YLEISLASKUN ALKEET

KOULUJEN TARPEEKSI

toimittanut

H. PANTSAR.
Realikoulun opettaja.

Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran Toimituksia.

39 Osa.

Helsingissä,
Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran kirjapainossa,
1865.

YLEISLASKUN ALKEET

KOULUJEN TARPEEKSI

toimittanut

H. PANTSAR.
Realikoulun opettaja.

Helsingissä,
Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran kirjapainossa,
1865.

Imprimatur: *C. R. Lindberg.*

Alkulause.

Kuin tästedes Suomen oppilaitoksissa ruvetaan opetuskielenä suomea käyttämään enemmän kuin ennen, niin suomalaisia opetuskirjoja tullaan myös aina enemmän tarvitsemaan. Tämmöisiä kirjoja onkin Suomalaisen Kirjallisuuden Seura viime aikoina ahkerasti painattanut. Suuruustieteessä on kuitenkin tähän asti vähä ja nekin vaillinaisia kirjoja painosta tullut. Sentähden toivon tämän nyt ilmestyvän kirjan ensi tarpeessa olevan avuksi. Kirjaa toimittaessani olen enimmiten seurannut M. Bourdon'in „Éléments d'algèbre" ja J. E. Bergroth'in „Elementar-lärobok i algebran". Esimerkit ja kysymykset ovatkin melkein kaikki otetut viimeksi mainitusta kouluissamme yleisesti käytetystä opetuskirjasta. Epätasaisuuksia kielessä liiatenkin nimityssanoissa on valitettavasti tullut kirjaan ja vaikea niitä on ollutkin välttää tässä ensimäisessä tämänlaisessa teoksessa kuin heitä vaan ei liian paljo ja vaarallisia olisi.

Helsingissä syyskuussa 1865.

H. P.

Painovirhiä.

Sivulla	Rivillä	Seisoo:	Lue:
1	7 alh.	kynärä	kyynärä
3	8 alh.	(mikä aluke)	(mikä) aluke
96	3 ylh.	keskulu'uksi	keskilu'uksi
108	5 alh.	$\triangle\, CDFB$	kuv. $CDFB$
110	16 alh.	sivulla	sivuilla
113	9 alh.	kolkat	kulmat
135	15 alh.	$\frac{5x}{100} =$	$\frac{5x}{100} +$
160	5 alh.	yhtälön C	yhtälön D
169	16 ylh.	$\pm 25a^4$	$\mp 25a^4$
181	1 ylh.	§ 6.	§ 7.
187	1 ylh.	$2^{1/3}a^{7/3}b^{3/3}$	$2^{1/3}a^{7/3}b^3$
196	10 ylh.	eli $x2$	eli x^2

Johdanto.

§ 1.

Suuruustiede jakautuu, esineitensä mukaan, kahteen osaan, jotka ovat *tila-suuruustiede* eli *mittausoppi* ja *luku-suuruustiede* eli *lu'unlasku.* Mittausopin esineet (tilasuuruudet) ovat kaikki ne, joilla on ulottuvaisuus avaruudessa, joko ainoastaan pituus tai laajuus (pituus ja leveys) eli tilavuus (pituus, leveys ja paksuus). *Jonkun suuruuden mittaaminen on sen ja mitan, s. o. toisen isoutensa puolesta tunnetun samanlaatusen suuruuden, välillä olevan suhteen etsiminen,* s. t. s. *tiedustaminen kuinka monta kertaa mitta taikka kuinka iso osa siitä mahtuu suuruuteen.* Tämän (jonkun suuruuden ja sen mitan välillä olevan) suuhteen ilmoittaja saapi nimen *lukusuuruus,* jolla siis vastataan kysymykseen: kuinka monta eli kuinka iso osa? Mitattava suuruus voipi olla yhtä iso kuin mittakin. Silloin on suuruuden ja mitan välillä olevan suhteen ilmoittaja yksi, koska mitta mahtuu juuri yhden kerran mitattavaan suuruuteen. Viimenen voipi myös olla tarkoin yhtä iso kuin joku mittapaljous, jolloin suhteen ilmoittaja on paljous ykkösiä.

Jos mitattava taas on pienempi mittaansa eli mitatessa joku sitä pienempi osa jääpi yli koko mittapaljoudesta, niin silloin on mitta jaettava pienempiin yhtä isohin osiin ja suuruus mitattava yhdellä niistä. Silloin on suhteen ilmoittaja joku paljous yhtä isoja osia ykkösestä. Jos esm. joku viiva olisi 5:den kyynärän pituinen, niin 5 olisi sen ja kynärän pituisen viivan välillä olevan suhteen ilmoittaja. Jos kyynärä vielä otetaan mitaksi, niin suhteen ilmoittaja esm. 7 tuuman pituisen viivan ja mitan välillä on $\frac{7}{24}$, koska viivaan mahtuu juuri 7 neljäkolmattakymmenettä osaa mitasta.

Koska nyt nämä suhteen ilmoittajat eli lukusuuruudet ovat joku paljous, joko ykkösiä eli yhtä isoja osia ykkösestä, niin ykkönen on se juuri, josta ne jollain tavalla saadaan, s. t. s. ykkönen on näiden (lukusuuruuksien) mitta.

Paljous ykkösiä saapi nimen *kokoluku*, ja paljous yhtä isoja osia ykkösestä taas saapi nimen *murtoluku*.

Semmoisia suuruuksia, joista toinen voidaan tarkoin mitata toisella eli jollakin osalla toisesta, sanotaan *keskenänsä mitallisiksi*. Kaikkia lukuja taas, jotka voidaan tarkoin mitata ykkösellä eli jollakin osalla ykkösestä, sanotaan *mitallisiksi*.

Semmoisia ovat kaikki koko sekä murtolu'ut.

Mutta semmoisiakin samanlaatusia suuruuksia löytyy, joidenka keskinäistä suhdetta ei tarkoin voida merkitä ykkösellä eikä millään osalla ykkösestä, vaan kuitenkin niin lähimäärin kuin tahdotaan. Tämmöisiä nimitetään *mitattomiksi keskenänsä* ja niiden välillä olevan suhteen ilmoittajaa *mitattomaksi lu'uksi*, koska sitä ei voida mitata millään osalla ykkösestä. Niin ovat esm. neliön lävistäjä ja sivu keskenänsä mitattomat ja niiden välisen suhteen ilmoittaja $\sqrt{2}$ mitaton lukusuuruus. Niin myös ovat ympyrän kehä ja säde mitattomat keskenänsä ja niiden suhteen ilmoittaja (π) mitaton lukusuuruus j. n. e. Tämmöisten lukujen isous voidaan kuitenkin määrätä niin lähimäärin kuin tahdotaan ja niitä siis lähennellen verrata ykköseen, jonkatähden ykkönen pidetään myös niidenkin mittana.

§ 2.

Lu'unlasku on yhden eli useamman tuntemattoman lu'un etsiminen sen eli niiden ja tuttujen lukujen välillä olevien tiettyjen keskuuksien johdolla.

Lu'unlaskun esineet ovat nyt edellä määritetyt lukusuuruudet ja jos siinä käytetään ainoastansa määrättyjä, aina samanarvoisia lukuja, s. o. numerolukuja, niin sitä nimitetään lyhyesti vaan lu'unlaskuksi, vaan jos siinä käytetään, paitsi määrättyjä, myös määrämättömiä ainoastaan merkillä esiteltyjä lukuja, joidenka arvot siis voivat olla mitkä hyvänsä, niin sitä nimitetään *yleislaskuksi*. Määrättyjä ovat kaikki niin hyvin mitalliset kuin mitattomatkin numerolu'ut, esm. 2, 5, 7, $\sqrt{3}$, j. n. e. Määräämättömiä lukuja merkitään kaikilla kirjaimilla esm. a, b, c, x, y,... A, B, C, X, Y,... ja ne voivat merkitä minkälaisia ja mitenkä isoja tai pieniä mitallisia tai mitattomia lukuja hyvänsä. Itse lu'unlaskutyötkin merkitään yleislaskussa, eri merkillä, joidenka merkitykset ja käytäntö nyt ovat selitettävät. Merkit ovat seuraavat.

1:ksi. *Enennös eli lisämerkki* $+$ *ja vähennös eli poistomerkki* —.

Edellistä ($+$) käytetään jokaisen suuruuden edellä, joka on pantava edellä seisovaan, s. o., jolla joku toinen on lisättävä. Jälkimäinen (—) pannaan taas semmoisen suuruuden edelle, joka on poisotettava edellä seisovasta suuruudesta, s. o., jolla edellä seisova suuruus on vähenettävä.

Näiden merkkien latinaiset nimet ovat: enennösmerkin *plus* ja vähennösmerkin *minus*, joita suomessakin lyhyyden vuoksi voipi käyttää, ken tahtoo.

2:ksi. *Kerrosmerkit* $\times$ *eli* $\cdot$, joita käytetään suuruuksien välillä, jotka ovat kerrottavat toinen toisella, s. t. s. joidenka tulo on saatava. Kerrottavat yleislasku suuruudet, nimittäin puustavit, kirjoitetaan kuitenkin tavallisesti vierekkäin ilman mitäkkään merkittä välillänsä, vaan numerolukujen välille, joidenka tulo on saatava, pitää aina kerrosmerkki pantaman tulon eroittamiseksi siitä lu'usta, jonka numerot merkittä välillänsä tekisvät, luettuina kymmen-luku järjestyksessä. Niin on esm. 4×6 neljän ja kuuden tulo 24 vaan 46 kuusiviidettäkymmentä, mutta $a\times b$ eli $a\cdot b$ on sama kuin ab, s. o. tulo, joka saadaan, b kertoen a:lla.

3:ksi. *Jakomerkki* :, joka pannaan jokaisen suuruuden edelle, jolla edellä seisova on jaettava. Jakomerkkinä käytetään usiasti myös tavallista murtolu'un merkkiä, viivaa (—), jonka yläpuolelle jaettava suuruus ja alapuolelle jakaja kirjoitetaan.

4:ksi. *Alukemerkki* $\sqrt{}$, joka pannaan suuruuden etu- ja yläpuolelle, josta aluke on otettava ja se luku, joka näyttää kuinka mones (mikä aluke) suuruudesta on otettava pannaan merkin ylä-kulmaan. Tätä lukua nimitetään *alukkeen näyttäjäksi* eli *alottimeksi*. Kolmas aluke 8:sta esm. merkitään näin; $\sqrt[3]{8}$.

5:ksi. *Yhtä-isouden merkki* $=$ ja *epä-isouden merkki* $>$ eli $<$. Ensimäistä käytetään kahden yhtä ison suuruuden välillä niiden yhtä-isouden merkitsemiseksi ja jälkimäistä taas kahden isoutensa puolesta erilaisen suuruuden välillä, jolloin isompi suuruus pannaan merkin avo- ja pienempi sen umpi-puolelle.

6:ksi. *Sulkumerkki* ( ), jota käytetään kahden eli usiamman suuruuden kahden puolen, jotka laskussa kuuluvat yhteen. Niin merkitsee esm. $(2+3)\cdot 4$, että 4 on kerrottava 2:den ja 3:men summalla, josta saadaan tulo 20, vaan $2+3\cdot 4$ merkitsee 2:den ja $3\cdot 4$:jän summaa 14.

Näiden merkkien selitykseksi otamme vielä seuraavat esimerkit. $5+2$ merkitsee, että 2 on pantava 5:teen eli 5 enennettävä 2:lla, joten saadaan 7. $a+b$ merkitsee summaa, joka tulee kuin a lisätään b:llä, olivatpa a ja b sitte mitä lukuja hyvänsä. $5+2$, $a+b$ j. n. e. lausutaan viisi lisäksi kaksi, (viisi plus kaksi), a lisäksi b, (a plus b) j. n. e. $5-2$ taas merkitsee tähdettä, joka jääpi, kuin 2 otetaan pois 5:stä.

Niin myös merkitsee $a-b$ tähdettä, joka saadaan, kuin b otetaan pois a:sta ja sanotaan a vähennetty b:llä taikka a pois b, (a minus b). $a.b$ eli ab sanotaan a kertaa b ja merkitsee tuloa, joka saadaan, kuin b kerrotaan a:lla. Niin merkitsee 2×3 että 3 on otettava 2 kertaa, joka tekee 6. $12:4$ merkitsee että 12 on jaettava 4:llä, josta saadaan osaksi 3. $a:b$ sanotaan a jaettu b:llä ja merkitsee siitä jaosta saatua osaa. $\frac{a}{b}$ merkitsee myös samaa ja luetaan samoin. $a=b$ sanotaan a yhtä iso kuin b ja merkitsee näiden suuruuksien yhtäläisyyttä isoutensa puolesta. $7-3=4$ merkitsee, että 7 vähennetty 3:lla on yhtä iso kuin 4. $a>b$ eli $b<a$ merkitsee, että a on isompi kuin b eli b pienempi a:ta.

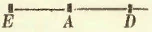
§ 3.

Edellisessä pykälässä on jo nähty, että kuin joku luku lisämerkin kanssa kirjoitetaan toisen jälestä, niin sillä tarkoitetaan, että se entinen on lisättävä jälestä kirjoitetulla lu'ulla, luku siis enenee, ja että poistomerkillä varustettu luku kirjoitettuna toisen jälestä vähentää sitä. Eri merkillä varustetut lu'ut pantuina toisiin tekevät siis erilaiset, vastaiset vaikutukset. Merkkinensä on niillä sentähden eri merkitys kuin lu'uilla ilman merkittä, ne ovat enentäviä tai vähentäviä, sen mukaan kuin merkki on $+$ eli $-$. Lukua, varustettuna kumpasella näistä merkistä hyvänsä, sanotaan, eroitukseksi lu'uista ilman merkittä, *yleislaskusuuruudeksi*, lisämerkillä varustettua *lisä-* ja poistomerkillä *poistosuuru-*

deksi. Lukua, joka merkkinensä tekee joko lisä- tai poistosuuruuden, sanotaan suuruuden *numero-arvoksi.* Eri merkkisiä suuruuksia sanotaan *vastaisiksi* ja semmoiset, joilla on sama numeroarvo, vaan eri merkit, saavat nimen *vastinaiset.*

Puustavia ei käytetä yleislaskussa ainoastaan lukujen vaan myöskin kaikkien lisä- sekä poistosuuruuksien merkitsemiseksi. Koska eri merkkiset suuruudet ovat vastaiset, (tekevät toisiin pantuina vastaiset vaikutukset), niin niillä merkityt aineet ovat myös lu'unlaskussa aina vastaiset, toisiansa vähentävät eli muuten vasta suuntaiset. Jos esm. lisäsuuruuksilla merkitään omaisuutta, niin poistosuuruudet merkitsevät silloin velkaa tai maksua ja päin vastoin merkitsevät poistosuuruudet omaisuutta eli saamista, kuin lisä suuruuksilla merkitään velkaa.

Matkoja jostakin alkupaikasta yhdänne päin lisä suuruuksilla merkitessä, merkitsevät poisto suuruudet matkoja vastanne päin. Kuin esm. $+2$ tuumaa merkitsee



matkaa pisteestä A toiseen D, joka on 2 tuumaa A:n oikealla puolella, niin -3 tuumaa esm. merkitsee matkaa A:sta E:hen, joka on pitkin samaa linjaa mitaten 3 tuumaa A:n vasemmalla puolella. Jos joku matkustaisi jostakin paikasta esm. m peninkulmaa yhdänne päin ja sitte kääntyisi takasin samaa tietä, niin olisi, hänen n peninkulmaa takasin päin kulettuansa, matka hänen ja lähtöpaikkansa välillä, yleislaskussa merkittynä, $m-n$ peninkulmaa, koska viimenen vaelluksensa vähentäisi mainittua matkaa, ollen ensimäisen kanssa vasta suuntainen. Samoin merkitään aikoja jostakin määrä ai'asta eteen ja takasin päin vastaisilla suuruuksilla. Niin antaa yleislasku kysymyksiin: kuinka kau'an pitää ihmisen A, joka on syntynyt vuona 1835, elämän vielä eteenpäin vuodesta 1865 tullaksensa 25 ja kuinka kauan tullaksensa 45 vuoden vanhaksi? vastaukset -5 ja $+15$ vuotta, s. t. s. tullaksensa 25 vuotiaaksi pitäisi hänen elää 5 vuotta takasin päin vuodesta 1865, hän on jo 5:tä vuotta ennen määrä aikaa eli vuotena 1860 ollut 25 vuoden vanha, mutta tulisi 15 vuotta jälkeen määrä ai'an, s. o. 1880, 45:tä vuoden ikään.

Edellä määritettyjen merkkien ja puustavien näin yleisessä merkityksessä käyttäminen antaa yleislaskulle selvyyden, lyhyyden ja yleisyyden, joita numerolaskulla ei ole. Kaikki laskukysymykset voidaan merkkien ja yleislaskusuuruuksien avulla kääntää ikäs kuin eri (yleislasku-) kieleen, joka on kaikista selvin ja lyhyvin. Kysymyksien säännöt lyhyesti ja selvästi kirjoitettuina huomataan helposti ja tuntemattoman suuruuden arvon löytämiseksi tehtävät laskutyöt näyttäiksevät jo kysymyksien kirjoituksesta tällä kielellä. Lu'unlaskuun kuuluvat todistot tulevat myös vasta yleislaskusuuruuksia käyttäen yleisesti todistetuiksi, sillä ainoastaan numerolu'uilla todistettua lausetta ei voida päättää todeksi muista kuin todistuksessa käytetyistä lu'uista ja lauseen totuus jääpi aina epäilyksen alaiseksi kaikista muista ja liiatenkin erilaisista lu'uista. Mutta kuin todistus on tehtynä puustavisuuruuksilla, jotka voivat merkitä mitä lukuja hyvänsä, niin silloin voidaan päättää todistetun omituisuuden olevan yhteisen kaikille lu'uille. Näistä syistä olemme hyväksyneet nimen *Yleislasku.*

§ 4.

Koska puustavit yleislaskussa voivat merkitä niinhyvin lisäkuin poistosuuruuksiakin ja niiden edellä voipi olla lisä- eli poistomerkki, niin itsensä suuruuden luonnon merkillä ilmaistua, tulee sen edellä seisomaan kaksi merkkiä. Muutenkin tapahtuu usiasti että saman suuruuden edellä seisoo kaksi eli usiampiakin joko samoja eli eri merkkiä. Merkille yleislasku-suuruuksien edellä annetaan taas yleislaskussa sama merkitys kuin numerolukujenkin edellä, s. t. s. lisämerkki (+) ei muuta suuruuden enemmän kuin lu'unkaan luontoa, vaan poistomerkki (—) muuttaa suuruuden luonnon, teke enentävän vähentäväksi ja päin vastoin vähentävän enentäväksi. Näin on

$$+(+a) = +a$$
$$+(-a) = -a$$
$$-(+a) = -a$$
$$-(-a) = +a.$$

Silloin kuin suuruuden edellä on kaksi merkkiä saadaan sen luonto siis seuraavan säännön mukaan.

Kaksi samaa merkkiä jälekkäin tekevät suuruuden enentäväksi (lisäsuuruudeksi), mutta kaksi vastaista merkkiä tekevät sen vähentäväksi (poistosuuruudeksi).

Jos b merkitsee mitä numerolukua hyvänsä niin $+b$ on lisäsuuruus ja sen panemista toiseen suuruuteen a merkitään selvästi näin: $a+(+b)$, joka on sama kuin $a+b$, koska a enenee yhtä paljo, jos siihen pannaan lisäsuuruus $+b$ eli luku b. Jos taas lisä suuruus $+b$ otetaan pois a:sta, niin saadaan $a-(+b)$. Tämä taas on sama kuin $a-b$ sillä a vähenee yhtä paljo, jos siitä otetaan pois lisäsuuruus $+b$ eli luku b. Kuin b on numeroluku niinkuin äsköinkin, niin $-b$ on poistosuuruus, joka pantuna esm. lisäsuuruuteen a, vähentää sitä, niin että $a+(-b)$ on sama kuin $a-b$, koska a vähenee yhtä paljo, jos siihen pannaan poistosuuruus $-b$ eli luku b otetaan siitä pois.

Edellisen, merkkien käyttämisen, määrityksen mukaan tekevät taas saman suuruuden paneminen johonkin toiseen ja poisottaminen siitä vastaiset vaikutukset. Jos paneminen enentää, niin ottaminen vähentää ja kuin paneminen vähentää, niin ottaminen enentää. Koska nyt a vähenee, kuin siihen pannaan poistosuuruus $-b$, niin se (a) enenee saman verran, kuin se ($-b$) otetaan siitä (a:sta) pois. Sentähden on $a-(-b)$ sama kuin $a+b$, sillä $-b$ pantuna a:han vähentää sitä lu'ulla b ja sentähden otettuna pois a:sta enentää sitä samalla lu'ulla b. Jos esm. lisäsuuruudet merkitsevät saamista ja poistosuuruudet velkaa, niin se tekee saman, jos saamista lisätään eli velkaa saman verran vähennetään, s. t. s. jos joku lisäsuuruus pannaan lisäksi eli vastinainen poistosuuruus otetaan pois.

Jos taas usiampia merkkiä on jälekkäin saman suuruuden edellä, niin se on lisäsuuruus, s. t. s. sen edellä olevat merkit tekevät lisämerkin $+$, jos poistomerkkien luku on pari, mutta jos se on liika, niin suuruus on silloin poistettava, s. o. sen edellä seisovat merkit tekevät yhteensä poistomerkin $-$.

Sillä, koska kaksi lisämerkkiä tekevät lisämerkin $+$, niin kolmas lisämerkki tekee taas sen kanssa lisämerkin, josta selvästi seuraa, että kuinka monta lisämerkkiä hyvänsä tekevät yhteensä $+$. Mutta jos merkkien seassa on yksi poistomerkki $-$, niin se tekee lisämerkistä saadun merkin $+$ kanssa poistomerkin $-$ ja sen kanssa tekee taas toinen poistomerkki lisämerkin $+$ j. n. e. Jos a esm. merkitsisi lukua 3, niin $-a$ merkitsisi poistosuuruutta -3, mutta $-(-a)$ lisäsuuruutta $+3$. Jos a merkitsee $-\frac{5}{3}$, niin $-a$ on silloin $-(-\frac{5}{3})$ sama kuin $+\frac{5}{3}$ j. n. e.

Edellisen säännön kahdesta merkistä jälekkäin selityksessä on mainittu, että poistosuuruus pantuna lisäsuuruuteen vähentää sitä. Poistosuuruuteen pantuna tekee se myös saman, sillä poistosuuruus on sitä pienempi kuta isompi numero-arvo sillä on. Kaikki lisäsuuruudet pidetään nimittäin isompina, mutta kaikki poistosuuruudet pienempinä kuin nolla, tyhjyys. Poistosuuruus pitää siis lisättämän vastinaisella lisäsuuruudella ennen kuin siitä saadaan nolla. Lisäsuuruudet ovat taas sitä isompia, kuta isommat lu'ut niistä saapi ottaa, ennen kuin tähde tulee nollaksi, s. t. s. kuta isommat numero-arvot niillä ovat. Poistosuuruus pidetään taas sitä pienempänä, kuta isompi lisäsuuruus siihen pitää pantaman, ennen kuin summa tulee nollaksi, s. o. kuta isompi numero-arvo sillä on.

Näin on esm. $+5>+2$ eli $5>2$, $\frac{3}{2}>-4$, $-4<0$, $-4<-3$, $\frac{1}{2}>$ 5, j. n. e.

Jos jonkun suuruuden edellä ei ole mitään merkkiä, niin se on luettava lisäsuuruudeksi, se on sama kuin, jos sen edellä olisi lisämerkki $+$. Niin on a sama kuin $+a$, 5 sama kuin $+5$ j. n. e.

§ 5.

Yleislaskun määrityksiä ja selviöitä.

Lu'unlaskun alkeisteokset ovat seuraavat kuusi.

1. *Yhteenlasku, kahden eli usiamman suuruuden yhdistäminen, s. o. semmoisen suuruuden etsiminen, joka pantuna jokaiseen toiseen suuruuteen eli otettuna pois siitä tekee saman vaikutuksen, enentää eli vähentää sitä saman verran, kuin kaikki yhdistettävät yhteensä.*

Tätä suuruutta nimitetään *summaksi* ja niitä, jotka siinä ovat yhdistetyt, *yhdistettäviksi.*

2. *Poistaminen, yhden suuruuden poisveto toisesta.*

Suuruus, joka on otettava toisesta, saapi nimen: *poistettava,* se, josta se on otettava, *vähennettävä* ja jälelle jäänyt suuruus saapi nimen *tähde.* Tähteen ja poistettavan pitää yhdistettyinä tekemän vähennettävän. Tästä saadaan seuraava määritys poistamiselle.

Suuruuden, b, poistaminen toisesta, a, on kolmannen, c, etsiminen, joka laskettuna yhteen ensimäisen, b, kanssa tekee toisen, a.

3. *Kertominen.*

Lu'un a kertominen kokolu'ulla, b, on niin monen a:n yhdistäminen kuin b:ssä on ykkösiä. Jos b on murtoluku esm. $\frac{n}{m}$ jossa m ja n ovat kokolukuja, niin a:n kertominen b:llä on niin monennen osan a:sta, kuin m sisältää ykkösiä, kertominen kokolu'ulla n. Jos b olisi mitaton luku, niin sen arvo olisi lähimäärin etsittävä, joka olisi murtoluku esm. $\frac{n}{m}$, ja a sitte sillä kerrottava. Sitä lukua, joka saadaan lu'un a kertomalla lu'ulla b sanotaan *tuloksi* ja lukuja a ja b *kertojiksi* tulossa.

Edellisistä kertomisen määrityksistä saadaan seuraava yleinen määritys.

Lu'un a kertominen toisella b on kolmannen etsiminen, joka on tehty a:sta aivan samalla tavalla kuin b on tehty ykkösestä.

Kuin b on kokoluku, niin se on saatu b ykköstä laskien yhteen.

Samoin saadaan tulo $b \cdot a$ niin monta a:ta laskemalla yhteen, kuin b:ssä on ykkösiä. Jos b on esm. 3, niin $3a$ on sama kuin $a + a + a$.

Kuin b on murtoluku esm. $\frac{n}{m}$, niin se on saatu ykkösen jakamalla m:ään yhtä isoon osaan ja yhden semmoisen osan ottamalla n kertaa. Samoin on tulo $b \cdot a$ tehtävä a:sta, sen (a:n) jakamalla m:ään yhtä isoon osaan ja yhden semmoisen osan kertomalla lu'ulla n. Jos b on esm. $\frac{2}{3}$, niin a:sta on ensin otettava kolmas osa, joka on $\frac{a}{3}$ ja se taas otettava 2 kertaa, joten saadaan $\frac{2a}{3}$. Kuin b on mitaton luku niin tulon $b \cdot a$ arvo saadaan lähimmäärin, kuin a kerrotaan b:n lähimäärisellä arvolla, ja koska se aina on murtoluku, niin tulo tässä tapauksessa saadaan samoin kuin edellisessäkin, ehkä vaan lähimäärin.

