka

$$z=-\frac{p-p'}{m-m'}=-\frac{q-q'}{n-n'},$$

ja jonka muut koordinaatit saadaan, kun tämä z-suureen arvo sijoitetaan toisen tai toisen suoran yhtälöön.

Muist. Kun $m=m'$ ja $n=n'$, on ehto (5) täytetty, vaikk'eivät suorat silloin leikkaakaan toisiaan, vaan ovat yhdensuuntaiset. Erehdyksen välttämiseksi on senvuoksi yhtälö (5) oikeastaan ymmärrettävä ainoastaan ehtona siihen, että suorat ovat samalla tasolla ja niinmuodoin saattavat sattua toisiinsa, sattukoot sitten äärellisen tahi äärettömän matkan päässä.

177. Tähän saakka on suoraa tutkittu kahden tason leikkauksena, jonka vuoksi sitä on merkittykin kahdella yksiasteisella yhtälöllä. Sopivampi muoto suoran yhtälölle saadaan sitä vastoin, jos määrätään suoran asema jonkun siinä olevan A-pisteen koordinaateilla a, b, c ja niillä kulmilla α, β, γ, jotka suora tekee koordinaati-akselien kanssa. Olkoon selvyyden vuoksi koordinaatisto suorakulmainen.

Otetaan suoralla mielin määrin joku piste P; olkoot x, y, z sen koordinaatit ja ϱ sen välimatka annetusta A-pisteestä. AP-suoran projektionit kolmelle koordinaati-akselille ovat

$$(6) \qquad \begin{cases} x-a=\varrho\cos\alpha, \\ y-b=\varrho\cos\beta, \\ z-c=\varrho\cos\gamma, \end{cases}$$

ja kun näistä ϱ eliminoidaan, niin saadaan

$$(7) \qquad \frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}.$$

Tämä kaava vastaa kahta yksiasteista yhtälöä suureissa x, y, z ja edustaa niin muodoin suoraa, joka kulkee pisteen (a, b, c) kautta ja tekee koordinaati-akselien kanssa kulmat α, β, γ. Viimeksi saadun kaavan (7) asemesta käytetään välistä kolmea yhtälöä (6), joissa on neljä vaihtuvaa x, y, z, ϱ ja joiden geometrillinen merkitys on sama.

Koska kaava (7) ei muutu arvossansa, jos kukin nimittäjä kerrotaan samalla luvulla, niin sopii suureiden $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sijaan ottaa kolme muuta suuretta l, m, n, jotka ovat suhteellisia niille. Kaava

$$(8) \qquad \frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

merkitsee siis yleensä suoraa, joka kulkee pisteen (a, b, c) kautta ja jonka suuntacosinit ovat suhteellisia suureille l, m, n.

Jos taas kaava (8), joka osoittaa keskinäistä yhteyttä pisteen koordinaatien x, y, z välillä, on annettuna, niin on helppo löytää mainitun pisteen ura. Uran täytyy nimittäin olla suoran viivan, koska kaava (8) on sama kuin kaksi yksiasteista yhtälöä suureissa x, y, z; tämän suoran täytyy sitä paitsi kulkea pisteen (a, b, c) kautta, koska kaava toteutuu arvoilla $x = a$, $y = b$, $z = c$; lopuksi täytyy suoran suuntacosinien olla suhteellisia suureille l, m, n, sillä nämä cosinit ovat suhteellisia suureille $x-a$, $y-b$, $z-c$ ja nämä taas kaavan (8) mukaan ovat toisiinsa kuin l, m, n.

Saadaksemme taas kulmat α, β, γ, suoran ja koordinaati-akselien välillä, annamme vaan sen yhtälölle muodon (8); silloin nimittäin on

$$\frac{\cos\alpha}{l} = \frac{\cos\beta}{m} = \frac{\cos\gamma}{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \text{*)}$$

*) Tämä neljäs murtoluku on saatu kolmesta edellisestä siten, että on otettu neliöjuuri sekä osoittajain neliöiden summasta että nimittäjäin neliöiden summasta (vrt. viittaa siv. 65).

josta

$$(9)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \pm \dfrac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \\ \cos\beta = \pm \dfrac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \\ \cos\gamma = \pm \dfrac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \end{cases}$$

Koska näissä kaavoissa saattaa ottaa joko kaikissa $+$ merkit tai kaikissa $-$ merkit, niin saadaan suureille $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kaksi eri arvoryhmää, jotka vastaavat suoran kahta vastaista suuntaa.

Jos $l = 0$, niin on suora viiva kohtisuorassa x-akselille ja siis yz-tason suuntainen; jos yht'aikaa on $l = 0$ ja $m = 0$, niin suora on z-akselin suuntainen.

Koska yhtälöt (2) $x = mz + p$, $y = nz + q$ saattaa asettaa muotoon

$$\frac{x-p}{m} = \frac{y-q}{n} = \frac{z-0}{1},$$

niin nähdään niiden edustavan suoraa, joka kulkee pisteen $(p, q, 0)$ kautta ja jonka suuntacosinit ovat toisiinsa kuin m, n, 1.

Esim. 1. Jos suoran yhtälöinä ovat $x = 2z - 1$, $y = -3z + 2$, niin saattaa ne muodostaa näin:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1}$$

ja siitä näkyy, että suora kulkee pisteen $(-1, +2, 0)$ kautta ja että sen suuntacosinit ovat toisiinsa kun $2, -3, 1$.

Esim. 2. Mikä suunta on suoralla $my - nx = 0$, $z = c$? — Koska nämä yhtälöt myöskin saattaa kirjoittaa

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z-c}{0},$$

niin huomataan, että suora kulkee pisteen $(0, 0, c)$ kautta z-akselilla ja että sen suuntacosinit ovat

$$\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad 0.$$

Suora on siis kohtisuorassa z-akselille.

178. Kahden suoran välinen kulma. — Jos l, m, n ja l', m', n' merkitsevät cosineja kulmille, jotka kaksi suoraa tekevät koordinaati-akselien kanssa, ja θ itse suorain välistä kulmaa, niin on 147 §:n mukaan

$$\cos\theta = ll' + mm' + nn'.$$

Mutta jos l, m, n ja l', m', n' merkitsevät suureita, jotka ovat ainoastaan suhteellisia suorain suuntacosineille, niin saadaan, kuten kaavoista (9) näkyy, näille cosineille todelliset lausekkeensa, kun kukin suureista l, m, n jaetaan suureella $\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}$ ja kukin suureista l', m', n' suureella $\pm\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}$. Silloin saadaan suorain väliselle kulmalle lausekkeeksi

$$\cos\theta = \pm\frac{ll'+mm'+nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}.$$

Suorat ovat kohtisuoria toisilleen, jos

$$ll'+mm'+nn'=0;$$

ne ovat yhdensuuntaisia, jos

$$\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}.$$

Es. Olkoot suorain yhtälöinä:

$$\left.\begin{array}{l} x=-2z+5 \\ y=\quad 3z-1 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} x=z+1 \\ y=2z \end{array}\right\}.$$

Silloin ovat edellisen suoran suuntacosinit toisiinsa kuin -2, 3, 1 ja jälkimmäisen kuin 1, 2, 1; cosini suorain väliselle kulmalleon $=\pm\frac{5}{\sqrt{84}}$.

179. Suoran ja tason välinen kulma on komplementti sille kulmalle, jonka suora tekee tason normaalin kanssa. Jos normaalin suuntacosinit ovat toisiinsa kuin A, B, C ja suoran suuntacosinit kuin l, m, n sekä jos φ merkitsee suoran ja tason välistä kulmaa, niin on

$$\sin\varphi = \pm\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}};$$

ja tästä päätetään, että suora on tason suuntainen, jos

$$Al+Bm+Cn=0,$$

ja että suora on kohtisuorassa tasolle, jos

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

Probleemoja suorasta ja tasosta.

180. Haettakoon yhtälö suoralle, joka kulkee annetun pisteen kautta ja on kohtisuora annetulle tasolle.

Olkoot x', y', z' annetun pisteen koordinaateja ja $Ax+By+Cz+D=0$ annetun tason yhtälö. Cosinit niille kulmille, jotka tason normaali tekee koordinaati-akselien kanssa, ovat silloin suhteellisia koefficienteille A, B, C (160 §). Koska nyt haetulla suoralla on sama suunta kuin normaalillakin, niin saamme siis sen yhtälöiksi:

$$\frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}.$$

181. Haettakoon yhtälö tasolle, joka kulkee annetun pisteen (x', y', z') kautta ja on kohtisuorassa annetulle suoralle.

Yhtälö tasolle, joka kulkee pisteen (x', y', z') kautta, on yleensä muodoltaan

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

Taso on kohtisuorassa annetulle suoralle, kun vaan koefficientit A, B, C ovat toisiinsa kuin suoran suuntacosinit. Jos suoran yhtälöinä on esim.

$$x=mz+p, \quad y=nz+q,$$

jolloin sen suuntacosinit ovat suhteellisia suureille m, n, 1, niin tulee tason yhtälöksi

$$m(x-x')+n(y-y')+z-z'=0.$$

182. Haettakoon välimatka pisteestä (x', y', z') suoraan

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}.$$

Suorakulmaisesta kolmiosta APM (kuva puuttuu), jossa P on annettu piste (x', y', z'), M sen projektioni annetulla suoralla ja A se piste samalla suoralla, jonka koordinaatit ovat a, b, c, saadaan haetun PM-matkan lausekkeeksi

$$PM = AP \sin PAM.$$

Nyt on

$$\overline{AP}^2 = (x'-a)^2+(y'-b)^2+(z'-c)^2$$

ja jos α, β, γ sekä α', β', γ' merkitsevät kulmia, joita suorat AM ja AP tekevät koordinaati-akselien kanssa, niin on myös (vrt. 148 §):

$$\sin^2 PAM = (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta)^2 + (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma)^2 + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\gamma'\cos\alpha)^2.$$

Mutta AM-suoran suuntacosinit ovat l, m, n, jaettuina suureella $\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}$; AP-suoran suuntacosinit ovat $x'-a$, $y'-b$, $z'-c$, jaettuina suureella $\pm\sqrt{(x'-a)^2+(y'-b)^2+(z'-c)^2}$. Sijoitettuamme nyt nämä arvot, saamme PM-matkan neliölle lausekkeeksi:

$$\frac{[m(x'-a)-l(y'-b)]^2+[n(y'-b)-m(z'-c)]^2+[l(z'-c)-n(x'-a)]^2}{l^2+m^2+n^2}.$$

183. Haettakoon semmoisen tason yhtälö, joka annetun suoran kautta vedetään kohtisuoraksi annetulle tasolle.

Suoran yhtälöinä olkoot

$$A'x+B'y+C'z+D=0, \quad A''x+B''y+C''z+D''=0$$

ja annetun tason yhtälönä

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Kaksi edellistä yhtälöä edustavat kumpikin erikseen kahta tasoa, joiden leikkauksena on annettu suora. Yhtälö kolmannelle tasolle, joka kulkee saman suoran kautta, on siis (168 §) yleensä muodoltaan

$$A'x+B'y+C'z+D'+k(A''x+B''y+C''z+D'')=0.$$

Jotta nyt tämä taso olisi kohtisuorassa annetulle tasolle, täytyy seuraavan ehdon olla täytettynä

$$A(A'+kA'')+B(B'+kB'')+C(C'+kC'')=0,$$

josta

$$k=-\frac{AA'+BB'+CC'}{AA''+BB''+CC''}.$$

Sijoitettuamme tämän k-suureen arvon, saamme haetun yhtälön:

$$\frac{A'x+B'y+C'z+D'}{AA'+BB'+CC'}=\frac{A''x+B''y+C''z+D''}{AA''+BB''+CC''}.$$

Saman tehtävän saattaa suorittaa toisellakin tavalla. Koska haetun tason normaalin pitää olla yht'aikaa kohtisuorassa sekä annetulle suoralle että annetun tason normaalille, niin saattaa täten 149 §:n mukaan määrätä ensinmainitun normaalin suuntacosinit ja siten saada koefficientit suureille x, y, z haettuun yhtälöön. Olkoot, mukavuuden vuoksi, suoran yhtälöt annettuina muodossa

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},$$

ja tason yhtälönä kuin ennenkin

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

niin että suoran suuntacosinit ovat suhteellisia suureille l, m, n ja tason normaalin suuntacosinit suureille A, B, C; silloin huomaamme, että haetun tason normaalin suuntacosinit ovat toisiinsa kuin

$$Bn-Cm,\quad Cl-An,\quad Am-Bl.$$

Koska tason sitä paitsi täytyy kulkea pisteen (a, b, c) kautta annetulla suoralla, niin saadaan sen yhtälöksi

$$(Bn-Cm)(x-a)+(Cl-An)(y-b)+(Am-Bl)(z-c)=0.$$

184. Annettuina on kaksi suoraa; haettakoon yhtälö tasolle, joka toisen suoran kautta vedetään toisen suuntaiseksi.

Suorain yhtälöt olkoot annettuina muodossa

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},$$

$$\frac{x-a'}{l'}=\frac{y-b'}{m'}=\frac{z-c'}{n'}.$$

Haetun tason normaalin täytyy nähtävästi olla yht'aikaa kohtisuorassa kummallekin suoralle; sen suuntacosinit ovat niin muodoin suhteelliset suureille

$$mn'-m'n,\quad nl'-n'l,\quad lm'-l'm.$$

Jos nyt taso vedetään edellisen suoran kautta jälkimmäisen suuntaiseksi, jolloin se on sisältävä pisteen (a, b, c), niin tulee siis sen yhtälöksi:

$$(mn'-m'n)(x-a)+(nl'-n'l)(y-b)+(lm'-l'm)(z-c)=0.$$

Samoin saadaan yhtälöksi tasolle, joka jälkimmäisen suoran kautta vedetään edellisen suuntaiseksi:

$$(mn'-m'n)(x-a')+(nl'-n'l)(y-b')+(lm'-l'm)(z-c')=0.$$

Välimatka $\varDelta$ näiden tasojen välillä on $=$ matka pisteestä (a, b, c) jälkimmäiseen tasoon; 166 §:n mukaan on siis

$$\pm\varDelta=\frac{(mn'-m'n)(a-a')+(nl'-n'l)(b-b')+(lm'-l'm)(c-c')}{[(mn'-m'n)^2+(nl'-n'l)^2+(lm'-l'm)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

185. Lyhin välimatka kahden suoran välillä elikkä molempain yhteinen kohtisuora määrätään seuraavalla tavalla. Ensin pannaan kuten edellisessä §:ssä, kumpaisenkin suoran kautta taso toisen suoran suuntaiseksi; pantakoon sitten vielä kaksi tasoa samain suorain kautta kohtisuoriksi edellisille tasoille. Jälkimmäisten tasojen leikkaussuora tulee silloin kohtisuoraksi yhdensuuntaisille tasoille, ja siis myöskin annetuille suorille, jotka se nähtävästi myöskin kohtaa. Tästä tehdystä nyt seuraa, että haettu suorain yhtei-

nen kohtisuora on = matka yhdensuuntaisten tasojen välillä ja saapi siis lausekkeeksensa edellisessä §:ssä saadun Δ-suureen arvon.

Merkitkööt lyhyyden vuoksi l, m, n ja l', m', n' itse suuntacosineja suorille sekä θ näiden suorain välistä kulmaa; siten saadaan helposti, kun merkitykset muutoin ovat samat kuin edellisessäkin §:ssä, yllämainituille kohtisuorille tasoille seuraavat yhtälöt:

$$(l\cos\theta - l')(x-a) + (m\cos\theta - m')(y-b) + (n\cos\theta - n')(z-c) = 0.$$
$$(l'\cos\theta - l)(x-a') + (m'\cos\theta - m)(y-b') + (n'\cos\theta - n)(z-c') = 0.$$

Nämät yhtälöt merkitsevät siis yhteensä sitä suoraa, joka määrää lyhimmän matkan annettujen kahden suoran välillä.

Neljäs Luku.

Kaksi-asteiset pinnat. — Niiden eri lajit.

186. Kaksi-asteinen yhtälö kolmella vaihtuvalla x, y, z on yleensä muodoltaan

$$(1)\quad \begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'xz + 2C'xy \\ \qquad + 2A''x + 2B''y + 2C''z + D = 0. \end{cases}$$

Ennen jo (158 §:ssä) on huomautettu, ettei yhtälön asteluku muutu, jos suoraviivainen koordinaatisto muutetaan toiseksi suoraviivaiseksi, olkoot akselien asemat kummassakin koordinaatistossa mitkä hyvänsä. Senpä vuoksi, tutkiessamme kaksi-asteisen yhtälön eri merkityksiä, saatamme päätösten yleisyyttä loukkaamatta, käyttää suorakulmaista koordinaatistoa.

Mainittakoon jo ensi alussa eräs kaksi-asteisen pinnan yleinen ominaisuus. Jos yhtälössä (1) tehdään $z = 0$, niin saadaan yhtälö pinnan ja xy-tason leikkausviivalla; tämä yhtälö on kaksiasteinen suureissa x ja y ja edustaa koonillista leikkausta. Koska nyt pinnan yhtälöllä on aina sama yleinen muoto (1), se on kaksi-asteinen, vaikka xy-tasoksi otettaisiin mikä taso hyvänsä, niin seuraa siitä, että kaksi-asteisen pinnan ja tason välisenä leikkauksena aina on koonillinen leikkaus.

Valiten koordinaatit sopivalla tavalla, saattaa yhtälöä (1) muodostaa paljoa yksinkertaisemmaksi. Jos koordinaatisto pannaan kääntymään originissa, akselien yhä pysyessä kohtisuorina toisilleen, saattaa sen panna semmoiseen asemaan, että koordinaatien tulot katoavat pinnan yhtälöstä uudessa koordinaatistossa, joten yhtälö on oleva muodoltaan

$$(2)\quad Lx^2+My^2+Nz^2+2L'x+2M'y+2N'z+D=0.$$

Tämän todistus on jätetty kuudenteen lukuun.

187. Yhtälö (2) edustaa vielä kaikkia kaksi-asteisia yhtälöitä. Saadaksemme sitä vieläkin yksinkertaisemmaksi, siirrämme koordinaatistoa itsensä-suuntaisesti pisteesen (α, β, γ), pannen

$$x=x'+\alpha,\quad y=y'+\beta,\quad z=z'+\gamma;$$

sijoitettuamme nämä arvot yhtälöön (2) ja pannen

$$F=L\alpha^2+M\beta^2+N\gamma^2+2L'\alpha+2M'\beta+2N'\gamma+D,$$

saamme

$$(3)\left\{\begin{aligned}&Lx'^2+My'^2+Nz'^2\\&+2(L\alpha+L')x'+2(M\beta+M')y'+2(N\gamma+N')z'+F=0.\end{aligned}\right.$$

Vakinaiselle terminille F saattaa myös antaa muodon

$$\begin{aligned}F=(L\alpha+L')\alpha+(M\beta+M')\beta+(N\gamma+N')\gamma\\+L'\alpha+M'\beta+N'\gamma+D.\end{aligned}$$

Jos nyt koefficienteistä L, M, N ei ole yksikään $=0$, niin saattaa originin aina valita sillä tapaa, että yksi-asteiset terminit yhtälössä (3) katoavat; silloin nimittäin ei tarvitse muuta kuin määrätä α, β, γ ehdoilla

$$L\alpha+L'=0,\quad M\beta+M'=0,\quad N\gamma+N'=0,$$

jotka aina toteutuvat äärellisillä arvoilla suureista α, β, γ, kun ei yksikään koefficienteistä L, M, N ole nolla. Siinä tapauksessa saadaan yhtälölle (3), jättäen pois x-, y-, z-suureiden aksentit, muoto

(4) $$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = K.$$

Kun yksi koefficienteistä L, M, N on nolla, esim. $N = 0$, mutta sitä vastaava koefficientti N' ei ole nolla, niin ei enää saatakaan poistaa sitä terminiä, jossa z' löytyy, koska ehtoyhtälöstä $N\gamma + N' = 0$ silloin saataisiin γ-suureelle ääretön arvo. Mutta saattaahan silloin kumminkin tehdä

$$L\alpha + L' = 0, \quad M\beta + M' = 0,$$

joten x'- ja y'-suureiden koefficientit katoovat ja vakinaiseksi terminiksi tulee

$$F = L'\alpha + M'\beta + 2N'\gamma + D,$$

jonka jälkeen γ määrätään siten, että tämä vakinainen termini katoaa. Yhtälö (3) on silloin oleva muodoltaan

(5) $$Lx^2 + My^2 = 2Hz.$$

Jos sekä N että N' olisivat $= 0$, niin supistuisi yhtälö (3) seuraavaksi:

$$Lx^2 + My^2 = K,$$

mutta tämäkin sisältyy jo muodossa (4), jos nimittäin pidetään mahdollisena, että yksi tai useampi koefficientti siinä saattaa olla $= 0$.

Vielä on se tapaus jäljellä, jolloin koefficienteistä L, M, N kaksi ovat $= 0$, esim. $M = 0$, $N = 0$. Originiä siirtämällä saattaa silloin ainoastaan poistaa sen terminin, jossa löytyy x' yksi-asteisena, ja vakinaisen terminin; siten saadaan tänmuotoinen yhtälö

$$Lx^2 = Gy + G'z.$$

Mutta oikean jäsenen terminit saattaa supistaa yhdeksi ainoaksi uudella muutoksella. Kun nimittäin koordinaatisto käännetään x-akselin ympäri φ-kulmalla, pannen

$$x = x',$$
$$y = y'\cos\varphi - z'\sin\varphi,$$
$$z = y'\sin\varphi + z'\cos\varphi$$

ja määräten φ-kulman semmoiseksi, että

$$G \cos\varphi + G' \sin\varphi = 0 \text{ eli } \operatorname{tang}\varphi = -\frac{G}{G'},$$

niin muodostuu mainittu yhtälö seuraavaksi:

$$Lx'^2 = 2Hz'.$$

Se on niin muodoin oikeastansa vaan erikois-tapaus yhtälöstä (5).

Sitä tapausta, jolloin kaikki kolme koefficienttiä L, M, N ovat yhtaikaa $= 0$, ei tarvitse ottaa tarkastettavaksi, sillä silloinhan olisi yhtälö (2) ja samalla tietysti myöskin alkuperäinen yhtälö (1) yksi-asteinen.

188. Edellisessä §:ssä on niin muodoin tultu siihen päätökseen, että kullakin kaksi-asteisella pinnalla on edustajana jompikumpi yhtälöistä

$$\text{I.} \quad Lx^2 + My^2 + Nz^2 = K,$$

$$\text{II.} \quad Lx^2 + My^2 = 2Hz.$$

Nämä yhtälöt esittävät kahdenlaatuisia pintoja, joiden välillä on hyvin tärkeä geometrillinen eroitus, minkä jo huomaa itse yhtälöiden muodosta. Koska yhtälössä I kunkin terminin asteluku on tasainen (vasemmassa 2, oikeassa nolla), niin ei yhtälö muutu, jos suureet x, y, z sijoitetaan vastaismerkkisillä $-x$, $-y$, $-z$. Jok'ainoata P-pistettä pinnalla vastaa niin muodoin toinen piste P', jolla on vastaiset koordinaatit ja jonka asema on semmoinen, että yhdistyssuora PP' jakaautuu kahtia originissa. Siitä seuraa, että origi jakaa kahtia kaikki sen kautta vedetyt pinnan jänteet ja on niin muodoin keskiönä yhtälölle I.

Yhtälössä II sitä vastoin, jossa on sekä tasa-asteisia että epätasa-asteisia terminejä, ei saatakaan muuttaa kaikkien kolmen koordinaatin merkkejä, itse yhtälöä muuttamatta. Origini niin muodoin ei olekaan keskiönä pinnoille, joita yhtälö II edustaa. Eikä niillä ole muutakaan keskiötä, sillä terminiä $2Hz$ ei saa poistetuksi millään koordinaatien muutoksella.

Näemme siis kaksi-asteisten pintain jakauvan kahteen luokkaan: keskiölliset pinnat ja keskiöttömät pinnat. Edellisillä on edustajana yhtälö I, jälkimmäisillä yhtälö II. Tutkittakoon kumpikin luokka erikseen.

Keskiölliset pinnat.

189. Tämän luokan kaksi-asteisilla pinnoilla on yhtälönä

$$\text{I.} \quad Lx^2 + My^2 + Nz^2 = K$$

tahi erikois-tapaukset siitä. Koefficienteillä saattaa olla mitkä todelliset arvot tahansa. Kukin koordinaati-taso jakaa semmoisen pinnan kahteen symmetrilliseen puoliskoon, sillä jos yhtälö I ratkaistaan minkä koordinaatin suhteen hyvänsä, niin saadaan aina kaksi yhtäsuurta, vastais-merkkistä arvoa. Koordinaati-tasot ovat tässä katsannossa pääpintoja ja senvuoksi niiden keskinäisiä leikkauksia elikkä koordinaati-akseleita sanotaan pinnankin akseleiksi. Niitä sanotaan todellisiksi tai idealisiksi sitä myöten kuin ne ovat pinnan piirissä, s. o. kohtaavat sitä, tahi kokonaan sen ulkopuolella, sitä kohtaamatta.

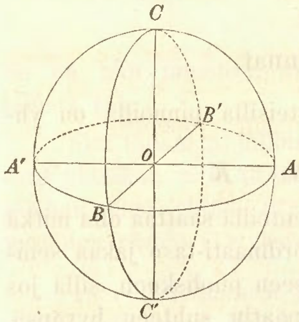
Yhtälöllä I on muutoin eri merkityksiä sen mukaan, minkä merkkisiä koefficientit ovat. Ajateltakoon selvyyden vuoksi, että oikea jäsen on tehty positiviseksi; silloin saattaa 1:o) kaikilla kolmella koefficientillä vasemmassa jäsenessä olla plus-merkki, 2:o) kahdella $+$ ja kolmannella $-$, 3:o) yhdellä $+$ ja kahdella $-$. Jos kaikki vasemman jäsenen koefficientit ovat negativisia, oikean jäsenen ollessa positivisen, niin ei yhtälö anna yhtään todellista arvoa suureille x, y, z eikä sillä silloin ole mitään geometrillistä merkitystä, jonka vuoksi tämä tapaus niin muodoin jätetään sikseen.

190. Ellipsoïdi. — Jos yhtälössä I kaikki koefficientit ovat positivisia, niin saapi se, jaettuna K-suureella, seuraavan muodon:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Kun tehdään $y=0$ ja $z=0$, niin huomataan pinnan leikkaavan x-akselia kahdessa pisteessä A, A', joissa $x=\pm a$. Samoin nähdään, että pinta leikkaa y-akselia kahdessa pisteessä B, B', joiden $y=\pm b$, sekä z-akselia kahdessa pisteessä C, C', joissa $z=\pm c$. Nämä pisteet ovat samalla pinnan rajoina koordinaati-akselien suunnissa. Koska nimittäin kaikki terminit yhtälön (1) vasemmassa jäsenessä ovat positiviset ja yhteensä $=1$, niin ei yksikään termini eriksensä saata olla >1; siis pysyy x aina rajoissa $+a$ ja $-a$; y rajoissa $+b$ ja $-b$; z rajoissa $+c$ ja $-c$. Pinta on niin muodoin kaikilla haaroin rajoitettu ja muodostaa umpinaisen kuvion. Jos se leikataan millä tasolla hyvänsä, niin on leikkauksena siis umpinainen kaksiasteinen käyrä, nimittäin ellipsi. Tästäpä syystä puheenalaista pintaa sanotaankin ellipsoïd'iksi. Suureet a, b, c merkitsevät pituutta ellipsoïdin kolmella puoli-akselilla, jotka kaikki ovat todellisia.

Kuva 87.



Lähdemme nyt tarkastamaan jonkun päätason suuntaisia ellipsoïdin leikkauksia. Kun yhtälössä (1) tehdään $z=0$, niin nähdään, että xy-tason leikkauksena ellipsoïdilla on ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

jonka puoli-akselit ovat a ja b. Jos taas suureelle z annetaan joku vakinainen arvo, $z=h$, niin saadaan yhtälö

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},$$

ja tämä edustaa ellipsiä, jonka puoli-akselit ovat:

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \quad b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

Tästä näkyy, että kaikki xy-tason suuntaiset leikkaukset ovat ellipsejä, joiden puoliakselit ovat suhteellisia suureille a ja b. Nämä ellipsit ovat sitä pienempiä, mitä kauempana originista taso leikkaa; leikkaus supistuu viimein pisteeksi, kun $h = \pm c$, s. o. kun leikkaustason matka originista jommallekummalle puolelle on $= c$.

Samoin saadaan selville, että xz- ja yz-tasojen leikkaukset ovat ellipsejä, joiden puoli-akselit ovat a, c tahi b, c.

191. Olkoon (x, y, z) joku piste ellipsoidilla, ϱ sen välimatka originista eli radius vector ja α, β, γ kulmia, jotka tämä radius vector tekee koordinaati-akselien kanssa. Silloin on

$$x = \varrho \cos\alpha, \quad y = \varrho \cos\beta, \quad z = \varrho \cos\gamma;$$

ja kun nämä sijoitetaan ellipsoidin yhtälöön, niin saadaan

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2} = \frac{1}{\varrho^2}.$$

Jos nyt a, b, c ovat eri-suuria, nimittäin $a > b > c$, niin tämän yhtälön vasen jäsen on nähtävästi suurempi kuin

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a^2},$$

toisin sanoen suurempi kuin $\frac{1}{a^2}$. Niin muodoin on $\frac{1}{\varrho^2} > \frac{1}{a^2}$, se on $\varrho < a$. Samoin todistetaan, että $\varrho > c$. Matka keskiöstä johonkin pisteesen ellipsoidilla on niin muodoin yleensä suurempi kuin pienin puoli-akseli ja pienempi kuin isoin, vaihetellen muutoin näitten rajain välillä.

192. Jos ellipsoidissa on kaksi yhtäsuurta akselia, esim. $a = b$, niin kaikki xy-tason suuntaiset leikkaukset ovat pyöriöitä, joiden keskiöt ovat z-akselilla. Itse pinnan saattaa silloin ajatella syntyneeksi ellipsin pyörähdyksen kautta jommankumman akselinsa ympäri. Semmoista pintaa sanotaan pyörähdys-ellipsoid'iksi elikkä sferoid'iksi. Jos pyörähdys on tapahtunut vähäakselin ympäri, niin on se litistynyt, jos taas isoakselin ympäri, niin on se suikea. Niin-

kuin tiedetään, on maa ja taivaankappaleet yleensä litistyneitä sferoideja.

193. Jos vihdoin kaikki kolme akselia ovat yhtäsuuret, $a = b = c$, niin muuttuu yhtälö (1) seuraavaksi

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

ja lausuu, että välimatka originista mihin pisteesen hyvänsä pinnalla on vakinainen ja $= a$. Pintana on silloin pallo.

Huomautettakoon tämän ohessa, että yhtälönä ϱ-säteisellä pallolla, jonka keskiö on (α, β, γ), on yhtälönä

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \varrho^2;$$

tämä yhtälö lausuu nimittäin, 144 §:n mukaan, että välimatka kiinteästä pisteestä (α, β, γ) pisteesen (x, y, z) pinnalla on yhtä suuri kuin ϱ.

194. Yksivaippainen hyperboloïdi. — Jos koefficienteista L, M, N yksi, esim. N, on negativinen, muitten ollessa positivisia, niin yhtälö I, jaettuna suureella K, on muodoltaan

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Pinta leikkaa x-akselia kahdessa pisteessä, joissa $x = \pm a$, ja y-akselia kahdessa pisteessä, joissa $y = \pm b$; mutta z-akselia se ei kohtaakaan, sillä z-akselin leikkauksille saadaan aatteiset arvot $z = \pm c\sqrt{-1}$. Puheen-alaisella pinnalla on niin muodoin kaksi todellista akselia ja yksi aatteinen, joiden puoliskojen pituudet ovat a, b, c.

Mitä xy-tason leikkaukseen tulee, niin on se ellipsi puoli-akseleilla $OA = a$ ja $OB = b$. Tutkiaksemme xy-tason suuntaisia leikkauksia, teemme $z = h$, jolloin saamme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2},$$

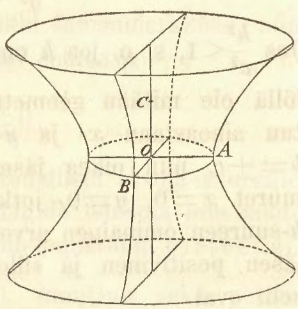
ja tämä osoittaa ellipsiä, jonka puoli-akselit

$$a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$$

ovat suhteellisia suureille a ja b. Niinmuodoin ovat xy-tason suuntaiset leikkaukset ellipsejä, joiden askelit ovat suhteellisia ja jotka ovat sitä isompia, mitä kauempana leikkaustaso on originista jommallakummalla puolella. Pienin näistä ellipseistä on se, joka on itse xy-tasolla; sitä sanotaan sen vuoksi vyöttö- eli kaula-ellipsiksi (ellipse de gorge).

Mitä taasen xz-tason leikkaukseen tulee, niin on se hyperbola, jonka transversaalisen akselin puolisko on $OA = a$ ja konjugaatisen akselin puolisko $OC = c$; yz-tason leikkaus on myöskin hyperbola, jonka transversaalisen akselin puolisko on $OB = b$ ja konjugaatisen akselin puolisko $OC = c$. Näillä kahdella hyperbolalla on siis yhteinen konjugaatinen akseli.

Kuva 88.



Tästä näkyy, että yhtälö (2) osoittaa kokonaista pintaa, joka ulottuu äärettömiin ja jonka leikkauksina, eri suunnissa, on ellipsejä tai hyperboloita. Puheen-alaista pintaa (kuva 88) sanotaan yksivaippaiseksi hyperboloïdiksi (hyperboloïde à une nappe).

Kun todelliset akselit ovat yhtäsuuret $a = b$, niin ovat xy-tason suuntaiset leikkaukset pyöriöitä; silloin saattaa hyperboloidin ajatella syntyneeksi siten, että hyperbola on pyörähtänyt konjugaatisen akselinsa ympäri. Silloin sanotaan pintaa yksivaippaiseksi pyörähdys-hyperboloidiksi.

195. Kaksivaippainen hyperboloidi. — Jos yhtälössä I on kaksi negativista koefficienttiä, esim. L ja M, niin saa se, jaettuna suureella $-K$, muodon

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Pinta leikkaa z-akselia kahdessa pisteessä, joissa $z = \pm c$, mutta ei kohtaa toisia kahta akselia ollenkaan, sillä näiden leikkauksille saadaan aatteiset arvot $x = \pm a\sqrt{-1}$ ja $y = \pm b\sqrt{-1}$. Kolmesta puoli-akselista a, b, c on niin muodoin ainoastaan viimeksi mainittu todellinen, muut kaksi aatteisia (idealisia).

Tasojen xz ja yz leikkaukset ovat hyperbolia, joilla z-akselin suunnassa on yhteinen transversaalinen akseli $2c$. Saadaksemme selvän xy-tason suuntaisista leikkauksista, teemme $z = h$ yhtälössä (3), jolloin saamme

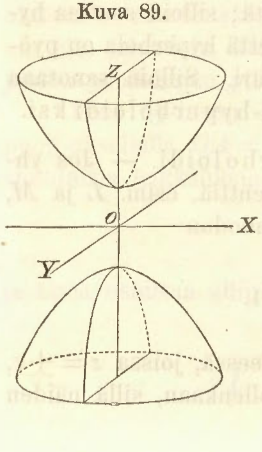
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1.$$

Jos $\frac{h^2}{c^2} < 1$, s. o. jos h on rajoissa $-c$ ja $+c$, niin ei yhtälöllä ole mitään geometrillistä merkitystä, koska se toteutuu ainoastaan x- ja y-suureiden aatteisilla arvoilla. Jos $h = \pm c$, niin oikea jäsen katoaa, jolloin saadaan todelliset juuret $x = 0$, $y = 0$, jotka merkitsevät pistettä. Mutta jos h-suureen ominainen arvo on suurempi kuin c, niin on oikea jäsen positivinen ja silloin saadaan ellipsi, jonka puoli-akselit ovat

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$$

ja joka on sitä isompi, mitä pitempi h on. Tästä seuraa, että jos pannaan kaksi xy-tason suuntaista tasoa c-matkan päähän originista ylä- sekä alapuolelle sitä, niin jääpi pinta kokonaan ulkopuolelle näiden tasojen välystä. Kumpikin taso kohtaa pintaa yhdessä ainoassa pisteessä. Näiden tasojen ulkopuolella olevat xy-tason suuntaiset leikkaukset ovat ellipsejä, joiden akselit ovat suhteellisia, kasvaen sitä pitemmiksi, mitä kauempana originista leikkaustaso on. Pinta muodostaa siis kaksi toisistansa erillään olevata osaa, joista kumpikin ulottuu äärettömiin (kuva 89); pintaa sano-

Kuva 89.



taan senvuoksi kaksivaippaiseksi hyperboloïdiksi (hyperboloïde à deux nappes).

Kun $a = b$, niin xy-tason suuntaiset leikkaukset ovat pyöriöitä ja yhtälö (3) merkitsee silloin kaksivaippaista pyörähdys-hyperboloïdia, joka syntyy siten, että hyperbola on pyörähtänyt transversaalisen akselinsa ympäri.

196. Tutkittuamme täten keskiöllisten pintain päälajit, on vielä tutkittavina niiden sivulajit, jotka saadaan, kun yksi tai useampi termini yhtälössä I katoaa. Olkoon ensin $K = 0$. Jos silloin L, M, N ovat kaikki samanmerkkiset, niin saadaan ellipsoidin yhtälön (1) sijaan seuraava

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

ja tästä yhtälöstä ei saada muita todellisia arvoja suureille x, y, z kuin $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Yhtälö edustaa niin muodoin itse originia. Ellipsoidi on silloin supistunut pisteeksi.

197. Kooni. — Kun $K = 0$, muuttuu sekä yhtälö (2) että yhtälö (3) seuraavaksi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{4}$$

Tehden $y = 0$, saamme xz-tason leikkaukseksi

$$\frac{x}{a} = \pm \frac{z}{c},$$

se on kaksi suoraa, jotka kulkevat originin kautta ja ovat eri puolilla z-akselia, tehden sen kanssa yhtäsuuret kulmat. Samallainen on yz-tasonkin leikkaus.

Tutkittakoonpa tämän johdosta yleensä, millainen leikkaus saadaan, jos pinta leikataan tasolla, joka kulkee z-akselin kautta ja jonka yhtälönä olkoon

$$y = mx.$$

Jos nyt tästä ja yhtälöstä (4) eliminoidaan y, niin saadaan $z^2 = n^2 x^2$, josta

$$z = \pm nx.$$

Haetulla leikkauksella on niin muodoin edustajina kaksi yhden-aikuista yksi-asteista yhtälöä

$$y = mx, \quad z = \pm nx,$$

jotka, jälkimmäisen kaksinkertaiseen merkkiin nähden, merkitsevät kahta originin kautta kulkevata suoraa. Näitten suorain suuntacosinit ovat suhteelliset suureille 1, m, $\pm n$, ja tämä osoittaa niiden tekevän yhtäsuuria kulmia z-akselin kanssa.

Jos yhtälössä (4) tehdään $z = h$, niin on helppo nähdä, että xy-tason suuntaiset leikkaukset ovat ellipsejä, joiden akselit ovat sitä pitemmät, mitä kauempana leikkaus on originista. Ja koska vast'ikään todistettiin, että z-akselin kautta kulkevain tasojen leikkauksina aina on kaksi suoraa, jotka kulkevat originin kautta ja tekevät z-akselin kanssa yhtäsuuret kulmat, niin näkyy selvästi, että puheenalainen pinta on kooni elliptisellä asemalla. Mutta kun taso, kulkien eri suuntia, saattaa semmoiseen kooniin leikata ei ainoastaan ellipsejä, vaan myöskin parabolia ja hyperbolia, niin on oikeampi sanoa semmoista pintaa **kaksi-asteiseksi kooniksi**, toisin sanoen semmoiseksi, jonka asemana saattaa olla mikä kaksi-asteinen käyrä tahansa.

198. **Kooni (4) on asymptootina hyperboloideille (2) ja (3).** — Kun nimittäin koonin yhtälöä

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

verrataan yhtälöön

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1,$$

joka yht'aikaa edustaa molempia hyperboloideja, ja pannaan kumpaankin $z = h$, niin saadaan seuraavat yhtälöt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} \pm 1,$$

jotka osoittavat koonin ja hyperboloidien xy-tason suuntaisia leikkauksia h-matkan päässä originista. Nämä leikkaukset ovat koncentrillisiä (yhteis-keskiöllisiä) ellipsejä suhteellisilla ja samaan suuntaan kulkevilla akseleilla. Edellisen ellipsin puoli-akselit ovat

$$\frac{ah}{c}, \quad \frac{bh}{c},$$

jälkimmäisen

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}\pm 1}, \quad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}\pm 1};$$

vastaavain puoli-akselien välit ovat siis

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}\pm 1}-\frac{ah}{c}=\frac{\pm ac}{\sqrt{h^2\pm c^2}+h},$$

$$b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}\pm 1}-\frac{bh}{c}=\frac{\pm bc}{\sqrt{h^2+c^2}+h}.$$

Näillä väleillä on rajana nolla, kun h kasvaa äärettömiin; vastaavaiset leikkaukset koonissa ja hyperboloideissa eroavat toisistansa niin muodoin sitä vähemmin, mitä kauempana originia ne ovat. Kooni on niinmuodoin yhteinen asymptooti molemmille hyperboloideille, joista kaksivaippainen on kokonaan sen ulkopuolella, yksivaippainen kokonaan sen sisäpuolella.

199. Jos yksi tai useampi koefficienteistä L, M, N yhtälössä I katoaa, niin saa yhtälö jommankumman seuraavia muotoja

$$(5) \qquad Lx^2+My^2=K,$$

$$(6) \qquad Nz^2=K.$$

Siten syntyy uusia laatuja keskiöllisistä pinnoista. Yhtälö (5) edustaa ylipäänsä cylinderiä elliptisellä tai hyperbolisella asemalla, sitä myöten kuin L ja M ovat saman- tai erinmerkkisiä; kun $K=0$, niin tämä cylinderi supistuu suoraksi viivaksi eli kahdeksi tasoksi, jotka leikkaavat toisiansa. Yhtälö (6) taas osoittaa kahta yhdensuuntaista tasoa, jotka yhtyvät, kun $K=0$.

Keskiöttömät pinnat.

200. Keskiöttömilllä kaksiasteisilla pinnoilla on yhtälönä

II. $$Lx^2 + My^2 = 2Hz,$$

jossa H ei ole nolla. Koska x ja y ilmauvat tässä ainoastaan tasaisissa arvokerroissa, niin on kukin tällainen pinta symmetrillinen sekä yz- että xz-tason suhteen, ja näitten tasojen leikkaussuoraa, z-akselia, sanotaan senvuoksi pinnan akseliksi. Sitä vastoin ei pinta olekaan symmetrillinen xy-tason suhteen, sillä koska z ilmautuu yhtälössä yksiasteisena, niin saapi se ainoastaan yhden arvon joka kerta kun x ja y saavat eri arvoparinsa.

Yhtälössä II saattaa olla kaksi eri tapausta: 1:o) koefficienteillä L ja M on samat merkit tai 2:o) niillä on eri merkit. Kummassakin tapauksessa syntyy eri pintoja, joita nyt lähdemme erikseen tutkimaan.

201. Elliptinen paraboloïdi. — Olkoot ensin L ja M samanmerkkisiä, vieläpä positivisia kumpikin. Silloin saattaa pitää suuretta H myöskin positivisena, sillä jos se olisi negativinen, niin sijoittamalla $z = -z'$ saataisiin uusi yhtälö, jossa z-suureen koefficientti olisi positivinen. Tämä sijoitus merkitsee, että z-akseli saa vastaisen suunnan, s. o. että ordinaata z luetaan alaspäin eikä enään ylöspäin niinkuin ennen. Siitä näkee, ettei H-suureen merkki ollenkaan vaikuta pinnan muotoon; siitä riippuu vaan se seikka, onko pinta ylä- tahi alapuolella xy-tasoa.

Jaettuna suureella H saapi yhtälö II muodon

(1) $$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

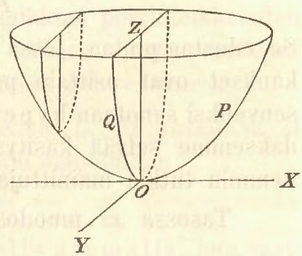
jossa p ja q ovat positivisia. Tasot xz ja yz leikkaavat pintaan kaksi parabolata

$$(\alpha)\quad x^2 = 2pz, \qquad (\beta)\quad y^2 = 2qz,$$

joilla on yhteinen perä ja yhteinen akseli ja joiden puoliparametrit ovat toisessa p ja toisessa q. Kuvassa nämä parabolat on merkitty kirjaimilla P ja Q.

Tutkiaksemme xy-tason suuntaisia leikkauksia, annamme z-suureelle jonkun vakinaisen arvon. Kun $z = 0$, niin supistuu leikkaus pisteeksi, nimittäin originiksi. Kun sitten z saapi positivisia ja yhä isompia arvoja, niin tulee leikkaukseksi ellipsejä, yhä isompia ja isompia. Kun z saa negativisia arvoja, niin ovat leikkaukset aatteisia. Yhtälö (1) osoittaa siis kokonaista pintaa, joka, ollen kokonaan xy-pinnan yläpuolella, ulottuu äärettömiin. Sen nimi on elliptinen paraboloïdi.

Kuva 90.



Jos pinta leikataan yz-tason suuntaisella tasolla, $x = h$, niin saadaan leikkaukseksi parabola

$$y^2 = 2q\left(z - \frac{h^2}{2p}\right),$$

jonka parametri on $2q$ ja joka siis on yhteellinen samansuuntaisen pääleikkauksen (Q) kanssa. Sen akseli on myös z-akselin suuntainen ja sen perä on parabolalla P. Yhtälö (α) toteutuukin perän koordinaateilla, $x = h$, $y = 0$, $z = \frac{h^2}{2p}$. Saattaa niin muodoin ajatella pinnan syntyneeksi siten, että parabola Q on kulkenut itsensä-suuntaisesti, muodostaen perällänsä parabolan P.

Samoin ovat xz-tason suuntaiset leikkaukset parabolia, yhteellisiä pääleikkauksen (P) kanssa. Niin muodoin saattaa pintan ajatella P-parabolan muodostamaksi, kun tämä on kulkenut itsensä suuntaisesti niin, että sen perä on muodostanut parabolan Q.

Siinä erikois-tapauksessa, että $p = q$, muuttuu yhtälö (1) seuraavaksi

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Silloin ovat kaikki xy-tason suuntaiset leikkaukset pyöriöitä ja pinnan sopii ajatella syntyneeksi parabolan pyörähdyksen kautta akselinsa ympäri. Se on silloin pyörähdys-paraboloidi.