Muist. Jos molemmat kertojat ovat mitattomat, niin tulo voipi olla mitallinen luku. Samoin voipi usiamman mitattoman kertojan tulo olla mitallinen. Tämä seikka tullaan vastedes selvästi näkemään.

4. *Jako.*

Lu'un a jakaminen toisella b on kolmannen c etsiminen, joka kerrottuna toisella b antaa tuloksi ensimäisen a.

Jos sentähden a jaettuna b:llä, jota merkitään näin, $a:b$ eli $\frac{a}{b}$, on yhtä iso kuin c, niin tulon $b \cdot c$ pitää oleman yhtä ison kuin a. Jaossa saavat nämä kolme lukua seuraavat nimet; ensimäinen, a, nimen *jaettava*, toinen b, *jakaja* ja kolmas c, *osa.*

5. *Korottaminen eli koron teko.*

Tulo, jossa on n kertojata kaikki yhtä isoja kuin luku a, saapi nimen lu'un a n:es korko.

Lukua a kutsutaan koron *alukkeeksi* ja n:ää *korottimeksi.* Korotin kirjoitetaan alukkeen oikealle- ja vähä ylä-puolelle. Niin merkitsee esm. a^2 samaa käin $a \cdot a$, 2^3 samaa kuin $2 \cdot 2 \cdot 2$ eli 8, a^4 samaa kuin $a \cdot a \cdot a \cdot a$ j. e. e.

6. *Alukkeen otto.*

Lukua, jonka n:es korko on a, sanotaan lu'un a n:ksi alukkeeksi.

Korottaminen ja alukkeen otto ovat siis vastasuuntaiset teokset. Edellisessä on aluke tunnettu ja korkoa etsitään, mutta toisessa on korko tunnettu ja aluke etsittävä. Alukemerkin selityksessä on jo nähty, kuinka alukkeen ottoa merkitään. Niin on esm. $\sqrt[3]{8}$ (sanotaan kolmas aluke kahdeksasta) se luku, jonka kolmas korko on 8, siis 2, $\sqrt[2]{a}$ se luku, jonka toinen korko on a j. n. e.

Kuin alukkeen ilmoittaja, alotin, on 2, niin se jätetään tavallisesti kirjoittamatta. Siten on $\sqrt{a}$ sama kuin $\sqrt[2]{a}$.

Mitä neljällä viimesellä teoksella yleislaskusuuruuksien kanssa ymmäretään, tulee vastedes selitetyksi, sillä ne ovat helpommat käsittää sitte, kuin yleisiä suuruuksia on harjauduttu laskussa käyttämään.

§ 6.

Yhtälö on kahden suuruuden yhtä-isous merkittynä suuruuksien välillä olevalla yhtä-isouden merkillä $=$.

Suuruudet yhtä-isouden merkin kumpassellakin puolen saavat nimen: *yhtälön puolet.* $a = d$ (a yhtä iso kuin d) on yhtälö, joka merkitsee, että suuruudet a ja d ovat yhtä isot ja a:ta sanotaan yhtälön vasemmaksi eli ensimäiseksi ja d:tä oikeaksi eli toiseksi puoleksi.

Jokaista yhdistystä yleislasku-suuruuksista nimitetään yleislasku-lausekkeeksi ja kaikkia lisä- eli poistomerkillä yhdistettyjä suuruuksia siinä sen osioiksi.

Jos lausekkeessa on ainoastansa yksi osio, s. t. s. yksi lisäeli poistomerkillä toisten kanssa yhdistämätön suuruus, niin sitä nimitetään *yksiöksi,* mutta jos siinä on usiampia osioita, saapi se nimen *monio. Kaksio* on se lauseke, jossa on kaksi osioa, *kolmio* se jossa on 3 j. n. e. Lausekkeet $3ad$, $2ad^2$, $3e$, $\frac{1}{2}eg^3$, $\frac{1}{2}ade^2$, esm. ovat yksiöitä ja lausekkeet $3a^2d + e$, $\frac{3}{5}e^2 - ad$, $5ad - 2a^2e + 3a^2$ monioita.

Numeroluku, joka on kertojana osiossa, kirjoitetaan puustavi kertojoiden edelle ja sitä nimitetään osion *numerokertojaksi.* Jos taas jotakin puustavikertojata tahdotaan jostakin syystä eroittaa toisista, jos se esm. on tuntematon suuruus ja kaikki muut kertojat osiossa ovat pidettävät tunnettuina, niin se kirjoitetaan tavallisesti viimeseksi ja kaikkien muiden tuloa nimitetään sen *etukertojaksi.* Niin on esm. osion $3ad^2$ numerokertoja 3, osion $\frac{3}{5}e^2g$, $\frac{3}{5}$ j. n. e. Osiossa $3ad^2x$ on $3ad^2$ x:n etukertoja, jos x on tuntematon suuruus. Niin myös on osiossa $(2a + 1)x$, $(2a + 1)$, x:n etukertoja.

Osion *ulottuvaisuudeksi* nimitetään jokaista puustavisuuruutta, joka on kertojana osiossa ja ulottuvaisuuksien eli puustavikertojoiden lukua nimitetään osion *nousuksi.* Osion $2ade$ ulottuvaisuudet ovat a, d ja e ja sen nousu siis kolme. Osion $\frac{2}{3}ad^2$ ulottuvaisuudet taas ovat a, d ja d ja nousu sentähden myös kolme. Niin myös ovat e ja g osion $5eg$ ulottuvaisuudet ja sen nousu kaksi.

Muist. Nimitystä *ulottuvaisuus* käytetään, kuin osion puustavikertojilla on joku mittausopillinen merkitys.

Moniota, jonka kaikilla osioilla on sama nousu, nimitetään *yhtäläiseksi.* Yhtäläinen on siis esm. monio

$$2a^2b + 3ab^2 + \tfrac{1}{2}cd^2.$$

Niin myös monio $ab + 2bc - 3cd$.

Ensimäisen monion osioiden nousu on kolme ja toisen kaksi.

Jos lausekkeen jokaiselle puustavisuuruudelle annetaan määrätty arvo, niin lauseke saapi myös yhden ainoan määrätyn arvon. Mutta puustavisuuruudet voivat saada eri arvojakin ja lauseke kuitenkin pitää saman arvonsa. Niin voivat esm. a ja b kaksiossa $a - b$ kasvaa samalla, vaan millä lu'ulla hyvänsä, mutta kaksion arvo on koko ai'an muuttumaton. Jos a on esm. 5 ja $b = 2$ niin $a - b = 5 - 2 = 3$. Jos sitte pannaan niin hyvin a:han kuin b:kin lisää esm. 4, niin $a - b = (5 + 4) - (2 + 4) = 9 - 6 = 3$ j. n. e.

Harjoittelemiseksi numero-arvon etsimisessä otamme seuraavat lausekkeet:

1. $2a + 3ad - 2a^2$, 2. $3a^2 + 4cd + e^2$, 3. $\dfrac{3a^2 - 4}{2b - a}$,

4. $\dfrac{\frac{1}{2}ab - c^2 + ab}{3c + \frac{1}{2}ad - d^2}$, 5. $\dfrac{\frac{3}{2}ab - 2cd}{b^2 + 2e^2}$, 6. $\dfrac{\frac{5}{3}ac - c^2}{\frac{1}{3}c^2 + a^2e}$.

Kuin $a = 3$, $b = 2$, $c = \frac{1}{2}$, $d = 2$ ja $e = \frac{2}{3}$, niin edellisten lausekkeiden arvot ovat: 1:sen 6, 2:sen $31\frac{4}{9}$, 3:nen 23, 4:nen $17\frac{1}{2}$, 5:nen $1\frac{19}{44}$ ja 6:nen $\frac{27}{73}$.

Jos taas on $a = 2$, $b = 3$, $c = \frac{3}{2}$, $d = 1$ ja $e = 2$, niin edelliset lausekkeet saavat seuraavat arvot: 1:nen 2, 2:nen 22, 3:mas 2, 4:jäs $\frac{3}{2}$, 5:des $\frac{6}{17}$ ja 6:des $\frac{11}{35}$.

Osioita, joidenka puustavikertojat ovat samat ja samoissa koroissa, sanotaan *samankaltaisiksi*. Niin ovat esm. moniossa:

$$4a^3b^2 + 7ab + 5a^3b^2 + 3ab + 8a^2b + 2ab^2$$

osiot $4a^3b^2$ ja $5a^3b^2$ keskenensä samankaltaiset ja osiot $7ab$ ja $3ab$ myös keskenänsä, mutta osiot $8a^2b$ ja $2ab^2$ eivät ole samankaltaisia keskenänsä eivätkä yhdenkään toisen osion kanssa, sillä puustavikertojoiden korottimet eivät ole samat.

Monio, jossa on samankaltaisia osioita, voidaan aina niiden yhdistämisellä lyhentää. Olisko esm. monio:

$$4a^2b - 3a^2c - 2a^2b + 7a^2c,$$

niin, koska siinä on 4 suuruutta a^2b ja kaksi samaa suuruutta on poisotettavaa, siihen jääpi $2a^2b$. Samoin on 3 suuruutta a^2c otettavaa, vaan 7 samaa suuruutta pantavaa ja siis $4a^2c$ enemmän pantavaa kuin otettavaa. Sentähden on selvästi

$$4a^2b - 3a^2c - 2a^2b + 7a^2c = 2a^2b + 4a^2c,$$

joten monio on lyhentynyt kaksioksi. Jos jossakin moniossa olisi paitsi muita osioita: $+2a^2bc$, $-3a^2bc$, $+4a^2bc$, $-5a^2bc$, $+7a^2bc$, niin näiden samankaltaisten lisäävien osioiden summa olisi $13a^2bc$ ja vähentävien $-8a^2bc$. Nämä viisi osiota tekisivät siis yhteensä $13a^2bc - 8a^2bc$, joka on selvästi sama kuin $5a^2bc$. Jos taas vähentävien osioiden summa on isompi kuin enentävien, niin silloin ne yhteensä tekevät vähentävän osion, joka saadaan enentävien ottamalla vähentävistä. Kuin esm. keskenänsä samankaltaisten enentävien osioiden summa olisi $4a^2b$ ja vähentävien $-7a^2b$, niin ne tekisivät yhteensä $4a^2b - 7a^2b$. Mutta nyt on $-7a^2b = -4a^2b - 3a^2b$ ja sentähden $4a^2b - 7a^2b = 4a^2b - 4a^2b - 3a^2b$, joka on sama kuin $-3a^2b$.

Tästä saadaan helposti seuraavaa sääntö samankaltaisten osioiden yhdistämiselle.

Kaikki enentävät osiot yhdistetään, joka tehdään niiden numerokertojoiden yhdistämällä ja summan panemmalla numerokertojaksi yhteisille puustavikertojille ja samoin yhdistetään vähentävät osiot. Sitte poistetaan näiden summien numero-arvonsa puolesta pienempi numerokertoja isommasta ja tähde pannaan isomman merkillä numerokertojaksi yhteisille puustavikertojille.

Tämän säännön mukaan saadaan esm. monio

$$6a^2b - 8a^2b - 9a^2b + 15a^2b - a^2b$$

lyhennetyksi yksiöksi $+3a^2b$. Niin myös on

$$7abc^2 - abc^2 - 7abc^2 - 8abc^2 + 4abc^2 = -5abc^2.$$

Samankaltaisten osioiden yhdistäminen on teos, jota yleislaskussa alinomaa käytetään ja yhteenlaskussa tulemme jo kylliksi saamaan esimerkkiä.

Suuruudet, jotka pantuina toisiin tekevät saman vaikutuksen, s. t. s. enentävät tai vähentävät niitä yhden verran, ovat yhtä isot. Niillä piitää siis oleman yhtä isot numero-arvot ja sama merkki. Vastinaisiksi olemme nimittäneet semmoisia, joilla on sama numero-arvo vaan vastaiset merkit. Ne tekevät vastinaiset vaikutukset, s. o. toinen vähentää saman verran kuin toinen enentää jokaista suuruutta, johonka ne pannaan. Tästä seuraa selvästi, että vastinaiset suuruudet tekevät yhdistettyinä nollan, sillä toinen vähentää toista samalla lu'ulla kuin sen numeroarvo on, niin ettei mitään jää jälelle. Jos siis $a = b$, niin a ja $-b$ ovat vastinaiset suuruudet ja $a - b = 0$. Se on taas selvä, että kaksi suuruutta, joidenka summa on nolla, ovat vastinaiset. Suuruudet $+\frac{3}{2}$ ja $1\frac{1}{2}$ ovat esm. yhtä isot, vaan $+3$ ja -3 vastinaiset.

§ 7.

Selviö 1. *Jos yhtä isot suuruudet pannaan yhtä isoihin suuruuksiin eli otetaan niistä pois, niin summat eli tähteet ovat yhtä isot.*

Sel. 2. *Jos kaksi suuruutta a ja b ovat yhtä isot, niin niiden vastinaiset suuruudet $-a$ ja $-b$ ovat myös yhtä isot.*

Sel. 3. *Jos yhtä isot lu'ut kerrotaan samalla eli yhtä isoilla lu'uilla, niin saadaan yhtä isot tulot.*

Tästä seuraa, että lu'ut, jotka kerrottuina samalla eli yhtä isoilla lu'uilla antavat yhtä isot tulot, ovat itsekin yhtä isot.

Sel. 4. *Jos yhtä isot lu'ut jaetaan samalla eli yhtä isoilla lu'uilla, niin saadaan yhtä isot osat.*

Tästä taas seuraa selvästi, että ne lu'ut ovat yhtä isot, jotka jaettuina samalla eli yhtä isoilla lu'uilla antavat yhtä isot osat.

Sel. 5. *Suuruuksien summa on sama tapahtuipa yhdistäminen missä järjestyksessä hyvänsä.*

$$a + c + b = b + c + a = c + a + b.$$

Todisto. *Lukujen tulo on sama, tehtäneenpä kertominen missä järjestyksessä hyvänsä.*

Olisko kaksi lukua a ja b, joista b ensiksi olkoon koko luku, niin tässä on todistettava, että ab on sama kuin ba. Jos ab on sama kuin ba, b:n ollessa mikä määrätty luku hyvänsä, niin $a(b+1)$ on myös sama kuin $(b+1)\cdot a$. Nyt on selvästi $a\cdot(b+1)=ab+a\cdot 1$ ja $(b+1)\cdot a=ba+1\cdot a$, sillä edellisessä ovat b sekä 1 kerrottavat a:lla ja tulo sentähden summa tuloista ab ja $a\cdot 1$. Jälkimäisessä taas on a kerrottava b:llä ja 1:llä, jonkatähden tulo on $ba+1\cdot a$. Mutta $a\cdot 1=a$ ja $1\cdot a=a$, josta $a\cdot 1=1\cdot a$. Jos siis $ab=ba$, niin $ab+a\cdot 1$ on myös sama kuin $ba+1\cdot a$, josta selvästi saadaan $a\cdot(b+1)=(b+1)\cdot a$. Koska nyt on $a\cdot 2=a(1+1)=a+a$ ja $2\cdot a=(1+1)a=a+a$, niin $a\cdot 2=2\cdot a$. Sentähden, jos $b=2$, on myös $ab=ba$ ja siis $a(b+1)=(b+1)a$, s. o. $a3=3a$. Tästä saadaan taas samoin $a\cdot 4=4\cdot a$ j. n. e., niin että $ab=ba$, olipa b mikä kokoluku hyvänsä. Jos taas b on murtoluku esm. sama kuin $\frac{m}{n}$, jossa m ja n ovat kokolukuja, niin $a\cdot b=a\frac{m}{n}$ ja $b\cdot a=\frac{m}{n}a$. Mutta nyt on selvästi $a\cdot\frac{m}{n}=\frac{am}{n}$ ja $\frac{m}{n}\cdot a=\frac{ma}{n}$ ja koska edellä jo on todistettu, että $am=ma$, niin $\frac{am}{n}$ on myös sama kuin $\frac{ma}{n}$, josta seuraa, että $a\cdot\frac{m}{n}=\frac{m}{n}\cdot a$, s. o. $ab=ba$, olipa b mikä murtoluku $\frac{m}{n}$ hyvänsä, j. o. t. Usiampien lukujen tulo saadaan taas ensimäinen kertoen toisella, saatu tulo kolmannella ja viimenen tulo neljännellä j. n. e. Tässä on siis aina vaan yksi luku kerrottava toisella ja koska tämä kertominen saapi tapahtua missä järjestyksessä hyvänsä, niin siitä seuraa yleisesti, että lukujen tulo on sama, kerrottiinpa ne missä järjestyksessä hyvänsä. Niin on esm.

$$abc=(ab)\cdot c=(ba)c=c(ba)=cab \text{ j. n. e.}$$

Ensimäinen Luku.

Neljästä ensimäisestä alkeisteoksesta (Quattuor species) yleislaskusuuruuksilla.

§ 1.

Yhteenlasku.

Jos yksiöt $2a$, $3b$, $5c$, ovat laskettavat yhteen, niin niiden summa on monio, jonka osiot nämä yksiöt lisämerkillä ovat. Tämä summa on siis $2a+3b+5c$, sillä ensimäisen osion lisämerkin saapi jättää pois. Yksiöistä $3a^2b$, $2a^2b$, $5a^2b$ tulee samoin summa

$$3a^2b+2a^2b+5a^2b=10a^2b,$$

koska monion osiot ovat samankaltaiset.

Jos yksiöiden seassa on vähentäviä, niin summa saadaan kaikkien yksiöiden merkkinensä jälekkäin kirjoittamalla, sillä poistomerkkiset vähentävät summaa ja ovat sentähden kirjoitettavat poistomerkin kanssa. Näin tekevät yksiöt $2a^2$, $-3ab$, $+b^2$, $+2ab$ summan

$$2a^2-3ab+b^2+2ab=2a^2-ab+b^2.$$

Monioiden summa saadaan myös niiden osioiden merkkinensä yhdeksi monioksi kirjoittamalla ja sitte samankaltaisten osioiden, jos semmoisia on, yhdistämällä. Sillä olisivatko esm. moniot

$$3a^2-4ad,\ 2a^2-3ad+d^2 \text{ ja } 2ad-3d^2$$

laskettavat yhteen, niin summa saataisiin suuruuteen $3a^2-4ad$ välien $(2a^2+d^2)-3ad$ ja $2ad-3d^2$ panemalla. Se on taas selvä asia, että näin saadaan sama summa kuin väliin $3a^2-4ad$ suuruuksien $2a^2+d^2$ ja $2ad$ panemalla ja tästä summasta suuruudet $3ad$ ja $3d^2$ ottaen pois. Näin tulee monio

$$3a^2-4ad+2a^2+d^2+2ad-3ad-3d^2,$$

josta taas samankaltaisten osioiden yhdistettyä tulee

$$5a^2-5ad-2d^2.$$

Käytännössä on paras yhdistettävät moniot kirjoittaa päällekkäin niin, että samankaltaiset osiot tulevat päälletysten, ja viimeisten yhdistettyä, summan osiot merkkinensä jäletysten alimaiseen riviin. Edellisten monioiden yhteenlasku saapi siis seuraavan muodon:

$$\begin{array}{r} 3a^2-4ad \\ 2a^2-3ad+d^2 \\ \underline{+2ad-3d^2} \\ 5a^2-5ad-2d^2. \end{array}$$

Esimerkkiä.

Esm. 1. $12a-5b+(-3a+2b)=9a-3b.$

Esm. 2. $3a^2+5b-3c^3+(16a^2-9b+8c^3-1)=19a^2-4b+5c^3-1.$

Esm. 3. $6ab+12bc-8cd+(3cd-7ab-9bc)+(12cd-5bc-2ab)=-3ab-2bc+7cd.$

Esm. 4. $2\frac{3}{4}ax-\frac{1}{2}x^2-\sqrt{x}+150+(3x^2-2ax+6x^2+7xy-100\sqrt{x}-1)=\frac{3}{4}ax+8\frac{1}{2}x^2-101\sqrt{x}+7xy+149.$

Esm. 5. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}z-4+\frac{1}{3}x+(\frac{2}{3}z-x+8{,}25)=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{12}z+4{,}25.$

Esm. 6. $10{,}3ab^2+0{,}75a^2b^3-3ab^2-4{,}5a^2b+(5a^2b^3c-7ab^2+8a^2b-3{,}1a^2b^3)=0{,}3ab^2-2{,}35a^2b^3+3{,}5a^2b+5a^2b^3c.$

Esm. 7. $5a^mb^p+3a^3b^{m-1}-\frac{3a^4}{x^n}-4a^3b^{m-1}-a+\frac{10a^4}{x^n}+a^mb^p+a-7a^mb^pc=6a^mb^p-a^3b^{m-1}+\frac{7a^4}{x^n}-7a^mb^pc.$

§ 2.

Poistaminen.

Poistaa joku suuruus toisesta on sama kuin panna ensimäisen vastinainen suuruus toiseen. Sillä jos ensimäisen arvo on enentävä, niin sen poistaminen toisesta vähentää sitä, mutta sen vastinainen suuruus, jonka arvo on vähentävä, pantuna toiseen vähentää sitä myös saman verran, koska kumpasenkin numero-arvot ovat yhtä isot. Jos taas ensimäisen arvo on vähentävä, niin sen poistaminen toisesta suuruudesta enentää sitä ja ensimäisen vastinainen lisäsuuruus pantuna toiseen enentää sitä myös samalla lu'ulla.

Jos suuruus b on poistettava toisesta a, niin tähdettä merkitään yleislaskussa kaksiolla $a - b$. Mutta kaksio $a - b$ saadaan b:n vastinaisen suuruuden $-b$:n panemalla a:han.

Jos taas suuruus $-b$ olisi poistettava a:sta, niin tähde olisi yleisen merkityksen mukaan $a - (-b)$, mutta $a - (-b)$ on, niin kuin johdannon §:ssä 4 on sanottu, sama kuin $a + b$. Tässäkin tapauksessa saadaan siis tähde poistettavan, $-b$, vastinaisen suuruuden $(+b)$ panemalla vähennettävään a.

Niin on esm. tähde, joka jääpi, kuin suuruus $3d$ poistetaan suuruudesta $4a$, $4a - 3d$. Samoin on suuruuksien $7a^3b$ ja $4a^3b$ väli $7a^3b - 4a^3b = 3a^3b$. Kuin suuruus $-3b$ otetaan suuruudesta $5a$, niin tähde on $5a - (-3b) = 5a + 3b$.

Poistamisen määrityksessä on sanottu, että poistettavan suuruuden ja tähteen pitää yhteen laskettuina tekemän vähennettävän.

Ensimäisessä esimerkissämme on tähde $4a - 3d$ ja poistettava $+3d$, joidenka summa $4a - 3d + 3d$ onkin vähennettävä $4a$, toisessa on poistettava $4a^3b$, tähde $3a^3b$ ja niiden summa $4a^3b + 3a^3b$ sama kuin vähennettävä $7a^3b$ ja viimesessä on tähde $5a + 3b$, poistettava $-3b$ ja niiden summa $5a + 3b - 3b$, joka tekee vähennettävän $5a$, koska $3b - 3b = 0$.

Monion vastinainen suuruus saadaan sen osioiden merkkien muuttamalla vastaisiksi. Sillä jos monion enentävien osioiden summa olisi a ja vähentävien $-b$, niin monion arvo olisi $a - b$. Kuin sitte kaikkien osioiden merkit muutetaan vastaisiksi, niin saadaan monio, jossa vähentävien osioiden summa on $-a$ ja enentävien $+b$, koska osioiden numero-arvot ovat jääneet entisellensä, ja monion arvo on siis $-a + b$. Suuruuksilla $a - b$ ja $-a + b$ on taas aina sama numero-arvo vaan vastaiset merkit, koska kumpasenkin numero-arvo on samojen lukujen väli ja isomman lu'un edellä oleva merkki on toisessa $+$ ja toisessa —. Suuruudet $a-b$ ja $-a+b$ tekevät myös yhteensä summan $a-b-a+b=0$. Koska nyt näiden monioiden arvot ovat vastinaiset, olivatpa niissä olevien puustavisuuruuksien arvot mitkä hyvänsä, niin itse moniot ovat aina vastinaiset suuruudet, j. o. t.

Tästä saadaan seuraava sääntö monion poistamiselle jostakin toisesta suuruudesta:

Kaikkien osioiden merkit poistettavassa moniossa muutetaan vastaisiksi ja näin saatu monio lasketaan yhteen vähennettävän suuruuden kanssa.

Käytännössä kirjoitetaan poistettava monio vähennettävän alle niin, että samankaltaiset osiot molemmissa tulevat päälletysten ja poistettavan osioiden merkit muutetaan vastaisiksi eli vastaiset merkit kirjoitetaan entisten päälle. Sitte on vaan tavallinen yhteenlasku tehtävä. Jos esm. monio $1+2ab+7b^2c+5c^3-5e$ olisi poistettava toisesta $4ab-5b^2c+3\frac{2}{3}c^3-4d$, niin lasku tapahtuisi seuravalla tavalla:

$$\begin{array}{rrrrr} 4ab & -\ 5b^2c & +\ 3\frac{2}{3}c^3 & -\ 4d & \\ \mp\ 2ab & \mp\ 7b^2c & \mp\ 5\ c^3 & & \pm\ 5e \mp 1 \\ \hline 2ab & -\ 12b^2c & -\ 1\frac{1}{3}c^3 & -\ 4d & +\ 5e-1. \end{array}$$

Monion poistamitsa jostakin surruudesta merkitään, monion sulkumerkillä varustettua, tavallisella poistomerkillä sen edellä.

Muist. Samoin merkitään jokaista yleislasku-teosta monion kanssa teoksen merkillä sulkumerkkien väliin suljetun monion edellä.

Niin merkitään esm. monion $a+b-c-d+\cdots$ poisatmista suuruudesta A seuraavasti: $A-(a+b-c-d+\cdots)$. Suuruudet $a+b-c-d+\cdots=(a+b-c-d+\cdots)$ ja $-(a+b-c-d+\cdots)$ ovatkin vastinaiset, jonkatähden jälkimäisen paneminen jokaiseen suuruuteen tekee saman vaikutuksen kuin edellisen poistaminen siitä. Tästä seuraa myös että

$$-a-b+c+d-\cdots=-(a+b-c-d+\cdots)$$

koska monio $a+b-c-d+\cdots$ on kumpasenkin edellisen vastinainen suuruus.