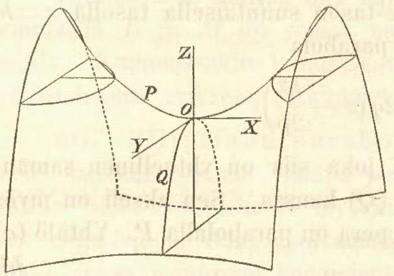
202. Hyperbolinen paraboloïdi. — Olkoot L ja M erinmerkkisiä. Yhtälölle II saattaa silloin antaa muodon

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z. \tag{2}$$

Se edustaa pintaa, jossa koordinaati-tasojen suuntaiset leikkaukset ovat osittain parabolia, osittain hyperbolia ja jota senvuoksi sanotaan hyperboliseksi paraboloïdiksi. Saadaksemme selvää käsitystä tästä pinnasta, tulee meidän lähemmin tutkia mainittuja leikkauksia.

Tasossa xz muodostaa pinta parabolan P, jonka parametri on $2p$ ja jonka akseli on ylöspäin. Tasossa yz muodostaa se parabolan Q, jonka parametri on $2q$ ja jonka akseli on alaspäin. Leikkaukset, jotka ovat yz-tason suuntaisia, ovat parabolia, yhteellisiä Q-parabolan kanssa, perillään parabolalla P. Pintaa saattaa senvuoksi ajatella Q-parabolan synnyttämäksi, kun tämä on kulkenut itsensä suuntaisesti, muodostaen perällään parabolan P.

Kuva 91.



Mitä taas xy-tason suuntaisiin leikkauksiin tulee, niin ovat ne hyperbolia, joiden akselit, ollen OX- ja OY-akselin suuntaisia, ovat toisiinsa kuin $\sqrt{p}:\sqrt{q}$ ja kasvavat samassa kuin z, toisin sanoen isonevat sitä myöten mitä kauempana ovat xy-tasosta. Kunkin semmoisen hyperbolan transversaalinen akseli on samansuuntainen kuin OX tai OY, sen mukaan kuin z on positivinen tai negativinen, s. o. sen mukaan kuin leikkaus on xy-tason ylä- tai alapuolella. Itse xy-tasossa supistuu hyperbola kahdeksi suoraksi, jotka leikkaavat toisiansa ja joita edustaa yhtälö

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0.$$

Sama yhtälö osoittaa myöskin kaikkien yllämainittujen hyperbolain asymptooteja, joiden projektionit xy-tasolla niin muodoin lankeavat yhteen mainittujen suorain kanssa. Jos siis kumpaisenkin suoran ja z-akselin kautta pannaan kaksi tasoa, niin sisältävät tietysti nämä tasot kaikkien poikkileikkausten asymptootit; tämän ominaisuuden tähden, josta vast'edes enemmän, sanotaan näitä tasoja pinnan johtotasoiksi.

203. Kun toinen koefficienteistä L, M yhtälössä II on nolla, esim. $M = 0$, niin on yhtälö muodoltaan

$$Lx^2 = 2Hz$$

ja osoittaa cylinderiä parabolisella asemalla, jota saattaa pitää välimuotona elliptisen ja hyperbolisen paraboloidin välillä.

Se tapaus, että H yhtälössä II on $= 0$, ei tule kysymykseen, koska pinta silloin kuuluu keskiöllisiin.

204. Kaksi-asteisella yhtälöllä kolmessa suuntais-koordinaatissa saattaa siis, sen mukaan mitä tähän saakka olemme nähneet, olla seuraavat geometrilliset eri merkitykset:

I. Keskiölliset pinnat.

Pääpinnat:
- Aatteinen pinta,
- Ellipsoïdi,
- Yksivaippainen hyperboloïdi,
- Kaksivaippainen hyperboloïdi.

Sivulajit:
- Piste,
- Kooni,
- Elliptinen cylinderi,
- Suora,
- Hyperbolinen cylinderi,
- Kaksi tasoa.

II. Keskiöttömät pinnat.

Pääpinnat:
- Elliptinen paraboloïdi.
- Hyperbolinen paraboloïdi.

Sivulaji:
- Parabolinen cylinderi.

Viides Luku.

Yleinen kaksi-asteisten pintain teoria.

Keskiö ja diametraalitaso.

205. Edellisessä luvussa olemme tutkineet kaksi-asteisen yhtälön eri merkityksiä, saatettuamme ensin yhtälöt yksinkertaisempaan muotoon koordinaatien muutoksella. Nyt lähdemme lähemmältä tutkimaan itse yleistä kaksi-asteista yhtälöä ja johdatamme siitä suorastaan ominaisuuksia, jotka ovat yhteisiä kaikille kaksi-asteisille pinnoille tahi muutamille ryhmille sellaisia pintoja.

Kaksi-asteinen yhtälö, jossa x, y, z edelleen merkitsevät suorakulmaisia koordinaateja, on yleisessä muodossaan

$$(1)\quad \begin{cases} Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'xz+2C'xy \\ \quad +2A''x+2B''y+2C''z+D=0. \end{cases}$$

Merkitköön lyhyyden vuoksi U tämän yhtälön vasenta jäsentä ja X, Y, Z, P seuraavia yksiasteisia funktioneja: *)

$$(2)\quad \begin{cases} X=Ax+C'y+B'z+A'', \\ Y=C'x+By+A'z+B'', \\ Z=B'x+A'y+Cz+C'', \\ P=A''x+B''y+C''z+D. \end{cases}$$

Silloin on identtisesti

$$(3)\qquad U=Xx+Yy+Zz+P,$$

niinkuin helposti huomaa, jos funktionit X, Y, X, P sijoitetaan yhtälöön (1).

Jos x-, y-, z-suureiden sijaan on pantava jonkun erityisen pisteen koordinaatit, merkityt indiceillä 0 tai 1, niin

---

*) Ken vähänkin tuntee korkeampaa analysia, näkee oitis, että $2X$, $2Y$, $2Z$ ovat U:n osittaisia derivaateja x-, y-, z-suureiden suhteen. Jos yhtälössä (1), saadaksemme sitä homogeniseksi, kerrotaan yksiasteiset terminit otaksutulla pituus-yksiköllä, joka merkittäköön p, ja vakinainen termini suureella p^2, niin on $2P$ myöskin oleva U:n osittainen derivaati p-suureen suhteen, kun nimittäin differentioimisen älkeen jälleen pannaan $p=1$.

merkitään se siten, että sama indici liitetään kirjaimiin U, X, Y, Z, P. Niinpä merkitsee U_0 sitä arvoa, jonka funktioni U ottaa pisteessä (x_0, y_0, z_0), se on kun x, y, z on sijoitettu suureilla x_0, y_0, z_0; samalla tapaa X_1 merkitsee X-funktionin arvoa pisteessä (x_1, y_1, z_1), j. n. e.

Funktioneilla X, Y, Z, P on tärkeä merkitys kaksiasteisten pintain teoriassa, niinkuin kohta huomaamme.

206. Kaksiasteisen pinnan ja suoran leikkauspisteet. — Suoraa, joka kulkee pisteen x_0, y_0, z_0 kautta ja jonka suuntacosinit ovat l, m, n, sopii merkitä yhtälöillä

$$(4)\quad \begin{cases} x = x_0 + \varrho l, \\ y = y_0 + \varrho m, \\ z = z_0 + \varrho n, \end{cases}$$

jossa ϱ merkitsee välimatkaa kiinteästä pisteestä (x_0, y_0, z_0) vaihtuvaan pisteesen (x, y, z). Sen ohella on tämä välimatka pidettävä positivisena yhtäänne päin ja negativisena toisaanne päin pisteestä (x_0, y_0, z_0). Saadaksemme nyt tietää, missä pisteissä suora kohtaa kaksiasteista pintaa, sijoitetaan x, y, z yhtälössä (1) lausekkeilla (4). Silloin saamme yhtälön, jossa on ainoastaan tuntematon ϱ ja joka järjestettynä ϱ-suureen suhteen on muodoltaan seuraava

$$(5)\quad \begin{cases} (Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2A'mn + 2B'ln + 2C'lm)\varrho^2 \\ \qquad + 2(X_0 l + Y_0 m + Z_0 n)\varrho + U_0 = 0. \end{cases}$$

Tästä yhtälöstä saa ϱ kaksi arvoa, ja kun ne sijoitetaan yhtälöihin (4), niin saadaan suureille x, y, z omat arvoparinsa. Suora leikkaa niin muodoin kaksi-asteista pintaa yleensä kahdessa pisteessä, jotka kumminkin erikoistapauksissa saattavat yhtyä tai olla aatteisia.

Juuret yhtälölle (5) merkitsevät välimatkoja pisteestä (x_0, y_0, z_0) niihin pisteisin, joissa suora leikkaa pintaa. Jos U_0 katoaa, niin yhtenä juurena on nolla, ja tämä tietää, että piste (x_0, y_0, z_0) on itse pinnalla. Ja sehän onkin luonnollista, koska yhtälö $U_0 = 0$ edellyttää, että koordinaatit x_0, y_0, z_0 toteuttavat yhtälön $U = 0$, se on pinnan yhtälön (1).

207. Keskiö mille pinnalle hyvänsä on ylehensä piste, jossa kaikki pinnan jänteet jakauvat kahtia. Tutkittakoon nyt, onko keskiötä pinnalla, jota yhtälö (1) edustaa.

Jos semmoinen piste on olemassa ja x_0, y_0, z_0 merkitsevät sen koordinaateja sekä yhtälöt (4) edustavat sen kautta vedettyä suoraa, niin on tietysti suureella ϱ niissä pisteissä joissa suora kohtaa pintaa, yhtäsuuret mutta vastaismerkkiset arvot, s. o. summa yhtälön (5) juurista on nolla, ja tämä taas vaatii, että toisen terminin koefficientti on nolla, että niin muodoin $X_0 l + Y_0 m + Z_0 n = 0$. Näin on asian laita aina, olkoon suoralla mikä suunta tahansa, se on olkoot l, m, n minkä-arvoisia hyvänsä, kunhan vaan täyttävät ehdon $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Mutta $X_0 l + Y_0 m + Z_0 n$ ei saata olla nolla kaikissa l-, m-, n-suureiden arvoissa, esim. kun $l = 1$, $m = 0$, $n = 0$ tahi kun $l = 0$, $m = 1$, $n = 0$ tahi kun $l = 0$, $m = 0$, $n = 1$, jollei suureet X_0, Y_0, Z_0 kukin kohdastansa ole $= 0$. Jos siis piste koordinaateilla x_0, y_0, z_0 on keskiönä pinnalle (1), niin täytyy mainittujen koordinaatien täyttää ehdot $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$, $Z_0 = 0$. Ja päinvastoin piste (x_0, y_0, z_0) on aina pinnan keskiönä, kun vaan mainitut ehdot on täytetty, sillä silloinhan saapi ϱ yhtälöstä (5) kaksi yhtäsuurta ja vastaismerkkistä arvoa, olkoon suoralla mikä suunta hyvänsä.

Keskiön koordinaatien määräämiseksi on siis kolme yhtälöä $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$, $Z_0 = 0$ elikkä, heittämällä pois indici $_0$, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, s. o. täydellisesti

$$(6)\quad \begin{cases} Ax + C'y + B'z + A'' = 0, \\ C'x + By + A'z + B'' = 0, \\ B'x + A'y + Cz + C'' = 0. \end{cases}$$

Ratkaistuamme nämä yhtälöt, saamme x-, y-, z-suureiden arvot yhden-nimisten murtolukujen muodossa:

$$x = \frac{A_0}{\varDelta}, \quad y = \frac{B_0}{\varDelta}, \quad z = \frac{C_0}{\varDelta},$$

jossa

$$(7)\quad \varDelta = ABC + 2A'B'C' - AA'^2 - BB'^2 - CC'^2.$$

Mitkä yleiset lausekkeet osoittajilla A_0, B_0, C_0 ovat, ei meidän tarvitse tuntea, kosk'emme vast'edes tulee niitä käyttämään.

Kun vaan Δ ei ole nolla, ovat mainitut x-, y-, z-suureiden arvot äärellisiä ja määrättyjä, ja pinnalla on silloin yksi ainoa keskiö. Jos taas nimittäjä Δ on nolla, ilman että kaikki kolme osoittajaa yht'aikaa katoovat, on ainakin yksi koordinaateista x, y, z ääretön, ja se merkitsee, ettei pinnalla silloin olekaan keskiötä. Mutta kun osoittajat A_0, B_0, C_0 ja nimittäjä Δ kaikki ovat nollia, niin saadaan x-, y-, z-suureiden arvot epämääräisessä muodossa $\frac{0}{0}$; yhtälöillä (6) on silloin äärettömän monta juurta ja silloin on tietysti pinnallakin äärettömän monta keskiötä.

208. Asia käy selvemmäksi seuraavan geometrillisen selityksen kautta. Yhtälöt (6) edustavat kukin kohdastansa tasoa, ja nämä kolme tasoa leikkaavat toisiansa yhdessä pisteessä, joka on pinnan keskiö. Mutta jos tasojen kolme leikkaussuoraa ovat yhdensuuntaisia, niin ei niillä luonnollisesti ole yhtäkään yhteistä leikkauspistettä ja silloin puuttuu pinnaltakin keskiö. Jos taas kaikki kolme tasoa leikkaavat toisiansa yhtä suoraa myöten, jolloin yhden yhtälöistä (6) saattaa johdattaa toisista kahdesta (169 §) ja jolloin nämä yhtälöt todestaan sisältävät ainoastaan kaksi eri ehtoa, niin on pinnalla äärettömän monta keskiötä, nimittäin jok'ainoa piste sillä suoralla, jota myöten puheenalaiset kolme tasoa leikkaavat toisiansa. Pinta ei silloin saata olla muu kuin cylinderi joko elliptisellä tahi hyperbolisella asemalla. Jos vihdoin kaikki kolme yhtälöä (6) supistuvat yhdeksi ainoaksi, edustaen niin muodoin yhtä tasoa, niin ovat kaikki tämän tason pisteet keskiöitä kaksi-asteiselle pinnalle, joka silloin ei saata olla muu kuin pari yhdensuuntaisia tasoja.

Tämän johdosta saattaisi kaksi-asteiset pinnat jakaa kolmeen luokkaan: 1:o) yksi-keskiöiset pinnat, 2:o keskiöttömät pinnat, 3:o) cylinderipinnat äärettömän monella keskiöllä, jotka ovat joko centraali-akselilla tahi centraali-tasolla. Mutta koska näiden cylinderien yhtälöt sisältyvät jo yleisessä ensimmäisen luokan pintain yhtälössä, niin ei tarvitsekaan osoittaa kuin kaksi pääluokkaa, nimittäin keskiölliset pinnat ja keskiöttömät pinnat, niinkuin edellisessä luvussa on tehtykin.

209. Keskiösäteet. — Jos yhtälössä (5) x_0, y_0, z_0 pannaan merkitsemään keskiön koordinaateja, niin ϱ-suureen koefficientti katoaa, koska silloin $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$, $Z_0 = 0$. Vakinainen termini U_0, joka, niinkuin (3) osoittaa, on yhtä kuin $X_0 x_0 + Y_0 y_0 + Z_0 z_0 + P_0$, supistuu seuraavaksi

$$P_0 = A''x_0 + B''y_0 + C''z_0 + D.$$

Merkitköön lyhyyden vuoksi

$$\Omega = Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2A'mn + 2B'ln + 2C'lm,$$

silloin saa yhtälö (5) seuraavan muodon

$$\Omega\varrho^2 + P_0 = 0. \tag{8}$$

Tämä kaava määrää kuinka pitkä on keskiösäde ϱ annetussa suunnassa l, m, n. P_0 on tässä se arvo, jonka funktioni $P = A''x + B''y + C''z + D$ saa, kun x, y, z siinä sijoitetaan keskiön koordinaateilla; se on siis vakinainen suure, riippuva ainoastaan koefficienteistä alkuperäisessä yhtälössä (1), jota vastoin koefficientti Ω ylehensä vaihtelee säteen suunnan mukaan.

210. Diametraali-taso. — Ajateltakoon kaksiasteisessa pinnassa vedetyksi jakso yhdensuuntaisia jänteitä. Kaikkien näitten jänteiden keskiöt ovat eräällä toisella pinnalla, jonka laatua ja asemaa nyt lähdemme tutkimaan.

Merkitkööt yhtälöt (4) yhtä näistä jänteistä ja olkoot x_0, y_0, z_0 koordinaateja jänteen keskukselle. Yhtälöllä (5), jossa ϱ merkitsee välimatkaa pisteestä (x_0, y_0, z_0) jompaankumpaan jänteen päähän, täytyy silloin olla kaksi yhtäsuurta ja vastaismerkkistä juurta, joiden summa on nolla; tämä taas vaatii, että ϱ-suureen koefficientti on nolla. Jänteen keskuksen koordinaateilla on siis yhtälö $X_0 l + Y_0 m + Z_0 n = 0$; ja koska sama yhtälö edustaa keskusta jok'ainoassa jänteessä, jonka suuntacosinit ovat l, m, n, niin edustaa se niin muodoin uraa yhdensuuntaisten jänteiden keskiöille. Jättämällä pois indicin $_0$, saattaa tämän yhtälön kirjoittaa

$$(9) \qquad Xl + Ym + Zn = 0,$$

elikkä, kun X, Y, Z sijoitetaan merkitsemillänsä funktioneilla (2) ja teentö järjestetään x-, y-, z-suureiden suhteen,

$$(10) \quad \begin{cases} (Al+C'm+B'n)x+(C'l+Bm+A'n)y+(B'l+A'm+Cn)z \\ \qquad + A''l+B''m+C''n=0. \end{cases}$$

Semmoinen yhtälö on pinnalla, joka jakaa kahtia (l, m, n)-suuntaiset jänteet. Koska se on yksiasteinen, niin päätämme, että **se pinta, joka jakaa kahtia ryhmän yhdensuuntaisia jänteitä kaksiasteisessa pinnassa, on taso.** Kutakin semmoista tasoa sanotaan **diametraali-tasoksi.**

Suora ja taso ovat **liittolaisia**, jos taso on sen diametraali-tason suuntainen, joka jakaa kahtia suoran suuntaiset jänteet.

Kun jänteet ovat x-akselin suuntaisia, on $l=1$, $m=0$, $n=0$, ja diametraali-tason yhtälöksi jää $X=0$. Samoin edustavat $Y=0$ ja $Z=0$ diametraali-tasoja y- ja z-akselin suuntaisille jänteille.

211. Diametraali-tason yhtälö (9) toteutuu, olkoon jänteillä mikä suunta hyvänsä, niillä x-, y-, z-suureiden arvoilla; jotka yht'aikaa tekevät $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, niin muodoin pinnan keskiön koordinaateilla. **Kukin diametraali-taso kulkee siis keskiön kautta**, jos semmoista on olemassa. Kun pinnalla on äärettömän monta keskiötä, niin kulkee diametraali-taso sen centraali-akselin kautta tahi yhtyy siihen centraali-tasoon, jossa kaikki keskiöt ovat.

Jos ei yhtälöllä ole keskiötä, niin tasot, joita edustavat yhtälöt $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, joko ovat yhdensuuntaisia tahi on kahden tason leikkaussuora kolmannen tason suuntainen. Edellisessä tapauksessa ovat x-, y-, z-suureiden koefficientit suhteellisia keskenänsä mainituissa kolmessa yhtälössä $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ ja niin muodoin myöskin yhtälössä $Xl+Ym+Zn=0$, joka siis edustaa tasoa, samansuuntaista kuin mainitut kolme tasoa. Jos taas jälkimmäisessä tapauksessa otaksutaan, että tasot $X=0$, $Y=0$ leikkaavat toisiansa L-suoraa myöten, joka on samansuuntainen kuin taso $Z=0$, niin yhtälö $Xl+Ym=0$ osoittaa mainitun suoran kautta kulkevaa tasoa, joka niin muodoin leikkaa tason $Z=0$ erästä L-suoran suuntaista M-suoraa myöten; yhtälö $Xl+Ym+Zn=0$ osoittaa taas toista tasoa, joka kulkee tasojen $Xl+Ym=0$ ja $Z=0$ leikkaussuoran (M) kautta ja on niin muodoin L-suoran suuntainen. Tästä seuraa, että **keskiöttömän pinnan kaikki diametraalitasot ovat joko yhdensuuntaisia tai saman suoran suuntaisia.**

212. Kullakin ryhmällä yhdensuuntaisia jänteitä, olkoon niiden yhteinen suunta (l, m, n) mikä tahansa, on yleensä diametraali-taso, jota edustaa yhtälö (9) eli (10). Yhdessä ainoassa tapauksessa on taso olemattomissa tahi siirtyy äärettömiin, nimittäin silloin kuin x-, y- z-suureiden koefficientit yhtälössä (10) yht'aikaa ovat $=0$, s. o. silloin kuin

$$(11)\qquad \begin{cases} Al+C'm+B'n=0, \\ C'l+Bm+A'n=0, \\ B'l+A'm+Cn=0, \end{cases}$$

vakinaisen terminin $A''l+B''m+C''n$ kumminkaan samalla olematta nolla. Vasen jäsen yhtälössä (10) eli (9), s. o. summa $Xl+Ym+Zn$, supistuu silloin mainituksi vakinaiseksi terminiksi ja silloin tietysti ei löydy mitään x-, y-, z-suureiden arvoja, jotka yht'aikaa tekisivät $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, niin muodoin ei pinnallakaan ole keskiötä. Yhtälöt (11) taasen lausuvat, että jänteet ovat samansuuntaisia kuin kukin tasoista $X=0$, $Y=0$, $Z=0$. Diametraali-taso puuttuu siis ainoastaan keskiöttömiltä pinnoilta ja silloinkin ainoastaan niiltä jänteiltä, jotka sopii ajatella vedetyiksi äärettömän kaukaista keskiötä kohti.

213. Jänteiden ja diametraali-tason suunnilla on huomattava vastavuoroisuus. Olkoot jänteet esim. x-akselin suuntaisia; silloin on diametraali-tason yhtälönä $X=0$, se on:

$$Ax+C'y+B'z+A''=0.$$

Jos l, m, n ovat suuntacosineja toiselle jänneryhmälle, joka on viimeksi-mainitun tason suuntainen, niin on

$$Al + C'm + B'n = 0;$$

vastaavan diametraali-tason yhtälössä (10) katoaa x-suureen koefficientti, josta seuraa, että diametraali-taso on x-akselin suuntainen. Koska nyt x-akselin suunta saattaa olla mikä hyvänsä, muuttamatta pinnan kaksi-asteisuutta, niin seuraa tästä yleinen väite:

Jos suora on samansuuntainen kuin toisen suoran liittolais-taso, niin on päinvastoin jälkimmäinen suora samansuuntainen kuin edellisen liittolais-taso.

214. Diametrit. — Kahden diametraali-tason leikkaussuora on diametri. Kukin diametri kulkee keskiön kautta, jos semmoista on olemassa; jos taas keskiötä ei ole, niin ovat kaikki diametrit joko saman suoran tahi saman tason suuntaisia.

Diametri, joka kulkee annetun pisteen (x_0, y_0, z_0) kautta, määrätään seuraavalla tavalla. Yhtälöt $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ edustavat niinkuin tiedetään x-, y-, z-akselien liittolais-diametraali-tasoja. Yhtälö $X + kY = 0$, jossa k on mielinmäärin otettu tekijä, edustaa yleensä tasoa, joka kulkee kahden ensimmäisen tason leikkaussuoran kautta; kulkeepa annetun pisteenkin kautta, jos samalla on $X_0 + kY_0 = 0$. Kun k on eliminoitu, niin saadaan

$$\frac{X}{X_0} = \frac{Y}{Y_0}$$

yhtälöksi diametraali-tasolle, joka kulkee tasojen $X = 0$, $Y = 0$ leikkaussuoran ja sitä paitsi pisteen (x_0, y_0, z_0) kautta. Yhtälönä diametraali-tasolla, joka kulkee saman pisteen sekä tasojen $Y = 0$, $Z = 0$ leikkaussuoran kautta, on samoin

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{Z}{Z_0}.$$

Haettu diametri on edellämainittujen kahden diametraali-tason leikkaussuora; sen yhtälöt saattaa niin muodoin lausua symmetrillisellä kaavalla:

$$(12) \qquad \frac{X}{X_0} = \frac{Y}{Y_0} = \frac{Z}{Z_0},$$

joka siis edustaa pisteen (x_0, y_0, z_0) kautta kulkevaa diametraali-tasoa.

215. Kun kolme diametria ovat senlaatuiset, että se taso, joka sisältää kaksi niistä, jakaa kahtia kolmannen suuntaiset jänteet, niin sanotaan niitä liittolais-diametreiksi. Keskiöttömillä pinnoilla tietysti ei voi ollakaan liittolais-diametreja, jonka vuoksi tässä kysymys onkin ainoastaan keskiöllisistä pinnoista.

Kullakin diametrilla D on yleensä liittolais-diametraalitaso, joka jakaa kahtia D:n suuntaiset jänteet. Jos nyt tällä tasolla otetaan mielin määrin uusi diametri D', niin kulkee sen liittolais-diametraali-taso ensinmainitun diametrin kautta (213 §). Nämä kaksi diametraali-tasoa leikkaavat toisiansa pitkin kolmatta diametria D'', jonka liittolais-diametraalitasolla ovat sekä D että D'. Nämä kolme suoraa D, D', D'' ovat niin muodoin liittolais-diametreja.

Jos pinta leikataan sillä tasolla, joka sisältää kaksi näistä diametreista, esim. D ja D', ja leikkauksessa vedetään D:n suuntaisia jänteitä, niin jakaa D' nämä jänteet kahtia, koska se taso, joka sisältää diametrit D' ja D'', jakaa kahtia kaikki D:n suuntaiset pinnan jänteet. Samoin jakaa samassa leikkauksessa D-suora D':n suuntaiset jänteet. Niin muodoin ovat D ja D' puheenalaisen leikkauksen liittolaisdiametreja.

Kaksi-asteisella keskiöllisellä pinnalla on siis äärettömän monta ryhmää liittolais-diametreja. Saadaksemme yhden semmoisen ryhmän, sopii ottaa yksi diametri mielinmäärin, toiset kaksi tulee ottaa vastaavalla diametraali-tasolla; näiden täytyy olla liittolais-diametreja leikkauksella, joka saadaan, kun pinta leikataan mainitulla tasolla.

216. Yhdensuuntaiset leikkaukset. — Ennen jo on sanottu, että kaksi-asteisen pinnan ja tason leikkauksena on yleensä koonillinen leikkaus. Lähdemme nyt lähemmin tutkimaan yhdensuuntaisia tasoleikkauksia.

Ajateltakoon kaikissa tasoleikkauksissa vedetyiksi yhdensuuntaisia jänteitä; kaikkia näitä jänteitä jakaa kahtia sama diametraali-taso, joka niin muodoin sisältää kussakin eri leikkauksessa olevain jänteiden diametrin. Diametrit eri leikkauksissa ovat siis yhdensuuntaiset. Niiden liittolais-diametrit ovat niin-ikään yhdensuuntaisia keskenään, ollen eräällä toisella diametraali-tasolla. Nämä kaksi diametraalitasoa leikkaavat toisiansa suoraa myöten, joka on urana tasoleikkausten keskiöille. Tämä suora on samalla myöskin diametri, jonka liittolais-taso on puheenalaisten tasoleikkausten suuntainen.

Tästä jo seuraa, että yhdensuuntaisten leikkausten keskiöt ovat samalla suoralla, ja että kullakin parilla liittolais-diametreja yhdessä leikkauksessa on vastaava pari yhdensuuntaisia liittolais-diametreja jokaisessa mussa. Koska tämä on sanottava niistäkin liittolais-diametreista, jotka ovat kohtisuoria toisillensa, niin ovat kaikkien eri leikkausten akselit samansuuntaisia.

Olkoon ensiksi yksi leikkauksista ellipsi. Pantakoon joku diametri, joka ensin oli yhdessä toisen tai toisen akselin kanssa, kääntymään jonnekin päin; silloin kääntyy sen liittolais-diametrikin samaan puoleen. Diametrit, oltuaan ensin kohtisuoria toisillensa, rupeavat nyt tekemään yhä suurempia ja suurempia kulmia välillensä, kunnes kulma saa maksimi-arvonsa silloin kuin diametrit yhtyvät akseleille tehdyn suorakulmion diagonaaleihin. Sama on liittolais-diametrien laita kaikissa muissakin yhdensuuntaisissa leikkauksissa: ne kääntyvät samaan puoleen ja niiden välinen kulma on maksimi-arvossaan silloin kuin ne ovat ensin-mainitun ellipsin yhtäsuurten liittolais-diametrien suuntaisia. Tämä liittolais-diametrien ominaisuus ilmoittaa leikkausten olevan ellipsejä, joissa ei ainoastaan akselit, vaan akseleille tehtyjen suorakulmioiden diagonaalitkin ovat yhdensuuntaisia ja joiden akselit niin muodoin ovat suhteellisia.

Olkoon toiseksi yksi leikkauksista hyperbola. Sen liittolais-diametreilla on se ominaisuus, että niiden ensin oltua yhdessä akselien kanssa ja toisen ruvetessa kääntymään jonnekin päin, lähtee toinen kääntymään vastaiseen puoleen, kunnes ne vihdoin kohtaavat toisensa ja yhtyvät toiseen tai toiseen asymptootiin. Koska nyt asianlaidan täytyy olla saman muidenkin leikkausten liittolais-diametreilla, niin ovat nekin siis hyperbolia, joissa ei ainoastaan akselit, vaan asymptootitkin ovat yhdensuuntaisia ja akselit niin muodoin suhteellisia.

Jos yksi leikkauksista on parabola, niin ovat kaikki diametrit yhdensuuntaisia; muissakin leikkauksissa ovat silloin diametrit yhdensuuntaisia ja leikkaukset niin muodoin parabolia, joiden akselit ovat yhdensuuntaisia ja muodostavat diametraali-tason.

Täten on nyt saatu seuraava väite:

Kaksi-asteisen pinnan leikkaukset yhdensuuntaisilla tasoilla ovat yhdenmuotoisia koonillisia leikkauksia, joiden akseleilla on sama suunta ja joiden keskiöt ovat leikkaus-tasojen liittolais-diametrilla.

Yhdenmuotoisilla koonillisilla sektioneilla tarkoitetaan tässä semmoisia, jotka ovat samaa laatua ja joiden akselit ovat suhteellisia. Tämän määrityksen mukaan ovat kaikki parabolat yhdenmuotoisia, koska niitä saattaa pitää ellipseinä, joissa vähä-akselin suhde iso-akseliin on $= 0$ *).

*) Jos nimittäin ellipsin excentrisyyden lausekkeessa

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

tehdään $b : a = 0$, niin on $e = 1$, s. o. ellipsi muuttuu parabolaksi.

Kuudes Luku.

Yleisen teorian jatkoa.

Pää-diametraali-taso.

217. Diametraali-taso, ollessaan kohtisuora kahtiajakamillensa jänteille, on nimeltään **pää-diametraalitaso** ja vastaavat jänteet **pääjänteitä**. Näitten suunta ei saatakaan enää olla mikä hyvänsä, koska yhdensuuntaisten jänteiden ja niiden diametraali-tason välinen kulma yleensä riippuu jänteiden suunta-cosineista. Lähdemme nyt tarkemmin tutkimaan, minkä ehdon alaisia nämä suunta-cosinit ovat, kun mainittu kulma on suora.

Jos l, m, n ovat suunta-cosineja ryhmälle pääjänteitä, jotka niin muodoin ovat samansuuntaisia kuin normaali diametraali-tasolle, jonka yhtälönä on (10) (210 §), niin ovat l, m, n myöskin normaalin suunta-cosinit, ja nämä taas ovat (160 §) toisiinsa samassa suhteessa kuin x-, y-, z-suureiden koefficientit mainitussa yhtälössä. Niin muodoin on

$$(1) \quad \frac{Al + C'm + B'n}{l} = \frac{C'l + Bm + A'n}{m} = \frac{B'l + A'm + Cn}{n},$$

ja näistä kahdesta yhtälöstä ynnä yhtälöstä $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, saadaan arvot suureille l, m, n.

Saadaksemme nämä yhtälöt helpommin ratkaistuiksi, otetaan avuksi eräs, vielä tuntematon, suure s, joka merkitsee kunkin murtoluvun (1) arvoa. Kaavain (1) sijaan saadaan täten

$$(2) \quad \begin{cases} Al + C'm + B'n = sl, \\ C'l + Bm + A'n = sm, \\ B'l + A'm + Cn = sn, \end{cases}$$

elikkä, kun kaikki terminit viedään vasempaan jäseneen,

$$(3) \quad \begin{cases} (A - s)l + C'm + B'n = 0, \\ C'l + (B - s)m + A'n = 0, \\ B'l + A'm + (C - s)n = 0. \end{cases}$$

Huomattava on, etteivät suureet l, m, n saata yht'aikaa kadota, koska niiden neliöiden summa on $=1$. Jos esim. n ei ole nolla, niin, jaettuamme edelliset yhtälöt n-suureella, näemme, että näissä, paitsi s-suuretta, on ainoastaan kaksi tuntematonta, nimittäin suhteet $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$, joitten määräämiseksi ei tarvita muuta kuin kaksi yhtälöä, jos vaan s on tunnettu; täydelliset arvot suureille l, m, n saadaan sitten yhtälöstä $l^2+m^2+n^2=1$. Kun s on annettu, niin sisältävät yhtälöt (3) siis liiallisen määräyksen, ja meidän tulee siis saada semmoinen arvo suureelle s, ettei mainituissa yhtälöissä ole mitään ristiriitaisuutta.

Tätä varten tulee mainituista yhtälöistä eliminoida l, m, n (elikkä suhteet $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$); s-suureen määräämiseksi saadaan silloin seuraava loppu-yhtälö:

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{c}(s-A)(s-B)(s-C)\\ -A'^2(s-A)-B'^2(s-B)-C'^2(s-C)-2A'B'C'=0,\end{array}\right.$$

joka, kehitettynä s-suureen arvokertain mukaan, on sama kuin

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{c}s^3-(A+B+C)s^2\\ +(AB+AC+BC-A'^2-B'^2-C'^2)s-\Delta=0,\end{array}\right.$$

jossa Δ-suureella on sama arvo kuin 207 §:ssä.

Koska jokaisella yhtälöllä, jonka asteluku on epätasainen, on vähintäkin yksi todellinen juuri, niin saa s-suure ainakin yhden todellisen arvon, joka toteuttaa yhtälön (5) ja niin muodoin sovittaa yhtälöt (3). Meillä on siis oikeus päättää, että kullakin kaksiasteisella yhtälöllä on ainakin yksi ryhmä pääjänteitä. Löytyykö muitakin, sen saamme tietää, lähemmin tutkittuamme kuutioyhtälöä (5).

218. Saadaksemme tätä yhtälöä tarkastuksellemme sopivampaan muotoon, palaamme jälleen yhtälöihin (3) ja eliminoimme suureet l, m, n toisella tavalla*). Jos ensimmäi-

*) Noudatamme tässä paraasta päästä Jacob'in menettelytapaa. Häntä ennen oli Cauchy antanut toisellaisen todistuksen kolmen juuren todellisuudesta.

nen yhtälö jaetaan suureella $B'C'$ ja senjälkeen lisätään $\frac{l}{A'}$ kumpaankin jäseneen, niin saadaan

$$\frac{l}{A'}+\frac{m}{B'}+\frac{n}{C'}=\frac{l}{B'C'}\left(s-A+\frac{B'C'}{A'}\right).$$

Samalla lailla muodostetaan toiset kaksi yhtälöä. Pantuamme lyhyyden vuoksi

$$a=A-\frac{B'C'}{A'},\ b=B-\frac{A'C'}{B'},\ c=C-\frac{A'B'}{C'},$$

saamme yhtälöt (3) seuraavaan muotoon:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{l}{A'}+\dfrac{m}{B'}+\dfrac{n}{C'}=\dfrac{l(s-a)}{B'C'}, \\ \dfrac{l}{A'}+\dfrac{m}{B'}+\dfrac{n}{C'}=\dfrac{m(s-b)}{A'C'}, \\ \dfrac{l}{A'}+\dfrac{m}{B'}+\dfrac{n}{C'}=\dfrac{n(s-c)}{A'B'}. \end{cases}$$

Jaetaan nyt ensimmäinen yhtälö suureella $A'^2(s-a)$, toinen suureella $B'^2(s-b)$, kolmas suureella $C'^2(s-c)$ ja lasketaan sitten yhtälöt yhteen; siten saadaan

$$\frac{1}{A'^2(s-a)}+\frac{1}{B'^2(s-b)}+\frac{1}{C'^2(s-c)}=\frac{1}{A'B'C'},$$

joka, kerrottuna suureella $(s-a)(s-b)(s-c)$, antaa

$$(7)\quad \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{A'B'C'}-\frac{(s-b)(s-c)}{A'^2}-\frac{(s-a)(s-c)}{B'^2}-\frac{(s-a)(s-b)}{C'^2}=0.$$

219. **Kuutioyhtälön tutkimus.** — Otetaan ensin tarkastettavaksi se tapaus, jolloin ei yksikään koefficienteistä A', B', C' ole nolla. Silloin ovat suureet a, b, c äärellisiä ja määrätyitä ja muoto (7) siis sopiva käytettäväksi.

I. Olkoot a, b, c erisuuria, nimittäin $a>b>c$. Jos nyt yhtälössä (7) pannaan s kasvamaan äärettömiin, niin se termini, jossa s on korkeimmassa arvokerrassa ja joka kertomisen jälkeen huomataan olevan $s^3:A'B'C'$, on vihdoin oleva suurempi kuin muitten terminien summa; vasen jäsen saa siis saman merkin kuin se. Hypoteesi $s=\infty$ antaa niin muodoin vasemmalle jäsenelle merkiksi joko + tahi —, sitä myöten kuin tulo $A'B'C'$ on positivinen tahi negativinen. Hypotesilla $s = -\infty$ saadaan samoissa tapauksissa vastaiset merkit — tahi +. Kun $s = a$, niin vasen jäsen tulee seuraavaksi:

$$-\frac{(a-b)(a-c)}{A'^2},$$

ja tämä on negativinen, koska a otaksuttiin isommaksi kuin b ja c. Kun $s = b$, niin saadaan positivinen lauseke; kun $s = c$, saadaan jälleen negativinen. Näemme siis, että jos s-suureen sijaan peräkkäin pannaan

$$+\infty,\quad a,\quad b,\quad c,\quad -\infty,$$

niin vasen jäsen yhtälössä (7) saa seuraavat merkit:

$$\pm,\quad -,\quad +,\quad -,\quad \mp.$$

Tästä päätämme, että yhtälön kaikki kolme juurta ovat todellisia, kuin myös, että yksi juuri on a- ja b-suureiden, toinen b- ja c-suureiden välillä ja kolmas isompi kuin a tahi vähempi kuin c, sitä myöten kuin tulo $A'B'C'$ on positivinen tahi negativinen.

Yhtälöllä (7) on siis tässä tapauksessa kolme todellista ja erisuurta juurta. Kukin juuri määrää eri suunnan jänteille. Kaavoista (6) saadaan nimittäin

$$(8)\qquad A'(s-a)l = B'(s-b)m = C'(s-c)n,$$

josta nähdään, että l, m, n ovat suhteellisia suureille

$$\frac{1}{A'(s-a)},\quad \frac{1}{B'(s-b)},\quad \frac{1}{C'(s-c)},$$

jotka ovat äärellisiä ja arvoillensa määrättyjä, kun ei yksikään nimittäjistä ole nolla.

II. Kun $a = b$, niin $s - a$ on yhteisenä tekijänä kaikilla termineillä yhtälössä (7); yksi juuri on silloin $= a$. Jaettuamme suureella $s - a$, saamme kaksiasteisen yhtälön

$$\frac{(s-a)(s-c)}{A'B'C'} - \frac{s-c}{A'^2} - \frac{s-c}{B'^2} - \frac{s-a}{C'^2} = 0.$$

Kun tässä s-suureen sijaan pannaan peräkkäin $+\infty$, a, c, $-\infty$, niin saa vasen jäsen merkit $\pm$, $-$, $+$, $\pm$, josta näkyy, että yksi juuri on a- ja c-suureiden välillä, toinen niiden ulkopuolella. Kuutioyhtälöllä on siis nytkin kolme todellista ja erisuurta juurta.

Kaavoista (8) saadaan nytkin määrätty suunta kummallekin niistä juurista, jotka eivät ole $= a$. Kolmas juuri $s = a = b$ pakottaa oikeat jäsenet kahdessa ensimmäisessä kaavassa (6) katoamaan ja kolmas antaa sen vuoksi $n = 0$. Mainitut kolme kaavaa supistuvat täten näiksi kahdeksi:

$$n = 0, \quad \frac{l}{A'} + \frac{m}{B'} = 0,$$

jotka myös määräävät yhden, xy-tason suuntaisen, suunnan.

III. Jos vihdoin $a = b = c$, niin saattaa yhtälöä (7) jakaa suureella $(s - a)^2$; silloin on kaksi juurta $= a$. Kolmas juuri on isompi tai vähempi kuin a, sitä myöten kuin tulo $A'B'C'$ on positivinen tahi negativinen. Tämä yksinäinen juuri määrää yhden ainoan suunnan, jolle saadaan kaavoista (8) seuraava kaava:

$$A'l = B'm = C'n.$$

Kaksois-juuri $s = a = b = c$ supistaa kolme yhtälöä (6) yhdeksi ainoaksi

$$\frac{l}{A'} + \frac{m}{B'} + \frac{n}{C'} = 0,$$

ja suureet l, m, n saavat äärettömän monta arvoa. Pääjänteillä saattaa silloin olla jokainen suunta, mikä vaan on samansuuntainen kuin taso

$$\frac{x}{A'} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{C'} = 0.$$

220. Tarkastettavana on vielä se tapaus, jolloin yksi tai useampi koefficienteistä A', B', C' on nolla. Yhtälöä muodossa (7) ei silloin saata käyttää, mutta sen sijaan on muoto (4) sopiva.

I. Kun yksi koefficienteistä, esim. C', on nolla, niin yhtälö (4) supistuu seuraavaksi:

$$(s-A)(s-B)(s-C)-A'^2(s-A)-B'^2(s-B)=0.$$

Jos $A > B$ ja s-suureen sijaan pannaan $+\infty$, A, B, $-\infty$, niin vasen jäsen saa merkit $+$, $-$, $+$, $-$; yhtälön kolme juurta ovat niin muodoin todelliset ja erisuuret. Kahdesta ensimmäisestä kaavasta (3) saadaan silloin

$$(A-s)l+B'n=0, \quad (B-s)m+A'n=0,$$

ja kukin juuri määrää yhden suunnan.

Sama on asianlaita, kun $A=B$, sillä eroituksella vaan, että silloin on yksi juuri $=A$ ja että sille vastaava suunta on määrättävä kaavoista (3):

$$n=0, \quad B'l+A'm=0;$$

se on siis xy-tason suuntainen.

II. Kun kaksi koefficienttiä, esim. B' ja C' ovat $=0$, niin kaava (4) supistuneena on

$$(s-A)(s-B)(s-C)-A'^2(s-A)=0;$$

yksi juuri on $=A$; toiset kaksi saadaan yhtälöstä

$$(s-B)(s-C)-A'^2=0.$$

Kolme juurta ovat yleensä erisuuret ja kutakin vastaa yksi ainoa suunta, jonka kaavat (3) määräävät. Mitä erittäin juureen $s=A$ tulee, niin määrää se jänteille x-akselin suunnan.

Mutta jos $s=A$ toteuttaa viimeksi mainitun neliöyhtälön, niin on A kaksoisjuuri. Tämä supistaa yhtälöt (3) yhdeksi ainoaksi

$$(B-A)m+A'n=0$$

ja vastaavilla jänteillä saattaa olla mikä suunta hyvänsä, joka vaan on samansuuntainen kuin taso

$$(B-A)y+A'z=0.$$

III. Jos kaikki kolme koefficienttiä A', B', C' ovat $=0$, niin yhtälöstä (4) saadaan

$$(s-A)(s-B)(s-C)=0,$$

jonka juuret ovat A, B, C. Kun nämä ovat erisuuret, niin vastaavaiset suunnat ovat määrättyjä, kulkien kolmen koordinaatiakselin suunnassa. Jos $A = B$, vastaavat tätä kaksoisjuurta kaikki suunnat, jotka ovat xy-tason suuntaisia. Jos vihdoin $A = B = C$, niin yhtälöt (3) ovat silloin identtisyyksiä ja jänteiden suunta on aivan epämääräinen. Kaikki suunnat avaruudessa vastaavat silloin tätä kolmoisjuurta.

Kaikki, mitä täten olemme selville saaneet, on lyhykäisyydessä seuraava:

Kolmiasteisella yhtälöllä s-suureen suhteen on aina kolme todellista juurta. Kutakin yksinäistä juurta vastaa yksi-ainoa määrätty suunta; kaksoisjuurta vastaavat kaikki suunnat, jotka ovat määrätyn tason suuntaiset; kolmoisjuurta vastaavat kaikki suunnat avaruudessa.

221. Olkoot s, s' kaksi erisuurta juurta kolmiasteiselle yhtälölle sekä l, m, n ja l', m', n' vastaavain jänteiden suuntacosineja; silloin on kaavan (2) mukaan

$$\begin{cases} Al + C'm + B'n = sl, \\ C'l + Bm + A'n = sm, \\ B'l + A'm + Cn = sn, \end{cases} \qquad \begin{cases} Al' + C'm' + B'n' = s'l', \\ C'l' + Bm' + A'n' = s'm', \\ B'l' + A'm' + Cn' = s'n'. \end{cases}$$

Kerrotaan kolme ensimmäistä yhtälöä järjestyksessä suureilla l', m', n', kolme jälkimmäistä suureilla l, m, n ja otetaan sitten jälkimmäisten summa edellisten summasta; siten saadaan

$$(s - s')(ll' + mm' + nn') = 0.$$

Kosk'ei nyt $s - s'$ saata olla nolla, sillä s ja s' otaksuttiin erisuuriksi, niin täytyy siis olla

$$ll' + mn' + mn' = 0.$$

Tästä seuraa, että kahta eri juurta vastaavaiset suunnat ovat kohtisuoria toisillensa. Samasta syystä ovat kaikki kaksoisjuurta vastaavaiset suunnat kohtisuoria sille, joka vastaa kolmatta juurta.

222. Tästä seuraa, että kaksi-asteisella pinnalla on pääjänteitä ainakin kolme eri ryhmää, jotka ovat kohtisuoria toisillensa. Tutkittakoon nyt, kuinka on pää-tasojen laita. Semmoisen tason yhtälö on

$$(9)\quad s\,(lx + my + nz) + A''l + B''m + C''n = 0,$$

joka saadaan, kun diametraali-tason yhtälössä (210 § (10)) x-, y-, z-suureiden koefficientit sijoitetaan lausekkeilla (2). Jokaista s-juurta, joka ei ole nolla, vastaa niin muodoin päätaso.

Jos yksi juuri s on nolla, niin siihen vastaavaa päätasoa ei ole olemassa, tahi siirtyy se äärettömiin, jollei samalla

$$A''l + B''m + C''n = 0.$$

Tässä tapauksessa muuttuu yhtälö (9) identtisyydeksi ja päätason asema on siis epämääräinen. Silloin saattaa päätasona pitää jok'ainoata tasoa, joka on kohtisuorassa jänteille.

Huomattakoon, etteivät kaikki kolme s-juurta saata olla $= 0$. Niiden yhtäsuuruuden ehtona on nimittäin $A' = B' = C' = 0$; juuret ovat silloin A, B, C, mutta jos nämä kaikki katoisivat, niin ei yhtälö enää olisikaan kaksi-asteinen. Jokaisella kaksi-asteisella pinnalla on niin muodoin ainakin yksi päätaso.