Esimerkkiä.

Esm. 1. $3a^2 - 4ab + 5b^2 - (2a^2 - 2ab + 4b^2) = a^2 - 2ab + b^2.$

Esm. 2. $a - b - (b - a) = 2a - 2b.$

Esm. 3. $5a^3 - 4a^2b + 3b^2c - (3a^2b - 2a^3 - 8b^2c) = 7a^3 - 7a^2b + 11b^2c.$

Esm. 4. $4ab^2 - 2b^2 + 3a^2 - (5ab^2 - 4cd + 3\frac{5}{7}a^2) = - ab^2 - 2b^2 - \frac{5}{7}a^2 + 4cd.$

Esm. 5. $x^3 - 9x^2 + 11x - 12 - (-9x^2 + 10x - 4) = x^3 + x - 8.$

Esm. 6. $9a^mx^2 - 13 + 20ab^3x - 4b^mcx^2 - (3b^mc^2x^2 + 9a^mx^2 - 6 + 3ab^3x) = -7 + 17ab^3x - 4b^mcx^2 - 3b^mc^2x^2.$

Esm. 7. $\frac{1}{2}a - \frac{5}{6}x - (\frac{3}{4}a - \frac{1}{2}x) - (3b + \frac{8}{3}x - \frac{3}{4}a) = - \frac{1}{4}a - \frac{1}{3}x - (3b + \frac{8}{3}x - \frac{3}{4}a) = \frac{1}{2}a - 3x - 3b.$

§ 3.

Kertominen.

Jos puustavit a, b, c, d, ⋯ merkitsevät lukuja, niin yksiö $2a^2b$ esm. kerrottuna toisella $3ab$ antaa tulon, jota yleislaskussa merkitään lausekkeella $3ab \times 2a^2b$. Mutta nyt on lukujen tulo sama, tapahtuipa kertominen missä järjestyksessä hyvänsä. (Johdanto § 7). Sentähden on yksiöiden $2a^2b$ ja $3ab$ tulo $3ab \times 2a^2b = 3 \times 2a^2abb$. Koron määrityksen mukaan on taas $a^2 = aa$ ja $aaa = a^3$, $bb = b^2$, josta seuraa, että $3ab \times 2a^2b = 3 \times 2aaabb = 3 \times 2a^3b^2$. Määrättyjen numerokertojoiden tulo saadaan aina helposti yhdeksi lu'uksi. Niin on $3 \times 2 = 6$ ja sentähden vihdoin $3ab \times 2a^2b = 6a^3b^2$.

Samoin on yksiöiden $7a^3b^2$ ja $4a^2b$ tulo $7a^3b^2 \times 4a^2b = 7 \times 4a^3a^2b^2b = 7 \times 4aaaaabbb = 28a^5b^3$.

Niin myös on

$$12a^2b^4c^2 \times 8a^2b^2d^2 = 12 \times 8a^2a^2b^4b^2c^2d^2 = 12 \times 8aaaabbbbbbccdd = 96a^4b^6c^2d^2.$$

Näistä esimerkistä nähdään selvästi, että *yksiöiden tulon numerokertoja on tulo yksiöiden numerokertojista ja että kaikki kumpasenkin kertojan yhteiset puustavikertojat ovat tulossa jokainen korottimella, joka on summa sen korottimista kertojissa.*

Ne puustavit taas, jotka ovat ainoastansa yhdessä kertojassa, ovat tulossa korottiminensa.

Muist. Nomerokertojan saanti on selvä itsestänsä ja sääntö korottimista on myös selvä, kuin vaan ajatellaan, että tulossa pitää olla niin monta lukua a esm. kertojana kuin kumpasessakin kertojassa yhteensä ja että korotin juuri näyttää kuinka monta a:ta kertojana on.

Edellisen säännön mukaan saadaan nyt helposti seuraavat tulot.

$$8a^2bc^2 \times 7abcd^2 = 56a^3b^2c^3d^2.$$
$$21a^3b^2cd \times 8abc^3 = 168a^4b^3c^4d.$$
$$4abc \times 7df = 28abcdf.$$
$$\tfrac{2}{3}ac^2 \times \tfrac{6}{5}acb = \tfrac{4}{5}a^2bc^3.$$

Kuin taas luku a on kerrottava summalla $b + c$, niin tulo saadaan, jos a ensin kerrotaan b:llä ja sitte c:llä ja näin saadut tulot lasketaan yhteen, sillä a on otettu silloin niin monta kertaa, kuin b:ssä, ja sitte niin monta kertaa, kuin c:ssä ja yhteensä siis niin monta kertaa, kuin summassa $b + c$ on ykkösiä eli, jos b ja c ovat murtolukuja, niin a:sta on ensin otettu niin iso osa, kuin b, ja sitte niin iso osa, kuin c, ja yhteensä siis niin iso osa, kuin $b + c$ on yhdestä. Sentähden on tulo

$$(b + c)a = ba + ca$$

ja koska lukujen tulo on sama, tapahtuipa kertominen missä järjestyksessä hyvänsä, niin saadaan myös

$$a(b + c) = (b + c)a = ba + ca = ab + ac.$$

Jos taas luku a olisi kerrottava kahden lu'un b ja c välillä $b - c$ ja a otettaisiin b kertaa, niin silloin saataisiin tulo ba, jossa olisi niin monta a:ta eli niin iso osa a:sta, kuin c sisältää ykkösiä eli on osa yhdestä, liiaksi (enemmän kuin vaaditussa tulossa, $(b - c)a$), sillä b:ssä on selvästi c ykköstä eli c osa yhdestä enemmän kuin välissä $b - c$, koska viimenen suuruus saadaan juuri lu'un c poistamalla lu'usta b.

Jos sentähden lu'usta ba otetaan niin monta a:ta, kuin c:ssä on ykkösiä, eli niin iso osa a:sta, kuin c on yhdestä, s. o. luku

ca, pois, niin saadaan etsittävä (lukujen a ja $b-c$) tulo. Tästä seuraa nyt selvästi että

$$(a-c)\cdot a = ba - ca.$$

Koska taas on $(b-c)a = a(b-c)$ ja $ba = ab$, $ca = ac$, niin myös on

$$a(b-c) = ab - ac.$$

Viimenen sääntö on johdettu lukua b pitäen isompana kuin luku c, mutta yleislaskussa annetaan kertomiselle sama merkitys, joskohta c on isompi kuin b, jolloin väli $(b-c)$ on poistosuuruus, niin että $a(b-c) = ab - ac = -(ac - ab)$, s. t. s. poistosuuruus $(b-c)$ kerrottuna lu'ulla a antaa poistosuuruuden $-(ac-ab)$ tuloksi.

Jos b merkitsisi esm. saamista niin $-c$ merkitsisi silloin velkaa ja väli $b-c$ sitä velkaa, joka jääpi jälelle, kuin saaminen otetaan pois velkasummasta ja tämä velka kerrottuna lu'ulla a antaa a kertaisen velan, jota merkitään poistosuuruudella, koska lisäsuuruus b eli $+b$ merkitsee saamista.

Kuin väli $a-b$ on kerrottava summalla $c+d$, niin tulo saadaan selvästi väli $a-b$ kertoen ensin c:llä ja sitte d:llä ja saadut tulot laskien yhteen.

Sentähden on

$$(c+d)(a-b) = c(a-b) + d(a-b).$$

Mutta edellisen mukaan on

$$c(a-b) = ca - cb$$
$$d(a-b) = da - db,$$

josta taas seuraa

$$(c+d)(a-b) = ca - cb + da - db.$$

Samoin on myös

$$(a-b)(c+d) = ac - bc + ad - bd.$$

Jos taas väli $c-d$ on kerrottava toisella $a-b$, niin se on selvä asia, että tulo saadaan suuruuden $c-d$ ottamalla ensin a kertaa ja näin saadusta suuruudesta b kertaa $(c-d)$ poistamalla, jonkatähden taas on

$$(a-b)\cdot(c-d) = a\cdot(c-d) - b(c-d)$$

Mutta edellisen mukaan on

$$a(c-d) = ac - ad \text{ ja } b(c-d) = bc - bd$$

josta seuraa, että

$$(a-b)\cdot(c-d) = ac - ad - (bc - bd)$$

ja koska

$$ac - ad - (bc - bd) = ac - ad - bc + bd, \text{ niin}$$

$$(a-b)\cdot(c-d) = ac - ad - bc + bd.$$

Tälle kertomiselle annetaan myös yleislaskussa yleinen merkitys, niin että

$$(a-b)(c-d) = ab - ac - bc + bd,$$

olipa $(c-d)$ lisä- eli poistosuuruus ja a isompi kuin b eli b isompi kuin a.

Viimenen yhtälö on siis, niin hyvin kuin edellisetkin, oikea, olivatpa a, b, c ja d mitä ja miten isoja lukuja hyvänsä, sillä suuruuden $(c-d)$ kertominen välillä $a-b$ merkitsee, että $(c-d)$ pitää otettaman a kertaa ja niin saadusta tulosta b kertaa $(c-d)$ poistettaman. Se on siis oikea, vaikka yksi eli usiampikin lu'uista a, b, c ja d pienenisi aina nollaksi asti.

Jos nyt yhtälössä

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$$

b ja d katoavat nollaksi, niin että $b = d = 0$, niin siitä saadaan yhtälö $(+a)\cdot(+c) = +ac$, sillä $a = +a$, $c = +c$, $ac = +ac$ ja nolla kertaa mikä äärellinen suuruus hyvänsä on nolla, jonkatähden $-a\cdot 0 = 0$, $-0\cdot c = 0$ ja $0\cdot 0 = 0$.

Jos taas $b = c = 0$, niin saadaan $(a)\cdot(-d) = -ad$, s. o. $(+a)(-d) = -ad$.

Samoin on $(-b)\cdot(c) = -bc$, s. o. $(-b)\cdot(+c) = -bc$, kuin $a = d = 0$.

Vihdoin saadaan, kuin $a = c = 0$, $(-b)\cdot(-d) = +bd$.

Koska nyt on

$$(+a)\cdot(+c) = +ac$$
$$(+a)\cdot(-d) = -ad$$
$$(-b)\cdot(+c) = -bc$$
$$(-b)\cdot(-d) = +bd,$$

niin tästä nähdään, että *lisäsuuruus kerrottuna toisella lisäsuuruudella antaa lisäsuuruuden tuloksi, mutta poistosuuruus kerrottuna lisäsuuruudella niin hyvin kuin lisäsuuruuskin poistosuuruudella antaa poistosuuruuden ja vihdoin poistosuuruus kerrottuna toisella poistosuuruudella antaa lisäruuruuden tuloksi.*

Lyhyyden vuoksi puhutaan yleislaskussa merkkien kertomisesta toisilla merkillä, jolla ymmärretään, että kertojoiden merkistä on nähtävä mikä merkki tulon edelle on pantava. Viimesistä yhtälöistä nähdään selvästi, että tässä merkityksessä on

$$+ \cdot + = +$$
$$+ \cdot - = -$$
$$- \cdot + = -$$
$$- \cdot - = +,$$

s, t, s. *kahden samallaisen merkin tulo on lisämerkki* $+$, *mutta kahden vastaisen merkin tulo on poistomerkki* $-$.

Kuin usiamman suuruuden tulo on etsittävä, niin se saadaan esm. ensimäinen kertoen toisella, näin saatu tulo kolmannella, viimenen tulo taas neljännellä j. n. e. Jos kertojoiden seassa on yksi poistosuuruus, niin tulo on myös poistosuuruus, sillä poistosuuruuden edelliset kertojat antavat lisäsuuruuden, joka kerrottuna poistosuuruudella antaa poistosuuruuden ja se taas kerrottuna jälkimäisillä lisäsuuruuksilla antaa poistosuuruuden tuloksi.

Jos kertojoiden seassa olisi kaksi poistosuuruutta, niin kaikkien toisen näistä poistosuuruuksista edellä olevien kertojoiden tulo olisi edellisen säännön mukaan poistosuuruus, joka kerrottuna seuraavalla poistosuuruudella antaisi lisäsuuruuden ja se taas jälkimäisillä lisäsuuruuksilla lisäsuuruuden tuloksi. Samoin nähdään, että tulo on poistosuuruus, jos kertojoiden seassa on kolme poistosuuruutta, mutta lisäsuuruus, jos niiden seassa on neljä poistosuuruutta j. n. e.

Tulo on siis lisäsuuruus, jos kertojoiden seassa olevien poistosuuruuksien luku on pari, mutta poistosuuruus, jos se on liika.

Merkkien kertomisessa kuuluu tämä sääntö näin, *merkkien tulo on lisämerkki* $+$, *jos kertojoiden seassa olevien poistomerkkien luku on pari, mutta poistomerkki* $-$, *jos se on liika.*

Merkkien kertomisen määrityksestä saadaan seuraava sääntö; *suuruuksien tulo saadaan kertojoiden merkkien tulo pannen niiden numero-arvojen tulon edelle.*

Koska merkkien kertomisessa ainoastansa niiden seassa olevien poistomerkkien luku, eikä merkkien järjestys, tulee kysymykseen, niin merkkien tulo on, niin hyvin kuin numero-arvojenkin, sama, kerrottiinpa ne missä järjestyksessä hyvänsä, josta taas seuraa, että *suuruuksien tulo on sama, tapahtuipa kertominen missä järjestyksessä hyvänsä.*

Nyt voidaan suuruuksien tulo ja kertominen lyhyesti määrittää seuraavalla tavalla.

Yleislaskusuuruuksien tulo on suuruus, jonka numero-arvo on kertojoiden numero-arvojen tulo ja merkki kertojoiden merkkien tulo.

Suuruuksien kertominen on niiden tulon muodostaminen.

Koska taas yhtä isoilla suuruuksilla on aina yhtä isot numero-arvot ja sama merkki, niin seuraavat todistot ovat jo itsestänsä selvät.

Yhtä isot suuruudet kerrottuina samalla eli yhtä isoilla suuruuksilla antavat yhtä isot tulot.

Suuruudet, jotka kerrottuina samalla eli yhtä isoilla suuruuksilla antavat yhtä isot tulot, ovat yhtä isot.

Mitenkä usiamman yksiön tulo saadaan on nyt selvä, sillä edellä on jo näytetty mitenkä tulon niin hyvin numerokertoja kuin kirjainkertojatkin saadaan ja viimeksi on nähty mikä sen merkki joka tapauksessa on.

Jos taas monio esm. $(a + b - c + d - e)$ on kerrottava suuruudella k niin tulo, jota yleislaskussa merkitään lausekkeella $k \cdot (a + b - c + d - e)$, saadaan yhdeksi monioksi sulkumerkittä, edellisten kaksion kertomisen sääntöjen mukaan kerrottavan monion kaksioksi muodostamalla. Näin on monio $a + b - c + d - e$ sama kuin kaksio $(a + b - c) + (d - e)$, jossa summa $a + b - c$ on pidettävä yhtenä ja $d - e$ toisena suuruutena. Kuin taas kaksio $(a + b - c) + (d - e)$ kerrotaan suuruudella k, niin tulo on selvästi $k \cdot (a + b - c) + k \cdot (d - e)$ ja sentähden on

$$k \cdot (a + b - c + d - e) = k \cdot (a + b - c) + k \cdot (d - e).$$

Mutta
$$a+b-c=(a+b)-c \text{ ja siis}$$
$$k\cdot(a+b-c)=k(a+b)-kc.$$
Samoin on $k(a+b)=ka+kb$ ja $k(d-e)=kd-ke$.
Sentähden on vihdoin
$$k(a+b-c+d-e)=k(a+b-c)+k(d-e)=k(a+b)$$
$$-kc+k(d-e)=ka+kb-kc+kd-ke.$$
Koska a, b, c, d, e ja k voivat merkitä mitä suuruuksia hyvänsä ja se on jo selvä kuinka kerrottavan monion kanssa on tehtävä, olipa siinä kuinka paljo osioita hyvänsä, niin edellisestä yhtälöstä saadaan selvästi seuraava sääntö.

Kuin monio on kerrottava yksiöllä, niin tulo saadaan jokaisen osion moniossa kertomalla yksiöllä ja näin saatujen tulojen, jokaisen merkkinensä, laskemalla yhteen.

Se on selvä asia, että edellinen yhtälö
$$k(a+b-c+d-e)=ka+kb-kc+kd-ke$$
on oikea, olipa k minkälainen suuruus hyvänsä. Sentähden on se myös oikea, jos k on monio esm. sama kuin $l+m-n$. Kuin $k=l+m-n$, niin edellinen yhtälö muuttuu seuraavaksi
$$(l+m-n)\cdot(a+b-c+d-e)=(l+m-n)a+(l+m-n)b$$
$$-(l+m-n)c+(l+m-n)d-(l+m-n)e.$$
Suuruuksien tulo on taas sama, tapahtuipa kertominen missä järjestyksessä hyvänsä. Sentähden on $(l+m-n)a$ sama kuin $a(l+m-n)$ ja edellisen säännön mukaan on
$$a\cdot(l+m-n)=(l+m-n)a=al+am-an,$$
Samoin on
$$(l+m-n)b=lb+mb-nb \text{ ja } -(l+m-n)c=$$
$$=-lc-mc+nc \text{ j. n. e.}$$
Tästä seuraa että
$$(l+m-n)\cdot(a+b-c+d-e)=la+ma-na+lb+mb$$
$$-nb-lc-mc+nc+ld+md-nd-le-me+ne.$$

Viimesen yhtälön oikeassa puolessa ovat toisen monion kaikki osiot kerrottuina jokaisella ensimäisen monion osiolla lasketut yhteen niin, että samamerkkisten osioiden tuloilla on lisämerkki $+$ ja vastaismerkkisten poistomerkki $-$.

Koska nyt tulo saadaan samalla tavalla, olipa monioissa kuinka monta osiota hyvänsä ja puustavit a, b, c, d, e ja l, m, n voivat merkitä mitä suuruuksia hyvänsä, niin tästä saadaan seuraava monioiden kertomisen yleinen sääntö;

Kahden monion tulo saadaan toisen kaikki osiot merkkinensä kertoen ensimäisen monion jokaisella osiolla merkkinensä, ja niin saadut tulot laskien yhteen.

Muist. Se on sama pantiinpa kumpanen monio hyvänsä ensimäiseksi ja siis sama, jos ensimäisen monion osiot kerrotaan kaikilla osioilla toisessa eli päin vastoin, sillä tulo on aina sama, tapahtuipa kertominen missä järjestyksessä hyvänsä.

Monioiden tulossa on usiasti samankaltaisia osioita, jotka ovat yhdistettävät. Sentähden käypi lasku sukkelimmin, jos moniot kirjoitetaan päällekkäin ja osioiden tulot alle niin, että samankaltaiset osiot tulossa tulevat myös pälekkäin, joidenka yhdistäminen sitte käypi helposti. Näin muodustuu esm. monioiden $2a^2 - 3ab + 4b^2$ ja $5a^2 - 2ab - 6b^2$ kertominen seuraavalla tavalla:

$$\begin{array}{rrrrr}
2a^2 & -3ab & +4b^2 & & \\
5a^2 & -2ab & -6b^2 & & \\
\hline
10a^4 & -15a^3b & +20a^2b^2 & & \\
 & -4a^3b & +6a^2b^2 & -8ab^3 & \\
 & & -12a^2b^2 & +18ab^3 & -24b^4 \\
\hline
10a^4 & -19a^3b & +14a^2b^2 & +10ab^3 & -24b^4.
\end{array}$$

Se on selvä asia että usiamman kuin kahden monion tulo saadaan ensimäinen kertoen toisella, niiden tulo kolmannella j. n. e., jonkatähden tässä tapauksessa ei mitään erinäisiä sääntöjä tarvita.

Monioiden kertomiseen teemme vielä seuraavat muistutukset, jotka selvästi saadaan edellisistä säännöistä.

Tulon osioiden luku on tulo niiden lu'uista kertojissa, jos samankaltaisia osioita ei ole ollut eli semmoisia ei ole yhdistetty.

Monioiden tulossa on aina vähintäinkin kaksi osiota, jotka eivät ole samankaltaisia yhdenkään toisen osion kanssa enemmän kuin keskenänsäkään.

Yksi näistä on niiden osioiden tulo kertojissa, jotka sisältävät jonkun puustavikertojan (järjestyspuustavin) isoimmat korot kertojina ja toinen niiden, joissa saman puustavin pienimmät korot ovat kertojina. Edellisessä on nimittäin kertojana tämän puustavin isompi ja toisessa pienempi korko kuin tulon yhdessäkään toisessa osiossa. Näitä osioita ei voida siis yhdistettää minkään toisen kanssa. Monioiden jaossa on tämä muistutus tärkeästä arvosta.

Jos moniot, jotka ovat kerrottavat, ovat yhtäläisiä, niin niiden tulo on myös yhtäläinen monio ja sen nousu on summa kertojoiden nousuista.

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $5a^2b \cdot 6a^3b = 30a^5b^2$.

Esm. 2. $16c^2de \cdot -3cd^2f = -48c^3d^3ef$.

Esm. 3. $-2a^nb^2c^3 \cdot 5a^mbcd = -10a^{m+n}b^3c^4d$.

Esm. 4. $-6ab^2x \cdot -2abm^3x = 12a^2b^3m^3x^2$.

Esm. 5. $2a^2bc \cdot -7ac(b+c)^2 \cdot 10bc^2d(b+c)^3 =$
$= -140a^3b^2c^4d(b+c)^5$.

Esm. 6. $-4a^2b(d+e) \cdot -5ad \cdot -bd(d+e) =$
$= -20a^3b^2d^2(d+e)^2$.

Esm. 7. $3a^2b(ab-5bc+2) = 3a^3b^2 - 15a^2b^2c + 6a^2b$.

Esm. 8. $(2a - \frac{1}{3}bc - d) \cdot \frac{1}{2}adx = a^2dx - \frac{1}{6}abcdx - \frac{1}{2}ad^2x$.

Esm. 9. $-1 \cdot (a^2 - 2ab + 1) = -a^2 + 2ac - 1$.*)

Esm. 10. $(2a - 3b)(a + 2b) = 2a^2 + ab - 6b^2$.

Esm. 11. $(x+y)(2x-3y) = 2x^2 - xy - 3y^2$.

---

*) Esimerkistä 9 nähdään, että kertominen suuruudella (-1) on sama kuin kerrottavan suuruuden muuttaminen vastinaiseksi. Kuin monio on kerrottava (-1):llä, niin sen osioiden merkit ovat vaan muutettavat vastaisiksi.

Esm. 12. $(a^2 + ac + c^2)(a - 2c) = a^3 - a^2c - ac^2 - 2c^3.$

Esm. 13. $(2a + 3b)(2a + 3b) = 4a^2 + 12ab + 9b^2.$

Esm. 14. $(3a^2 - 5b + 4c)(5a^2 - 3b + c) = 15a^4 - 34a^2b + 23a^2c + 15b^2 - 17bc + 4c^2.$

Esm. 15. $(3x^3 - 4x^2 + 5x - 6)(4x^2 - 5x + 3) = 12x^5 - 31x^4 + 49x^3 - 61x^2 + 45x - 18.$

Esm. 16. $(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)(x + y) = x^4 - y^4.$

Esm. 17. $(5a^4 - 2a^3c + 4a^2c^2)(a^3 - 4a^2c + 2c^3) = 5a^7 - 22a^6c + 12a^5c^2 - 6a^4c^3 - 4a^3c^4 + 8a^2c^5.$

Esm. 18. $(5a^2 - 4ab + 3b^2)(5a^2 - 4ab - 3b^2) = 25a^4 - 40a^3b + 16a^2b^2 - 9b^4.$

Esm. 19. $(3a + 5b - \frac{1}{2}c)(a - 2b + 9c) = 3a^2 - ab + 26\frac{1}{2}ac - 10b^2 + 46bc - 4\frac{1}{2}c^2.$

Esm. 20. $(4a^3b^2 - 5a^2b^2c + 8a^2bc^2 - 3a^2c^3 - 8abc^3)(2ab^2 + 4abc - 2bc^2 + c^3) = 8a^4b^4 - 10a^3b^4c - 12a^3b^3c^2 + 30a^3b^2c^3 - 6a^2b^3c^3 + 16a^4b^3c - 12a^3bc^4 - 53a^2b^2c^4 + 14a^2bc^5 + 16ab^2c^5 - 3a^2c^6 - 8abc^6.$

Esm. 21. $(0{,}2ab - 3{,}75bc + 10{,}5)(a^2 - 0{,}3a) = 0{,}2a^3b - 3{,}75a^2bc + 10{,}5a^2 - 0{,}06a^2b + 1{,}125abc - 3{,}15a.$

Esm. 22. $(a - k)^3 = (a - k)(a - k)(a - k) = a^3 - 3a^2k + 3ak^2 - k^3.$

Esm. 23. $(\frac{5}{2}x^2 + 3ax - \frac{7}{3}a^2)(2x^2 - ax - \frac{1}{2}a^2) = 5x^4 + \frac{7}{2}ax^3 - \frac{107}{12}a^2x^2 + \frac{5}{6}a^3x + \frac{7}{6}a^4.$

Esm. 24. $c(a^2 + 2ac + c^2)(x - c) = a^2cx - a^2c^2 + 2ac^2x - 2ac^3 + c^3x - c^4.$

Esm. 25. $(5a^3b^3c^2 - 6a^4b^2c^5 + 7a^8b^5c^6)(2a^3b^3c^2 + 3a^4b^2c^5 - 6a^7b^4c^3) = 10a^6b^6c^4 + 3a^7b^5c^7 + 14a^{11}b^8c^8 - 18a^8b^4c^{10} + 21a^{12}b^7c^{11} - 30a^{10}b^7c^5 + 36a^{11}b^6c^8 - 42a^{15}b^9c^9.$

Esm. 26. $3x[x - 2(y - z)] = 3x(x - 2y + 2z) = 3x^2 - 6xy + 6xz.$

Esm. 27. $my[n + (n + 1)(y - 1)] = mny^2 + my^2 - my.$

Esm. 28. $[(2x+1)(3x-1)]^2 = 36x^4 + 12x^3 - 11x^2 - 2x + 1.$

Esm. 29. $t(2t-1) - (t-1)(4t+2) + 2(t^2-1) = t.$

Esm. 30. $2b(a^2 - 3c)(b^2 - c^2)(3bc - a^2b - a^2c) = 12a^2b^4c$
$- 2a^4b^4 - 2a^4b^3c - 12a^2b^2c^3 + 2a^4b^2c^2 + 2a^4bc^3$
$- 18b^4c^2 + 6a^2b^3c^2 + 18b^2c^4 - 6a^2bc^4.$

Esm. 31. $(2a^{3-2m}b^{n+3} + 3a^{m+1}b^{n+2} + c^p)(a^{m-1}b^{1-2m} - a^pc) =$
$= 2a^{2-m}b^{n-2m+4} + 3a^{2m}b^{n-2m+3} + a^{m-1}b^{1-2m}c^p$
$- 2a^{p-2m+3}b^{n+3}c - 3a^{m+p+1}b^{n+2}c - a^pc^{p+1}.$

Esm. 32. $(4a^m - 2a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + 6a^{m-3}b^3)(5a^3 + 6a^2b$
$- 3ab^2 - 2b^3) = 20a^{m+3} + 14a^{m+2}b - 19a^{m+1}b^2$
$+ 34a^mb^3 + 37a^{m-1}b^4 - 20a^{m-2}b^5 - 12a^{m-3}b^6.$

Seuraavat kerrokset ovat yleislaskussa aivan tavalliset ja siis hyvin usiasti tehtävät, jonkatähden ne tässä otamme erittäin tarkastettaviksi.