223. Jos x-akseli on samansuuntainen kuin ryhmä pääjänteitä, niin sen suuntacosinien, $l = 1$, $m = 0$, $n = 0$, täytyy toteuttua yhtälöt (3), ja tämä on mahdollista ainoastaan silloin kuin B' ja C' ovat $= 0$. Pinnan yhtälöstä poistuvat silloin ne terminit, joissa on tulot xy ja xz. Siitä poistuvat niin muodoin kaikki kolme tuloa xy, xz, yz, jos koordinaati-akselit otetaan samansuuntaisiksi kuin kolme pääjänteiden ryhmää, joiden oleminen on edellä todistettu. Tämän huomaa muutoin välittömästikin koordinaatien muutoksen kautta.

Olkoot x', y', z' koordinaateja uudessa suorakulmaisessa koordinaatistossa, joiden akselit ovat samansuuntaisia kuin kolme pääjänteiden ryhmää; olkoot vielä l, m, n ja l', m', n' sekä l'', m'', n'' cosineja kulmille, joita x'-, y'- ja z'-koordinaatien akselit tekevät alkuperäisten koordinaatiakselien kanssa; silloin on

$$\begin{aligned} x &= lx' + l'y' + l''z', \\ y &= mx' + m'y' + m''z', \\ z &= nx' + n'y' + n''z'. \end{aligned}$$

Kun nämä arvot sijoitetaan yhtälöön (1) (186 §), saadaan kaksiasteinen yhtälö suureissa x', y', z', jossa koefficienttina tulolle $2x'y'$ on

$$All' + Bmm' + Cnn'$$
$$+ A'(mn' + m'n) + B'(ln' + l'n) + C'(lm' + l'm).$$

Mutta kun yhtälöt (2) (217 §), sittenkuin ensimmäinen niistä on kerrottu suureella l', toinen suureella m' ja kolmas suureella n', lasketaan yhteen, niin nähdään sanotun koefficientin supistuvan seuraavaksi:

$$s(ll' + mm' + nn');$$

ja koska nyt suunnat (l, m, n) ja (l', m', n') ovat kohtisuoria toisillensa, niin mainittu koefficientti on $= 0$. Samoin katoovat suureiden $2x'z'$ ja $2y'z'$ koefficientit ja muutetun yhtälön muoto on siis

$$Lx'^2 + My'^2 + Nz'^2 + 2L'x' + 2M'y' + 2N'z' + D = 0.$$

Tässä niin muodoin todistus koordiaaatien muutokselle, mikä 186 §:stä jätettiin toistaiseksi.

Koefficienteillä L, M, N on huomattava merkitys. Niin esim. on

$$L = Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2A'mn + 2B'ln + 2C'lm.$$

Toiselta puolen kaavat (2), kerrottuina järjestyksessä suureilla l, m, n ja laskettuina yhteen, osoittavat, että viimeksi mainittu lauseke on identtisesti sama kuin $s(l^2 + m^2 + n^2)$, s. o. sama kuin s. Niin muodoin on $L = s$, s. o. L tyydyttää kuutioyhtälön (5). Sama on M- ja N-koefficienttienkin laita, ja siis on täten todistettu, että koefficientit L, M, N ovat kuutioyhtälön kolme juurta.

224. Päätasojen keskinäisiä leikkauksia sanotaan pinnan akseleiksi; kukin näistä on samansuuntainen kuin ryhmä pääjänteitä. Keskiöllisen pinnan kolme puoliakselia saadaan niin muodoin, kun vaan haetaan keskiösäteet kolmessa pääsuunnassa. Jos nyt l, m, n merkitsevät semmoista suuntaa, niin suure Ω (209 §) on sama kuin yksi s-juuri ja keskiösäteen kaava supistuu seuraavaksi:

$$s\varrho^2 + P_0 = 0,$$

jossa P_0 osoittaa sitä arvoa, minkä funktioni $P = A''x + B''y + C''z + D$ saa, kun x, y, z sijoitetaan siinä keskiön koordinaateilla. Kolmen puoli-akselin neliöt ovat niin muodoin

$$-\frac{P_0}{s}, \quad -\frac{P_0}{s'}, \quad -\frac{P_0}{s''}$$

ja pinnan yhtälö näissä akseleissa on

$$sx^2 + s'y^2 + s''z^2 + P_0 = 0,$$

jossa s, s', s'' merkitsevät kuutioyhtälön kolmea juurta.

225. **Numeroyhtälöjen tutkimus.** — Nyt on meillä kaikki keinot, määrätäksemme, mikä geometrillinen merkitys annetulla kaksiasteisella yhtälöllä on. Ensinkin on tehtävä kolme keskiön yhtälöä (207 §), joiden ratkaiseminen osoittaa, onko pinnalla yksi tai ei yhtään tahi äärettömän monta keskiötä. Kun keskiö on olemassa, niin sijoitetaan sen koordinaatit lausekkeesen $A''x + B''y + C''z + D$, joten saadaan lauseke P_0. Jos keskiöitä on äärettömän monta, otetaan yksi niistä mielin määrin ja lasketaan sitten P_0 sen koordinaateissa niinkuin vast'ikään sanottiin. Sen jälkeen muodostetaan kuutioyhtälö (5), jonka vakinainen termini Δ samalla on yhteinen nimittäjä keskiön koordinaateja osoittaville murtoluvuille. Määrätäksemme nyt pintaa tarkemmin, tulee tutkia minkälaatuisia tämän yhtälön kolme juurta s, s', s'' ovat.

Jos Δ ei ole nolla, niin ei yksikään kolmesta juuresta katoa. Silloin on pinnalla yksi ainoa keskiö ja sen yhtälönä pää-akseleissa on

$$sx^2 + s'y^2 + s''z^2 + P_0 = 0.$$

Jos Δ on nolla, niin katoaa yksi, kenties kaksikin juurista s, s', s''. Pinta saattaa silloin olla joko aivan keskiötön tai on sillä äärettömän monta keskiötä. Edellisessä tapauksessa sopii sen yhtälölle antaa muoto

$$sx^2 + sy^2 = 2Hz,$$

jälkimmäisessä

$$sx^2 + s'y^2 + P_0 = 0.$$

Jos on yleensä tutkittavana ainoastaan, minkäänlaatuista pintaa annettu kaksiasteinen yhtälö edustaa, lähemmin määräämättä sen akseleja tahi parametreja, niin ei kuutioyhtälöä tarvitsekaan ratkaista, mikä tavallisesti on vaikein osa tehtävätä. Silloin ei tarvitse muuta kuin tietää, minkä-merkkisiä juuret ovat ja sitä varten on huomioon otettava ainoastaan kuutioyhtälön koefficienttien merkit. Cartesion säännön mukaan on nimittäin tällä yhtälöllä yhtä monta positivista juurta kuin on merkinvaihdosta ja yhtä monta negativista kuin on merkinjatkoa.

Seuraava taulu osoittaa eri tapaukset numeroyhtälön tutkimuksessa.

I. $\Delta \gtrless 0$.

Yksikeskiöiset pinnat.

$P_0 \gtrless 0$;	Juurilla s, s' s'' on kaikilla sama merkki kuin suureella P_0:	Aatteinen pinta.
	kaikilla vastainen merkki:	Ellipsoidi.
	yhdellä sama, kahdella vastainen:	Yksivaippainen hyperboloidi.
	kahdella sama, yhdellä vastainen:	Kaksivaippainen hyperboloidi.
$P_0 = 0$;	juurilla s, s' s'' on kaikilla sama merkki:	Piste.
	eri merkit:	Kooni.

II. $\Delta = 0$.

A. Keskiöttömät pinnat.

Yksi juuri s on nolla;	Toiset kaksi yhdenmerkkisiä:	Elliptinen paraboloidi.
	erimerkkisiä:	Hyperbolinen paraboloidi
Kaksi s-juurta ovat nolla:		Parabolinen cylinderi.

B. Pinnat äärettömän monella keskiöllä.

- $P_0 \gtrless 0$;
  - Yksi juuri s on nolla;
    - Muilla kummallakin on sama merkki kuin suureella P_0: Aatteinen pinta.
    - kummallakin vastainen merkki: Elliptinen cylinderi.
    - eri merkit: Hyperbolinen cylinderi.
  - Kaksi s-juurta on nolla;
    - Kolmannella juurella on sama merkki kuin suureella P_0: Aatteinen pinta.
    - vastainen merkki: Kaksi yhdensuuntaista tasoa.
- $P_0 = 0$;
  - Yksi juuri s on nolla;
    - Muilla sama merkki: Suora.
    - eri merkit: Kaksi tasoa, jotka leikkaavat toisiansa.
  - Kaksi s-juurta ovat nolla: Taso.

Esim. 1. Tutkittakoon, mitä merkitsee yhtälö

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy - 6 = 0.$$

Tässä on origini keskiönä ja $P_0 = -6$. Kuutioyhtälöksi saadaan

$$(s-7)(s-6)(s-5) - 4(s-7) - 4(s-5) = 0$$

eli, järjestettynä,

$$s^3 - 18s^2 + 99s - 162 = 0.$$

Sen juuret ovat 3, 6, 9; pinta on siis ellipsoidi, jonka yhtälö pääakseleissa on

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 2.$$

Esim. 2. $5x^2 - y^2 + z^2 + 6xz + 4xy + 2x + 4y + 6z - 8 = 0.$

Keskiön yhtälöt ovat

$$\begin{aligned} 5x + 2y + 3z + 1 &= 0, \\ 2x - y + 2 &= 0, \\ 3x + z + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Toisesta saadaan $y = 2x + 2$, kolmannesta $z = -3x - 3$, ja kun nämä sijoitetaan ensimmäiseen, niin tulee vasemmasta jäsenestä -4. Pinnalla niin muodoin ei ole keskiötä. Kuutioyhtälö on

$$s^3 - 5s^2 - 14s = 0,$$

ja sen juuret 0, 7, —2. Pinta on siis hyperbolinen paraboloidi, jossa parabolisten pääleikkausten parametrit ovat toisiinsa kuin 2 : 7.

Esim. 3. $2x^2-3y^2+z^2-2yz+4xz-6x-2z=k.$

Keskiön koordinaatit ovat $x=-\frac{3}{2}$, $y=-1$, $z=+3$. Kuutioyhtälöllä

$$s^3-12s-4=0$$

on Cartesion säännön mukaan kaksi negativista juurta ja yksi positivinen. Sitten saadaan $P_0=\frac{3}{2}-k$. Pinta on niin muodoin yksivaippainen hyperboloidi, jos $k<\frac{3}{2}$, kooni, jos $k=\frac{3}{2}$, kaksivaippainen hyperboloidi, jos $k>\frac{3}{2}$.

Esim. 4. $x^2+3y^2+9z^2+6xz-2y-7=0.$

Keskiöitä on äärettömän monta ja $P_0=-\frac{22}{3}$. Kuutioyhtälöllä

$$s^3-13s^2+30s=0$$

on juuret 0, 3, 10. Annettu yhtälö supistuu siis seuraavaksi:

$$9x^2+30y^2=22,$$

joka edustaa elliptistä cylinderiä.

Seitsemäs Luku.

Yleisen teorian jatkoa.

Tangentti ja tangenttitaso, poli ja polaaritaso.

226. Tangentti jollekin pinnalle pisteessä A on se lopullinen asema, johon suora viiva, leikattuaan ensin pintaa pisteissä A ja B, lähenee, B-pisteen käydessä yhä likemmäksi pistettä A, ja johon se asettuu, kun pisteet yhtyvät toisiinsa, eli toisin sanoen: tangentti on suora, joka kohtaa pintaa kahdessa yhtyvässä pisteessä.

Pisteet, joissa suora yleensä leikkaa kaksiasteista pintaa, saadaan määrätyiksi kaavalla (5) siv. 221. Jos x_0, y_0, z_0

merkitsevät koordinaateja pisteelle itse pinnalla, niin katoaa U_0 ja toinen ϱ-suureen arvoista on nolla. Jos sen ohella on

$$(1) \qquad X_0 l + Y_0 m + Z_0 n = 0,$$

niin toinenkin ϱ-suureen arvo katoaa, ja suora kohtaa niin muodoin pintaa kahdessa yhtyvässä pisteessä. Kun siis ehto (1) on täytetty, niin suora, joka suunnassa (l, m, n) kulkee pisteen (x_0, y_0, z_0) kautta, on pinnan tangentti.

Yhtälö (1) osoittaa, että sivuamis-piste (x_0, y_0, z_0) on tangentin suuntaisten jänteiden diametraali-tasolla. Jos siis pinta leikataan diametraali-tasolla, ja leikkauksessa, joka on koonillinen leikkaus, vedetään kaikkien pisteiden kautta vastaavain jänteiden suuntaisia suoria, niin ovat kaikki nämä suorat pinnan tangentteja ja muodostavat cylinderin, joka sivuaa pintaa yllämainittua koonillista leikkausta myöten.

Kun sitä vastoin sivuamispiste on annettuna, niin tangentin suunta ei olekaan täydellisesti määrätty, sillä löytyyhän äärettömän monta l-, m-, n-suureiden arvoryhmää, jotka täyttävät ehdon (1). Tämä ehto lausuu nimittäin ainoastaan sen, että tangentti on kohtisuora eräälle suoralle, jonka suuntacosinit ovat suhteellisia suureille X_0, Y_0, Z_0. Yhden pisteen kautta pinnalla saattaa niin muodoin vetää äärettömän monta tangenttia, jotka kaikki ovat kohtisuoria samalle suoralle ja muodostavat siten tason*). Tätä tasoa sanotaan pinnan t a n g e n t t i t a s o k s i ja sivuamispisteestä sille kohtisuoraksi vedettyä suoraa pinnan n o r m a a l i k s i.

Ennen on todistettu, että normaalin suuntacosinit ovat toisiinsa kuin X_0, Y_0, Z_0; pinnan normaalia pisteessä (x_0, y_0, z_0) saattaa niin muodoin merkitä kaavalla

$$(2) \qquad \frac{x - x_0}{X_0} = \frac{y - y_0}{Y_0} = \frac{z - z_0}{Z_0}.$$

Yhtälöksi saman pisteen kautta kulkevalle tangenttitasolle, joka, niinkuin sanottiin, on kohtisuora normaalille, saamme

*) Korkeampi analysi todistaa, että kaikilla pinnoilla on tämä ominaisuus, mikä nyt on todistettu olevaksi ainoastaan kaksiasteisilla pinnoilla.

$$X_0(x-x_0)+Y_0(y-y_0)+Z_0(z-z_0)=0.$$

Mutta koska (x_0, y_0, z_0) on piste itse pinnalla, niin on myös $U_0=0$, s. o.

$$X_0x_0+Y_0y_0+Z_0z_0+P_0=0,$$

ja kun tämä yhtälö lisätään edelliseen, niin saamme

$$(3)\qquad X_0x+Y_0y+Z_0z+P_0=0.$$

Siinä yksinkertaisin yhtälön muoto tasolle, joka sivuaa pintaa pisteessä (x_0, y_0, z_0).

227. Tällä yhtälöllä on se huomattava ominaisuus, ettei se muutu, jos x, y, z sijoitetaan suureilla x_0, y_0, z_0; toisin sanoen, meillä on identtisesti

$$(4)\qquad X_0x+Y_0y+Z_0z+P_0=Xx_0+Yy_0+Zz_0+P;$$

sillä jos kumpikin jäsen kehitetään, niin saa kumpikin seuraavan muodon, joka on symmetrillinen suureiden x, y, z, ja x_0, y_0, z_0 suhteen:

$$\begin{gathered}Axx_0+Byy_0+Czz_0\\ +A'(yz_0+y_0z)+B'(xz_0+x_0z)+C'(xy_0+x_0y)\\ +A''(x+x_0)+B''(y+y_0)+C''(z+z_0)+D.\end{gathered}$$

Kuinka tärkeä tämä ominaisuus on, näkyy seuraavasta.

228. **Kaksiasteisen pinnan tangenttitaso on liittolainen sivuamispisteen kautta kulkevalle diametrille.**

Merkitkööt x_1, y_1, z_1 hetkiseksi keskiön koordinaateja; diametrin suuntacosinit ovat silloin suhteellisia suureille x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1, ja liittolais-diametraalitason yhtälöksi tulee 210 §:n mukaan

$$X(x_0-x_1)+Y(y_0-y_1)+Z(z_0-z_1)=0$$

eli

$$Xx_0+Yy_0+Zz_0+P=Xx_1+Yy_1+Zz_1+P.$$

Niinkuin vast'ikään sanottiin, sopii x, y, z, vaihtaa koordinaateihin x_0, y_0, z_0 vasemmassa jäsenessä ja, samasta syystä, koordinaateihin x_1, y_1, z_1 oikeassa; viimeksi mainitun kaavan saattaa siis kirjoittaa näinkin:

$$X_0x+Y_0y+Z_0z+P_0=X_1x+Y_1y+Z_1z+P_1.$$

Mutta koska x_1, y_1, z_1 ovat keskiön koordinaateja, niin täytyy niiden toteuttaa yhtälöt $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$; kaavamme supistuu niin muodoin seuraavaksi:

$$X_0 x + Y_0 y + Z_0 z + P_0 - P_1 = 0,$$

joka edustaa pisteen (x_0, y_0, z_0) kautta kulkevan diametrin liittolais-diametraalitasoa. Koska suureilla x, y, z on tässä samat koefficientit kuin yhtälössä (3), on tangenttitaso mainitun diametraalitason suuntainen.

229. Polit ja polaaritaso. — Kahta pistettä A ja B sanotaan kaksi-asteisen tason pol'eiksi, jos ne ovat harmonillisia niiden C- ja D-pisteitten kanssa, joissa niiden yhdistyssuora leikkaa pintaa, siten nimittäin, että A ja B ovat toinen, C ja D toinen pari liittolaispisteitä. Jos välimatkat pisteestä A pisteisin B, C, D merkitään järjestyksessä r, ϱ', ϱ'', pitäen näitä välimatkoja positivisina yhtäänne ja negativisina toisaanne päin A-pisteestä, niin r on harmonillinen keskisuhdeluku suureille ϱ' ja ϱ''; silloin on

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} \text{*)}.$$

Olkoot nyt x_0, y_0, z_0 A-pisteen koordinaateja ja l, m, n AB-suoran suuntacosineja; tämän suoran yhtälöinä ovat yhtälöt (4) siv. 221, ja sen leikkauspisteet pinnalla saadaan yhtälöstä (5) siv. 221, jonka juuret tässä tapauksessa ovat ϱ' ja ϱ''. Mutta jos tämä yhtälö jaetaan suureella ϱ^2, niin saamme siitä

$$U_0\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + 2(X_0 l + Y_0 m + Z_0 n)\frac{1}{\varrho} + \ldots = 0,$$

---

*) Tämän huomaa heti, kun A on ulkopuolella ja B sisäpuolella pintaa, niin että pisteet seuraavat toisiansa järjestyksessä A, C, B, D; mutta sääntö pitää paikkansa, vaikka pisteet seuraisivat toisiansa järjestyksessä B, C, A, D. Jos nimittäin suunta AB pidetään positivisena, niin on $AB = r$, $AC = \varrho'$, $AD = -\varrho''$; josta $BC = r - \varrho'$, $BD = r - \varrho''$. Koska nyt $AC : AD = BC : BD$, niin on myös

$$\varrho' : -\varrho'' = r - \varrho' : r - \varrho'',$$

josta $\varrho'(r - \varrho'') + \varrho''(r - \varrho') = 0$, s. o. $r(\varrho' + \varrho'') = 2\varrho'\varrho''$

eli $$\frac{2}{r} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}.$$

ja tämän muutetun yhtälön juuret ovat $\frac{1}{\varrho'}$ ja $\frac{1}{\varrho''}$; niin muodoin on

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} = -\frac{2(X_0 l + Y_0 m + Z_0 n)}{U_0},$$

josta

$$r(X_0 l + Y_0 m + Z_0 n) + U_0 = 0.$$

Jos B-pisteen koordinaatit merkitään x_1, y_1, z_1, niin on $rl = x_1 - x_0$, $rm = y_1 - y_0$, $rn = z_1 - z_0$; edellisestä yhtälöstä saadaan siis

$$X_0(x_1 - x_0) + Y_0(y_1 - y_0) + Z_0(z_1 - z_0) + U_0 = 0$$

ja kun tässä U_0 sijoitetaan arvollansa $X_0 x_0 + Y_0 y_0 + Z_0 z_0 + P_0$, niin tulee vihdoin

$$X_0 x_1 + Y_0 y_1 + Z_0 z_1 + P_0 = 0.$$

Tämä yhtälö osoittaa, millä ehdolla pisteet (x_0, y_0, z_0) ja (x_1, y_1, z_1) ovat harmonillisia poleja pinnalle.

Kun toinen poli (x_0, y_0, z_0) on annettu tai mielinmäärin otettu, niin saattaa toisena polina olla mikä piste hyvänsä, jonka koordinaatit vaan täyttävät yhtälön

$$(5) \qquad X_0 x + Y_0 y + Z_0 z + P_0 = 0,$$

joka on yksiasteinen suureissa x, y, z ja niin mudoin edustaa tasoa. Tämä taso on pisteen (x_0, y_0, z_0) polaaritaso ja piste (x_0, y_0, z_0) on mainitun tason poli. Annetun pisteen polaaritaso on niin muodoin ura sen polille eli, toisin sanoen, ura neljännelle harmonilliselle pisteelle annetun pisteen kautta vedetyillä jänteillä.

Samoin kuin 228 §:ssä, saattaa nytkin todistaa, että annetun pisteen polaaritaso on saman pisteen kautta kulkevan diametrin liittolainen. Saman diametrin kaikilla pisteillä on niin muodoin yhdensuuntaiset polaaritasot ja kaikkien yhdensuuntaisten tasojen polit ovat suoralla, joka on tasojen liittolaisdiametri.

230. Yhtälöt (3) ja (5) ovat muodon suhteen identtisiä, ja ennen jo on sanottu tämän muodon olevan symmetrillisen suureiden x, y, z ja x_0, y_0, z_0 suhteen. Yhtälö (5)

pitää senvuoksi paikkansa, vaikka koordinaatien merkitys muuttuisikin, niin että (x, y, z) merkitsisi A-polia ja (x_0, y_0, z_0) jotakin B-pistettä polaaritasolla. Silloin osoittaa se, että jos B-piste on annettu, niin A-pisteen ura on taso, nimittäin B-pisteen polaaritaso. Niinmuodoin ovat kaikkien B-pisteen kautta kulkevain tasojen polit saman pisteen polaaritasolla eli toisin sanoen:

Kun taso kääntyy jossakin pisteessä, niin muodostaa sen poli tason, joka on pisteen polaaritaso.

Jos x, y, z ja x_0, y_0, z_0 vieläkin vaihtavat merkityksiänsä, niin näkyy, että jos A on mikä piste hyvänsä sillä tasolla, jonka poli on B, niin kulkee sen polaaritaso B-pisteen kautta; toisin sanoen:

Kun piste liikkuu tasolla, niin kääntyy sen polaaritaso pisteessä, joka on ensinmainitun tason poli.

231. Jok'ainoalla pisteellä on polaaritaso, jonka asema kaksiasteisen yhtälön suhteen riippuu pisteen asemasta. Jos A on piste itse kaksiasteisella pinnalla ja B yksi sen poleista, niin toinen niistä pisteistä C, D, joissa AB-suora leikkaa pintaa, yhtyy A-pisteesen; mutta silloinhan yhtyy toinenkin leikkauspiste A-pisteesen, koska pisteparit A, B ja C, D ovat harmonillisia. Suora AB kohtaa nyt niin muodoin pintaa kahdessa yhtyvässä pisteessä, ja on siis tangentti; ja koska B saattaa olla missä hyvänsä A-pisteen polaaritasolla, niin täytyy kaikkien suorain, jotka tällä tasolla vedetään A-pisteen kautta, olla pinnan tangentteja; taso sivuaa niin muodoin pintaa pisteessä A. Siis

Kaksiasteisella pinnalla olevan pisteen polaaritaso sivuaa pintaa samassa pisteessä; päinvastoin on tangenttitason polina sivuamispiste.

Tästä seuraa, niinkuin ennen on nähty, että jos x_0, y_0, z_0 ovat pinnalla olevan pisteen koordinaateja, niin yhtälö (5) eli (3) edustaa saman pisteen kautta kulkevaa tangenttitasoa.

Jos taas piste A olisi annettuna pinnan ulkopuolella ja piste B leikkauksella, jonka A-pisteen polaaritaso tekee, niin huomataan jälleen, että suora AB on pinnan tangentti. Kun nyt B lähtee kulkemaan mainittua leikkausta myöten, niin muodostaa AB koonin, joka sivuaa pintaa samaa leikkausviivaa myöten. Sanalla sanoen:

Jos annetusta pisteestä kaksiasteisen pinnan ulkopuolella vedetään tangentteja pinnalle, niin sivuamispisteitten urana on koonillinen leikkaus, jonka taso on annetun pisteen polaaritaso. Itse tangenttien urana on tangentti-kooni.

Pinnan tasoleikkausta saattaa aina pitää sivuamiskäyränä tangenttikoonille, jonka kärki on leikkaustason poli. Kun leikkaus kääntyy jossakin pisteessä, niin muodostaa koonin kärki tason, joka on mainitun pisteen polaaritaso; päinvastoin kun kooninkärki liikkuu tasoa myöten, kääntyy sivuamiskäyrän taso pisteessä, joka on ensinmainitun tason poli.

232. Piste, jonka polaaritaso on äärettömän kaukana, jakaa kahtia kaikki sen kautta vedetyt jänteet ja on niin muodoin pinnan keskiö. Keskiön saattaa siis määrittää äärettömän kaukaisen tason poliksi.

Jos sitä vastoin poli on äärettömän kaukana, niin ovat kaikki sieltä lähtevät pinnan jänteet yhdensuuntaisia ja kullakin jänteellä on neljäs harmonillinen piste keskivälissä niitä pisteitä, joissa jänteet leikkaavat pintaa. Äärettömän kaukaisen pisteen polaaritaso jakaa niin muodoin kahtia kaikki yhdensuuntaiset jänteet, jotka on vedetty sanottua pistettä kohti. Tämän johdosta sopii diametraali-tasoa pitää äärettömän kaukaisen pisteen polaaritasona, nimittäin sen pisteen, jota kohti vastaavat yhdensuuntaiset jänteet ajatellaan kulkeviksi.

Polin siirtyessä äärettömän kauaksi, muuttuu sieltä lähtevä tangenttikooni tangentticylinderiksi, sivuten pintaa sitä leikkauskäyrää myöten, joka syntyy, kun pinta leikataan cylinderin emäsuorain kanssa yhdensuuntaisten jänteiden diametraalitasolla (vrf. 226 §).

233. Vastavuoroiset polaarit. — Olkoon AB mielinmäärin otettu suora, P ja Q kaksi sen kautta kulkevaa

tasoa sekä A' ja B' näitten tasojen poleja. Kukin AB-suoran piste kuuluu sekä P-tasoon että Q-tasoon; sen polaaritaso kulkee niin muodon myöskin sekä A'-polin että B'-polin kautta, siis $A'B'$-suoran kautta. Samasta syystä leikkaavat päinvastoin kaikkien $A'B'$-suoran pisteitten polaaritasot toisiansa yhtä suoraa myöten; ja koska P ja Q ovat kaksi semmoista polaaritasoa, niin viimeksimainittuna suorana on nähtävästi AB. Tästä saadaan seuraava väite:

Pisteen liikkuessa AB-suoraa myöten, kääntyy sen polaaritaso toisessa $A'B'$-suorassa, ja pisteen liikkuessa jälkimmäistä suoraa myöten, kääntyy sen polaaritaso edellisessä.

Näitä kahta suoraa AB, $A'B'$ sanotaan vastavuoroisiksi polaareiksi. Niiden pääominaisuus on se, että kukin piste toisella on harmonillinen polaari kullekin pisteelle toisella. Tästä seuraa heti, että jos suora kohtaa kahta vastavuoista polaaria, niin polaarit sekä pinta leikkaavat sitä neljässä harmonillisessa pisteessä.

Kullakin AB-suoran pisteellä on, kuten olemme nähneet, polaaritasonsa, jotka kulkevat vastavuoroisen $A'B'$-polaarin kautta. Näistä pisteistä ovat huomattavimpia kolme, nimittäin ensin ne kaksi, joissa suora leikkaa pintaa, ja sitten äärettömän kaukainen piste suoran suunnassa. Kahden ensinmainitun pisteen polaaritasot ovat yhtä kuin saman pisteitten kautta kulkevat tangenttitasot; äärettömän kaukaisen pisteen polaaritaso taas on sama kuin AB suoran suuntaisten jänteiden diametraalitaso. Tästä kaksi seuraavaa väitettä:

Suora, jossa kaksi kaksiasteisen pinnan tangenttitasoa leikkaavat toisiansa, on vastavuoroinen polaari sivuamispisteitten yhdistyssuoralle.

AB-suoran vastavuoroinen polaari on AB-suunnan liittolais-diametraalitasolla.

Olkoon C se piste, jossa AB suora leikkaa liittolaisdiametraalitasoa. Jos nyt tarkastetaan sitä koonillista leikkausta, jota myöten viimeksimainittu taso leikkaa pintaa, ja ajatellaan C-pisteen kautta vedetyiksi suoria eri pisteisin vastavuoroisella polaarilla, niin nähdään, että koonillinen leikkaus leikkaa kaikki nämä suorat harmonillisissa pisteissä. *AB*-suoran vastavuoroinen polaari on niin muodoin *C*-pisteen polaari mainitun koonillisen leikkauksen suhteen.

Kahdeksas Luku.

Yleisen teorian käyttäminen erityisiin kaksiasteisiin pintoihin.

Ellipsoïdi.

234. Tangentti- ja diametraali-taso. — Kun ellipsoidin yhtälö

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

verrataan yleiseen kaksiasteiseen yhtälöön, niin nähdään, että ne funktionit, joita 205 §:ssä merkitsevät X, Y, Z, P, saavat seuraavat arvot:

$$X=\frac{x}{a^2},\quad Y=\frac{y}{b^2},\quad Z=\frac{z}{c^2},\quad P=-1.$$

Yhtälöksi tasolle, joka sivuaa ellipsoidia pisteessä (x', y', z'), saamme silloin (226 §)

$$(2) \qquad \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1.$$

Diametraalitaso niille jänteille, joiden suuntacosinit ovat l, m, n, lausutaan taas 210 §:n mukaan yhtälöllä

$$(3) \qquad \frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}+\frac{nz}{c^2}=0.$$

Jokainen keskiön kautta kulkeva taso on diametraalitaso, sillä jos sen yhtälö

$$Ax+By+Cz=0$$

pannaan identtiseksi edellisen kanssa, niin saadaan

$$(4)\qquad \frac{l}{Aa^2}=\frac{m}{Bb^2}=\frac{n}{Cc^2},$$

joten tulee määrätyksi suunta tason kahtiajakamille jänteille.

235. Liittolais-diametrit. — Jokaisen diametraalitason leikkauksena ellipsoidissa on umpinainen käyrä, siis ellipsi. Jos semmoisessa ellipsissä otetaan mielin määrin kaksi liittolais-diametria, niin nämä ynnä diametraali-tason liittolais-diametri muodostavat ellipsoidissa liittolais-diametriston (215 §). Ne ovat kaikki todellisia, s. o. pinnan sisässä. Jos nämä kolme konjugaatista diametria otetaan akseleiksi uudelle (vinokulmaiselle) koordinaatistolle $\xi\eta\zeta$, niin saadaan ellipsoidin yhtälöksi

$$(5)\qquad \frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=1.$$

Koska nimittäin se taso, jossa kaksi akselia ovat, jakaa kahtia kolmannen akselin suuntaiset jänteet, niin yhtälö, ratkaistuna minkä koordinaatin (ξ, η, ζ) suhteen hyvänsä, antaa aina kaksi yhtä suurta, vastaismerkkistä arvoa; yhtälössä niin muodoin saattaa olla ainoastaan koordinaatien neliöt ja vakinainen termini. Sitä paitsi pitää kaikkien neliöterminien koefficienteillä vasemmassa jäsenessä olla sama merkki kuin vakinaisella terminillä oikeassa, sillä muutoinhan olisivat muutamat koordinaati-akselin leikkaukset ellipsoidissa aatteisia, joka on mahdotonta. Ellipsoidin yhtälö liittolais-diametreissa akseleina on siis saman muotoinen kuin pääakseleissakin.

Pinta leikkaa ξ-, η-, ζ-akselit matkain $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$ päässä originista; α, β, γ merkitsevät niin muodoin säteitä eli puolidiametreja kolmen koordinaati-akselin suunnassa.

236. Kolmen liiittolais-diametrin (OD, OD', OD'') suuntain välillä on keskinäinen suhta, jonka nyt otamme tutkiaksemme. Olkoot l, m, n ensimmäisen diametrin suuntacosineja, l', m', n' toisen ja l'', m'', n'' kolmannen.

Tasolla, joka jakaa kahtia ensimmäisen diametrin suuntaiset jänteet, on yhtälönä (3)

$$\frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}+\frac{nz}{c^2}=0,$$

ja koska toinen diametri on tässä tasossa, niin on

$$\frac{ll'}{a^2}+\frac{mm'}{b^2}+\frac{nn'}{c^2}=0.$$

Niin muodoin saamme

$$\frac{ll'}{a^2}+\frac{mm'}{b^2}+\frac{nn'}{c^2}=0,$$

$$\frac{ll''}{a^2}+\frac{mm''}{b^2}+\frac{nn''}{c^2}=0,$$

$$\frac{l'l''}{a^2}+\frac{m'm''}{b^2}+\frac{n'n''}{c^2}=0.$$

Ensimmäinen näistä yhtälöistä lausuu, että OD ja OD' ovat liittolais-diametreja siinä leikkauksessa, jonka tasossa ne ovat; toinen ja kolmas ilmoittavat samaa diametreista OD ja OD'' sekä OD' ja OD''.

237. Summa kolmen liittolais-diametrin neliöistä on vakinainen. — Tämä todistetaan helposti samallaisen, ellipsiin kuuluvan, väitteen nojalla. Olkoot 2α, 2β, 2γ kolme liittolais-diametria ellipsoidissa. Siinä ellipsileikkauksessa, joka sisältää diametrit 2α, 2β, saatamme ottaa toista kaksi liittolais-diametria $2\alpha'$, $2\beta'$, joista toinen, $2\alpha'$, on ellipsin tason ja xy-tason leikkaus. Silloin on 58 §:n mukaan $\alpha^2+\beta^2=\alpha'^2+\beta'^2$ ja niin muodoin $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma^2$. Meillä on siis uusi liittolais-diametristo ellipsoidille, nimittäin $2\alpha'$, $2\beta'$, 2γ, ja summa näiden neliöistä on yhtä suuri kuin summa annettujen diametrien neliöistä, ja yksi näistä $2\alpha'$, on xy-tasolla. Siinä ellipsileikkauksessa, jonka taso sisältää toiset kaksi diametria, saattaa diametrien $2\beta'$, 2γ sijaan valita kaksi muuta liittolaisdiametria $2\beta''$, $2\gamma'$ siten, että toinen niistä, $2\beta''$, sen ohella on myöskin xy-tasolla. Siten saadaan kolmas liittolais-diametristo, $2\alpha'$, $2\beta''$, $2\gamma'$, jossa kaksi ensimmäistä diametria ovat xy-tasolla, joka on pää-taso; kolmas on siis kohtisuora sille ja on yhdessä akselin $2c$ kanssa. Diametrien $2\alpha'$, $2\beta''$ sijaan

saattaa lopuksi valita akselit $2a$, $2b$, jotka myöskin ovat kaksi liittolais-diametria xy-tasolla, ja niin on perättäisesti siirrytty diametristosta α, β, γ suorakulmaiseen a, b, c, muuttamatta neliöiden summaa. Siis on

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Samoin saattaa, 59 §:n nojalla, todistaa, että **parallelipipedi kolmella liittolais-diametrilla** on **vakinainen**. Kun esim. siirrytään diametristosta α, β, γ diametristoon α', β', γ, niin parallelipipedin volymi ei muutu, sillä kumpaisellakin parallelipipedillä on sama korkeus ja yhtä suuret asemat, nimittäin ne suunnikkaat, jotka tehdään diametreille 2α, 2β ja $2\alpha'$, $2\beta'$.

238. **Pyöriö-leikkaukset.** — Yleinen tutkimus 216 §:ssä osoittaa, että kaikki suuntais-leikkaukset ellipsoidissa ovat yhdenmuotoisia ellipsejä, joiden akseleilla on sama suunta ja joiden keskiöt ovat leikkausten liittolais-diametrilla. Tutkiaksemme pyöriö-leikkausten asemaa, on tarpeeksi tarkastaa vain keskiön kautta kulkevaa tasoa.

Jos semmoinen taso leikkaa pinnasta pyöriön, niin täytyy pyöriön keskiön olla yhdessä ellipsoidin keskiön kanssa ja pyöriötä saattaa silloin pitää käyränä, jota myöten ovat toisensa leikanneet ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ja joku sen kanssa koncentrillinen pallo

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1.$$

Näistä yhtälöistä saadaan vähentämällä

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right) = 0.$$

Tämä on yhtälö koonille, jonka kärki on originissa ja joka kulkee pallon ja ellipsoidin leikkauskäyrän kautta. Puheenalaisessa tapauksessa täytyy koonin supistua yhdeksi tai oikeammin kahdeksi tasoksi, ja se ei saata olla mahdollista muutoin kuin että jonkun neliön (x^2, y^2, z^2) koefficientti katoaa, s. o. että r tulee yhtäsuureksi kuin joku puoli-akseleista a, b, c. Olkoot $a > b > c$; silloin ei saata r olla $= a$, ei myöskään $= c$, sillä kooni olisi silloin kummassakin tapauksessa aatteinen; niin muodoin täytyy olla välttämättömästi $r = b$, jolloin edellisestä yhtälöstä saamme

$$(6) \qquad x^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right),$$

ja tämä osoittaa kahta tasoa, jotka kulkevat y-akselin kautta, ja joiden leikkaukset ellipsoidissa ovat pyöriöitä.

Siitä seuraa, että ellipsoidilla on kaksi sarjaa pyöriöleikkauksia, joiden tasot ovat samansuuntaisia kuin pituudeltaan keskimmäinen ellipsoidin akseleista. Äärimmäiset tasot kummassakin sarjassa sivuavat ellipsoidia pisteissä, joita sopii pitää äärettömän pieninä pyöriöinä ja joita sopivimmin sanotaankin pyöriöpisteiksi (ombilics). Niitä on neljä ja ne ovat samalla kertaa pääpisteitä niissä kahdessa diametrissa, jotka ovat liittolaisia kumpaisellekin leikkaussarjalle.

Pyöriöpisteen koordinaatit x_0, y_0, z_0 saadaan määrätyiksi sitenkin, kun tiedetään, että sivuamispinta (2)

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

semmoisessa pisteessä on samansuuntainen kuin jompikumpi niistä tasosarjoista, joita yhtälö (6) osoittaa; siten saadaan heti

$$\frac{x_0}{a^2} : \frac{y_0}{b^2} : \frac{z_0}{c^2} = \pm\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} : 0 : \pm\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}$$

eli

$$\frac{\dfrac{x_0^2}{a^2}}{a^2 - b^2} = \frac{\dfrac{y_0^2}{b^2}}{0} = \frac{\dfrac{z_0^2}{c^2}}{b^2 - c^2} = \frac{1}{a^2 - c^2}$$

ja niin muodoin

$$x_0 = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}};$$

x_0- ja z_0-suureiden merkeillä on tässä neljä yhdistelyä (kombinationia) mahdollista, ja kukin yhdistely vastaa yhtä pyöriöpistettä. Kaikki nämä pisteet ovat siinä päätasossa, joka sisältää suurimman ja vähimmän akselin, ja ovat symmetrillisesti asettuneet akselien suhteen.

Kun pintana on pyörähdys-ellipsoidi, yhtyvät leikkaussarjat toisiinsa ja ovat kohtisuorassa pyörähdys-akselille.

Kooni.

239. Jokaisella pinnalla, jonka on muodostanut suora viiva, liikkuen avaruudessa määrätyn lain jälkeen, on välttämättömästi se ominaisuus, että tangenttitaso missä A-pisteessä hyvänsä pinnalla, sisältää saman pisteen kautta kulkevan emä-viivan AL. Sillä määrityksensä mukaan sisältää tangenttitaso kaikki ne suorat, jotka kulkevat A-pisteen ja äärettömän lähellä sitä olevain pinnan pisteiden kautta, ja sellainen suora on AL. Tästä ei kumminkaan seuraa, että taso sivuaa pintaa pitkin koko suoraa AL, sillä eri pisteillä tätä suoraa saattaa olla eri tangenttitasoja, jotka kumminkin leikkaavat toisiansa samaa suoraa myöten. Suoran viivan muodostamia pintoja sanotaan yhteisellä nimityksellä linjaperäisiksi pinnoiksi (surfaces reglées).

A' olkoon piste, äärettömän lähellä pistettä A, mutta toisella emäviivalla $A'L'$. Tangenttitaso, joka sivuaa pintaa pisteessä A ja, kuten vasta sanottiin, kulkee AL-suoran kautta, sisältää samalla myöskin pisteen A', joten tason suunta on täydelleen määrätty; se sisältää niin muodoin myös emäviivan $A'L'$, jos tämä on samalla tasolla kuin AL. Siinä tapauksessa on siis tangenttitaso sama kaikille AL-suoran pisteille. Semmoisia linjaperäisiä pintoja, joissa kaksi vierekkäistä emäsuoraa aina ovat samalla tasolla, sanotaan kehitys-pinnoiksi (dévéloppables) koska ne saattaa kehittää (levittää) tasoksi. Kehityspinnalla on siis se ominaisuus että kukin tangenttitaso sivuaa pintaa pitkin suoraa viivaa, ja sen saattaa sanoa sisältävän kaksi vierekkäistä emäviivaa.

Kehityspintoja ovat koonilliset, joiden emäsuorat kulkevat saman pisteen kautta, ja cylinderimäiset, joiden emäsuorat ovat yhdensuuntaisia keskenänsä; kumpaisissakin nimittäin ovat mitkä kaksi emäsuoraa hyvänsä samalla tasolla. Cylinderiä saattaa muutoin pitää koonina, jonka kärki on äärettömän kaukana.

240. Näiden yleisten selitysten jälkeen lähdemme erittäin tutkimaan kaksi-asteista koonillista pintaa, jonka yhtälö on

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Yhtälönä tasolle, joka sivuaa koonia pisteessä (x', y', z'), on

$$(2) \qquad \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-\frac{zz'}{c^2}=0.$$

Kosk'ei tämä yhtälö ensinkään muutu, jos x', y', z' ovat koordinaateja mille pisteelle hyvänsä suoralla viivalla

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'},$$

niin osoittaa tämä, mitä äsken sanottiin, että nimittäin taso sivuaa koonia pitkin emäsuoraa.

Kärjen kautta kulkeva taso saattaa 1:o kohdata koonia yhdessä ainoassa pisteessä tahi 2:o sivuta sitä pitkin suoraa viivaa tahi 3:o leikata sitä kahta suoraa myöten. Kukin sen suuntainen taso leikkaa pintaa koonillisessa leikkauksessa, joka ensimmäisessä tapauksessa on nähtävästi ellipsi, toisessa parabola, kolmannessa hyperbola.

Diametraalitasolla jänteille, joiden suuntacosinit ovat l, m, n, on yhtälönä

$$(3) \qquad \frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}-\frac{nz}{c^2}=0.$$

Olkoon OD jänteiden suuntainen diametri. Jos OD on koonin sisäpuolella, niin kulkevat jänteet toisesta vaipasta toiseen; diametraalitaso on siis näiden vaippapintain välillä ja kohtaa koonia ainoastaan kärjessä. Jos OD on koonin ulkopuolella, niin ovat jänteet sen sisäpuolella ja diametraalitaso leikkaa koonia kahta suoraa myöten. Jos vihdoin OD

yhtyy emäsuoraan, niin kukin jänne kohtaa koonia ainoastaan yhdessä pisteessä; siinä tapauksessa ei varsinaista diametraalitasoa ole olemassakaan. Mutta edellinen yhtälö edustaa silloinkin todellista tasoa, joka sivuaa koonia pitkin suoraa OD, sillä jos l, m, n ovat tämän suoran suuntacosineja ja x', y', z' koordinaateja jollekin sen pisteelle, niin saadaan yhtälö

$$\frac{x'}{l}=\frac{y'}{m}=\frac{z'}{n}.$$

Diametraalitason yhtälö (3) on siis tällöin sama kuin yhtälö (2) tangenttitasolle pisteessä (x', y', z').

Koonin ulkopuolella olevasta pisteestä P saattaa panna kaksi tangenttitasoa, jotka leikkaavat toisiansa pitkin diametria OP ja sivuavat koonia kahta suoraa myöten. Viimeksi mainittujen suorain kautta kulkeva taso on P-pisteen polaaritaso (231 §) ja siis liittolainen diametrille OP (229 §). Koska se samalla kulkee keskiön kautta, niin on se myös itse diametraalitaso OP-suoran suuntaisille jänteille. Kun P on koonilla, niin molemmat tangenttitasot yhtyvät itse diametraali-tasoon. Jos P on koonin sisässä, niin saattaa sen polaaritasoa, s. o. OP-suoran diametraalitasoa, pitää urana diametreille, joiden liitto-diametraalitasot kulkevat OP-suoran kautta.

Hyperboloïdit.

241. Näiden yhteinen yhtälö on

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\lambda,$$

joka edustaa yksivaippaista hyperboloidia, kun $\lambda=1$, kaksivaippaista, kun $\lambda=-1$, ja asymptooti-koonia niille molemmille, kun $\lambda=0$.

Yhtälönä tasolle, joka sivuaa näitä pintoja pisteessä (x', y', z'), on

$$(2) \qquad \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-\frac{zz'}{c^2}=\lambda.$$

Diametraalitasoa jänteille, joiden suuntacosinit ovat l, m, n, edustaa yhtälö

$$(3) \qquad \frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}-\frac{nz}{c^2}=0.$$

Kosk'ei tässä ole parametriä λ, niin todistaa tämä seuraavan tärkeän väitteen: kaikissa kolmessa pinnassa on samansuuntaisilla jänteillä yhteiset diametraalitasot ja siis myöskin yhteiset liittodiametrit.

Jos puheenalaiset kolme pintaa leikataan tasolla, niin syntyy kolme koonillista leikkausta, joilla on se ominaisuus, että, jos niissä vedetään yhdensuuntaisia jänteitä missä suunnassa hyvänsä, niin sama diametraalitaso ja niin muodoin sama suora jakaa ne kaikki kahtia. Tästä päätetään, niinkuin 216 §:ssä, että kaikki kolme leikkausta ovat yhdenmuotoiset ja että niillä on yhteinen keskiö ja akselit kaikilla samassa asemassa. Jos leikkaukset ovat parabolia, niin ovat ne yhteellisiä; sillä kun suuntais-jänteiden diametrit niissä aina yhtyvät, niin on kolmella parabolalla yhteinen akseli ja vieläpä yhteinen diametri niille jänteille, jotka tekevät 45 asteen kulman akselia vastaan, ja tämä diametri kulkee parametrien pääpisteitten kautta; niin muodoin on niillä yhtäsuuret parametritkin.