1:o. Kaksion $a+b$ toinen korko on tunnetun määrityksen mukaan tulo $(a+b)(a+b)$, s. o. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$, s. t. s. *kaksion toinen korko on summa osioiden toisista koroista ja kaksinkertaisesta tulosta.*

Niin on edellisen säännön mukaan esm. kaksion $5a^3 + 8a^2b$ toinen korko

$$(5a^3 + 8a^2b)^2 = (5a^3)^2 + (8a^2b)^2 + 2\cdot 5a^3\cdot 8a^2b = 25a^6 + 64a^4b^2 + 80a^5b.$$

2:o. Kaksion $a - b$ toinen korko on:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2.$$

Toinen korko kahden suuruuden välistä on summa suuruuksien toisista koroista vähennettynä suuruuksien kaksinkertaisella tulolla.

Muist. Toinen korko kahden suuruuden välistä saadaan saman säännön muukaan kuin niiden summastakin, sillä kaksio $a - b$ on suuruuksien a ja $(-b)$ summa ja sen toinen korko $(a-b)^2$ on siis $a^2 + (-b)^2 + 2a\,.\,(-b)$, mutta $(-b)^2 = (-b)(-b) = b^2$ ja $+2a(-b) = -2ab$, jonkatähden

$$(a-b)^2 = a^2 + (-b)^2 + 2a(-b) = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Niin on esm. $(7a^2b^2 - 12ab^3)^2 = (7a^2b^2)^2 + (12ab^3)^2 - 2\cdot 7a^2b^2\cdot 12ab^3 = 49a^4b^4 + 144a^2b^6 - 168a^3b^5$.

3:o. Kuin kahden suuruuden a ja b summa $a+b$ on kerrottava niiden välillä $a-b$, niin tulo saadaan kertomisen säännön mukaan ja siis on

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Kahden suuruuden summa kerrottuna niiden välillä on sentähden niiden toisten korkojen väli.

Niin on esm. $(8a^3 + 7ab)(8a^3 - 7ab) = 64a^6 - 49a^2b^2$.

Näitä sääntöjä käytetään usiasti monioidenkin kertomisessa, jolloin aina kahden eli usiammankin osion summaa pidetään ensin yhtenä osiona. Niin on

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.$$

$$(a-b-c)^2 = [(a-b)-c]^2 = (a-b)^2 - 2(a-b)c + c^2 = a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc + c^2.$$

Niin on myös

$$(a-b+c)(a-b-c) = [(a-b)+c]\cdot[(a-b)-c] = (a-b)^2 - c^2 = a^2 - 2ab + b2 - c^2.$$

Se on selvä asia, että tulot edellisissä esimerkissä saadaan samalla tavalla ja samassa järjestyksessä, olivatpa suuruuksien a, b ja c eri arvot mitkä hyvänsä, s. o., nämä säännöt ovat, niin kuin kaikki muutkin yleislaskussa vapaat suuruuksien arvoista, s. o. yleiset.

Edellisten sääntöjen käytännölle otamme vielä muutamia

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $(2a + 3d)^2 = (2a)^2 + 2\cdot 2a\cdot 3d + (3d)^2 = 2a\cdot 2a + 2\cdot 2a\cdot 3d + 3d\cdot 3d = 4a^2 + 12ad + 9d^2$.

Esm. 2. $(3a^2 - bc)^2 = (3a^2)^2 - 2\cdot 3a^2\cdot bc + (bc)^2 = 3a^2\cdot 3a^2 - 2\cdot 3a^2\cdot bc + bc\cdot bc = 9a^4 - 6a^2bc + b^2c^2$.

Esm. 3. $(10a + 7k)(10a - 7k) = (10a)^2 - (7k)^2 = 10a\cdot 10a - 7k\cdot 7k = 100a^2 - 49k^2$.

Esm. 4. $(5a^3 + 8a^2b)^2 = 25a^6 + 80a^5b + 64a^4b^2$.

Esm. 5. $(a^3 - b^3)^2 = a^6 - 2a^3b^3 + b^6$.

Esm. 6. $(8a^2 + \frac{1}{3}pt)(8a^2 - \frac{1}{3}pt) = 64a^4 - \frac{1}{9}p^2t^2$.

Esm. 7. $(\frac{1}{2}x - 3x^2)(\frac{1}{2}x + 3x^2) = \frac{1}{4}x^2 - 9x^4$.

Esm. 8. $(a + b + c)(a + b - c) = [(a + b) + c][(a + b) - c]$
$= (a + b)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$.

Esm. 9. $(a + b - c)(a - b + c) = [a + (b - c)][a - (b - c)]$
$= a^2 - (b - c)^2 = a^2 - b^2 + 2bc - c^2$.

Esm. 10. $(2x - y - z)(2x - y + z) = [(2x - y) - z][(2x$
$- y) + z] = (2x - y)^2 - z^2 = 4x^2 - 4xy + y^2 - z^2$.

Esm. 11. $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) =$
$= [(a + b) + c][(a + b) - c][c + (a - b)][c - (a - b)] =$
$= (a^2 + 2ab + b^2 - c^2)(c^2 - a^2 + 2ab - b^2) =$
$= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$.

Edellä on selitetty, kuinka kahden ja usiammankin monion tulo tehdään yhdeksi monioksi, mutta se tapahtuu yhtä usiasti, esm. murtolausekkeiden lyhentämisessä, että päin vastoin eri kertojat moniossa, jos semmoisia on muita kuin ykkönen ja monio itse, ovat saatavat ilmi ja eroitettavat. Tämmöinen kertojoiden ilmi saanti ja siis myös eroittaminen on hyvin helppo seuraavissa tapauksissa, jonkatähden ne tässä otamme tarkastettaviksi.

Koska

$k(a + b + c \cdots) = ka + kb + kc \cdots$, niin on myös
$ka + kb + kc \cdots, = k(a + b + c \cdots)$.

Tästä seuraa selvästi, että jos monion kaikissa osioissa on sama suuruus kertojana, niin se suuruus on kertoja koko moniossa ja muiden kertojoiden osioissa summa on toinen kertoja moniossa. Semmoisen monion kertojat taidetaan siis helposti eroittaa. Usiasti eroitetaan kertojat moniossa, yhteisen kertojan sen kahdessa eli kolmessa ja taas toisen yhteisen kertojan toisissa kahdessa tai kolmessa j. n. e. osiossa eroittamalla, sillä näin voipi yhteisiä kaksio- tai kolmio-kertojoita ilmestyä, jotka myös voivat olla kertojoita koko moniossa.

Koska taas kolmio, joka on summa kahden suuruuden toisista koroista ja kaksinkertaisesta tulosta, on, niin kuin edellisessä pykälässä on nähty, toinen korko näiden kahden suuruuden summasta, niin semmoisessa kolmiossa on kaksi kertojata kumpanenkin edellä mainittujen suuruuksien summa.

Samoin on myös kolmiossa, joka on kahden suuruuden toisten korkojen summa vähennettynä suuruuksien kaksinkertaisella tulolla, kaksi kertojata kumpanenkin mainittujen suuruuksien väli. Nämä säännöt ovat sisälletyt seuraavissa jo tutuissa yhtälöissä.

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 = (a + b)(a + b).$$
$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 = (a - b)(a - b).$$

Jos taas joku lauseke on kahden suuruuden toisten korkojen väli, niin se on tulo niiden suuruuksien summasta ja välistä, jonka säännön yhtälö

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

sisältää.

Kertojoiden eroittamiseen edellisten sääntöjen mukaan otamme vielä eräitä

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $2ab + b^2 - 3bc = b(2a + b - 3c).$

Esm. 2. $6pqr - 9pq^2 + 12qr^2 - 3q = 3q(2pr - 3pq + 4r^2 - 1).$

Esm. 3. $2a^3b^2 - 7a^2bc - 5a^4 + 3a^2b^2 = a^2(2ab^2 - 7bc - 5a^2 + 3b^2).$

Esm. 4. $10a^2bc - 4abc^2 + 2ab = 2ab(5ac - 2c^2 + 1).$

Esm. 5. $8a^2b^2c - 2ab^3c^2 - 6ab^2c^2 + 10b^2cd^2 = 2b^2c(4a^2 - abc - 3ac + 5d^2).$

Esm. 6. $3am + 3an - bm - bn = 3a(m + n) - b(m + n) = (3a - b)(m + n).$

Esm. 7. $4ax^2 - 2bx^2 + 2x^2 - 6ay - 3y + 3by = 2x^2(2a - b + 1) - 3y(2a + 1 - b) = (2x^2 - 3y)(2a - b + 1).$

Esm. 8. $9a^2 + 6ab + b^2 = (3a + b)^2 = (3a + b)(3a + b).$

Esm. 9. $36x^2 - 60x + 25 = (6x - 5)^2 = (6x - 5)(6x - 5).$

Esm. 10. $64a^4 - 100b^2 = (8a^2 + 10b)(8a^2 - 10b)$.
Esm. 11. $9a^2 - 16b^2c^2 = (3a + 4bc)(3a - 4bc)$.
Esm. 12. $(x^4 - 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$.
Esm. 13. $x^2 - y^2 - 2yz - z^2 = x^2 - (y + z)^2 =$
$= (x + y + z)(x - y - z.)$
Esm. 14. $4a^2 - 9b^2 + 6bc - c^2 = 4a^2 - (3b - c)^2 =$
$= (2a^2 + 3b - c)(2a^2 - 3b + c)$.

§ 4.

Jako.

Suuruuden jako toisella on, samoin kuin lu'unkin toisella lu'ulla, kolmannen etsiminen, joka kerrottuna toisella antaa ensimäisen tuloksi.

Kertominen on tehtävä kuin kertojat ovat tunnetut ja niiden tulo etsittävä, mutta jaossa ovat, niin kuin määrityksestä selvästi huomataan, kahden kertojan tulo (jaettava) ja toinen kertoja (jakaja) tunnetut, mutta toinen kertoja (osa) etsittävä.

Koska keskuus jaon ja kertomisen välillä on tämmöinen, niin seuraavat todistot ovat aivan selvät.

Yhtä isot suuruudet jaettuina samalla eli yhtä isoilla suuruuksilla antavat yhtä isot osat.

Suuruudet, jotka jaettuina samalla eli yhtä isoilla suuruuksilla antavat yhtä isot osat, ovat yhtä isot.

Jaon säännöt ovat, samoin kuin kertomisenkin, etsittävät kolmessa eri tapauksessa, nimittäin yksiön toisella yksiöllä, monion yksiöllä ja monion toisella moniolla.

Olisko nyt esm. yksiö $8a^3b^2$ jaettava yksiöllä $4a^2b$, jota teosta merkitään joko murtosuuruuden merkillä eli näin $8a^3b^2 : 4a^2b$, niin osassa, koska sen kerrottuna jakajalla $4a^2b$ pitää antaman tuloksi jaettavan $8a^3b^2$, täytyy olla ensiksi numerokertojana lu'un, joka otettuna 4 kertaa tekee 8, s. o. 2, sitte kertojana sen puustavisuuruuden, joka kerrottuna suuruudella a^2 antaa tulon a^3, selvästi a ja vihdoin sen, joka suuruuden b kanssa antaa tulon b^2 s. o. b. Sentähden on $8a^3b^2 : 4a^2b = 2ab$, sillä $4a^2b \cdot 2ab = 8a^3b^2$.

Samoin on

$$54a^3b^4c : 18ab^2 = 3a^2b^2c, \text{ koska } 18ab^2 \cdot 3a^2b^2c = 54a^3b^4c.$$

Niin myös on

$$-16a^2bc^4e : 4a^2c = -4bc^3e \text{ ja } -10a^3b^2 : -2a^2 = 5ab^2, \text{ sillä}$$
$$4a^2c \cdot (-4bc^3e) = -16a^2bc^4e \text{ ja } -2a^2 \cdot 5ab^2 = -10a^3b^2.$$

Yleisesti on $12a^mb^pc^r : 4a^nb^q = 3a^{m-n}b^{p-q}c^r$, sillä $3a^{m-n}b^{p-q}c^r \cdot 4a^nb^q$ on selvästi kertomisen sääntöjen mukaan sama kuin

$$3 \cdot 4a^{m-n+n}b^{p-q+q}c^r = 12a^mb^pc^r, \text{ kuin } m > n \text{ ja } p > q.$$

Mitä esm. lausekkeella a^{m-n} ymmärretään, kuin $m = n$ eli $m < n$, tullaan vastedes murtosuuruuksien lyhentämisessä näkemään.

Edellisissä esimerkissä on nähty, että osan merkki on lisämerkki $+$, kuin jaettava ja jakaja ovat samamerkkiset, mutta vähennösmerkki $-$, kuin ne ovat vastaismerkkiset. Yksiön jaon yksiöllä sääntö on siis selvästi seuraava:

Jaettavan ja jakajan merkkien tulo on osan merkki; jaettavan numerokertoja jaettuna jakajan numerokertojalla tulee numerokertojaksi osaan; jokaisen puustavisuuruuden, joka on kertojana niin hyvin jakajassa kuin jaettavassakin, korotin jaettavassa vähennetään sen korottimella jakajassa ja tähde pannaan saman puustavikertojan korottimeksi osassa ja vihdoin tulevat ne puustavikertojat jaettavassa, joita jakajassa ei ole, kertojiksi osaan korottiminensa.

Jos jakajassa on puustavikertojoita, jotka eivät ole jaettavassa eli yhdenkän puustavikertojan korotin edellisessä on isompi kuin jälkimäisessä, niin jakoa ei silloin voida tehdä täydellisesti ja osa jääpi murto-suuruudeksi. Sama tapaus, jos jakajan numerokertoja ei ja'a tarkoin jaettavan numerokertojata. Nämä tapaukset kuuluvat murtosuuruuksien lyhentämiseen ja tulevat siinä selitetyiksi.

Esimerkkiä.

Esm. 1. $12a^4bc^3d^2 : 3abc^2 = 4a^3cd^2$.

Esm. 2. $27a^5bcx^2 : -9a^2x = -3a^3bcx$.

Esm. 3. $-42cy^2x : -7y^2 = 6cx$.

Esm. 4. $-\frac{4}{5}a^3xy^2 : \frac{2}{5}a^2xy = -2ay$.

Esm. 5. $\frac{-14a^2x\sqrt{c}}{-2a\sqrt{c}} = 7ax$.

Jos taas monio esm. $8a^4 + 6a^3b - 12a^2b^2$ on jaettava yksiöllä $2a^2$, niin tulossa, joka jaon määrityksen mukaan kerrottuna jakajalla $2a^2$ on tekevä jaettavan monion, pitää oleman osio, sisältävä isomman koron a:sta kuin sen yksikään toinen, koska se kerrottuna yksiöllä $2a^2$ on antava tuloksi jaettavan ensimäisen osion $8a^4$, jossa a:n isoin korko on kertojana. Tämä osan ensimäinen osio saadaan siis jaettavan ensimäisen osion $8a^4$ jakamalla yksiöllä $2a^2$, ja on sentähden $4a^2$ koska $2a^2 \cdot 4a^2 = 8a^4$. Jos nyt osan ensimäinen osio $4a^2$ kerrottuna jakajalla $2a^2$ s. o. $8a^4$ otetaan pois jaettavasta moniosta, niin vielä jaettavaksi jääpi tähde $6a^3b - 12a^2b^2$, josta taas saadaan osan toinen osio samoin kuin ensimäinenkin j. n. e.

Osan toinen osio on sentähden $6a^3b : 2a^2 = 3ab$ ja kolmas $-12a^2b^2 : 2a^2 = -6b^2$.

Sentähden on koko osa

$$\frac{8a^4 + 6a^3b - 12a^2b^2}{2a^2} = 4a^2 + 3ab - 6b^2.$$

Olipa nyt moniossa kuinka monta osiota hyvänsä, niin jako tapahtuu selvästi samoin kuin edellisessä esimerkissäkin. Jos sentähden a, b, $c \cdots$ merkitsevät jaettavan monion osioita ja m jakajata, niin

$$\frac{a + b + c + \cdots}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \cdots.$$

Monion jaon yksiöllä sääntö on siis seuraava:

Monion jokainen osio jaetaan yksiöllä ja näin saadut erityisosat lasketaan yhteen.

Jos jaettavassa moniossa on osioita, joita yksiö ei tarkoin ja'a, niin koko jakokaan ei voi tapahtua tarkoin ja osa jääpi sentähden murtusuuruuden muotoon.

Esimerkkiä.

Esm. 1. $\dfrac{10a^2bc - 4abc^2 + 2ab}{2ab} = 5ac - 2c^2 + 1.$

Esm. 2. $\dfrac{2a^3b^2 - 7a^2bc - 5a^4 + 3a^2b^2}{a^2} = 2ab^2 - 7bc - 5a^2 + 3b^2.$

Esm. 3. $\dfrac{6xyr - 9xy^2 + 21yr^2 - 3x^2y}{3y} = 2xr - 3xy + 7r^2 - x^2.$

Esm. 4. $\dfrac{28a^4x^2y - 21a^3xy^2 - 14a^2xy^3}{7a^2xy} = 4a^2x - 3ay - 2y^2.$

Kuin vihdoin monio esm. $51a^2d^2 + 10a^4 - 48a^3d - 15d^4 + 4ad^3$ on jaettava toisella moniolla $4ad - 5a^2 + 3d^2$, niin tässä taas on, jaon määrityksen mukaan, kolmas monio etsittävä, joka kerrottuna toisella ja samankaltaisten osioiden yhdistettyä antaa ensimäisen tuloksi. Tässä, jakajan ja sen vielä tuntemattoman osan tulossa, s. o. jaettavassa, on se osio, joka sisältää esm. a:n isoimman koron, tulo ainoastansa kertojoiden niistä osioista, jotka sisältävät a:n isoimmat korot itsekussakin, koska se osio, toisen muistutuksen mukaan edellisessä pykälässä, ei voi olla samankaltainen yhdenkään toisen kanssa. Sentähden on jaettavan osio $10a^4$ tulo jakajan osiosta $-5a^2$ ja etsittävän osan siitä osiosta, jossa a:n isoin korko on kertojana.

Koska nyt osan ensimäisen osion kerrottuna yksiöllä $-5a^2$ pitää tekemän yksiön $10a^4$, niin se saadaan selvästi jälkimäisen jakamalla edellisellä ja on siis $-2a^2$, sillä $\dfrac{10a^4}{-5a^2} = -2a^2$ koska $-5a^2 \cdot (2a^2) = 10a^4$.

Jos nyt jaettavasta moniosta, $51a^2d^2 + 10a^4 - 48a^3d - 15d^4 + 4ad^3$, otetaan pois jakaja, $4ad - 5a^2 + 3d^2$, kerrottuna osan ensimäisellä osiolla, $2a^2$, niin tähde on selvästi summa niistä tuloista, jotka saadaan jakaja kertoen osan kaikilla vielä tuntemattomilla osioilla, sillä koko jaettava on tietysti summa jakajan ja kaikkien osassa olevien osioiden tuloista. Tämä vielä jaettava tähde on

$$51a^2d^2 + 10a^4 - 48a^3d - 15d^4 + 4ad^3 - (4ad - 5a^2 + 3d^2) \cdot (-2a^2)$$
$$= 57a^2d^2 - 40a^3d - 15d^4 + 4ad^3$$

ja sen osio $-40a^3d$, joka sisältää a:n isoimman koron, on selvästi tulo niistä osioista jakajassa ja osan vielä tuntemattomien osioiden summassa, jotka sisältävät a:n isoimmat korot. Osan toinen osio saadaan sentähden tähteen osion $-40a^3d$ jakamalla jakajan osiolla $-5a^2$ ja se on siis $\frac{-40a^3d}{-5a^2} = 8ad$.

Kuin sitte jakaja kerrottuna osan näin saadulla toisella osiolla otetaan pois edellisestä tähteestä, niin tähde

$$57a^2d^2 - 40a^3d - 15d^4 + 4ad^3 - (4ad - 5a^2 + 3d^2) \cdot 8ad =$$
$$= 25a^2d^2 - 15d^4 - 20ad^3$$

on vielä jaettava jakajalla $4ad - 5a^2 + 3d^2$.

Osan kolmas osio saadaan sentähden, samoin kuin edellisetkin, viimesen tähteen osio $25a^2d^2$, jossa a:lla on isoin korotin, jakaen osiolla $-5a^2$ jakajassa. Tämä kolmas osio on siis

$$\frac{25a^2d^2}{-5a^2} = -5d^2.$$

Kuin nyt jakajan ja osan viimeksi sadun osion tulo otetaan pois viimesestä tähteestä, niin saadaan tähde

$$25a^2d^2 - 15d^4 - 20ad^3 - (4ad - 5a^2 + 3d^2) \cdot (-5d^2) = 0.$$

Jako on siis tapahtunut täydellisesti, ilman tähteettä, ja osa on

$$-2a^2 + 8ad - 5d^2.$$

Käytännössä järjestetään moniot, jaettava sekä jakaja niin, että jonkun (kumpasessakin moniossa saman) puustavisuuruuden korotin pienenee osio osioltaan, s. t. s. kumpasessakin kirjoitetaan se osio ensimäiseksi, jossa mainitun puustavin isoin korko on kertojana ja muut sitte niin, että saman puustavin korotin edellisessä osiossa on aina isompi kuin seuraavassa. Esimerkiksi otettu jako muodostuu näin tehden, kuin a otetaan järjestys puustaviksi, seuraavasti:

$$
\begin{array}{llr|l}
\text{jaettava,} & & 10a^4-48a^3d+51a^2d^2+\ 4ad^3-15d^4 & -5a^2+4ad+3d^2 \text{ jakaja} \\
& & \mp 10a^4\pm\ 8a^3d\pm\ 6a^2d^2 \qquad\qquad\qquad & -2a^2+8ad-5d^2, \text{ osa} \\
\hline
\text{1:nen tähde,} & & -40a^3d+57a^2d^2+\ 4ad^3-15d^4 & \\
& & \pm 40a^3d\mp 32a^2d^2\mp 24ad^3 \qquad & \\
\hline
\text{2:nen tähde,} & & +25a^2d^2-20ad^3-15d^4 & \\
& & \mp 25a^2d^2\pm 20ad^3\pm 15d^4 & \\
\hline
& & 0 \qquad\qquad & \\
\end{array}
$$

Jos taas *d* otetaan järjestys puustaviksi niin hyvin jaettavassa kuin jakajassakin, niin jako muodostuu näin:

$$
\begin{array}{lr|l}
\text{jaettava} & -15d^4+\ 4d^3a+51d^2a^2-48da^3+10a^4 & +3d^2+4da-5a^2, \text{ jakaja.} \\
& \pm 15d^4\pm 20d^3a\mp 25d^2a^2 \qquad\qquad\qquad & -5d^2+8da-2a^2, \text{ osa.} \\
\hline
\text{1:nen tähde,} & +24d^3a+26d^2a^2-48da^3+10a^4 & \\
& \mp 24d^3a\mp 32d^2a^2\pm 40da^3 \qquad & \\
\hline
\text{2:nen tähde,} & -\ 6d^2a^2-\ 8da^3+10a^4 & \\
& \pm\ 6d^2a^2\pm\ 8da^3\mp 10a^4 & \\
\hline
& 0 \qquad\qquad & \\
\end{array}
$$

Osat ovat samat ja niiden osiot ovat ainoastansa eri järjestyksessä.

Muist. Jos jaettavassa moniossa ei ole kaikkia isoimman ja pienimmän koron välillä olevia korkoja järjestyspuustavista, niin silloin on paras jättää tilaa osioille, joissa puuttuvat korot olisivat kertojina, sillä semmoisia osioita voipi tulla niin hyvin ensimäiseen kuin toisiinkin tähteisin, niin kuin seuraavasta esimerkistä nähdään:

$$
\begin{array}{r|l}
9y^6 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, -49b^4y^2+70b^5y-25b^6 & 3y^3-7b^2y+5b^3 \\
\mp 9y^6\pm 21b^2y^4\mp 15b^3y^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & 3y^3+7b^2y-5b^3 \\
\hline
21b^2y^4-15b^3y^3-49b^4y^2+70b^5y-25b^6 & \\
\mp 21b^2y^4 \qquad\quad \pm 49b^4y^2\mp 35b^5y \qquad\quad & \\
\hline
-15b^3y^3 \qquad\qquad +35b^5y-25b^6 & \\
\pm 15b^3y^3 \qquad\qquad \mp 35b^5y\pm 25b^6 & \\
\hline
0 \qquad\qquad\qquad & \\
\end{array}
$$

Koska minkä monion hyvänsä jako toisella moniolla voidaan tehdä samoin, kuin edellinenkin, niin tästä esimerkistä ja sen selityksistä on jo seuraava monion jaon toisella moniolla sääntö selvä.

Jaettava sekä jakaja järjestetään jonkun, kumpasellekin yhteisen, puustavin mukaan pienenevillä korottimilla; jaettavan ensimäinen osio jaetaan sitte jakajan ensimäisellä osiolla, joten saatu erityisosa on koko osan ensimäinen osio, jolla koko ja-

kaja kerrotaan ja saatu tulo otetaan pois jaettavasta; tähteen ensimäinen osio jaetaan sitte jakajan ensimäisellä osiolla, joten saatu erityisosa on koko osan toinen osio, jolla koko jakaja taas on kerrottava ja tulo otettava pois ensimäisestä tähteestä; näin saadun toisen tähteen kanssa menetetään samoin kuin ensimäisenkin, jota menetystä jatketaan kunneka tähteeksi saadaan nolla, jolloin jako on tehty täydellisesti.

Jos jaettavan eli jonkun edellä mainitun tähteen ensimäistä osioa ei voi tarkoin jakaa ensimäisellä osiolla jakajassa, niin koko jakokin on silloin mahdotoin tarkoin tehdä, s. t. s., että semmoista koko monioa ei voi olla, joka kerrottuna jakajalla antaisi jaettavan tuloksi. Tässä tapauksessa jääpi osa kokonansa eli osittain murtolu'un muotoon.

Koska osan ensimäisen eli usiampienkin osioiden löydettyä, jakajan sillä eli niillä kerrottua ja tulon eli tulojen jaettavasta pois otettua ainoastansa näin saatu tähde enää on jakamatta, niin tämä tähde on uusi jaettava, joka jakajan kanssa voitaisiin järjestettää minkä niissä olevan puustavin mukaan tahansa ja tähteen nykyinen ensimäinen osio jakaa ensimäisellä osiolla jakajassa. Tällä lailla saataisiin aina yksi osio koko osassa, mutta tämmöistä järjestyspuustavin muutosta ei kuitenkaan tarvitse koskaan tehdä, sillä niin hyvin jaettava tähde kuin jakajakin ovat valmiiksi järjestetyt ja niiden ensimäiset osiot ovat juuri ne, jotka ensin tulevat kysymykseen, jonkatähden jako entisessä järjestyksessä tapahtuu helpoimmasti.

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $\dfrac{11x+6+x^3+6x^2}{x+3} = \dfrac{x^3+6x^2+11x+6}{x+3} =$

$= x^2+3x+2.$

Esm. 2. $\dfrac{12ax^3+9x^4-4a^3x-a^4}{3x^2-a^2} = 3x^2+4ax+a^2.$

Esm. 3. $\dfrac{40ab-25b^2-16a^2+9x^2}{4a-5b+3x} = -4a+5b+3x =$

$= 5b-4a+3x.$

Esm. 4. $\frac{6a^4-96}{3a-6}=2a^3+4a^2+8a+16.$

Esm. 5. $\frac{4ab^3-48a^3b-15b^4+10a^4+51a^2b^2}{4ab+3b^2-5a^2}=$
$=-2a^2+8ab-5b^2=8ab-2a^2-5b^2.$

Esm. 6. $\frac{x^4+4y^4}{x^2-2xy+2y^2}=x^2+2xy+2y^2.$

Esm. 7. $\frac{a^6-b^6}{a^2-b^2}=a^4+a^2b^2+b^4.$

Esm. 8. $\frac{a^5+b^5}{a+b}=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4.$

Esm. 9. $\frac{a^m+b^m}{a+b}=a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2-\cdots-ab^{m-2}$
$+b^{m-1}$, kuin m on liikaluku.

Esm. 10. $\frac{6x^5-2px^4-33p^2x^3-5p^3x^2+2p^4x-3p^5}{2x^2-4px-3p^2}=$
$=3x^3+5px^2-2p^2x+p^3.$

Esm. 11. $\frac{\frac{1}{9}-6z^2+27z^4}{\frac{1}{3}+2z+3z^2}=1-6z+9z^2=9z^2-6z+1.$

Esm. 12. $\frac{a^6-16a^3x^3+64x^6}{a^2-4ax+4x^2}=a^4+4a^3x+12a^2x^2+16ax^3$
$+16x^4.$

Esm. 13. $\frac{a^3+b^2c+2a^2c-3abc-a^2b}{a-b}=$
$=\frac{a^3-a^2b+2a^2c-3abc+b^2c}{a-b}=a^2+2ac-bc.$

Esm. 14. $\frac{6x^2-7x-5xy-6y^2-22y-20}{3x+2y+4}=2x-3y-5.$

Esm. 15. $\frac{20bc-2a^2b+2a^4-3c^2-5a^2c-12b^2}{a^2+2b-3c}=$
$=2a^2-6b+c.$

Esm. 16. $\dfrac{\frac{3}{4}x^5 - 4x^4 + \frac{77}{8}x^3 - \frac{43}{4}x^2 - \frac{33}{4}x + 27}{\frac{1}{2}x^2 - x + 3} =$

$= \frac{3}{2}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{4}x + 9.$

Esm. 17. $(\frac{2}{9}x^4y - x^3y^2 + \frac{1}{3}x^2y^2 + \frac{11}{24}x^2y^3 - \frac{3}{4}xy^3 + \frac{3}{2}xy^4$

$- y^4):(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2}xy - 2y^2) = \frac{1}{3}x^2y - \frac{3}{4}xy^2 + \frac{1}{2}y^2.$

Esm. 18. $(8a^{m+r} + 16a^{p+r}b^n - 12a^rb^q - 4a^mb^s - 8a^pb^{n+s}$

$+ 6b^{q+s}):(4a^r - 2b^s) = 2a^m + 4a^pb^n - 3b^q.$

Esm. 19. $(a^{m+n}b^n - 4a^{m+n-1}b^{2n} - 27a^{m+n-2}b^{3n}$

$+ 42a^{m+n-3}b^{4n}):(a^nb^n - 7a^{n-1}b^{2n}) = a^m + 3a^{m-1}b^n$

$- 6a^{m-2}b^{2n}.$

Esm. 20. $\dfrac{3a^{n-2}b^{m+2} - 11a^{n-1}b^{m+1} - 5a^nb^m + 5a^{n+1}b^{m-1} - 4a^{n+2}b^{m-2}}{b^m - 3ab^{m-1} - 4a^2b^{m-2}} =$

$= 3a^{n-2}b^2 - 2a^{n-1}b + a^n.$

Esm. 21. $\dfrac{3a^5b^2 - 96b^7}{a - 2b} = 3a^4b^2 + 6a^3b^3 + 12a^2b^4 + 24ab^5 + 48b^6.$

Esm. 22. $\dfrac{2a^6b^2 - 7a^4b^4 + 3a^2b^6}{\frac{4}{3}a^2b^2 - 4b^4} = \frac{3}{2}a^4 - \frac{3}{4}a^2b^2.$

Esm. 23. $\dfrac{20x^3 - 46x^2y + 13xy^2 - 2y^3}{\frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{1}{8}y^2} = 8x - 16y.$

Jos jaettavassa eli niin hyvin jaettavassa kuin jakajassakin on usiampia osioita, joissa järjestyspuustavin sama korko on kertojana, niin jako voipi tapahtua aivan tavallisesti monioiden järjestettyä niin, että ne osiot, jotka sisältävät järjestyspuustavin saman koron, tulevat olemaan jälekkäin. Mutta semmoiset osiot voidaan myös yhdistettää niin, että järjestyspuustavin kaikissa niissä oleva sama korko otetaan yhteiseksi kertojaksi, osioiden muiden kertojoiden summa toiseksi ja tulo sitte pidetään yhtenä osiona.

Esimerkiksi otamme seuraavat moniot jaettaviksi.

1. $(11a^2b-19abc+10a^3-15a^2c+3ab^2+15bc^2-5b^2c):(5a^2+3ab-5bc)=$

$$
\begin{array}{r|l}
10a^3+(11b-15c)a^2+(3b^2-19bc)a+15bc^2-5b^2c & 5a^2+3ab-5bc \\
\mp 10a^3 \quad \mp \quad 6b\;a^2 \qquad \pm 10bc\;a \qquad\qquad & \overline{2a+(b-3c)} \\
\hline
(5b-15c)a^2+(3b^2-9bc)a+15bc^2-5b^2c & \\
\mp(5b-15c)a^2\mp(3b^2-9bc)a\mp 15bc^2\pm 5b^2c & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

2.
$$
\begin{array}{r|l}
(12b^2-29bc+15c^2)a^3+(23b^3-31b^2c-9bc^2+15c^3)a^2+(10b^4-6b^2c^2)a & (3b-5c)a+2b^2 \\
\mp(12b^2-20bc-9bc+15c^2)a^3\mp(8b^3-6b^2c)a^2 \qquad\qquad\qquad\qquad & \overline{(4b-3c)a^2+(5b^2-3c^2)a} \\
\hline
(15b^3-25b^2c-9bc^2+15c^3)a^2+(10b^4-6b^2c^2)a & \\
\mp(15b^3-25b^2c-9bc^2+15c^3)a^2\mp(10b^4-6b^2c^2)a & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Muistutus. Jaon säännön mukaan saadaan toisessa esimerkissä osan ensimäinen osio jaettavan ensimäisen osion $(12b^2-29bc+15c^2)a^3$ jakamalla jakajan ensimäisellä osiolla $(3b-5c)a$. Tässä on siis jo monio jaettava toisella moniolla. Samoin on myös osan toinen osio etsittävä.

Jos taas jaettava monio sisältää puustavia, yhden eli usiampiakin, joita jakajassa ei ole, niin jako voidaan kyllä silloinkin tehdä tavallisesti, moniot järjestäen jonkun kumpasellekin yhteisen puustavin mukaan, mutta se voipi myös tapahtua paljo helpomin. Liiaksikin voidaan jakoa seuraavalla tavalla tehdessä pikemmin huomata, jos se on mahdollinen tarkoin tehdä taikka ei. Olkoon jaettavassa esm. puustavi a, jota jakajassa ei ole. Kuin nyt jaettavan kaikki osiot, jotka sisältävät samoja korkoja puustavista a, yhdistetään, yhteiset kertojat, a:n korot, eroitetaan ja monio järjestetään pienenevillä koroilla a:n mukaan, niin saadaan, jos n on a:n isoin korotin, monio

$$Aa^n + Ba^{n-1} + \cdots\cdots + Ta + U,$$

jossa $A, B \cdots T, U$ merkitsevät a:n eri korkojen kertojoita, jotka itse voivat olla monioita. Koska nyt jakaja kerrottuna osalla on antava jaettavan tuloksi ja jakajassa ei ole puustavia a ensinkään, niin osassa pitää oleman osio, jossa korko a^n on kertojana, sillä jaettavassa, osan ja jakajan tulossa, on semmoinen osio. Tämä osio on taas tullut osaan, kuin jaettavan ensimäinen osio Aa^n on jaettu jakajalla, sillä osan kaikki muut osiot, jotka ovat saadut jakajalla jaettavan pienempiä korkoja a:sta sisältävien osioiden $Ba^{n-1} + \cdots$ j. n. e. jakamalla, sisältävät a:n pienempiä korkoja, eivätkä sentähden voi olla samankaltaisia mainitun ensimäisen osion kanssa.

Jakajan pitää siis jakaa ensimäinen osio Aa^n jaettavassa tarkoin, jos koko jako on tapahtuva tarkoin. Samasta syystä pitää myös jakajan jakaa toinen osio Ba^{n-1} jaettavassa tarkoin, sillä se osio sisältää a:n isoimman koron ensimäisessä tähteessä, joka on toinen jaettava. Samoin voidaan päättää, että joka osion jaettavassa pitää tulla tarkoin jaetuksi jakajalla, jos koko jaon tulee tapahtua täydellisesti, ilman tähteettä. Jos nyt jakajaa merkitään M:llä, niin osien $A:M, \cdots T:M$ ja $U:M$ pitää kaikkien oleman koko lausekkeita, sillä M:n, joka on vapaa a:sta, pitää jakaa A tarkoin, koska se jakaa Aa^n tarkoin. Samasta syystä pitää sen jakaa B tarkoin j. n. e. Tästä saadaan nyt seuraava sääntö.

Kuin jaettavassa moniossa on puustavia, joita jakajassa ei ole, niin osa saadaan seuraavalla tavalla: kaikki ne osiot *jaettavassa, joissa joku näistä puustavista on samoissa koroissa, yhdistetään; jaettava järjestetään saman puustavin mukaan; kaikki sen osiot jaetaan jakajalla ja vihdoin lasketaan näin saadut osat yhteen.*

Esimerkiksi otamme seuraavan monioiden jaon.

$$(3a^2b^3 - 3abc^3 - 2b^3c^2 + b^5 - 3a^2bc^2 + 3ab^3c - a^2c^3 + bc^4$$
$$+ a^2b^2c) : (b^2 - c^2).$$

Kuin jaettavassa moniossa yhdistetään kaikki ne osiot, jotka sisältävät a:n toisen koron, sitte ne, joissa a on kertojana ja vihdoin a:sta vapaat osiot, niin saadaan, a:n mukaan järjestettyä, monio

$$(3b^3 + b^2c - 3bc^2 - c^3)a^2 + (3b^3c - 3bc^3)a + (b^5 - 2b^3c^2 + bc^4),$$

jonka osiot sitte ovat jaettavat kaksiolla, $b^2 - c^2$, ja niin saadut osat yhdistettävät.

$$\begin{array}{l|l}
\text{1:nen jako, } (3b^3 + b^2c - 3bc^2 - c^3)a^2 & b^2 - c^2 \\
(\mp 3b^3 \qquad \pm 3bc^2 \qquad)a^2 & (3b + c)a^2, \text{ koko osan ensimäinen osio.} \\
\hline
(+ b^2c \qquad - c^3)a^2 & \\
(\mp b^2c \qquad \pm c^3)a^2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\text{Toinen jako, } (3b^3c - 3bc^3)a & b^2 - c^2 \\
(\mp 3b^3c \pm 3bc^3)a & 3bca, \text{ koko osan toinen osio.} \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\text{Kolmas jako, } b^5 - 2b^3c^2 + bc^4 & b^2 - c^2 \\
\mp b^5 \pm b^3c^2 & b^3 - bc^2, \text{ koko osan kolmas osio.} \\
\hline
- b^3c^2 + bc^4 & \\
\pm b^3c^2 \mp bc^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Koko osa on siis

$$(3b + c)a^2 + 3bca + b^3 - bc^2.$$

Kaksion $a^n - b^n$, jossa n merkitsee mitä koko lukua hyvänsä, jako toisella kaksiolla $a - b$ on tärkeä ja yleislaskussa usiasti tehtävä.

Edellä, Luk. 1 § 3, jo on nähty, että $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, josta selvästi nähdään, että kaksio $a - b$ jakaa tarkoin kaksion

a^2-b^2 ja osa on $a+b$. Jos taas kaksio a^3-b^3 jaetaan kaksiolla $a-b$, niin jako tapahtuu tarkoin ja osa on a^2+ab+b^2. Niin myös on

$$(a^4-b^4):(a-b)=a^3+a^2b+ab^2+b^3.$$

Kaksioa $a^{n+1}-b^{n+1}$ jakaessa toisella $a-b$ saadaan selvästi osan ensimäiseksi osioksi a^n ja ensimäiseksi tähteeksi a^nb-b^{n+1} seuraavan kaavan mukaan:

$$\begin{array}{ll|l}
a^{n+1} & -b^{n+1} & a-b \\ \cline{3-3}
\mp a^{n+1} & \pm a^nb & a^n \\ \cline{1-2}
 & a^nb-b^{n+1} &
\end{array}$$

Kuin nyt tähteen kumpasestakin osiosta eroitetaan yhteinen kertoja b, niin se saapi muodon $(a^n-b^n)b$. Jos nyt $a-b$ jakaa tämän tähteen, eli sen kaksio-kertojana a^n-b^n tarkoin, niin silloin se jakaa myös koko jaettavan $a^{n+1}-b^{n+1}$ tarkoin, koska osan saatu osio a^n on koko lauseke. Tästä seuraa selvästi, että, jos kaksio $a-b$ jakaa tarkoin toisen a^n-b^n, se myös jakaa tarkoin kaksion $a^{n+1}-b^{n+1}$, olipa n mikä koko luku hyvänsä. Edellä on nyt nähty, että kaksio $a-b$ jakaa tarkoin kaksion a^2-b^2, sentähden se myös jakaa kaksion a^3-b^3 tarkoin ja, koska se jakaa viimesen (a^3-b^3) tarkoin, niin se myös jakaa kaksion a^4-b^4 tarkoin, samasta syystä taas kaksion a^5-b^5 j. n. e., s. o. $a-b$ jakaa tarkoin kaksion a^n-b^n, merkitsipä n mitä koko lukua hyvänsä.

Lauseke a^4-b^4 jaettuna kaksiolla, $a-b$, antaa osaksi monion $a^3+a^2b+ab^2+b^3$ seuraavan kaavan mukaan.

$$\begin{array}{r|l}
a^4 \qquad\qquad -b^4 & a-b \\ \cline{2-2}
\mp a^4 \pm a^3b \qquad\qquad & a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\ \cline{1-1}
+a^3b \qquad -b^4 & \\
\mp a^3b \pm a^2b^2 \qquad & \\ \cline{1-1}
+a^2b^2-b^4 & \\
\mp a^2b^2 \pm ab^3 & \\ \cline{1-1}
+ab^3-b^4 & \\
\mp ab^3 \pm b^4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Tämän osan ensimäisessä osiossa on a:n korotin 3, siis yhtä pienempi kuin jaettavassa kaksiossa ja toisessa osiossa on a:n korotin yhtä pienempi kuin ensimäisessä ja b:n korotin on yksi. Sitte pienenevät a:n korottimet yhdellä ja b:n kasvavat myös yhdellä, osio osioltaan, kunnekka viimesessä osiossa, joka on vapaa a:sta, b:n korotin on 3, siis yhtä pienempi kuin jaettavassa moniossa.

Että tämäkin sääntö on yleinen, s. t. s., että

$$(a^n - b^n):(a - b) = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^{n-m}b^{m-1} + a^{n-m-1}b^m + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1},$$

voidaan helposti näyttää. Jos sitä varten monio

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^{n-m}b^{m-1} + a^{n-m-1}b^m + a^{n-m-2}b^{m+1} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

kerrotaan kaksiolla, $a - b$, niin tuloksi saadaan kaksio $a^n - b^n$, sillä sen huomaa heti, että kaikki väliset osiot ovat kaksi ja kaksi muuten samat, vaan ainoastansa vastaismerkkiset ja kaottavat sentähden toinen toisensa, niin kuin seuraavasta kertomiskaavasta nähdään.

$$(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^{n-m}b^{m-1} + a^{n-m-1}b^m + a^{n-m-2}b^{m+1} + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})(a - b) = a^n - a^{n-1}b + a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 + a^{n-2}b^2 - \cdots - a^{n-m}b^m + a^{n-m}b^m - a^{n-m-1}b^{m+1} + a^{n-m-1}b^{m+1} - + \cdots - a^2b^{n-2} + a^2b^{n-2} - ab^{n-1} + ab^{n-1} - b^n = a^n - b^n.$$

Tässä merkitsee m koko lukua pienempää kuin n.

Koska nyt kaksio, $a^n - b^n$, on kahden kertojan, $(a - b)$ ja $(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, tulo, niin, jos se $(a^n - b^n)$ jaetaan ensimäisellä kertojalla, $a - b$, osaksi pitää saataman toinen $a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}$, j. o. t.

Kahden suuruuden väli jakaa siis aina tarkoin välin näiden suuruuksien samoista koroista ja osa on yhtäläinen monio, jonka osioiden luku on sama kuin suuruuksien mainittu korko ja niiden nousu yhtä pienempi kuin sama korko. Edellisestä on kyllä selvä, mitenkä nämä osiot muodustuvat ensimäisestä, joka on ensimäisen suuruuden yhtä pienempi korko kuin jaettavassa kaksiossa. Niin on esm.

1. $\dfrac{16x^4-625y^4}{2x-5y}=\dfrac{(2x)^4-(5y)^4}{2x-5y}=8x^3+4x^2\cdot 5y+2x\cdot 25y^2$
$+125y^3=8x^3+20x^2y+50xy^2+125y^3.$

2. $\dfrac{32a^5b^{10}-\frac{1}{32}c^5}{2ab^2-\frac{1}{2}c}=\dfrac{(2ab^2)^5-(\frac{1}{2}c)^5}{2ab^2-\frac{1}{2}c}=16a^4b^8+8a^3b^6\cdot\frac{1}{2}c$
$+4a^2b^4\cdot\frac{1}{4}c^2+2\cdot ab^2\cdot\frac{1}{8}c^3+\frac{1}{16}c^4=16a^4b^8+4a^3b^6c$
$+a^2b^4c^2+\frac{1}{4}ab^2c^3+\frac{1}{16}c^4.$

3. $\dfrac{1-x^6}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5.$

Lopuksi teemme vielä seuraavat muistutukset, missä tapauksissa jo edeltäkäsin voidaan nähdä, että monio ei voi jakaa tarkoin toista moniota.

1:o. Ennen kuin moniot ovat järjestetytkän jonkun puustavin mukaan, pitää katsastaman niitä osioita, jotka sisältävät itsekunkin puustavin isoimmat korot kumpasessakin moniossa. Jos joku semmoinen osio jakajassa ei ja'a tarkoin jaettavan vastaavaa osiota, niin koko jakokin on silloin mahdotoin tarkoin tehdä, sillä, niin kuin edellä on nähty, se on sama, minkä yhteisen puustavin mukaan moniot järjestetään.

2:o. Monio, joka sisältää jonkun toisessa moniossa olemattoman puustavin, ei voi jakaa tätä toista moniota tarkoin, sillä semmoista koko moniota ei ole, joka kerrottuna ensimäisellä antaisi jostakin siinä olevasta puustavista vapaan monion tuloksi ja osan kerrottuna jakajalla pitäisi tehdä jaettavan, joka ei sisällä kaikkia jakajassa olevia puustavia.

3:o. Monio ei voi milloinkaan jakaa tarkoin yksiötä, sillä kahden monion tulossa on vähintäinkin kaksi osiota, jotka eivät ole samankaltaisia keskenänsä enemmän kuin toistenkaan osioiden kanssa ja joita siis ei voi yhdistää.

4:o. Yksiö ei ja'a tarkoin moniota, ellei se ja'a tarkoin jaettavan jokaista osiota, jolloin taas osa saadaan kaikille näille osioille yhteisen kertojan (jakajan) eroittamalla ja pois heittämällä.

Toinen Luku.

Yleislaskusuuruuksien murtolausekkeista.

§ 1.

Kuin jonkun yleislaskusuuruuden jako toisella ei voi tapahtua tarkoin, niin osaa merkitään silloin lausekkeella, jossa, samoin kuin numerolaskussakin, jaettava kirjoitetaan ylä- ja jakaja niiden välillä olevan viivan alapuolelle. Tämmöistä lausekelta nimitetään murtosuuruudeksi ja viivan yläpuolella olevaa suuruutta (jaettavaa) sen osottajaksi ja alapuolella olevaa (jakajaa) nimittäjäksi. Näin merkitsee esm. $\frac{a}{b}$ osaa, joka saadaan suuruus a jakaen toisella b.

Seuraavat todistot ovat murtosuuruuksien käyttämisessä erittäin tärkeitä ja niiden todistaminen perustaksen kokonansa seuraavaan kahteen jo hyvin tunnettuun sääntöön, nimittäin: osa kerrottuna jakajalla antaa jaettavan tuloksi ja suuruuksien tulo on sama tapahtuipa kertominen missä järjestyksessä hyvänsä.

Murtosuuruuden kertominen millä suuruudella hyvänsä tapahtuu osottajan kertomisella eli nimittäjän jakamisella kertojalla, niin että

$$\frac{a}{b}\cdot c = \frac{ac}{b} = \frac{a}{\frac{b}{c}}$$

Jos lyyhyyden vuoksi merkitsemme murtosuuruutta $\frac{a}{b}$ puustavilla d, joten on $\frac{a}{b} = d$ ja siis $a = bd$, niin edellisestä yhtälöstä saadaan, sen yhtä isot puolet kertoen suuruudella c, $\frac{a}{b}\cdot c = d\cdot c$ ja toisesta saadaan samoin $ac = b\cdot dc$, josta taas $\frac{ac}{b} = dc$. Sentähden on selvästi $\frac{a}{b}\cdot c = \frac{ac}{b}$.

Koska taas $a = b\cdot d$ ja $b = \frac{b}{c}\cdot c$, sillä osa $\frac{b}{c}$ kerrottuna jakajalla c antaa jaettavan b tuloksi, niin $a = \frac{b}{c} \cdot cd$, josta saadaan $\frac{\frac{a}{b}}{c} = cd$ ja siis $\frac{\frac{a}{b}}{c} \cdot c = \frac{a}{b}$, koska $\frac{a}{b} \cdot c = cd$. Sentähden on

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b} = \frac{\frac{a}{b}}{c}, \text{ j. o. t.}$$

Murtosuuruuden jako toisella suuruudella tapahtuu taas päin vastoin osottajan jakamisella eli nimittäjän kertomisella jakajalla, s. t. s.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{\frac{a}{c}}{b} = \frac{a}{bc}.$$

Jos nyt on $\frac{a}{b} : c = d$, niin $\frac{a}{b} = dc$ ja $a = dcb = db \cdot c = d \cdot bc$, josta taas $\frac{a}{c} = db$, $\frac{\frac{a}{c}}{b} = d$ ja $\frac{a}{bc} = d$.

Näistä yhtälöistä saadaan selvästi $\frac{a}{b} : c = \frac{\frac{a}{c}}{b} = \frac{a}{bc}$, j. o. t.

Näistä todistoista saadaan seuraavat säännöt, joita yleislaskussa yhtenään käytetään.

Murtosuuruuden arvon muuttumatta saapi jakajan osottajassa panna kertojaksi, ja kertojan jakajaksi nimittäjään ja samoin myös kertojan nimittäjässä jakajaksi ja jakajan kertojaksi osottajaan.

Murtosuuruuden arvo jääpi entiselleen, jos sen osottaja sekä nimittäjä kerrotaan eli jaetaan samalla suuruudella, sillä jos $\frac{a}{b} = c$, niin $a = cb$ ja siis $ad = cbd$, koska yhtä isot suuruudet kerrottuina samalla suuruudella antavat yhtä isot tulot.

Koska taas

$$ad = cbd = bd \cdot c, \text{ niin } \frac{ad}{bd} = c \text{ ja sentähden } \frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}.$$

Samoin myös on kuin $\frac{a}{b} = c$ ja siis $a = bc$, $\frac{a}{d} = \frac{bc}{d} = \frac{b}{d} \cdot c$, josta saadaan

$$\frac{\frac{a}{d}}{\frac{b}{d}} = c \text{ ja sentähden } \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{d}}{\frac{b}{d}} \text{ j. o. t.}$$

Murtosuuruuksien lyhentäminen perustaksen tykkänään viimeseen sääntöön, sillä *murtosuuruuden lyhentämisellä ymmärretään yhteisten kertojoiden poisjättämistä osottajasta sekä nimittäjästä, taikka, joka on yhtä, osottajan sekä nimittäjän jakamista samalla suuruudella, joka on kertojana kumpasessakin.* Tämmöinen lyhentäminen tapahtuu helposti, jos kaikki niin hyvin osottajan kuin nimittäjänkin kertojat ovat eroitetut eli helposti löydetään. Silloin heitetään vaan kaikki yhteiset kertojat pois kumpasestakin ja osottajan jälelle jääneiden kertojoiden tulo tehdään osottajaksi ja nimittäjän nimittäjäksi lyhennetyssä murtosuuruudessa. Näin tehtävälle lyhentämiselle otamme seuraavat

Harjoitus-esimerkit.