Minkäkaltainen hyperboloidin ja jonkun tason leikkausviiva on, sen saa siis selville, kun vaan tutkii asymptootikoonin ja saman tason leikkausta. Kun sen lisäksi yhdensuuntaiset leikkaukset ovat yhdenmuotoisia, niin sopii tutkia ainoastaan keskiön kautta kulkevia tasoja. Mitä edellä on sanottu koonista, sopii niin muodoin myöskin kumpaankin hyperboloidiin, että nimittäin leikkauksena on ellipsi tai parabola tahi hyperbola, sitä myöten kuin samansuuntainen diametraalitaso kohtaa koonia yhdessä pisteessä tai yhtä tahi kahta suoraa myöten.

242. Pyöriö-leikkaukset. — Samalla tutkimustavalla, kuin ellipsoidissa, saadaan selville helposti myöskin hyperboloidien ja koonin pyöriö-leikkaukset. Tarkastettaessa erittäin yksivaippaista hyperboloidia, huomataan, niinkuin 238 §:ssä, että diametraali-taso, jonka leikkauksena pinnasta

on pyöriö, kulkee jonkun akselin kautta. Se ei saata kulkee puoliakselin c kautta, sillä leikkauksena olisi silloin hyperbola, ei myöskään ole mahdollista, että pienempi puoliakseleista a, b olisi se, jonka kautta se kulkee, sillä seuraus olisi aatteinen. Tason täytyy niin muodoin kulkea vyöttöellipsin isomman akselin kautta.

Olkoon $2a$ tämä akseli. Keskiöön säteellä a asetettu pallo leikkaa hyperboloidia kahdessa pyöriössä, joiden tasot kulkevat x-akselin kautta ja joilla on symmetrillinen asema muiden akselien suhteen.

Kaksi tasosarjaa, joissa tasot ovat vastamainittujen suuntaiset, muodostavat sekä kummankin hyperboloidin että koonin kanssa pyöriö-leikkauksia. Ne neljä pistettä, joissa tasot sivuavat kaksivaippaista hyperbolaidia, ovat pyöriöpisteitä. Yksivaippaisella hyperboloidilla sitä vastoin ei ole yhtään pyöriöpistettä.

Pyörähdys-hyperboloidissa molemmat sarjat pyöriöleikkauksia yhtyvät ja ovat kohtisuoria pyörähdys-akselille.

243. Liitto-diametrit. — Kullakin diametrilla OD, joka ei ole koonin emäsuora, on liitto-diametraalitaso, joka leikkaa ulkopuolista hyperboloidia joko ellipsissä tai hyperbolassa. Kaksi liitto-diametria OD', OD'' joko ellipsissä tai hyperbolassa tekevät OD-diametrin kanssa liitto-diametriston ei ainoastaan mainitulle hyperboloidille, vaan myös koonille ja sisäpuoliselle hyperboloidille.

Jos kolme semmoista diametria otetaan akseleiksi uuteen (vinokulmaiseen) koordinaatistoon ξ, η, ζ, ja muutetaan yhtälö (1) niin, että x, y, z sijoitetaan linjallisilla lausekkeilla

$$x = l\xi + l'\eta + l''\zeta,$$
$$y = m\xi + m'\eta + m''\zeta,$$
$$z = n\xi + n'\eta + n''\zeta,$$

niin saadaan suureissa ξ, η, ζ yhtälö, jossa on ainoastaan kaksiasteisia terminejä ynnä vakinainen termini λ, joka ei muutu. Tässä yhtälössä katoavat sitä paitsi koefficientit tuloille $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$; sillä jos yhtälö ratkaistaan minkä koordinaatin suhteen hyvänsä, niin saadaan kaksi yhtäsuurta, vastaismerkkistä arvoa. Se on siis muodoltaan seuraava

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = \lambda.$$

Koefficientit A, B, C eivät saata olla yhdenmerkkisiä, sillä yhtälö edustaisi silloin ellipsoidia, pistettä tai ei mitäkään. Yhdellä niistä pitää siis olla toisellainen merkki kuin toisilla kahdella. Olkoon C semmoinen; silloin saadaan hyperboloïdeille tänmuotoinen yhtälö

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = \pm 1.$$

ja asymptooti-koonille

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = 0.$$

Edellisessä näistä yhtälöistä kuuluu plus merkki ulkopuoliseen, minus merkki sisäpuoliseen hyperbolaan, niinkuin $\xi\eta$-tason leikkaus heti osoittaa. Hyperboloidien ja koonin yhtälöillä on siis sama muoto niin pää-akseleissa kuin missä liitto-diametristossa hyvänsä. Yksivaippaisen hyperboloidin liitto-diametreista ovat kaksi todellisia ja yksi aatteinen; kaksivaippaisella hyperboloidilla sitä vastoin on aina yksi todellinen ja kaksi aatteista liitto-diametria.

244. Nyt sopii lähemmin tutkia puheen-alaisten pintain tasoleikkauksia. Kun leikkaava taso on samansuuntainen kuin $\xi\eta$, niin leikkauksina kolmesta pinnasta ovat yhdenmuotoiset ellipsit, joiden eri akseleilla on samat asemat ja joilla on yhteinen keskiö ζ-akselilla. Kaksivaippaisen hyperboloidin leikkaus on aatteinen, jos $\zeta^2 < \gamma^2$, ja supistuu pisteeksi, jos $\zeta = \pm\gamma$, jolloin taso sivuaa pintaa. Taso $\xi\zeta$ leikkaa kumpaakin hyperboloidia kahdessa liitto-hyperbolassa ja koonia kahdessa suorassa, jotka ovat niiden asymptooteja. Yleensä kaikki $\xi\zeta$-tason suuntaiset leikkaukset näistä kolmesta pinnasta ovat hyperbolia, joiden akselit ja asymptootit ovat yhdensuuntaiset ja joiden keskiöt ovat η-akselilla.

Viimeksi-mainituista leikkauksista tarkastettakoon erittäinkin niitä, jotka kuuluvat yksivaippaiseen hyperboloidiin ja joiden yhtälönä on

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = 1 - \frac{\eta^2}{\beta^2}.$$

Kun suureella η on mikä määrätty arvo tahansa, niin edustaa tämä yhtälö hyperbolata, jonka asymptootit ovat niiden suorain suuntaisia, joissa $\xi\zeta$-taso leikkaa asymptooti-koonia. Kun η kasvaa nollasta lähtien, vähenevät hyperbolan akselit, kunnes ne, kun $\eta = \beta$, katoavat ja leikkaus supistuu kahdeksi suoraksi. Taso sivuaa silloin pintaa β-diametrin päässä. Kun η vieläkin kasvaa, käyden isommaksi kuin β, muuttuu oikean jäsenen merkki, ja hyperbolan akselit vaihtavat merkitystään: entinen todellinen muuttuu aatteiseksi ja päinvastoin; asymptootien suunta pysyy kumminkin entisellään. Hyperbola siirtyy silloin niistä asymptootikulmista, joita koonin suhteen sopisi sanoa ulkopuoliseksi, sisäpuolisiin eli supplementillisiin kulmiin. Tämän siirron välittäjänä on, kuten näimme, tangentti-taso, joka kohtaa pintaa kahdessa suorassa.

Kaksivaippainen hyperboloidi ei ole semmoisen vaihdoksen alainen; $\xi\zeta$-tason suuntaiset hyperboliset leikkaukset tästä pinnasta eivät supistu milloinkaan suoriksi viivoiksi.

245. Mitä nyt on selville saatu, soveltuu ellipsi- ja hyperbola-leikkauksiin ylipäänsä, sillä saattaahan milloin hyvänsä panna jonkun koordinaati-tason vasta käytetyssä vinokulmaisessa koordinaatistossa semmoisen leikkauksen suuntaiseksi. Mutta parabola-leikkausten tutkimista varten täytyy tehdä toisellainen muutos.

Otetaan ξ- ja η-akseleiksi kaksi koonin emäsuoraa ja ζ-akseliksi diametri, joka on $\xi\eta$-tason liittolainen. Koordinaati-tasot $\xi\zeta$ ja $\eta\zeta$ sivuavat silloin koonia ξ- ja η-akseleissa (240 §). Kun nyt yhtälö (1) muutetaan tähän koordinaatistoon, niin saadaan tänmuotoinen yhtälö:

$$M\xi\eta + N\zeta^2 = \lambda.$$

Vasemmassa jäsenessä näet saattaa olla ainoastaan kaksiasteisia terminejä; ζ saattaa siinä olla ainoastaan neliönä, ja kun $\zeta = 0$, niin täytyy edellisen yhtälön olla hyperbolan yhtälönä asymptooteissa. M ja N sopii otaksua yhdenmerkkisiksi, sillä saadaksemme ensimmäisen terminin koefficienttiä vaihtamaan merkkiänsä, ei tarvise muuta kuin ottaa ξ- tahi η-akseli vastaisessa suunnassa. Hyperboloidien ja koonin yhtälöiksi tässä koordinaatistossa saamme siis

$$M\xi\eta + N\zeta^2 = \pm 1, \quad M\xi\eta + N\zeta^2 = 0,$$

joissa koefficientit M ja N saattaa pitää positivisina. Ensimmäisessä yhtälössä kuuluu plus-merkki nähtävästi yksivaippaiseen, minus-merkki kaksivaippaiseen hyperboloidiin.

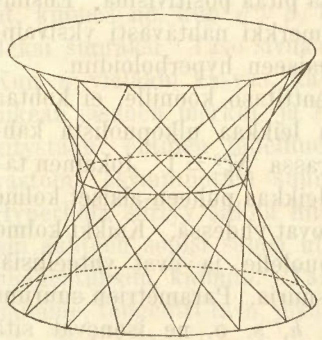
Taso $\eta = 0$, joka on tangenttitaso koonille, ei kohtaa sisäpuolista hyperboloidia, mutta leikkaa ulkopuolista kahdessa ξ-akselin suuntaisessa suorassa $N\zeta^2 = 1$. Jokainen tämän tason suuntainen taso $\eta = h$ leikkaa puheen-alaiset kolme pintaa parabolissa, joiden akselit ovat yhdessä. Kaikki kolme parabolata aukenevat samalle puolelle ja ovat yhteellisiä, koska niiden parametrit ovat yhtäsuuria. Parametrien suuruus kasvaa samassa suhteessa kuin h, s. o. ne isonevat sitä myöten mitä kauempana taso on keskiöstä.

246. Yksivaippaisen hyperboloidin suorat emäviivat. — Koonillinen leikkaus, joka ylipäänsä syntyy, kun taso leikkaa kaksiasteisen pinnan, saattaa erikoistapauksissa supistua kahdeksi suoraksi viivaksi, jotka joko leikkaavat toisiansa tahi ovat yhdensuuntaisia tahi yhtyvät. Jos suorat leikkaavat toisiansa jossakin pisteessä M, niin sivuaa taso tässä pisteessä pintaa; sillä mainittuja suoria saattaa pitää kahtena tangenttina, jotka on vedetty pisteestä M. Samoin saattaa sanoa asianlaidan olevan silloinkin, kuin suorat ovat yhdensuuntaisia; sivuamispiste on silloin vaan äärettömän kaukana. Jos molemmat suorat yhtyvät, niin sivuaa taso pintaa kaikissa suoran pisteissä (vrt. 239 §).

Tähän saakka on tutkittu ellipsoidin ja hyperboloidien tasoleikkauksia yleensä ja huomattu, että näistä pinnoista ainoastaan yksivaippainen hyperboloidi sallii suoraviivaisia leikkauksia eräille tasoille. Tarkastettakoon lähemmin näitä suoraviivaisia leikkauksia.

Jos pannaan taso kulkemaan keskiön kautta, niin on leikkauksena yleensä ellipsi tahi hyperbola; mutta silloin kuin taso sivuaa asymptooti-koonia, ja ainoastaan siinä tapauksessa, muuttuu leikkaus kahdeksi suoraksi L, L', jotka ovat samansuuntaisia kuin tason ja koonin sivuamissuora (245 §). Mainitut suorat kohtaavat vyöttö-ellipsiä nähtävästi kahdessa keskivastaisessa pisteessä A, A'. Kun sivuava pinta pannaan pyörimään koonin ympäri, niin muuttavat suorat L, L' alinomaa niin asemaansa kuin välimatkaansa keskiöstä ja kukin heistä muodostaa liikkuessansa hyperboloidin. Siten saadaan hyperboloidille kaksi sarjaa suoria emäviivoja, jotka eivät yhdy toisiinsa. Kun nimittäin tangenttitaso on tehnyt puolen pyörähdyksen, niin että piste A' asettuu A-pisteen alkuperäiseen asemaan, on taso koonin vastaisella puolella, ja suora L' ei ole L-suoran alkuperäisessä asennossa, vaan leikkaa sitä jossakin pisteessä vyöttöellipsillä. Kahden eri sarjaan kuuluvan emäviivan eroitus on siis se, että niiden kautta koonille asetetut tangenttitasot asettuvat eri puolille, toisesta oikealle, toisesta vasemmalle puolelle koonin akselia. Kummallakin sarjalla on sitä vastoin se yhteinen ominaisuus, että kukin hyperboloidin emäsuora on samansuuntainen kuin asymptooti-koonin emäviiva.

Kuva 92.



Mainitut sarjat sisältävät muutoin kaikki suorat, joita saattaa vetää yksivaippaisella hyperboloidilla; sillä jos sellaisen suoran kautta pannaan diametraali-taso, niin sivuaa se asumptooti-koonia, koska leikkaus muussa tapauksessa ei olisi suoraviivainen.

247. Jokaisen pisteen P kautta hyperboloidilla kulkee kaksi eri sarjoihin kuuluvata emäsuoraa; sillä P-pisteen kautta saattaa vetää kaksi tangenttitasoa koonille, jotka leikkaavat hyperboloidia suoria viivoja myöten. Se taso, joka sisältää molemmat emäviivat, sivuaa hyperboloidia pisteessä P. Päinvastoin leikkaa hyperboloidia kukin tangenttitaso kahta suoraa myöten (244 §), jotka kuuluvat eri sarjoihin. Saman pisteen kautta ei saata vetää kolmatta suoraa hyperboloi-

dille; sillä silloin leikkaisi tangenttitaso hyperboloidia kolmea suoraa myöten, ja leikkaus olisi kolmiasteinen, mikä olisi mahdotonta.

Jo piste P on vyöttöellipsillä, niin on tangenttitaso nähtävästi kohtisuora xy-tasolle. (Sen huomaa heti, pannen tangenttitason yhtälöön (2) $z' = 0$). Koska nyt mainittu taso on ura kaikille suorille, jotka sivuavat hyperboloidia pisteessä P, niin sisältää se ei ainoastaan P-pisteen kautta kulkevat emäsuorat, vaan myös vyöttöellipsin tangentin samassa pisteessä; tämä tangentti on niin muodoin mainittujen emäsuorain projektioni xy-tasolla. Tästä päätämme, että kunkin emäsuoran projektioni xy-tasolla kulkee pitkin vyöttöellipsin tangenttia. Projektionit muille päätasoille yhtyvät myöskin näiden tasojen määräämäin hyperbolisten leikkausten tangentteihin.

248. Yksivaippainen hyperboloidi on siis linjaperäinen; sen näkee suorastaan sen yhtälöstä, jolle on annettu muoto:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

eli

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right). \tag{4}$$

Tämän yhtälön saattaa pitää kahden yksiasteisen yhtälön tulona

$$(\lambda) \quad \begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{b} = \lambda\left(1 - \dfrac{x}{a}\right), \\[2ex] \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + \dfrac{x}{a}\right), \end{cases}$$

joissa λ on mielinmääräinen parametri. Jokaisessa λ-suureen arvossa edustavat nämä yhtälöt suoraa pinnalla, sillä kaikki ne arvot suureilla x, y, z, jotka toteuttavat yhtälöt (λ), toteuttavat niiden tulonkin, joka on pinnan yhtälö. Kun λ perättäin saa eri arvoja, niin syntyy yksi sarja suoria emäviivoja hyperboloidille.

Toisella tekijäin yhdistelyllä saadaan kaksi muuta yksiasteista yhtälöä.

$$(\mu)\quad \begin{cases} \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\mu\left(1+\dfrac{x}{a}\right), \\ \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1-\dfrac{x}{a}\right), \end{cases}$$

joissa on toinen mielinmääräinen parametri μ ja jotka edustavat toista suorain emäviivain sarjaa.

Jokaisen pisteen kautta hyperboloidilla kulkee kaksi suoraa, yksi kumpaakin sarjaa. Jos nimittäin P on piste, jonka koordinaatit x', y', z' toteuttavat yhtälön (4), niin on

$$\frac{\dfrac{y'}{b}+\dfrac{z'}{c}}{1-\dfrac{x'}{a}}=\frac{1+\dfrac{x'}{a}}{\dfrac{y'}{b}-\dfrac{z'}{c}},$$

ja jos λ otaksutaan yhtäsuureksi kuin kumpikin näistä yhtäsuurista murtoluvuista, niin toteutuvat yhtälöt (λ) annetun pisteen koordinaateilla. Samalla lailla todistetaan, että P-pisteen kautta saattaa vetää myöskin yhtälöpariin (μ) kuuluvan suoran. Nämä kaksi suoraa eivät saata olla yhtenä; sillä jos yhtälöt (λ) ja (μ) edustaisivat samaa suoraa, niin olisi

$$\lambda\left(1-\frac{x}{a}\right)=\mu\left(1+\frac{x}{a}\right)$$

kaikissa x-suureen arvoissa, siis yht'aikaa $\lambda=\mu$ ja $\lambda=-\mu$, mikä on mahdotonta, jollei $\lambda=\mu=0$. Mutta tässäkin tapauksessa edustaisivat puheenalaiset yhtälöt kahta eri suoraa, sillä toisesta (λ)-yhtälöstä tulisi silloin $1+\dfrac{x}{a}=0$; toisesta (μ)-yhtälöstä sitä vastoin $1-\dfrac{x}{a}=0$, ja nämähän yhtälöt eivät saata olla voimassa yht'aikaa. Tästä seuraa, että yhtälöt (λ) ja (μ) edustavat molempia edellä tutkittujen emäviivain sarjoja, jotka yhteensä sisältävät kaikki ne suorat, jotka saattaa vetää yksiasteisella hyperboloidilla.

249. Kaksi suoraa samassa systeemissä eivät saata olla samalla tasolla. Systeemissä (λ) saadaan kaksi suoraa, jos parametrille λ perättäin annetaan kaksi eri arvoa λ, λ'. Haettaessa ehtoa suorain leikkaukselle, elimi-

noiden x, y, z niiden yhtälöistä, saadaan $\lambda = \lambda'$, joka on mahdotonta, sillä λ ja λ' otaksuttiin eri-arvoisiksi; suorat eivät saata niin muodoin kohdata toisiansa äärellisen eivätkä äärettömänkään matkan päässä. Lisättäköön vielä, että kolme suoraa samassa systeemissä eivät saata olla saman tason suuntaisia; sillä ne ovat samansuuntaiset kuin kolme koonin emäviivaa, ja nämähän eivät saata olla samalla tasolla.

Kaksi suoraa eri systeemeissä ovat aina samalla tasolla. Yhtälöt (λ) ja (μ) toteutuvat nimittäin yht'aikaa arvoilla.

$$\frac{x}{a} = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}, \quad \frac{y}{b} = \frac{\lambda\mu + 1}{\lambda + \mu}, \quad \frac{z}{c} = \frac{\lambda\mu - 1}{\lambda + \mu},$$

ja näiden kautta määrätään koordinaatit pisteelle, joissa suorat (λ) ja (μ) leikkaavat toisensa. Jos $\lambda + \mu = 0$, niin leikkauspiste on äärettömän kaukana ja suorat yhdensuuntaisia.

Kukin suora toisessa sarjassa leikkaa siis (joko äärellisen tahi äärettömän matkan päässä) kaikki toisen sarjan suorat. Tämän nojalla saattaa hyperboloidin kuvata suorilla viivoilla. Olkoot M, M', M'' kolme suoraa sarjassa (μ); kukin suora L sarjassa (λ) kohtaa nämä kolme, ja hyperboloidin saattaa niin muodoin ajatella L-suoran muodostamaksi siten, että se liukuu kolmea annettua suoraa M, M', M'' myöten. Suoran liikunto onkin täten täydellisesti määrätty, sillä kunkin pisteen kautta suoralla M saattaa kulkea ainoastaan yksi suora, joka samalla kohtaa suorat M', M'', nimittäin niiden kahden tason leikkaussuora, jotka kulkevat mainitun pisteen sekä kumpaisenkin suoran (M', M'') kautta.

250. Päin vastoin saattaa todistaa, että suora L, liukuen kolmea kiinteätä suoraa myöten, jotka eivät ole saman tason suuntaisia, muodostaa yksivaippaisen hyperboloidin. Ajateltakoon nimittäin kunkin suoran M, M', M'' kautta kulkevaksi kaksi tasoa toisten kahden suoran suuntaisina; silloin muodostavat nämäkuusi tasoa parallelipipedin, jossa puheenalaiset suorat ovat kolme eri

särmää, jotka eivät kohtaa toisiansa. Otetaan tämän parallelipipedin keskiö originiksi ja pannaan koordinaati-akselit särmäin suuntaisiksi, jotka merkitään $2a$, $2b$, $2c$. Kolmelle suoralle M, M', M'' saadaan silloin seuraavat yhtälöt:

$$\begin{cases} y = b, \\ z = -c \end{cases} \quad \begin{cases} z = c, \\ x = -a, \end{cases} \quad \begin{cases} x = a, \\ y = -b; \end{cases}$$

liikkuvan L-suoran saattaa lausua näin:

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n}.$$

Tämän suoran yhteensattuminen kolmen ensinmainitun kanssa lausutaan seuraavilla ehdoilla:

$$\frac{y' - b}{m} = \frac{z' + c}{n},$$

$$\frac{z' - c}{n} = \frac{x' + a}{l},$$

$$\frac{x' - a}{l} = \frac{y' + b}{m}.$$

Kertomalla nämä yhtälöt keskenänsä poistetaan suureet l, m, n ja niin muodoin saadaan

$$(x' - a)(y' - b)(z' - c) = (x' + a)(y' + b)(z' + c),$$

ja tämä kaava on voimassa, merkitkööt x', y', z' koordinaateja mille pisteelle hyvänsä liikkuvalla L-suoralla, tämän ollessa missä asemassa tahansa; niin muodoin edustaa se itse L-suoran muodostamaa pintaa. Heitettyämme aksentit pois, saamme edellisestä kaavasta

$$ayz + bxz + cxy + abc = 0.$$

Tämä kaksiasteinen yhtälö edustaa pintaa, jolla on origini keskiönä. Me tiedämme sen olevan linjaperäisen; kooni se ei ole, kosk'ei pinta kulje keskiön kautta; sen täytyy siis olla yksivaippainen hyperbola.

Paraboloïdit.

251. Paraboloideja edustaa seuraava yhtälö, jossa ylämerkki kuuluu elliptiseen ja alamerkki hyperboliseen paraboloidiin:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Ensin otetaan tutkittaviksi kumpaisenkin pinnan tasoleikkaukset. Leikatkoon niitä aluksi seuraava taso:

$$z = mx + ny + h,$$

joka ei ole pinnan akselin (z-akselin) suuntainen. Poistettuamme näistä yhtälöistä z-suureen, saamme yhtälön

$$\frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2q} = mx + ny + h,$$

joka edustaa leikkausviivan projektionia xy-tasolla. Tutkittuamme tätä 97 §:ssä osoitetulla tavalla, huomaamme tämän projektionin ellipsiksi tai hyperbolaksi, sitä myöten kuin käytämme $+$ tai $-$ merkkiä. Koska projektioni silminnähtävästi ei saata olla muun laatuinen kuin itse projicioitu koonillinen leikkaus, niin seuraa siitä, että kukin taso, joka ei ole akselin suuntainen, leikkaa elliptisen paraboloidin ellipsiä myöten ja hyperbolisen hyperbolata myöten. Tähän yleiseen määräykseen kuuluvat myöskin mainittujen viivain sivulajit; ellipsi saattaa nimittäin supistua pisteeksi, hyperbola kahdeksi suoraksi.