Esm. 1. $\frac{2ab}{3bc} = \frac{2a}{3c}$.

Esm. 2. $\frac{6xyz^3}{18y^2z^2} = \frac{6xyzzz}{3 \cdot 6yyzz} = \frac{xz}{3y}$.

Esm. 3. $\frac{a^2bx^3}{b^2x^4y} = \frac{a^2}{bxy}$.

Esm. 4. $\frac{3cyz^2}{33c^2yz^3} = \frac{1}{11cz}$.

Esm. 5. $\frac{a(b+c)}{3b(b+c)} = \frac{a}{3b}$.

Esm. 6. $\frac{2a^2(x-2)(y+3)}{3ab(x-2)^2} = \frac{2a(y+3)}{3b(x-2)}$.

Esm. 7. $\frac{(a^3+b^3)^2}{(a^3+b^3)^3} = \frac{1}{a^3+b^3}$.

Esm. 8. $$\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}=\frac{a-b}{1}=a-b.$$

Esm. 9. $$\frac{4x^2-1}{6x-3}=\frac{(2x+1)(2x-1)}{3(2x-1)}=\frac{2x+1}{3}.$$

Esm. 10. $$\frac{a^2+b^2}{a^4-b^4}=\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}=\frac{1}{a^2-b^2}.$$

Esm. 11. $$\frac{a(a+x)-x(a+x)}{a^2-x^2}=\frac{(a+x)(a-x)}{(a+x)(a-x)}=\tfrac{1}{1}=1.$$

Esm. 12. $$\frac{am-an}{bm-bn}=\frac{a(m-n)}{b(m-n)}=\frac{a}{b}.$$

Esm. 13. $$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Esm. 14. $$\frac{am+mx}{a^2n-nx^2}=\frac{m(a+x)}{n(a+x)(a-x)}=\frac{m}{n(a-x)}.$$

Esm. 15. $$\frac{abc^2-a^3b}{a^2b^2c-a^3b^2}=\frac{ab(c^2-a^2)}{a^2b^2(c-a)}=\frac{(c+a)(c-a)}{ab(c-a)}=\frac{a+c}{ab}.$$

Esm. 16. $$\frac{3abd-abef+abd}{a^3b^3c-a^4b^4}=\frac{ab(3d-ef+d)}{a^3b^3(c-ab)}=\frac{3d-ef+d}{a^2b^2(c-ab)}.$$

Esm. 17. $$\frac{a^2c^2-a^2b^2+a^2d^2}{a^3c^3-a^3b^2c+a^3cd^2}=\frac{a^2(c^2-b^2+d^2)}{a^3c(c^2-b^2+d^2)}=\frac{1}{ac}.$$

Esm. 18. $$\frac{10b\sqrt{a}-2ab}{4b^2\sqrt[3]{a}-4bc\sqrt[3]{a}}=\frac{2b(5\sqrt{a}-a)}{4b\sqrt[3]{a}(b-c)}=\frac{5\sqrt{a}-a}{2\sqrt[3]{a}(b-c)}.$$

Esm. 19. $$\frac{2ax^2-8ay^2}{xz+2yz}=\frac{2a(x+2y)(x-2y)}{z(x+2y)}=\frac{2a(x-2y)}{z}.$$

Esm. 20. $$\frac{a^2x^2-a^2y^2}{a^2y-a^2x}=\frac{a^2(x^2-y^2)}{a^2(y-x)}=\frac{(x+y)(x-y)}{-(x-y)}=$$

$$=\frac{x+y}{-1}=-\frac{x+y}{1}=-(x+y)=-x-y.$$

Esm. 21. $$\frac{4cy^2-64cz^2}{4cz-cy}=\frac{4c(y^2-16z^2)}{c(4z-y)}=\frac{4(y+4z)(y-4z)}{-(y-4z)}=$$

$$=-4(y+4z).$$

Esm. 22. $\dfrac{6ac+9bc-5c^2}{12adf+18bdf-10cdf}=\dfrac{c}{2df}.$

Esm. 23. $\dfrac{n^2-2n+1}{n^2-1}=\dfrac{n-1}{n+1}.$

Esm. 24. $\dfrac{n^3-2n^2}{n^2-4n+4}=\dfrac{n^2}{n-2}.$

Esm. 25. $\dfrac{2a^2\sqrt[3]{3c^2}-8b^2\sqrt[3]{3c^2}}{3a\sqrt[3]{3c^2}+6b\sqrt[3]{3c^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{3c^2}(a^2-4b^2)}{3\sqrt[3]{3c^2}(a+2b)}=\dfrac{2(a-2b)}{3}.$

Esm. 26. $\dfrac{am^2-an^2}{m^3+m^2n-mn^2-n^3}=\dfrac{a(m^2-n^2)}{m^2(m+n)-n^2(m+n)}=$

$=\dfrac{a(m^2-n^2)}{(m+n)(m^2-n^2)}=\dfrac{a}{m+n}.$

Esm. 27. $\dfrac{a^2+2ab}{a^3+2a^2b+ab+2b^2}=\dfrac{a(a+2b)}{(a+2b)(a^2+b)}=\dfrac{a}{a^2+b}.$

Esm. 28. $\dfrac{a+b+ac+bc}{a+b}=\dfrac{1(a+b)+c(a+b)}{a+b}=$

$=\dfrac{(a+b)(1+c)}{a+b}=1+c.$

Esm. 29. $\dfrac{3lmn+30pq+18lm+5npq}{4abn-42cd+24ab-7cdn}=\dfrac{3lm(n+6)+5pq(6+n)}{4ab(n+6)-7cd(6+n)}=$

$=\dfrac{(n+6)(3lm+5pq)}{(n+6)(4ab-7cd)}=\dfrac{3lm+5pq}{4ab-7cd}.$

Esm. 30. $\dfrac{2a^2m+3a^2n-2b^2m-3b^2n}{2m^3+3m^2n+2mn^2+3n^3}=\dfrac{a^2-b^2}{m^2+n^2}.$

Esm. 31. $\dfrac{a^3+a^2y+ay+y^2}{a^4-y^2}=\dfrac{a+y}{a^2-y}.$

Esm. 32. $\dfrac{6a^4-96}{3a-6}=\dfrac{6(a^4-16)}{3(a-2)}=\dfrac{2(a^2+4)(a^2-4)}{a-2}=$

$=2(a^2+4)(a+2).$

Esm. 33. $\dfrac{a^3-x^3}{(a-x)^2}=\dfrac{a^2+ax+x^2}{a-x}.$

Esm. 34. $\frac{a^3b^3+c^3x^3}{a^2b^2-c^2x^2}=\frac{a^2b^2-abcx+c^2x^2}{ab-cx}$.

Esm. 35. $\frac{36a^2cd-120abcd+100b^2cd}{54a^3c-150ab^2c}=\frac{4cd(3a-5b)^2}{6ac(3a+5b)(3a-5b)}=$
$=\frac{2d(3a-5b)}{3a(3a+5b)}$.

Esm. 36. $\frac{ax^m-bx^{m+1}}{a^2bx-b^3x^3}=\frac{x^{m-1}}{ab+b^2x}$.

Esm. 37. $\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2-b^2-c^2-2bc}=\frac{(a+b+c)^2}{a^2-(b+c)^2}=$
$=\frac{a+b+c}{a-b-c}$.

Esm. 38. $\frac{a^2b^2-b^2-2a^2b+2b-a^2bc+bc+2a^2c-2c}{(a^2-2a+1)(b^3+2b^2-bc^2-2c^2)}=$
$=\frac{(a^2-1)(b^2-2b-bc+2c)}{(a-1)^2[b^2(b+2)-c^2(b+2)]}=$
$=\frac{(a+1)[b(b-2)-c(b-2)]}{(a-1)(b+2)(b^2-c^2)}=\frac{(a+1)(b-2)}{(a-1)(b+2)(b+c)}$.

Esm. 39. $\frac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}=$
$=\frac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}=\frac{a+b}{(a+c-b)(b+c-a)}$.

§ 2.

Kuin osottaja eli nimittäjä eli kumpikin ovat monioita, joidenka kertojat eivät helposti ilmesty, niin silloin täytyy niiden *isoin yhteinen jakaja*, s. o. lauseke, joka on kaikkien kumpasessakin yhteisten kertojoiden tulo, etsittämän, jos murtosuuruutta tahdotaan lyhennettää.

Jos A ja B nyt merkitsevät kahta kokonaista moniota, joista A sisältää isomman eli yhtä ison koron jostakin järjestyspuustavista kuin B, ja J heidän isointa yhteistä jakajatansa, niin A voidaan jakaa B:llä, kunnekka saadaan tähde, jossa järjestyspuustavi on pienemmässä korossa kuin jakajassa B. Merkitköön taas T tätä tähdettä ja Q saatua osaa, joka on koko lauseke. Koska jakaja kerrottuna osalla ja lisättynä tähteellä tekee aina jaettavan, niin tästä saadaan seuraava yhtälö

$$A = BQ + T.$$

Nyt jakaa J monion A tarkoin, sentähden pitää sen myös jakaman lauseke $BQ + T$ tarkoin, koska $BQ + T$ on sama kuin A ainoastansa eri muodossa. J jakaa myös tarkoin monion B ja sentähden tulon BQ myös. Tästä seuraa selvästi, että J jakaa myös tarkoin monion T, koska se jakaa summan $BQ + T$ ja sen ensimäisen osion BQ tarkoin. Sillä osa $\frac{BQ+T}{J} = \frac{BQ}{J} + \frac{T}{J}$ on koko lauseke ja ensimäinen osio $\frac{BQ}{J}$ on myös koko lauseke, jonkatähden toisen osion $\frac{T}{J}$ pitää kanssa oleman koko lausekkeen. Sentähden on J monioiden B ja T yhteinen jakaja, mutta se on myös niiden isoin yhteinen jakaja.

Sillä jos B ja T sisältäisivät jonkun yhteisen kertojan k, erityisen ykkösestä, joka ei olisi kertojana J:ssä, niin B:n ja T:n yhteisten kertojoiden, J ja k, tulo, Jk, olisi selvästi kertojana summassa $BQ + T$, koska se on kertojana sen osioissa BQ ja T. Mutta tämä summa $BQ + T$ on sama kuin monio A, jonkatähden Jk olisi myös kertoja viimesessä moniossa A ja sentähden jakaisi se moniot B ja A tarkoin, koska se olisi kertojana kumpasessakin. Mutta monioiden A ja B isoin yhteinen jakaja on J, jonkatähden Jk ei voi jakaa niitä kumpastakin tarkoin, josta taas selvästi seuraa, että, Jk ei voi jakaa suuruuksia B ja T tarkoin, ja sentähden on J niidenkin isoin yhteinen jakaja. Samasta syystä on taas B:n ja T:n isoin yhteinen jakaja myös A:n ja B:n isoin yhteinen jakaja.

Jos sitte ja'amme toisen monion B tähteellä T, kunnekka saamme toisen tähteen T', jossa järjestyspuustavi taas on pienemmässä korossa kuin jakajassa T, niin voidaan todistaa samoin kuin edelläkin, että J on T:n ja T':n isoin yhteinen jakaja ja että näiden lausekkeiden, T ja T', isoin yhteinen jakaja on myös T:n ja B:n ja sentähden myös B:n ja A:n.

Jos nyt tätä teosta pitkitämme, viimesen jakajan aina ja'amme saadulla tähteellä kunnekka jako tapahtuu tarkoin, s. t. s. tähteeksi saamme 0, niin viimenen jakaja on monioiden A ja B isoin yhteinen jakaja.

Jos esm. neljännessä jaossa saataisiin 0 tähteeksi, niin A:n ja B:n isoimman yhteisen jakajan etsiminen muodostuisi seuraavalla tavalla, jos T, T', T'', merkitsevät tähteitä ja Q, Q', Q'', Q''' saatuja osia, jotka kaikki ovat koko lausekkeita:

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \mp QB & Q' \\ \hline T & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} B & T \\ \mp Q'T & Q'' \\ \hline T' & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} T & T' \\ \mp Q''T' & Q''' \\ \hline T'' & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} T' & T'' \\ \mp Q'''T'' & Q''' \\ \hline 0 & \end{array}$$

joista ja'oista selvästi saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned} A &= QB + T \\ B &= Q'T + T' \\ T &= Q''T' + T'' \\ T' &= Q'''T''. \end{aligned}$$

Koska nyt T'' jakaa tarkoin itsensä ja T':n ja on niiden isoin yhteinen jakaja, niin se jakaa myös tarkoin T':n ja T:n, sentähden taas T:n ja B:n ja vihdoin B:n ja A:n. Samasta syystä on se myös monioiden A ja B isoin yhteinen jakaja.

Olipa nyt kuinka monta jakoa hyvänsä tehty ennen, kuin 0 saadaan tähteeksi, niin samoin todistetaan, että viimenen jakaja on monioiden A ja B isoin yhteinen jakaja. Se on selvä, että B on monioiden isoin yhteinen jakaja, jos ensimäinen jako tapahtuu tarkoin eli T on 0.

Jos ykkönen taas saataisiin tähteeksi jossakin edellä mainituista jaoista, niin se jakaisi kyllä edellisen jakajan tarkoin ja olisi siis monioiden isoin yhteinen jakaja, mutta koska moniot sillä jaettuina antaisivat itsensä osiksi, niin murtosuuruutta, jonka osottajana ja nimittäjänä ne olisivat, ei silloin voitaisi lyhennettää.

Jos taas joku järjestyspuustavista vapaa yleislaskulauseke jäisi tähteeksi, niin monioilla ei olisi yhteistä jakajata, ellei joku järjestyspuustavista vapaa lauseke, jonka taas, niin kuin jaon säännöissä olemme nähneet, pitäisi olla kertojana järjestettyjen monioiden kaikissa osioissa.

Kumpasesta moniosta hyvänsä saapi jättää pois jokaisen kertojan, joka ei ole kertojana toisessa. Sillä jos esm. $A = GE$ ja G ei sisältäisi yhtään kertojata, joka myös olisi kertojana moniossa B, niin monioiden A ja B yhteisten kertojoiden pitäisi kaikkien olla kertojoina A:n toisessa kertojassa E, jonkatähden E:n ja B:n isoin yhteinen jakaja olisi myös A:n ja B:n isoin yhteinen jakaja.

Jaettavan saapi myös kertoa millä suuruudella hyvänsä, joka vaan ei ole kertojana jakajassa, sillä koska se tulee kertojaksi ainoastansa yhteen monioon, niin se ei voi tulla niiden yhteiseen jakajaan. Tämmöinen kertominen on myös aina silloin tehtävä, kuin jakajan ensimäinen osio ei ja'a tarkoin ensimäistä osiota jaettavassa. Mutta sentähden pitääkin jakajan erinäiset kertojat heitettämän pois, koska jaettava muutoin tulisi usiasti niillä kerrotuksi ja ne sentähden tulisivat kertojiksi lausekkeesen, jonka pitäisi olla yhteinen jakaja alkuperäisille monioille, mutta jossa näin olisi kertojoita, jotka eivät olekaan yhteiset niille.

Kahden monion isoimman yhteisen jakajan etsimiselle saadaan nyt selvästi seuraava sääntö.

Moniot järjestetään jonkun kumpasellekin yhteisen puustavin mukaan pienenevillä korottimilla ja sitte otetaan se monio, jossa järjestyspuustavi on isommassa korossa, jaettavaksi ja toinen jakajaksi; jakajasta heitetään pois kaikki tietyt erityiset kertojat ja jaettava kerrotaan semmoisella suuruudella, joka tekee sen ensimäisen osion tarkoin jaettavaksi ensimäisellä osiolla jakajassa; samoin tehdään myös joka tähteen kanssa, joka sisältää järjestyspuustavin isommassa eli samassa korossa kuin jakaja; tämmöistä jakoa pitkitetään kunnekka saadaan tähde, jossa järjestyspuustavi on pienemmässä korossa kuin jakajassa, sitte otetaan se tähde jakajaksi ja ensimäinen jakaja jaettavaksi ja niiden kanssa tehdään samoin kuin alkuperäisten monioidenkin kanssa; tätä tekoa pitkitetään, s. o. joka tähde, jossa järjestyspuustavi on pienemmässä korossa kuin jakajassa, otetaan jakajaksi ja edellinen jakaja jaettavaksi, kunnekka jako tapahtuu tarkoin, jolloin viimenen jakaja on alkuperäisten monioiden isoin yhteinen jakaja.

Muist. Jos järjestyspuustavin isoin korotin on sama kumpasessakin moniossa, niin silloin voidaan selvästi kumpi hyvänsä niistä ottaa ensimäiseksi jakajaksi.

Edellisen säännön selittämiseksi otamme vielä seuraavat esimerkit.

Ensimäinen esimerkki.

Jos monioiden

$$15a^5+10a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3-3ab^4 \text{ ja } 12a^3b^2+38a^2b^3+16ab^4-10b^5$$

isoin yhteinen jakaja on etsittävä, niin niitä tarkastellessa kohta huomataan, että ensimäisessä on kertoja a, jota ei ole toisessa ja toisessa taas on suuruus $2b^2$ kertojana, joka ei ole kertojana ensimäisessä. Nämä kertojat ovat siis pois jätettävät, toisen monion erityinen kertoja $2b^2$ välttämättömästi, jos a otetaan järjestyspuustaviksi, jolloin toinen monio, jossa a on pienemmässä korossa, tulee jakajaksi. Isoin yhteinen jakaja tulee siis etsittäväksi vaan monioille

$$15a^4+10a^3b+4a^2b^2+6ab^3-3b^4 \text{ ja } 6a^3+19a^2b+8ab^2-5b^3.$$

Ensimäinen teos.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
30a^4 + & 20a^3b + & 8a^2b^2 + & 12ab^3 - & 6b^4 & 6a^3+19a^2b+8ab^2-5b^3 \\
\mp 30a^4 \mp & 95a^3b \mp & 40a^2b^2 \pm & 25ab^3 & & 5a-25b \\
\hline
 & -75a^3b - & 32a^2b^2 + & 37ab^3 - & 6b^4 & \\
 & -150a^3b - & 64a^2b^2 + & 74ab^3 - & 12b^4 & \\
 & \pm 150a^3b \pm & 475a^2b^2 \pm & 200ab^3 \mp & 125b^4 & \\
\hline
 & & 411a^2b^2 + & 274ab^3 - & 137b^4 & \\
 & & \text{eli } 137b^2(3a^2+2ab-b^2). & & &
\end{array}$$

Toinen teos.

$$\begin{array}{rrrr|l}
6a^3 + & 19a^2b + & 8ab^2 - & 5b^3 & 3a^2+2ab-b^2 \\
\mp 6a^3 \mp & 4a^2b \pm & 2ab^2 & & 2a+5b \\
\hline
 & 15a^2b + & 10ab^2 - & 5b^3 & \\
 & \mp 15a^2b \mp & 10ab^2 \pm & 5b^3 & \\
\hline
 & & 0. & &
\end{array}$$

Alkuperäisten monioiden isoin yhteinen jakaja on siis monio

$$3a^2+2ab-b^2.$$

Tässä esimerkissä piti ensimäinen jaettava kertoa lu'ulla 2, koska jakajan ensimäisen osion numerokertoja ei jakanut tarkoin jaettavan ensimäisen osion numerokertojata 15. Samoin piti ensimäinen tähde kertoa lu'ulla 2. Toisessa tähteessä, jossa a jo oli pienemmässä korossa kuin jakajassa, oli yksityinen kertoja $137b^2$, joka piti heitettamän pois ennen kuin edellinen jakaja sillä jaettiin.

Toinen esimerkki.

Mikä on monioiden

$$qnp^3 + 3np^2q^2 - 2npq^3 - 2nq^4 \text{ ja } 2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$$

isoin yhteinen jakaja?

Ensimäinen teos.

$$\begin{array}{r|l}
-4p^3 - qp^2 + 2q^2p + 3q^3 & p^3 + 3qp^2 - 2q^2p - 2q^3 \\
\pm 4p^3 \pm 12qp^2 \mp 8q^2p \mp 8q^3 & -4 \\
\hline
11qp^2 - 6q^2p - 5q^3 &
\end{array}$$

eli $q(11p^2 - 6qp - 5q^2)$.

Toinen teos.

$$\begin{array}{r|l}
11p^3 + 33qp^2 - 22q^2p - 22q^3 & 11p^2 - 6qp - 5q^2 \\
\mp 11p^3 \pm 6qp^2 \pm 5q^2p & p + 39q \\
\hline
39qp^2 - 17q^2p - 22q^3 & \\
429qp^2 - 187q^2p - 242q^3 & \\
\mp 429qp^2 \pm 234q^2p \pm 195q^3 & \\
\hline
47q^2p - 47q^3 &
\end{array}$$

eli $47q^2(p - q)$.

Kolmas teos.

$$\begin{array}{r|l}
11p^2 - 6qp - 5q^2 & p - q \\
\mp 11p^2 \pm 11qp & 11p + 5q \\
\hline
5qp - 5q^2 & \\
\mp 5qp \pm 5q^2 & \\
\hline
0. &
\end{array}$$

Monioiden isoin yhteinen jakaja on siis kaksio, $p - q$.

Kuin murtosuuruuden osottajan ja nimittäjän isoin yhteinen jakaja kerran on saatu, niin sen lyhentäminen tapahtuu selvästi osottaja sekä nimittäjä jakaen niiden isoimmalla yhteisellä jakajalla, jonka jaon tehtyä murtosuuruus on lyhimmässä muodossa.

Tämmöisen lyhentämisen tekemiselle otamme vielä seuraavat harjoitus esimerkit.

Esimerkkiä.

Esm. 1. $\dfrac{a^2-5ab+4b^2}{a^3-a^2b+3ab^2-3b^3}=\dfrac{(a-b)(a-4b)}{(a-b)(a^2+3b^2)}=\dfrac{a-4b}{a^2+3a^2}.$

Esm. 2. $\dfrac{x^3-9x^2+23x-15}{x^2-8x+7}=\dfrac{(x-1)(x^2-8x+15)}{(x-1)(x-7)}=$

$=\dfrac{x^2-8x+15}{x-7}.$

Esm. 3. $\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^2-14x-15}=\dfrac{(x+1)(x^2+3x+2)}{(x+1)(x-15)}=$

$\dfrac{x^2+3x+2}{x-15}.$

Esm. 4. $\dfrac{8x^3-10x^2+7x-2}{6x^3-11x^2+8x-2}=\dfrac{(2x-1)(4x^2-3x+2)}{(2x-1)(3x^2-4x+2)}=$

$=\dfrac{4x^2-3x+2}{3x^2-4x+2}.$

Esm. 5. $\dfrac{2x^3-x^2+5x+3}{2x^3+3x^2-x-1}=\dfrac{(2x+1)(x^2-x+3)}{(2x+1)(x^2+x-1)}=\dfrac{x^2-x+3}{x^2+x-1}.$

Esm. 6. $\dfrac{x^4+x^3y-xy^3-y^4}{x^4+x^3y+2x^2y^2+xy^3+y^4}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$

Esm. 7. $\dfrac{4a^4-4a^2b^2+4ab^3-b^4}{6a^4+4a^3b-9a^2b^2-3ab^3+2b^4}=\dfrac{2a^2-2ab+b^2}{3a^2-ab-2b^2}.$

§ 3.

Murtosuuruuksia, joilla on sama nimittäjä, vaan eri osottajat, sanotaan *samanimisiksi*, mutta niitä, joilla on eri nimittäjät, *erinimisiksi*. Yhteenlaskettavat erinimiset murtosuuruudet ovat aina ensin tehtävät samanimisiksi.

Tämä teko perustaksen siihen todistoon tämän lu'un ensimäisessä pykälässä, että murtosuuruuden arvo jääpi entiselleen, jos sen osottaja sekä nimittäjä kerrotaan samalla suuruudella.

Olisivatko esm. murtosuuruudet $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{n}$ ja $\frac{c}{p}$ tehtävät samanimisiksi, niin se on selvä, että nimittäjät m, n ja p jakavat tarkoin tulonsa mnp. Kuin tämä tulo jaetaan ensiksi nimittäjällä m, niin osa np on se suuruus, jolla kerrottuna jakaja m antaa suuruuden mnp tuloksi. Jos nyt ensimäisen murtosuuruuden sekä osottaja että nimittäjä kerrotaan samalla suuruudella, np, niin näin saatu murtosuuruus $\frac{anp}{mnp}$ on selvästi sama-arvoinen kuin alkuperäinenkin $\frac{a}{m}$. Samoin saadaan murtosuuruudet $\frac{b}{n}$ ja $\frac{c}{p}$ toisiksi, mutta itsekunkin alkuperäisen kanssa sama-arvoisiksi, joidenka nimittäjinä on tulo mnp, ensimäisen sekä nimittäjä että osottaja kertoen suuruudella mp, koska n on sillä kerrottava antaaksensa yhteisen nimittäjän mnp tuloksi, ja toisen sekä osottaja että nimittäjä taas kertoen suuruudella mn, jolla p on kerrottava antaaksensa saman yhteisen nimittäjän tuloksi.

Murtosuuruudet $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{n}$ ja $\frac{c}{p}$ tehtyinä samanimisiksi ovat siis

$$\frac{anp}{mnp}, \frac{bmp}{mnp} \text{ ja } \frac{cmn}{mnp}$$

$$\text{sillä } \frac{anp}{mnp} = \frac{a}{m}, \frac{bmp}{mnp} = \frac{b}{n} \text{ ja } \frac{cmn}{mnp} = \frac{c}{p}.$$

Tästä nähdään nyt selvästi, että, olipa murtosuuruuksien luku kuinka iso hyvänsä, ne saadaan samanimisiksi itsekunkin sekä osottaja että nimittäjä kertoen kaikkien muiden nimittäjäin tulolla, sillä näin saapi jokainen entisten nimittäjäin tulon nimittäjäksensä. Mutta näin saatu yhteinen nimittäjä on usiasti liian iso, s. t. s. siinä on kertojoita isommissa koroissa kuin tarvitsisi.

Edellisestä jo selvästi huomataan, että jokainen lauseke k, jonka kaikki nimittäjät jakavat tarkoin, voidaan tehdä yhteiseksi nimittäjäksi, jos joka murtosuuruuden osottaja kerrotaan osalla, joka saadaan tämä lauseke k jakaen saman murtosuuruuden nimittäjällä, sillä jaon määrityksen mukaan saadaan yhteinen nimittäjä k entisen nimittäjän kertomalla mainitulla osalla, jolla siis osottajakin on kerrottava, ettei murtosuuruuden arvo muuttuisi.

Jos murtosuuruuksia tahdotaan tehdä samanimisiksi lyhyimmässä muodossa, niin niiden nimittäjäin pienin yhteinen jaettava on ensin etsittävä ja samanimisiksi teon sääntö on siis lyhyesti seuraava.

Murtosuuruuksien nimittäjäin pienin yhteinen jaettava etsitään, joka sitte jaetaan itsekunkin murtosuuruuden nimittäjällä ja näin saatu osa kerrotaan sen osottajalla, tulo tehdään vihdoin osottajaksi ja nimittäjäin pienin yhteinen jaettava nimittäjäksi.

Yleislaskusuuruuksien pienin yhteinen jaettava on lauseke, jonka kaikki suuruudet jakavat tarkoin ja joka sisältää ainoastansa tätä varten välttämättömästi tarpeelliset kertojat. Se on selvä, että pienimmässä kaikista yhteisistä jaettavista on vähin puustavi suuruuksia ja ne pienimmissä koroissa, sekä että sen numerokertoja on pienin.

Jos nyt esm. suuruuksien ab, bc, a^2c ja bc^3 pienin yhteinen jaettava olisi etsittävä, niin siinä pitää oleman a ja b kertojina, koska sen pitää olla tarkoin jaettava ensimäisellä suuruudella ab. Koska se myös on tarkoin jaettava toisella bc, niin sen pitää sisältää b ja c kertojina, s. o. paitsi entisiä vielä c. Samasta syystä pitää siinä olla kertojina kolmannen kertojat a, a ja c sekä neljännen b, c, c ja c, siis entisten lisäksi vielä yksi a ja kaksi c:tä. Siinä pitää siis oleman kaksi a:ta eli a toisessa korossa, yksi b ja kolme c:tä eli c kolmannessa korossa kertojina, eikä muita paitsi ykkönen.

Näiden suuruuksien pienin yhteinen jaettava on siis $aabccc = a^2bc^3$.

Suuruuksien tulo, joka myös on niiden yhteinen jaettava, on

$$abbca^2cbc^3 = a^3b^3c^5$$

ja sisältää siis enemmän kertojoita kuin niiden pienin yhteinen jaettava a^2bc^3.

Suuruuksien pienimmän yhteisen jaettavan etsimiselle saadaan edellisestä esimerkistä selvästi seuraava sääntö: *suuruuksien kaikki peruskertojat eroitetaan ja ne otetaan kertojiksi pien. yht. jaettavaan jokainen niin monta kertaa, kuin se on kertojana siinä suuruudessa, jossa se on useimman kerran, eli toisin,* *jokainen sillä korottimella, joka on sen isoin korotin alkuperäisissä suuruuksissa*

Muist. Peruskertojiksi nimitämme semmoisia, joita ei voida jakaa enää eri kertojihin eli joita ei muut suuruudet ja'a tarkoin kuin ne itse ja ykkönen.

Semmoisia ovat esm. kaikki ensimäisen nousun yksiöt, joidenka numerokertojina on ykkönen, sekä moniot joidenka osioiden numerokertojilla ei ole yhteistä jakajaa.

Murtosuuruuksien samanimisiksi teolle otamme nyt vaan moniaita

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. Suuruuksista $\frac{a}{4b}$, $\frac{3b^2}{a-b}$ ja $\frac{a+b}{2a^2b^2}$ saadaan $\frac{a^3b(a-b)}{4a^2b^2(a-b)}$, $\frac{12a^2b^4}{4a^2b^2(a-b)}$ ja $\frac{2(a^2-b^2)}{4a^2b^2(a-b)}$.

Esm. 2. Lausekkeet $\frac{2a}{3x+2y}$ ja $\frac{b-1}{18x^2-8y^2}$ muuttuvat seuraaviksi: $\frac{4a(3x-2y)}{2(3x+2y)(3x-2y)}$ ja $\frac{b-1}{2(3x+2y)(3x-2y)}$.

Esm. 3. Lausekkeista $\frac{2}{x^2-4}$, $\frac{2a-b}{3x-6}$, $\frac{3d}{2xy+4y}$ ja $\frac{1}{2}$ tulee $\frac{12y}{6y(x+2)(x-2)}$, $\frac{2y(x+2)(2a-b)}{6y(x+2)(x-2)}$, $\frac{9d(x-2)}{6y(x+2)(x-2)}$ ja $\frac{3y(x+2)(x-2)}{6y(x+2)(x-2)}$.

§ 4.

Murtosuuruuksien yhteenlasku ja yhden semmoisen poistaminen toisesta.

Edellisen lu'un §:ssä 4 on nähty, että

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k}+\frac{c}{k}=\frac{a+b+c}{k},$$

josta yhtälöstä selvästi nähdään, että samanimisten murtosuuruksien summa on murtosuuruus, jonka osottaja on alkuperäisten osottajoiden summa ja nimittäjä niiden yhteinen nimittäjä.

Tästä saadaan murtosuuruuksien yhteenlaskulle seuraava sääntö:

Yhteenlaskettavat murtosuuruudet tehdään ensin samanimisiksi, joiden osottajat sitte lasketaan yhteen ja näin saadulle summalle pannaan niiden yhteinen nimittäjä nimittäjäksi.

Jos yhteenlaskettavien seassa on kokosuuruuksia, niin niille voidaan antaa ykkönen nimittäjäksi, joten ne saavat murtomuodon. Se on selvä että tämmöiset suuruudet tulevat kerrottaviksi kaikkien nimittäjäin pienimmällä yhteisellä jaettavalla, joten saadut tulot ovat tehtävät niiden osottajiksi suuruuksia samanimisiksi tehdessä.

Yleislaskusuuruuden poistaminen toisesta on, niin kuin tiedämme, sama kuin sen vastinaisen suuruuden yhteenlasku toisen kanssa. Sentähden tapahtuu murtosuuruuden poistaminen toisesta saman säännön mukaan kuin yhteenlaskukin.

Koska $\frac{+a}{b} = +\frac{a}{b}$ ja $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$, niin murtosuuruuden vastinainen suuruus saadaan osottajan vastinainen suuruus jakaen nimittäjällä. Jos sentähden poistettavan murtosuuruuden osottaja on monio, niin sen osioiden merkit ovat ensin muutettavat vastaisiksi ja näin saatu vastinainen suuruus on sitte laskettava yhteen toisen eli toisien kanssa.

Muist. Murtosuuruuden vastinainen suuruus saadaan myös nimittäjän merkki muuttaen vastaiseksi, sillä $\frac{a}{+b} = +\frac{a}{b}$ ja $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$, mutta poistamisessa ei kuitenkaan nimittäjän merkin muuttaminen tule kysymykseen.

Esimerkkiä.

Esm. 1. $\frac{a^2+ab}{3c} + \frac{a^2-ab}{3c} = \frac{a^2+ab+a^2-ab}{3c} = \frac{2a^2}{3c}$.

Esm. 2. $\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b} - \frac{3b^2+2ab-a^2}{a+b} = \frac{2a^2-2b^2}{a+b} = 2(a-b)$.

Esm. 3. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Esm. 4. $\frac{a}{b} - \frac{2a}{3b} = \frac{3a}{3b} - \frac{2a}{3b} = \frac{a}{3b}.$

Esm. 5. $m - \frac{am}{b} = \frac{m}{1} - \frac{am}{b} = \frac{bm}{b} - \frac{am}{b} = \frac{bm - am}{b} = \frac{m(b-a)}{b}.$

Esm. 6. $\frac{a^2 - d^2}{2} + \frac{d^2}{4} = \frac{2a^2 - 2d^2}{4} + \frac{d^2}{4} = \frac{2a^2 - d^2}{4}.$

Esm. 7. $\frac{a^2}{2a - b} - b = \frac{a^2 - (2ab - b^2)}{2a - b} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2a - b} =$

$= \frac{(a-b)^2}{2a - b}.$

Esm. 8. $a^2 - b^2 - \frac{a^3 + 2b^3}{2a} = \frac{a^2 - b^2}{1} - \frac{a^3 + 2b^3}{2a} =$

$= \frac{2a^3 - 2ab^2 - (a^3 + 2b^3)}{2a} = \frac{a^3 - 2ab^2 - 2b^3}{2a}.$

Esm. 9. $\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} - \frac{d}{x^4} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx - d}{x^4}.$

Esm. 10. $\frac{2a}{3b} - \frac{5c}{4ab^2} + \frac{5d}{6a^2b} = \frac{8a^3b - 15ac + 10bd}{12a^2b^2}.$

Esm. 11. $\frac{13a - 5b}{4} - \frac{7a - 2b}{6} - \frac{2a}{3} =$

$= \frac{39a - 15b - (14a - 4b) - 8a}{12} = \frac{17a - 11b}{12}.$

Esm. 12. $\frac{3a + b + x}{5a} - \frac{2a + b}{3b} + \frac{7a - 2b}{9a} =$

$= \frac{47ab - b^2 + 9bx - 30a^2}{45ab}.$

Esm. 13. $\frac{az}{a^2 - z^2} - \frac{a - z}{a + z} = \frac{az - (a^2 - 2az + z^2)}{(a+z)(a-z)} =$

$= \frac{3az - a^2 - z^2}{a^2 - z^2}.$

Esm. 14. $\frac{ac}{a^2 - 4y^2} + \frac{bd}{ac + 2cy} = \frac{ac^2 + abd - 2bdy}{c(a^2 - 4y^2)}.$

Esm. 15. $\dfrac{b-1}{2ab+b}-\dfrac{2c-1}{4ac+2c}=\dfrac{2bc-2c-(2bc-b)}{2bc(2a+1)}=$

$=\dfrac{b-2c}{2bc(2a+1)}.$

Esm. 16. $\dfrac{a-2}{a+3}-\dfrac{a-3}{a+4}=\dfrac{a^2+2a-8-(a^2-9)}{(a+3)(a+4)}=$

$\dfrac{2a+1}{a^2+7a+12}.$

Esm. 17. $\dfrac{1}{x^2-3x}-\dfrac{7}{4x^2+16x}+\dfrac{3}{4x}=$

$=\dfrac{4x+16-(7x-21)+3x^2+3x-36}{4x(x-3)(x+4)}=$

$=\dfrac{1+3x^2}{4x(x^2+x-12)}.$

Esm. 18. $\dfrac{a^3}{(a+b)^3}-\dfrac{ab}{(a+b)^2}+\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a^3+ab^2+b^3}{(a+b)^3}.$

Esm. 19. $\dfrac{3a}{5a-5b}+\dfrac{2a^2-3b^2}{15a^2-15b^2}-\dfrac{3a-2b}{3a+3b}=$

$=\dfrac{34ab-4a^2-13b^2}{15(a+b)(a-b)}.$

Esm. 20. $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a-b}{2a}+\dfrac{3b-2a}{b-2a}=\dfrac{b^3+3ab^2-4a^3}{2ab(b-2a)}.$

Esm. 21. $\dfrac{2ax+x^2}{(a-x)^2}-\dfrac{2ax+x^2}{(a+x)^2}-\dfrac{8x^2}{a^2-x^2}=$

$\dfrac{4ax^3+8x^4}{(a-x)^2(a+x)^2}.$

Esm. 22. $\dfrac{5x+4y}{5x-4y}-\dfrac{3x^2-2y^2}{25x^2-16y^2}-\dfrac{3y^2}{5x^2+4xy}=$

$\dfrac{22x^3+40x^2y+3xy^2+12y^3}{x(5x+4y)(5x-4y)}.$

Esm. 23. $\dfrac{a}{b+x}-\dfrac{c}{x}+\dfrac{3c}{4x}+2b=\dfrac{4ax-bc-cx+8b^2x+8bx^2}{4bx+4x^2}.$

Esm. 24. $\frac{3x}{4-8x+4x^2}+\frac{3}{8-8x}+\frac{1}{8+8x}-\frac{x}{4-4x^2}=$

$=\frac{6x^2+2x+4}{8(1+x)(1-x)^2}=\frac{3x^2+x+2}{4(x^3-x^2-x+1)}.$

Esm. 25. $2x^2-\frac{3y}{x}-\left(3y^2-5x^2-\frac{3x}{y}\right)=7x^2-3y^2+\frac{3x}{y}$

$-\frac{3y}{x}=7x^2-3y^2+\frac{3(x^2-y^2)}{xy}=$

$=\frac{7x^3y-3xy^3+3x^2-3y^2}{xy}.$

Esm. 26. $\frac{3a^m(a+b)^{m-2}}{c^{m+2}d^{m-3}f^4}-\frac{a^{3m}-2acd^{4-m}}{c^{m+1}df^n(a+b)^2}-\frac{1}{c^{m-2}f^{n-3}(a+b)^2}=$

$=\frac{3a^mf^{n-4}(a+b)^m-a^{3m}cd^{m-4}+2ac^2-c^4d^{m-3}f^3}{c^{m+2}d^{m-3}f^n(a+b)^2}.$

§ 5.
Kertominen ja jako.

Tämän lu'un ensimäisessä pykälässä on jo nähty, että murtosuuruuden kertominen toisella suuruudella tapahtuu sen osottajan kertomalla toisella ja jako sen nimittäjän kertomalla jakajalla, niin että $\frac{a}{b}\cdot k=\frac{ak}{b}$ ja $\frac{a}{b}:k=\frac{a}{bk}$. Jos k itse on murtosuuruus esm. $\frac{c}{d}$, niin se on selvä, että $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot\frac{c}{d}}{b}$. Jos nyt taas tulon $\frac{a\cdot\frac{c}{d}}{b}$ osottaja sekä nimittäjä kerrotaan suuruudella d, niin sen arvo jääpi entisellensä ja sentähden on

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

koska $\frac{a\cdot\frac{c}{d}\cdot d}{b\cdot d}=\frac{\frac{acd}{d}}{bd}=\frac{ac}{bd}.$

Tästä nähdään selvästi, että *kahden murtosuuruuden tulo saadaan ensimäisen osottaja kertoen toisen osottajalla ja nimittäjä toisen nimittäjällä.*

Edellisestä on jo selvä, että kuin toinen kertojista on kokosuuruus, niin toisen osottaja on sillä kerrottava.

Koska usiamman suuruuden tulo saadaan ensimäinen kertoen toisella, näin saatu tulo kolmannella j. n. e., niin se on selvä, että *usiamman (kuinka monen hyvänsä) murtosuuruuden tulo saadaan osottajoiden tulo jakaen nimittäjöiden tulolla.*

Se on itsestänsä selvä, että yhteiset kertojat tulon osottajasta ja nimittäjästä voidaan jättää pois ja murtosuuruus näin lyhentää ennen kuin kertominen tehdään.

Tätä sanotaan ristiin lyhentämiseksi, kuin tässä aina tullaan jättämään pois sama kertoja yhden murtosuuruuden osottajasta ja toisen nimittäjästä.

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $\frac{3ab^2}{7c} \cdot \frac{xy}{2cz} = \frac{3ab^2xy}{14c^2z}$.

Esm. 2. $\frac{2a}{3b} \cdot \frac{5b}{4c} = \frac{5a}{6c}$.

Esm. 3. $\frac{4x}{3y} \cdot \frac{4y^3}{9ax} = \frac{16y^2}{27a}$.

Esm. 4. $3a^2 \cdot \frac{5b}{12a^3} = \frac{3a^2}{1} \cdot \frac{5b}{12a^3} = \frac{5b}{4a}$.

Esm. 5. $-\frac{a+b}{a^2-b^2} \cdot \frac{a-b}{a+b} = -\frac{1}{a+b}$.

Esm. 6. $\frac{a^2+b^2}{a+b} \cdot \frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2+b^2}{a-b}$.

Esm. 7. $-\frac{(a-b)^3}{a^2-2ab+b^2} \cdot -\frac{1}{a-b} = \frac{(a-b)^2}{a^2-2ab+b^2} = 1$

Esm. 8. $\frac{x^2-a^2}{m}\cdot\frac{mx-ma}{x+a}=\frac{(x+a)(x-a)}{m}\cdot\frac{m(x-a)}{x+a}=$

$=\frac{(x-a)^2}{1}=x^2-2ax+a^2.$

Esm. 9. $(a-b)\cdot-\frac{a+b}{c}=\frac{a-b}{1}\cdot-\frac{a+b}{c}=-\frac{a^2-b^2}{c}=$

$=\frac{-(a^2-b^2)}{c}=\frac{b^2-a^2}{c}.$

Esm. 10. $\left(\frac{a}{b-c}-1\right)(b-c)=\left(\frac{a}{b-c}-\frac{b-c}{b-c}\right)\cdot\frac{b-c}{1}=$

$=\frac{a-b+c}{b-c}\cdot\frac{b-c}{1}=a-b+c.$

Esm. 11. $\frac{x}{2x+2}\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{2x+2}\cdot\left(\frac{x}{1}-\frac{1}{x}\right)=$

$=\frac{x}{2(x+1)}\cdot\frac{x^2-1}{x}=\frac{x-1}{2}.$

Esm. 12. $\frac{3}{5}a^3b\cdot\frac{2}{3}ab^3=\frac{3}{5}\cdot\frac{a^3b}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{ab^3}{1}=\frac{2a^4b^4}{5}.$

Esm. 13. $\frac{px}{2n}\cdot\frac{4cn^2}{-ax^2}\cdot\frac{-5b}{6c^2p}=\frac{5bn}{3acx}.$

Esm. 14. $\frac{1-x^2}{2x}\cdot 3ax\cdot\frac{1}{2c+2cx}\cdot\frac{2}{3}=\frac{a(1-x)}{2c}.$

Esm. 15. $\frac{a}{b^2}\cdot\frac{b}{d}\cdot\frac{2d}{a-b}\cdot\frac{a^2+b^2}{a+b}\cdot\frac{ab}{3(a+b)}=\frac{2a^2(a^2+b^2)}{3(a-b)(a+b)^2}.$

Esm. 16. $\frac{2a}{2b-c}\cdot\left(\frac{b+c}{3}-\frac{c}{2}\right)=\frac{a}{3}.$

Esm. 17. $\frac{2a^{m-3}b^{m+2}}{3x^5y^nz^p}\cdot\frac{x^{p+1}y^3}{6ab^m}=\frac{a^{m-4}b^2x^{p-4}}{9y^{n-3}z^p}.$

Koska taas $\frac{a}{b}:k=\frac{a}{bk}$ ja sentähden myös $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b\cdot\frac{c}{d}}$, niin, kuin osan $\frac{a}{b \cdot \frac{c}{d}}$ osottaja sekä nimittäjä kerrotaan suuruudella d, saadaan

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

koska $\frac{ad}{b \cdot \frac{c}{d} \cdot d} = \frac{ad}{bc}$, sillä $b \cdot \frac{c}{d} \cdot d = \frac{bcd}{d} = bc$.

Tästä nähdään taas, että *murtosuuruuden jako toisella tapahtuu jaettavan osottaja kertoen jakajan nimittäjällä ja jaettavan nimittajä jakajan osottajalla.*

Murtosuuruuksien jaon sääntö lausutaan myös lyhyesti näin: *käännä jakaja ylösalasin, s. t. s. tee sen osottaja nimittäjäksi ja nimittäjä osottajaksi, ja kerro sitte osottaja osottajalla ja nimittäjä nimittäjällä.*

Edellisestä on jo selvä, että, kuin jakaja on kokosuuruus, jaettavan nimittäjä tulee sillä kerrottavaksi. Jos jaettava taas on kokosuuruus niin se tulee kerrottavaksi jakajan nimittäjällä ja jakajan osottaja tulee näin saadulle tulolle nimittäjäksi, sillä $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{\frac{bc}{c}} = \frac{ac}{b}$.

Näissä tapauksissa voidaan myös panna ykkönen nimittäjäksi kokosuuruudelle, joten se saapi murtomuodon ja sitä käytetään sitte kuin murtosuuruutta ainakin.

Se on selvä että ristiin lyhentämistä voidaan käyttää jaossa samoin kuin kertomisessakin, jakajan ylösalasin käännettyä.

Harjoitukseksi murtosuuruuksien jaossa otamme vielä muutamia

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $\frac{4a^3b}{5c^2} : \frac{2ab^2}{3c^2} = \frac{4a^3b}{5c^2} \cdot \frac{3c^2}{2ab^2} = \frac{6a^2}{5b}$.

Esm. 2. $10a^3 : \frac{4a^2}{3b^2} = \frac{15ab^2}{2}$.

Esm. 3. $\frac{a^2+b^2}{a+b} : \frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2+b^2}{a-b}.$

Esm. 4. $\frac{a^2+b^2}{a-b} : -(a+b) = -\frac{a^2+b^2}{a-b} \cdot \frac{1}{a+b} =$

$= -\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}.$

Esm. 5. $-\frac{4x+2}{5} : \frac{2x+1}{5x} = -\frac{2(2x+1)}{5} \cdot \frac{5x}{2x+1} = -2x.$

Esm. 6. $\frac{x^2-9}{5} : \frac{x+3}{4} = \frac{4(x-3)}{5}.$

Esm. 7. $\frac{9x^2-3x}{5} : \frac{x^2}{5} = \frac{3(3x-1)}{x}.$

Esm. 8. $\frac{5a^2-5b^2}{2a} : \frac{4a+4b}{6b} = \frac{15b(a-b)}{4a}.$

Esm. 9. $a^2 : \frac{ab}{a-b} = \frac{a(a-b)}{b}.$

Esm. 10. $-\frac{2}{3}m^4 : -\frac{2}{9}m^3n = -\frac{2m^4}{3} \cdot -\frac{9}{2m^3n} = \frac{3m}{n}.$

Esm. 11. $\left(3a + \frac{4b}{5}\right) : \left(3 - \frac{a}{3}\right) = \frac{15a+4b}{5} \cdot \frac{3}{9-a} = \frac{45a+12b}{45-5a}.$

Esm. 12. $\frac{a^3-b^3}{2c} : \frac{a-b}{4c} = \frac{2a^3-2b^3}{a-b} = 2(a^2+ab+b^2).$

Esm. 13. $\left(1 - \frac{a^3}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x^2} - \frac{a}{x^3}\right) = \frac{x^3-a^3}{x-a} = x^2+ax+a^2.$

Esm. 14. $\frac{2x^{3n-5m}y^{2n-3}}{7a^mb^3c} : \frac{4x^{1-5m}}{3ab^{n-1}y^5} = \frac{3b^{n-4}y^{2n+2}x^{3n-1}}{14a^{m-1}c}.$

Esm. 15. $\left(\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b}\right) : \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}\right) = \frac{a^2+2ab-b^2}{a^2+b^2}.$

Muistutuksia murtosuuruuksien arvoista muutamissa eritapauksissa.

Jos murtosuuruuden nimittäjän numero-arvo isonee ja osottaja on muuttumaton, niin murtosuuruuden itsensä numero-arvo pienenee, sillä se on selvä, että, kuin mikä suuruus a tahansa jaetaan ensin toisella b ja sitte numero-arvonsa puolesta isommalla suuruudella esm. $2b$, ensiksi saatu osa $\frac{a}{b}$ on numero-arvonsa puolesta isompi, tässä tapauksessa 2 kertaa niin iso, kuin viimeksi saatu osa $\frac{a}{2b}$.

Tässä on tarkoin muistettava puheen olevan ainoastansa numero-arvoista, sillä suuruuksien merkkinensä arvot voivat olla päin vastoinkin edellä lausuttua sääntöä, koska poistosuuruuksista se on isoin, jolla on pienin numero-arvo.

Koska nyt murtosuuruuden numero-arvo pienenee, kuta enemmän sen nimittäjän numero-arvo isonee, niin edellinen voipi tulla niin lähelle nollaa, kuin vaan tahdotaan, jos jälkimäisen annetaan tarpeeksi kasvaa. Jos sentähden nimittäjä kasvaa äärettömäksi (suuremmaksi kuin mikä määrätty suuruus hyvänsä), niin murtosuuruuden numero-arvo pienenee äärettömästi, tulee pienemmäksi kuin mikä määrätty luku hyvänsä, s. t. s. nollan arvoiseksi.

Kuin äärettömän isoa suuruutta merkitään ikään kuin pitkälleen pannulla kahdeksan merkillä (∞), niin edellisestä seuraa, että

$$\frac{a}{\infty} = 0,$$

jossa a merkitsee mitä äärellistä suuruutta hyvänsä.

Jos taas osottaja kasvaisi äärettömäksi ja nimittäjä olisi muuttumaton äärellinen suuruus, niin murtosuuruuden numero-arvo kasvaisi myös selvästi äärettömäksi, j. t. s.

$$\frac{\infty}{a} = \infty,$$

kuin vaan a on äärellinen suuruus.

Kuin murtosuuruuden osottaja taas on muuttumaton äärellinen suuruus ja nimittäjän numero-arvo pienenee, niin murtosuuruuden itsensä numero-arvo isonee. Niin on esm. $\frac{1}{\frac{1}{10}}=10$, $\frac{1}{\frac{1}{100}}=100$, $\frac{1}{\frac{1}{1000}}=1000$ j. n. e.

Jos sentähden nimittäjä lähenee nollaa, niin murtosuuruuden numero-arvo kasvaa äärettömäksi, kuin vaan osottaja on äärellinen sauruus. Tästä saadaan yhtälö

$$\frac{a}{0}=\infty.$$

Tämä yhtälö seuraakin jo selvästi ensimäisestä $\frac{a}{\infty}=0$ ja kumpasestakin saadaan yhtälö

$$0\cdot\infty=a,$$

joka merkitsee, että kahden suuruuden, joista toinen kasvaa äärettömäksi ja toinen pienenee nollan arvoiseksi, tulo voipi olla mikä suuruus hyvänsä.

Tässä on muistettava, että numero-arvonsa puolesta äärettömän pieni suuruus on pidettävä nollan arvoisena (nollana) ainoastansa äärellisten ja äärettömän isojen suuruuksien suhteen, eikä sitä toisiin äärettömän pieniin suuruuksiin verratessa.

Mikä äärellinen suuruus a hyvänsä kerrottuna nollalla antaa taas nollan tuloksi s. t. s.

$$0\cdot a=0,$$

josta seuraa, että

$$\frac{0}{0}=a, \text{ s. o.,}$$

nolla jaettu nollalla voipi antaa osaksi minkä suuruuden a hyvänsä.

Jos sentähden murtosuuruuden osottajan sekä nimittäjän numero-arvot ovat äärettömän pienet, niin murtosuuruuden itsensä numero-arvo on määräämätön, voipi olla mikä luku hyvänsä.