Olkoon toiseksi leikkaustaso z-akselin suuntainen ja sen yhtälönä

$$x = my + h.$$

Poistettuamme x-suureen tästä ja pinnan yhtälöstä (1), saamme leikkausviivan projektionille yz-tasolla yhtälön

$$(qm^2 \pm p)y^2 + 2mqhy - 2pqz + qh^2 = 0.$$

Tämä edustaa ylipäänsä parabolata. Mutta parabola supistuu yhdeksi suoraksi, jos ensimmäisen terminin koefficientti katoaa, mikä saattaa tapahtua ainoastaan silloin kuin käytetään alamerkkiä ja kun samalla on

$$m = \pm\sqrt{\frac{p}{q}},$$

s. o. kun pintana on hyperbolinen paraboloidi ja leikkaustaso $x = my + h$ on samansuuntainen kuin jompikumpi niistä tasoista, joilla on yhtälönä

$$(2) \qquad \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$$

ja jotka eivät ole muuta kuin jo 202 §:ssä mainitut johtotasot.

Tästä seuraa: kukin akselin suuntainen leikkaus elliptisessä paraboloidissa on parabola, ja sama on leikkauksen laita hyperbolisessakin paraboloidissa, sillä lisäyksellä vaan, että leikkaus supistuu suoraksi viivaksi, jos leikkaustaso on jommankumman johtotason suuntainen.

252. Tangentti- ja diametraali-taso. — Yhtälöksi tasolle, joka sivuaa jompaakumpaa parabolata (1) pisteessä (x', y', z'), saadaan

$$\frac{xx'}{p} \pm \frac{yy'}{q} = z + z'.$$

Jos taas l, m, n merkitsevät suuntacosineja joukolle yhdensuuntaisia jänteitä, niin on vastaavan diametraali-tason yhtälö

$$\frac{lx}{p} \pm \frac{my}{q} = n.$$

Yhtälön muoto osoittaa diametraali-tason aina olevan pinnan akselin suuntaisen.

Jänteiden ollessa x-akselin suuntaisia, s. o. $l = 0$, $m = 0$, $n = 1$, siirtyisi taso äärettömän kauas ja sen suunta olisi epämääräinen; toisin sanoen, sitä ei olisi olemassakaan. Mutta kaikissa muissa suunnissa kulkeville jänteille saadaan aina akselin suuntainen diametraali-taso; päinvastoin kuuluu kuhunkin semmoiseen tasoon joukko yhdensuuntaisia jänteitä. Tästä seuraa, että kaikki paraboloidin diametrit ovat akselin suuntaisia ja että kukin akselin suuntainen suora on diametri.

Jänteiden kulma, diametraalitasoa vastaan vaihtelee jänteiden suuntain mukana. Puheenalaisen kulman sinillä on osottajana $\frac{l^2}{p} \pm \frac{m^2}{q}$, ja jos tämä lauseke on nolla, niin on diametraalitaso jänteiden suuntainen. Näin on asianlaita ainoastaan hyperbolisessa paraboloidissa, jänteiden ollessa jommankumman johtotason (2) suuntaisia. Helposti huomaa, että diametraalitasokin on silloin saman johtotason suuntainen.

253. Liitto-diametreja ei ole kumpaisellakaan paraboloidilla; löytyy kumminkin äärettömän monta vinokulmaista koordinaatistoa, jossa paraboloidin yhtälöllä on sama yksinkertainen muoto kuin (1).

Otetaan ensin tarkastettavaksi elliptinen paraboloidi. Ajateltakoon jonkun pisteen A kautta sen pinnalla vedetyksi diametri ja tämän kautta taso mihin suuntaan hyvänsä. Tason ja pinnan leikkauksena on, niinkuin jo sanottiin, parabola. Kun nyt piste A otetaan originiksi, diametri ζ-akseliksi, parabolan tangentti A-pisteessä ξ-akseliksi ja pannaan η-akseli niiden jänteiden suuntaiseksi, jotka $\xi\zeta$-taso jakaa kahtia, niin pinnan yhtälö tässä uudessa koordinaatistossa on muodoltaan seuraava:

$$\frac{\xi^2}{p'} + \frac{\eta^2}{q'} = 2\zeta;$$

sillä η saattaa olla ainoastaan neliönä, ja kun $\eta = 0$, saadaan parabolan yhtälö diametrissa ja tangentissa. Lisäksi täytyy vasemman jäsenen terminien olla yhdenmerkkisiä, sillä $\xi\eta$-tason suuntaiset leikkaukset olisivat muutoin hyperbolia, joka on mahdotonta. Saattaa niin muodoin otaksua p' ja q' positivisiksi.

Tästä näkyy, että $\xi\zeta$-tason suuntaiset leikkaukset ovat parabolia, joilla on sama parametri, ja koska mainittuna tasona saattaa olla mikä diametraalitaso hyvänsä, niin seuraa siitä, että kaikki pääakselin suunnassa kulkevat yhdensuuntaiset tasot leikkaavat pintaa yhteellisiä parabolia myöten.

Kaikki $\xi\eta$-tason suuntaiset leikkaukset ovat yhdenmuotoisia ellipsejä, joiden keskiöt ovat ζ-akselilla. Kun $\zeta = 0$, supistuu ellipsi pisteeksi, nimittäin originiksi, jolloin $\xi\eta$-taso sivuaa pintaa tässä pisteessä.

254. Hyperbolista paraboloidia tutkiaksemme, otamme niinkuin edellisessäkin §:ssä ξ- ja ζ-akseleiksi tangentin ja diametrin ja teemme η-akselin $\xi\zeta$-tason liittolaiseksi. Tässä

on huomattava kumminkin, että $\xi\zeta$-taso ei saa olla kumpaisenkaan johtotason suuntainen, sillä silloin ξ- ja η-akselit yhtyisivät. Mainitulla tavalla valitussa koordinaatistossa saamme pinnalle tänmuotoisen yhtälön:

$$\frac{\xi^2}{p'} - \frac{\eta^2}{q'} = 2\zeta.$$

Tässäkin ovat $\xi\zeta$-tason suuntaiset leikkaukset yhteellisiä parabolia, ja sama on niin muodoin laita ylipäänsä kaikkien akselin suunnassa kulkevain yhdensuuntaisten leikkausten.

Kaikki $\xi\eta$-tason suuntaiset leikkaukset ovat yhdenmuotoisia hyperbolia, jotka supistuvat kahdeksi suoraksi, kun $\zeta = 0$. Näitä suoria kuin myös hyperbolan asymptooteja edustaa yhtälö

$$\frac{\xi^2}{p'} - \frac{\eta^2}{q'} = 0,$$

merkiten kahta tasoa, jotka kulkevat ζ-akselin kautta ja ovat johtotasojen suuntaisia, koska kumpikin niistä leikkaa pinnan suoraa viivaa myöten. Nämä tasot sisältävät niin muodoin asymptootit kaikille puheenalaisille hyperbolisille leikkauksille. Itse $\xi\eta$-taso sivuaa pintaa originissa ja leikkaa sitä samalla kahta suoraa myöten.

Jos viimeksi mainitut suorat otettaisiin ξ- ja η-akseleiksi, niin saataisiin hyperboliselle paraboloidille peräti yksinkertainen yhtälö, muodoltaan

$$\xi\eta = k\zeta;$$

sillä jos siinä ζ-suureelle annetaan mikä arvo hyvänsä, niin saadaan hyperbolan yhtälö asymptooteissa.

255. Pyöriö-leikkaukset. — Hyperbolinen paraboloidi on kaksiasteisista pinnoista ainoa, jolla ei ole yhtään elliptistä, niin muodoin ei yhtään pyöriö-leikkaustakaan. Tarkastaminen siis on ainoastaan elliptistä paraboloidia.

Jos yksi paraboloidin leikkaus on pyöriö, niin ovat kaikki sen suuntaiset leikkaukset myöskin pyöriöitä, joiden keskiöt ovat diametrilla. Tämän diametrin kautta kulkeva, pyöriöleikkausten tasoille kohtisuora taso jakaa nähtävästi pinnan kahteen symmetrilliseen puoliskoon ja on niin muodoin päätaso. Kun paraboloidin yhtälö suorakulmaisissa koordinaateissa on

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,$$

niin mainittuna päätasona on välttämättömästi joko xz- tai yz-taso.

Tarkastettakoon erittäin originin kautta kulkevaa pyöriöleikkausta ja ajateltakoon pyöriön keskiön kautta vedetyksi suora kohtisuoraksi sen tasolle. Tämä suora kohtaa z-akselia jossakin pisteessä, $z=r$, ja pyöriötä saattaa niin muodoin pitää paraboloidin ja semmoisen pallon leikkauksena, jonka yhtälö on

$$\frac{x^2}{r}+\frac{y^2}{r}+\frac{z^2}{r}=2z.$$

Otettuamme tämän yhtälön pois edellisestä, saadaan yhtälö koonille

$$x^2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)+y^2\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)-\frac{z^2}{r}=0,$$

jonka kärki on originissa ja joka kulkee pallon ja paraboloidin leikkauskäyrän kautta. Tämä kooni supistuu kahdeksi tasoksi, kun r on yhtäsuuri kuin isompi parametreista p, q. Olkoon $p>q$ ja $r=p$; edellisestä yhtälöstä tulee silloin

$$(p-q)y^2=qz^2,$$

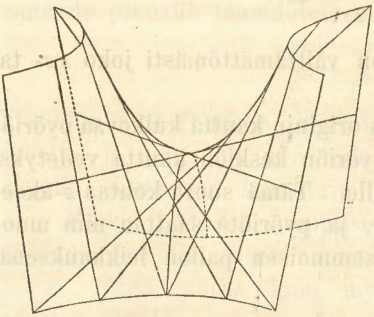
ja tämä edustaa kahta tasoa, jotka kulkevat originin kautta ja leikkaavat paraboloidia pyöriöissä. Elliptisellä paraboloidilla on niin muodoin kaksi sarjaa yhdensuuntaisia pyöriöleikkauksia. Äärimmäiset niistä ovat pelkkiä pyöriöpisteitä, joiden koordinaatit ovat

$$x=0, \qquad y=\pm\sqrt{pq-q^2}, \qquad z=\frac{p-q}{2}.$$

256. **Hyperbolisen paraboloidin suorat emäviivat.** — Paraboloideista on ainoastaan hyperbolinen senlaatuinen, että eräät leikkaukset siinä supistuvat suoriksi viivoiksi. Otettakoon nämä suorat tarkemmin tutkittaviksi.

Ennen jo (251 §:ssä) on huomattu, että kukin taso, joka on jommankumman johtotason suuntainen, leikkaa pintaa suoraa viivaa myöten. Leikkaavan tason liikkuesssa johtotason suuntaisena, saadaan sarja suoria, jotka yhteensä muodostavat koko pinnan. Toinen samallainen sarja saadaan kun leikkaava taso liikkuu toisen johtotason suuntaisena. Hyperbolisella paraboloidilla on siis kaksi eri sarjaa suoria emäviivoja, joista toinen on toisen, toinen toisen johtotason suuntainen.

Kuva 93.



Kunkin pisteen P kautta pinnalla kulkee kaksi eri sarjaan kuuluvata emäsuoraa; sillä jos P-pisteen kautta pannaan kaksi johtotasojen suuntaista tasoa, niin on kumpaisenkin leikkauksena pinnasta suora viiva. Taso, joka sisältää nämä molemmat suorat, sivuaa pintaa pisteessä P. Saman pisteen kautta ei saata vetää pinnassa useampia suoria kuin kaksi, sillä koska semmoisten suorain tulee olla samassa tangenttitasossa, niin leikkaisi tämä pintaa korkeammassa viivastossa kuin kaksiasteisessa; mikä on mahdotonta.

Jos P-piste on toisella tai toisella parabolisella pääleikkauksella, niin on tangenttitaso kohtisuora leikkaustasolle ja sisältää silloin myös parabolan tangentin mainitussa pisteessä. Tästä näkyy, että emäsuoran projektioni päätasolle sivuaa sitä parabolaa, jossa taso leikkaa pinnan.

257. Yhtälöt kummallekin sarjalle suoria, jotka saattaa vetää hyperbolisella paraboloidilla, saadaan suorastaan pinnan yhtälöstä

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Tämän saattaa nimittäin ajatella tuloksi seuraavista yhtälöistä:

$$(\lambda)\quad\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}=\dfrac{2z}{\lambda},\\[2mm] \dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}=\lambda,\end{cases}$$

jotka, kun parametri λ on epämääräinen, niinmuodoin edustavat joukkoa pinnalla olevia suoria. Sama tulo saadaan myös yhtälöistä

$$(\mu)\quad\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}=\dfrac{2z}{\mu}\\[2mm] \dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}=\mu,\end{cases}$$

jotka siis edustavat toista sarjaa suoria emäviivoja.

Helppo on todistaa, niinkuin 248 §:ssäkin, että kunkin pisteen kautta pinnalla saattaa vetää kaksi suoraa, joista toinen kuuluu sarjaan (λ) ja toinen sarjaan (μ), ja tästä seuraa, että kummankin sarjan suorat muodostavat koko paraboloidin. Yhtälöjen muoto osoittaa, että kaikki suorat sarjassa (λ) ovat samansuuntaiset kuin johtotaso

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0,$$

ja kaikki suorat sarjassa (μ) samansuuntaiset kuin johtotaso

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0;$$

nämä sarjat ovat niin muodoin samat kuin nuo ennen mainitut suorain emäviivain sarjat.

258. Samoin kuin 249 §:ssä, saattaa tässäkin todistaa, että kaksi suoraa samasta sarjasta eivät saata olla samalla tasolla ja että päinvastoin kaksi eri sarjain suoraa aina ovat samalla tasolla. Kukin toisen sarjan suora kohtaa siis (äärellisen tai äärettömän matkan päässä) kaikki toisen sarjan suorat.

Jos sarjassa (μ) otetaan kolme suoraa M, M', M'' mielinmäärin ja neljäs suora L pannaan liukumaan niitä myöten, niin että se joka silmänräpäyksessä kohtaa niitä kaikkia, niin on L-suoran liikunto siten kaikin puolin määrätty; sen täytyy siis jokaisessa asemassaan yhtyä emäviivaan sarjasta (λ) ja sillä tavoin muodostaa hyperbolinen paraboloidi.

Saattaisi L-suoran liikunnon määrätä toisinkin, nimittäin niin, että se liukuu kahta toisen sarjan emäviivaa myöten, ollen alinomaa toiseen sarjaan kuuluvan johtotason suuntaisena; sillä selvähän on, että liikkuvan suoran täytyy tässäkin tapauksessa yhtyä perättäin jokaiseen toisen sarjan emäviivaan.

259. Tämä nyt todistettu väite hyperbolisesta paraboloidista on voimassa myöskin päinvastoin lausuttuna. Sen todistamiseksi on ratkaistava seuraavat kaksi probleemaa.

1:o) Haettakoon ura suoralle L, joka liukuu kolmea kiinteätä suoraa M, M', M'' myöten, jotka ovat erään tason suuntaisia.

Otetaan originiksi joku piste O suoralla M ja pannaan OX-akseli pitkin tätä suoraa, OY-akseli M'-suoran suuntaiseksi ja OZ-akseli niin, että se kohtaa kaikkia kolmea johtosuoraa; suorain yhtälöiksi saamme siis

$$(M) \begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad (M') \begin{cases} x = 0, \\ z = h, \end{cases} \quad (M'') \begin{cases} y = mx, \\ z = k. \end{cases}$$

Suoraa, joka yht'aikaa kohtaa kahta edellistä viivaa, sopii aina pitää kahden tason leikkauksena, joista toinen kulkee suoran M ja toinen suoran M' kautta, mutta joilla muutoin saattaa olla mitkä suunnat hyvänsä. Sen yhtälöt ovat niin muodoin

$$y = \lambda z, \quad x = \mu (z - h).$$

Jotta tämä suora kohtaisi myöskin suoran M'', täytyy olla

$$\lambda k + \mu m (h - k) = 0.$$

Poistettuamme suureet λ ja μ kolmesta viimeksi johdetusta yhtälöstä, saadaan haetulle uralle yhtälöksi

$$kyz + m(h - k)xz - hky = 0.$$

Tämä kaksiasteinen yhtälö edustaa keskiötöntä pintaa, sillä siitä ei saata poistaa yksi-asteisia terminejä, vaikkapa koordinaatisto siirrettäisiin itsensä suuntaisesti mihin pisteesen hyvänsä. Pintana on siis joko paraboloidi (hyperbolinen tai elliptinen) tahi parabolinen cylinderi. Koska kumminkin emäviivat eivät ole yhdensuuntaisia, niin ei se saata olla parabolinen cylinderi; elliptinen paraboloidi se ei myöskään saata olla, koska sen kaltaisella pinnalla .ei ole suoria emäviivoja; se on niin muodoin hyperbolinen paraboloidi.

2:o) Mikä on se pinta, jonka muodostaa suora L, liukuen kahta kiinteätä suoraa M, M' myöten ja pysyen annetun tason suuntaisena?

Sopivimmasti valitaan koordinaatisto seuraavalla tavalla. Annettu taso otetaan xy-tasoksi: origini O pannaan keskiväliin niitä pisteitä, joissa suorat M, M' leikkaavat mainittua tasoa; y-akseliksi otetaan näiden pisteiden yhdistysuora. Taso xz asetetaan niin, että se sisältää ne suorat Om, Om', jotka originin kautta vedetään samansuuntaisiksi kuin M ja M', joten x-akselin suunta on määrätty. Vihdoin pannaan z akseli niin, että se jakaa kahtia ne jänteet, jotka kulmassa mOm' vedetään x-akselin suuntaisiksi. Annetuille suorille saadaan sillä tavoin tänmuotoiset yhtälöt:

$$(M)\quad \begin{cases} y = a, \\ z = mx, \end{cases} \qquad (M')\quad \begin{cases} y = -a, \\ z = -mx. \end{cases}$$

Suoraa, joka on xy-tason suuntainen, edustavat yleensä yhtälöt

$$(L)\qquad z = \gamma, \qquad y = \alpha x + \beta.$$

Jotta se kohtaisi suoria M ja M', täytyy olla

$$\beta = 0, \quad \alpha\gamma = ma.$$

Kun nyt näiden suhtain nojalla poistetaan α, β, γ yhtälöistä (L), niin saadaan haetulle uralle yhtälöksi

$$yz = max;$$

tämä ura on niin muodoin hyperbolinen paraboloidi.

Kun hyperbolinen paraboloidi muodostuu edellisessä probleemassa esitetyllä tavalla, niin emäviiva, perättäisissä asemissaan L, L', L'' . . ., leikkaa suorat M, M' samassa suhteessa. Koska se nimittäin kaikissa näissä asemissaan on annetun tason suuntainen, niin saattaa kunkin suoran L, L', L''... kautta panna tason tämän johtotason suuntaiseksi, ja tiettyhän on, että suuntaiset tasot leikkaavat samassa suhteessa mitkä suorat hyvänsä. Tämän nojalla saattaa varsin sievällä tavalla tehdä korkokuvan hyperbolisesta paraboloidista. Sitä vasten otetaan kiero nelikulmio (jonka sivut eivät ole samalla tasolla); vastaiset sivut jaetaan yhtämoneen yhtäsuureen osaan ja vastaavaiset jakopisteet yhdistetään langoilla.

Edellä olevissa probleemoissa niinkuin 250 §:ssäkin olemme tahallamme esittäneet liikkuvan suoran yhtälöitä eri muodoissa, samalla osoittaaksemme millaisia eri keinoja saattaa käyttää senkaltaisten probleemain ratkaisemiseksi.

suhteessa. Koska se ainoastaan [illegible] tapauksessa on ainoana taso [illegible] kaikkia [illegible] E E' E'' [illegible]. Koska pinnan tason [illegible] johtokseen suuntaiseksi, se [illegible] on, että [illegible] tasot [illegible] [illegible]. Tämän [illegible] saattaa [illegible] [illegible] hyperboloideista paraboloideista. Siis [illegible] eivät ole samalla tasolla [illegible], siitä jaetaan yhtäsuuret yhtäsuureen [illegible] ja vastaavaiset jakopisteet yhdistetään langoilla.

Edellä olevissa probleemeissa [illegible] 290 [illegible] [illegible] ottaneet [illegible] [illegible] käyttää [illegible] probleemoiden ratkaisemiseksi.

Kaikissa maamme kirjakaupoissa:

Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran Toimituksia.

		Markk.	penn.
III.	Kanteletar, 2 painos	5:	—
V.	Suomen Kansan Arvoituksia, 2 painos	1:	80.
IX.	Yhteinen Historia	1:	—
X.	KORHOSEN Runot	1:	80.
XII, 1.	EKLÖF, Tasannes-Kolmiomitanto	—	60.
XII, 2.	„ Pallokolmiomitanto	—	60.
XIV.	Kalevala, 3 painos	5:	—
XVII.	Suomen Kansan Satuja ja Tarinoita I—IV yht.	7:	50.
XVIII.	GYLDÉN, Suomenmaan Korkokartta	8:	—
XX.	PIPPING, Luettelo Suomeksi präntätyistä kirjoista	12:	—
XXI.	PORTHAN, Opera selecta I—V . . . . yht.	26:	50.
XXII.	THILÉN, Kuopion läänin kartta I.	3:	—
XXIII.	TOPELIUS, Luonnonkirja	1:	60.
XXIV.	Suomen Kasvio. Uusi parannettu laitos	5:	50.
XXV.	Näytelmistö I—IV . . . . yht.	12:	40.
XXVII.	Kalevala, lyhennetty laitos	1:	—
XXVIII.	STJERNCREUTZ, Meri-sanakirja	1:	—
XXIX.	CANNELIN, Kreikan Kielioppi	2:	—
XXX.	PALMÉN, Lainopillinen Käsikirja	2:	50.
XXXI.	FLOMAN, Ranskan Kielioppi	3:	—
XXXIII.	Latinais-Suomalainen Sanakirja	10:	—
XXXIV.	GRUBE, Kertomuksia Ihmiskunnan Historiasta I—VII . . . . yht.	18:	50.
XXXV.	Ruotsin Valtakunnan Laki	4:	—
XXXVII.	PÜTZ, Yleisen historian oppikirja I—III. . . yht.	8:	—
XXXVIII	AHLMAN, Ruotsalais-Suomalainen Sanakirja . . .	12:	—
XXXIX.	PANTSAR, Yleislaskun Alkeet	4:	—
XLI.	Historiallinen arkisto I—IV . . . . yht.	9:	50.
XLIII.	OPPMAN, Englannin kielioppi	5:	—
XLIV.	CANNELIN, Sanakirja Xenophonin Anabasis-kirjaan	2:	—
XLV.	TUOKKO, Saul	2:	50.
XLVI.	AMINOFF, Wirolais-Suomalainen sanakirja . . .	2:	—
XLVII.	Pitäjänkertomuksia I, II, III, IV. . . . . . . yht.	9:	—
XLVIII.	Kalevala, helppohintainen	1:	50.
XLIX.	Saksalais-Suomalainen Sanakirja	12:	—
L.	LÖNNROT, Suomalais-Ruotsalainen Sanakirja I—X . . . . à	5:	—
LI.	ASPELIN, Suomalais-Ugrilaisen Muinaistutkinnon alkeita	8:	—
	SUOMI, tidskrift i fosterländska ämnen 1842—60 à	1:	60.
	„ toinen jakso I—X . . . . à	3:	—