Samoin on murtosuuruuden numero-arvo määräämätön, kuin sen osottajan sekä nimittäjän numero-arvot ovat äärettömän isot, sillä mikä suuruus a hyvänsä kerrottuna äärettömän isolla suuruudella antaa numero-arvonsa puolesta äärettömän ison tulon, s. o.

$$\infty \cdot a = \infty,$$

josta saadaan

$$\frac{\infty}{\infty} = a,$$

jossa a voipi merkitä mitä suuruutta hyvänsä. Viimenen yhtälö seuraa myös selvästi edellisestä $\frac{\infty}{a} = \infty$.

Äärettömän iso suuruus vähennetty toisella äärettömän isolla suuruudella on myös paitsi vielä muitakin, määräämätön suuruus, voipi merkitä mitä suuruutta hyvänsä, josta seuraa yhtälö

$$\infty - \infty = a,$$

jossa a voipi merkitä mitä suuruutta hyvänsä.

Kolmas Luku.

Suhde-oppi.

§ 1.

Määrityksiä.

1. *Suuruuksia, joita isoutensa puolesta voidaan verrata toisiinsa, sanotaan samanlaatuisiksi. Suuruudet ovat siis samanlaatuiset, jos niistä voidaan ajatella yhden olevan isomman kuin toisen eli yhtä ison toisen kanssa.*

2. *Suuruutta sanotaan monikertaiseksi toisesta, jos se sisältää jonkun paljouden toisesta kokonansa, niin ettei yhtään osaa jää jälelle.* Silloin mittaa möys toinen (pienempi) suuruus tarkoin ensimäisen ja sanotaan *tasa-osaksi* siitä.

Se on selvä että laskusuuruuden mikä monikertainen hyvänsä saadaan suuruus kertoen kokolu'ulla.

Kaksikertainen saadaan suuruus kertoen 2:lla, kolmikertainen 3:lla j. n. e.

3. *Suhde kahden samanlaatuisen suuruuden välillä on ensimäisen isoutensa puolesta vertaaminen toiseen.*

Tämmöinen vertaaminen voipi tapahtua kahdella eri tavalla. Ensiksi voidaan tiedustaa, kuinka paljo isompi taikka pienempi ensimäinen on kuin toinen.

Tämmöinen vertaaminen saapi nimen: *laskusuhde* ja sen näyttäjä saadaan pienempi suuruus ottaen pois isommasta.

Toiseksi voidaan tiedustaa, kuinka monta kertaa ensimäinen suuruus sisältää toisen eli kuinka ison osan toisesta, s. t. s. kuinka monta kertaa toinen eli kuinka iso osa toisesta mahtuu ensimäiseen.

Tätä vertaamista sanotaan *mittaussuhteeksi*, sillä se on aivan sama kuin ensimäisen suuruuden mittaaminen toisella. Vastedes ymmärämme suhteella aina mittaussuhdetta.

Se on selvä, että kahden laskusuuruuden välillä olevan mittaussuhteen näyttäjä, s. t. s. se luku, joka näyttää kuinka monta kertaa eli kuinka iso osa toisesta suuruudesta mahtuu ensimäiseen, saadaan ensimäinen jakaen toisella, jonkatähden sitä (suhdetta) merkitäänkin jakomerkillä (:) suuruuksien välillä, jolloin ensimäinen suuruus kirjoitetaan merkin etu- ja toinen sen jälkipuolelle.

Kahden laskusuuruuden välillä olevan suhteen näyttäjä on siis osa, joka saadaan ensimäinen jakaen toisella. Jos sentähden

$$a:b = m,$$

jossa m on koko- eli murtoluku, niin m on suuruuksien, a ja b, välillä olevan suhteen näyttäjä. Suuruuksia a ja b sanotaan suhteen *jäseniksi*, a:ta *edelliseksi* ja b:tä *jälkimäiseksi*. Suhde laskusuuruuksien välillä on siis jako, jossa suhteen edellinen jäsen on jaettava, jälkimäinen jakaja ja suhteen näyttäjä tästä jaosta saatu osa.

4. *Verranto on kahden suhteen yhtä-isous ja suuruuksia, jotka ovat verrannossa (verrannon jäseniä), sanotaan verrannollisiksii.*

Jos sentähden laskusuuruudet a, b, c ja d ovat semmoiset, että a:n ja b:n välillä oleva suhde on yhtä iso kuin c:n ja d:n välillä olevakin, s. t. s. jos a jaettuna b:llä antaa yhtä ison osan kuin c jaettuna d:llä, niin ne ovat verrannolliset ja verrantoa merkitään näin

$$a:b = c:d,$$

joka lausutaan, a:n suhde b:hen on sama kuin c:n d:hen eli lyhyesti a b:hen kuin c d:hen.

5. *Jos taas suuruus a jaettuna toisella b antaa isomman osan kuin kolmas c jaettuna neljännellä d, niin silloin sanotaan* a:n *suhteen* b:hen *olevan isomman kuin* c:n d:hen, jota suhteiden eri-isoutta merkitään seuraavalla tavalla

$$a:b>c:d.$$

6. *Kuin taas osa* $\frac{a}{b}$ *on pienempi kuin osa* $\frac{c}{d}$, *niin* a:n *suhteen* b:hen *sanotaan silloin olevan pienemmän kuin* c:n d:hen, jota merkitään näin

$$a:b<c:d.$$

Että suuruudet, jotka ovat verrannolliset edellisen määrityksen mukaan, ovat myös verrannolliset Euklideen määrityksen mukaan, on helppo näyttää. Lasku suuruudet a, b, c ja d ovat edellisessä merkityksessä verrannolliset, s. t. s.

$$a:b=c:d,$$

kuin osat $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ ovat yhtä isot, s. o. kuin $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Nämä yhtä isot osat antavat taas, kerrottuina millä kokolu'ulla m hyvänsä, yhtä isot tulot, josta saadaan

$$\frac{ma}{b}=\frac{mc}{d}.$$

Kuin nämä yhtä isot suuruudet taas jaetaan millä kokolu'ulla n hyvänsä, niin saadut osat ovat yhtä isot, josta seuraa

$$\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}.$$

Koska nämä murtolu'ut nyt ovat yhtä isot, niin niiden osottajoiden ma ja mc pitää oleman samalla kertaa isommat, yhtä isot eli pienemmät kuin itsekunkin nimittäjä nb ja nd, s. t. s.

kuin $ma>nb$, niin $mc>nd$,
kuin $ma=nb$, niin $mc=nd$, mutta
kuin $ma<nb$, niin $mc<nd$,

koska näiden yhtä isojen lukujen pitää molempien oleman samalla kertaa isommat, yhtä isot eli pienemmät kuin ykkönen.

Nämä neljä suuruutta a, b, c ja d ovat siis semmoiset, että yhtä monikertaiset ensimäisestä ja kolmannesta, ma ja mc, ovat samalla kertaa isommat, yhtä isot eli pienemmät kuin yhtä monikertaiset toisesta ja neljännestä, nb ja nd, s. t. s. kuin ensimäisen monikertainen, ma, on isompi kuin toisen, nb, kolmannen, mc, on myös isompi kuin neljännen, nd, kuin ensimäisen, ma, on yhtä iso kuin toisen, nb, kolmannen, mc, myös on yhtä iso kuin neljännen, nd, mutta kuin vihdoin ensimäisen monikertainen, ma, on pienempi kuin toisen, nb, kolmannen mc, myös on pienempi kuin neljännen, nd, olivatpa yhtä monikertaiset ensimäisestä ja kolmannesta ja toiset yhtä monikertaiset toisesta ja neljännestä kuinka monikertaiset hyvänsä, jonkatähden suuruudet a, b, c ja d ovat verrannolliset Euklideen määrityksen mukaan, j. o. t.

Jos taas lasku suuruudet a, b, c ja d olisivat verrannolliset Euklideen määrityksen mukaan, mutta eivät edellisen, s. o., osat $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ eivät olisi yhtä isot, vaan toinen esm. $\frac{a}{b}$ isompi kuin toinen $\frac{c}{d}$, niin voitaisiin aina, olivatpa suuruudet mitallisia tai mitattomia lukuja, saada mitallinen murtoluku, joka olisi pinempi kuin $\frac{a}{b}$, mutta isompi kuin $\frac{c}{d}$, koska osien $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ arvot voidaan saada niin lähimäärin kuin vaan tahdotaan, jos kohta ne ovat mitattomia lukuja. Olisko murtolukujen, $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$, väli, $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$, vähintäinkin yhtä iso kuin $\frac{1}{k}$, jossa k merkitsee kokolukua, niin osan $\frac{a}{b}$ arvo voidaan kyllä laskea niin lähimäärin, että tämän osan ja mitallisen murtolu'un esm. $\frac{n}{m}$ väli $\frac{a}{b}-\frac{n}{m}$ olisi pienempi kuin $\frac{1}{k}$, jolloin myös olisi

$$\frac{a}{b} > \frac{n}{m}, \text{ mutta } \frac{n}{m} > \frac{c}{d}.$$

Edellisessä merkitsevät m ja n kokolukuja.

Jos nyt murtolu'ut $\frac{a}{b}$ ja $\frac{n}{m}$ molemmat kerrotaan lu'ulla m, niin tulo $\frac{ma}{b}$ on selvästi isompi kuin toinen $\frac{mn}{m}$, s. t. s.

$$\frac{ma}{b} > \frac{mn}{m}.$$

Kuin nämä viimeset murtosuuruudet taas jaetaan lu'ulla n, niin saadaan selvästi

$$\frac{ma}{nb} > \frac{mn}{nm}.$$

Aivan samalla tavalla saadaan myös

$$\frac{mn}{nm} > \frac{mc}{nd}.$$

Murtolu'un $\frac{mn}{nm}$ arvo on nyt selvästi yksi, josta seuraa että

$$\frac{ma}{nb} > 1 \text{ mutta } \frac{mc}{nd} < 1.$$

Koska taas murtolu'un $\frac{ma}{nb}$ arvo on isompi ykköstä, niin sen osottajan, ma pitää oleman isomman kuin nimittäjä nb, mutta mc on pienempi kuin nd, koska $\frac{mc}{nd}$ on pienempi ykköstä.

Mutta se on taas mahdotoin että

$$ma > nb, \text{ silloin kuin } mc < nd,$$

koska suuruudet a, b, c ja d ovat verrannolliset Euklideen määrityksen mukaan, koska silloin ensimäisen ja kolmannen yhtä monikertaisten ma ja mc pitää aina oleman samalla kertaa isommat, yhtä isot eli pienemmät kuin toisen ja neljännen yhtä monikertaiset nb ja nd, s. o. kuin

$$ma > nb, \text{ niin } mc > nd.$$

Sentähden ei myös osa, $\frac{a}{b}$, voi olla isompi kuin $\frac{c}{d}$. Samoin todistetaan, että $\frac{a}{b}$ ei voi olla pienempikään kuin $\frac{c}{d}$, josta seuraa, että

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

ja suuruudet siis verrannolliset edellisen määrityksenkin mukaan. Tässä edellä määritetty verranto on siis sama kuin Euklideenkin, vaikka määritykset ovat erilaiset.

§ 2.

Todistoja.

1. *Jos neljä suuruutta a, b, c ja d ovat verrannolliset, niin reunimaisten tulo on yhtä iso keskimäisten tulon kanssa*, s. t. s. jos

$$a:b=c:d,$$

$$\text{niin } ad=bc.$$

Todellakin on, kuin $a:b=c:d$, myös $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, josta taas kertomalla tulolla bd saadaan $\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d}$ ja siis $ad=bc$, j. o. t.

2. *Jos taas kaksi tuloa, kumpanenkin kahdesta kertojasta, ovat yhtä isot, niin kertojat ovat verrannolliset niin, että toisen tulon kertojat ovat reunimaiset ja toisen keskimäiset jäsenet verrannossa*, s. o. jos

$$ad=bc,$$

niin

$$a:b=c:d \text{ eli } a:c=b:d \text{ eli } b:a=d:c \text{ j. n. e.}$$

Koska $ad=bc$, niin $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$ ja sentähden $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, josta taas $a:b=c:d$.

Jos taas tulot ad ja bc jaetaan tulolla cd, niin saadaan $\frac{ad}{cd}=\frac{bc}{dc}$ ja siis $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, josta sitte $a:c=b:d$ j. n. e., j. o. t.

3. *Kuin neljä suuruutta ovat verrannolliset, ensimäinen toiseen kuin kolmas neljänteen, niin silloin on myös ensimäisen suhde kolmanteen sama kuin toisen neljänteen, s. o. ne ovat verrannolliset, jos ne vuorotetaan. Samoin on silloin toisen suhde ensimäiseen sama kuin neljännen kolmanteen, (ne ovat käännettyinäkin verrannolliset).*

Jos $a:b=c:d$, niin ensimäisen todiston mukaan on $ad=bc$, josta taas toisen todiston mukaan seuraa

$$a:c=b:d \text{ ja myös } b:a=d:c, \text{ j. o. t.}$$

4. *Kuin neljä suuruutta a, b, c ja d ovat verrannolliset, niin että $a:b=c:d$, niin ensimäisen ja toisen summa on toiseen samassa suhteessa kuin kolmannen ja neljännen summa neljänteen* s. t. s.

$$(a+b):b=(c+d):d.$$

Todellakin on, kuin $a:b=c:d$, $ad=bc$, josta taas saadaan $ad+bd=bc+bd$ eli $(a+b)\cdot d=(c+d)\cdot b$, josta toisen todiston mukaan seuraa

$$(a+b):b=(c+d):d, \text{ j. o. t.}$$

5. *Jos taas $a:b=c:d$ ja $a>b$ sekä $c>d$, niin $(a-b):b=(c-d):d$.*

Sillä koska $a:b=c:d$, niin $ad=bc$ ja siis $ad-bd=bc-bd$ eli $(a-b)d=(c-d)b$ ja sentähden

$$(a-b):b=(c-d):d.$$

6. *Jos kuinka monta suuruutta hyvänsä ovat perättäin verrannollisia, niin edellisten summa on jälkimäisten summaan samassa suhteessa kuin jokainen edellinen jälkimäiseensä*, s. o. jos $a:b=c:d=e:f=\cdots$ niin $(a+c+e+\cdots):(b+d+f+\cdots)=$ $=a:b=c:d=\cdots$

Todellakin, koska $a:b=c:d$, niin (tod. 3) $a:c=b:d$ ja (tod. 4), $(a+c):c=(b+d):d$, josta taas (tod. 3) $(a+c):(b+d)=$ $=c:d$.

Koska taas $c:d=e:f$ niin $(a+c):(b+d)=e:f$, sillä kuin $(a+c):b+d)=c:d$, niin $\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$ ja $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, koska $c:d=e:f$ ja sentähden on

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{e}{f}, \text{ josta } (a+c):(b+d)=e:f.$$

Viimesestä verrannosta saadaan taas samoin kuin äskenkin

$$(a+c):e=(b+d):f,\ (a+c+e):e=(b+d+f):f \text{ ja}$$
$$(a+c+e):(b+d+f)=e:f=a:b\cdots \text{ j. n. e.}$$

7. *Jos neljä suuruutta a, b, c ja d keskenänsä ja toiset neljä suuruutta e, f, g ja h myös keskenänsä ovat verrannollisia, niin että* $a:b=c:d$ *ja* $e:f=g:h$, *niin silloin ovat myös tulot, jotka saadaan, kuin toisen näistä verrannoista jäsenet kerrotaan toisen vastaavilla jäsenillä, verrannolliset,* s. t. s. silloin on $ae:bf=cg:dh$.

Todellakin koska $a:b=c:d$ ja $e:f=g:h$, niin $ad=bc$ ja $eh=fg$ (tämän lu'un 2 § 1 todisto). Tästä saadaan taas selvästi $ad\cdot eh=bc\cdot fg$ eli $ae\cdot dh=bf\cdot cg$, josta taas toisen todiston mukaan seuraa $ae:bf=cg:dh$, j. o. t.

Neljäs Luku.

Ensimäisen nousun yhtälöistä.

§ 1.

Määrityksiä.

Yhtälö on, niin kuin alussa jo on sanottu, kahden yleislasku-lausekkeen yhtä-isous ja lausekkeita yhtä-isouden merkin kahden puolen sanotaan yhtälön puoliksi, vasemman puolista ensimäiseksi ja oikean puolista toiseksi puoleksi.

Kahden lausekkeen numerolu'uista sekä tunnetuista puustavisuuruuksista yhtä-isoutta sanotaan kyllä yhtälöksi, mutta tavallisesti ymmärretään kuitenkin yhtälöllä semmoisten lausekkeiden yhtä-isoutta, joissa on vähintäinkin yksi tuntematon suuruus ja jonka puolet ovat yhtä isot ainoastansa silloin, kuin tuntemattomalla eli tuntemattomilla suuruuksilla ovat eräät määrätyt, sen eli niiden keskuuksista tunnettujen suuruuksien kanssa seuraavat, arvot.

Sen mukaan kuin yhtälössä on tuntemattomia suuruuksia, sanotaan sitä *yhtälöksi yhdellä tuntemattomalla,* kuin siinä on yksi, *kahdella,* kuin siinä on kaksi, j. n. e. *n*:llä, kuin siinä on *n* tuntematonta suuruutta.

Ensimäisen nousun yhtälöksi sanotaan semmoista, jonka puolissa tuntematon eli tuntemattomat eivät ole kerrottavat enemmän itsillänsä kuin toisillansakaan, joskohta yhtälön puolet kerrottaisiin niissä olevien nimittäjöiden pienimmällä yhteisellä jaettavalla. *Ensimäisen nousun yhtälön ratkaiseminen on semmoisen lu'un eli tunnetun puustavisuuruuden etsiminen, joka pantuna tuntemattoman siaan toteuttaa yhtälön, s. t. s. tekee sen puolet yhtä isoiksi.*

Tunnettu suuruus, joka tekee yhtälön puolet yhtä isoiksi, saapi nimen *yhtälön juuri.*

Muist. Vastedes merkitsemme tunnettuja suuruuksia *ab*:stön ensimäisillä puustavilla a, b, $c\cdots$ ja tuntemattomia viimeisillä x, y, $z\cdots$

§ 2.

Olisko nyt yhtälö

$$5x-6=8+2x$$

ratkaistava, niin tässä on kaksi suuruutta $(5x-6)$ ja $(8+2x)$, jotka ovat yhtä isot, ainakin kuin x merkitsee sitä suuruutta, joka toteuttaa alkuperäisen yhtälön ja koska tässä juuri semmoinen suuruus on etsittävä, niin mainitut kaksiot ovat pidettävät yhtä isoina.

Jos sentähden yhtälön

$$5x-6=8+2x$$

puolihin pannaan luku 6, niin saadaan toinen yhtälö

$$5x-6+6=8+2x+6$$

ja kuin tämän puolista otetaan pois suuruus $2x$, niin saadaan yhtälö $5x-6+6-2x=8+2x+6-2x$, joka on sama kuin

$$5x-2x=8+6,$$

koska $-6+6$ tekee, samoin kuin $+2x-2x$, nollan.

Näin on saatu alkuperäisestä yhtälöstä toinen, jonka ensimäisessä puolessa on osio $-2x$ ja toisessa $+6$, siihen siaan kuin alkuperäisen yhtälön ensimäisessä puolessa on -6 ja toisessa $+2x$.

Tästä saadaan nyt selvästi seuraava sääntö: *yhtälön toisesta puolesta voidaan yhtä-isouden hävittämättä mikä osio hyvänsä muuttaa ensimäiseen ja ensimäisestä toiseen, kuin vaan osion merkki muutetaan vastaiseksi.*

Tästä seuraa taas, että yhtä-isouden hävittämättä voidaan kaikkien osioiden, yhtälön puolissa, merkit muuttaa vastaisiksi, sillä se on sama kuin osioiden muuttaminen yhdestä puolesta toiseen vastaisilla merkillä. Tämä asia on selvä jo siitäkin, että yhtälön puolet ovat pidettävät yhtä isoina suuruuksina ja sentähden niiden vastaiset suuruudet myös.

Jos yhtälön puolissa on murtosuuruuksia osioina, niin siitä saadaan aina toinen yhtälö, jonka osiot ovat koko lausekkeita. Olisko esm. yhtälö

$$\frac{2x}{3} - \tfrac{3}{4} = 11 + \frac{x}{5}$$

ratkaistava, niin yhtälön puolet ovat pidettävät yhtä isoina suuruuksina ja antavat sentähden kerrottuina samalla suuruudella yhtä isot tulot. Jos edellisen yhtälön puolet taas kerrotaan niissä olevien nimittäjöiden tulolla $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, niin saadaan toinen yhtälö

$$60 \cdot \left(\frac{2x}{3} - \tfrac{3}{4}\right) = 60 \cdot \left(11 + \frac{x}{5}\right)$$

eli monion kertomisen yksiöllä säännön mukaan

$$\frac{60 \cdot 2x}{3} - \frac{60 \cdot 3}{4} = 60 \cdot 11 + \frac{60x}{5},$$

jonka puolien osiot saadaan koko lausekkeiksi murtolukujen lyhentämällä, koska joka nimittäjä on kertojana osottajoiden kertojassa 60. Näin saadaan yhtälö:

$$40x - 45 = 660 + 12x.$$

Olisko taas yhtälö

$$\frac{5x}{12} + \frac{4x}{3} - 13 = \tfrac{7}{8} - \frac{13x}{6}$$

muodostettava toiseksi, jonka sama luku pantuna x:n siaan toteuttaisi kuin tämänkin, mutta jonka puolet olisivat koko monioita, niin semmoinen saadaan selvästi alkuperäisen yhtälön puolet kertoen pienimmälläkin lu'ulla, jonka kaikki nimittäjät näiden puolien osioissa jakavat tarkoin. Jos sentähden nimittäjäin 12, 3, 8 ja 6 pienin yhteinen jaettava 24 etsitään ja monion puolet kerrotaan sillä, niin saadaan murtolukujen lyhennettyä yhtälö

$$10x-32x-312=21-52x,$$

jonka puolet ovat koko monioita.

Tästä saadaan nyt seuraava sääntö nimittäjäin hävittämiselle yhtälöissä.

Yhtälön puolissa olevien nimittäjäin pienin yhteinen jaettava etsitään, jolla yhtälön puolet sitte kerrotaan ja kaikki murtosuuruudet lyhennetään, jokainen osottaja jakaen nimittäjällänsä ja nimittäjä pois jättäen.

Esimerkiksi tämän säännön käytännölle otamme vielä seuraavan puustaviyhtälön *) muodostaaksemme toiseksi, jonka puolet ovat koko monioita:

$$\frac{ax}{b}-\frac{2c^2x}{ab}+4a=\frac{4bc^2x}{a^3}-\frac{5a^3}{b^2}+\frac{2c^2}{a}-3b.$$

Nimittäjäin pienin yhteinen jaettava on selvästi a^3b^2 ja yhtälön puolet tällä kertoen saadaan

$$\frac{a^4b^2x}{b}-\frac{2a^3b^2c^2x}{ab}+4a^4b^2=\frac{4a^3b^3c^2x}{a^3}-\frac{5a^6b^2}{b^2}+\frac{2a^3b^2c^2}{a}-3a^3b^3,$$

josta taas murtolausekkeiden lyhentämällä tulee yhtälö

$$a^4bx-2a^2bc^2x+4a^4b^2=4b^3c^2x-5a^6+2a^2b^2c^2-3a^3b^3.$$

Edellisten sääntöjen johdolla ratkaistaviksi otamme nyt seuraavat yhtälöt.

1. $$4x-3=2x+5.$$

Kuin nyt osiot -3 ja $2x$ muutetaan, edellinen ensimäisestä puolesta toiseen ja jälkimäinen toisesta ensimäiseen, niin saadaan yhtälö

$$4x-2x=5+3,$$

josta taas samankaltaisten osioiden yhdistämällä tulee

$$2x=8.$$

---

*) Puustavi-yhtälöiksi eli yleisiksi yhtälöiksi sanotaan semmoisia, joissa tunnettujakin suuruuksia on puustavilla merkitty, mutta semmoisia taas, joissa paitsi puustavilla merkittyjä tuntemattomia suuruuksia on ainoastansa numerolukuja, sanotaan numero-yhtälöiksi.

Jos tämän yhtälön puolet taas jaetaan lu'ulla 2 niin saadaan $x=\frac{8}{2}$ eli $x=4$.

Viimesen yhtälön toteuttaa ainoastanssa luku 4 pantuna x:n siaan, joka siis toteuttaa alkuperäisenkin. Todellakin saadaan, kuin 4 pannaan x:n siaan alkuperäisessä yhtälössä, varma yhtälö

$$4\cdot4-3=2\cdot4+5 \text{ eli } 13=13.$$

Alkuperäisen yhtälön juuri on siis 4.

Tässä jo on nähty, että tuntematon vapautetaan etukertojastansa yhtälön puolet jakaen tällä tuntemattoman etukertojalla.

Samoin kuin edellinenkin ratkaistaan tässä pykälässä ensimäisenä esimerkkinä käytetty yhtälö

2. $$5x-6=8+2x,$$

josta saadaan, niin kuin jo on nähty,

$$5x-2x=8+6 \text{ eli}$$
$$3x=14,$$

josta taas seuraa $x=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$.

3. $$\frac{5x}{12}-\frac{4x}{3}-13=\frac{7}{8}-\frac{13x}{6}.$$

Tästä saadaan, niin kuin jo on nähty, nimittäjöiden hävitettyä yhtälö

$$10x-32x-312=21-52x.$$

Kuin sitte muutetaan osio $-52x$, joka sisältää tuntemattoman x, toisesta puolesta ensimäiseen ja tunnettu osio -312 ensimäisestä toiseen, niin saadaan

$$10x-32x+52x=21+312$$

ja samankaltaisten osioiden yhdistettyä

$$30x=333,$$

josta taas, kumpanenkin puoli jakaen tuntemattoman etukertojalla 30, saadaan

$$x=\frac{333}{30}=11\frac{1}{10}.$$

Tämä luku pantuna x:n siaan toteuttaa myös yhtälön, Olisko vielä ratkaistava puustavi-yhtälö

4. $$(3a-x)(a-b)+2ax=4b(x+a),$$

niin tässä ovat merkityt kertomiset ensin tehtävät. Näin saadaan

$$3a^2-ax-3ab+bx+2ax=4bx+4ab,$$

josta taas osioiden muuttamalla ja samankaltaisten osioiden yhdistämällä saadaan

$$ax-3bx=7ab-3a^2.$$

Kuin sitte tämän yhtälön ensimäisen puolen osioista eroitetaan yhteinen kertoja x, niin saadaan yhtälö

$$(a-3b)x=7ab-3a^2,$$

jonka kumpikin puoli jakaen tuntemattoman etukertojalla $(a-3b)$ saadaan

$$x=\frac{7ab-3a^2}{a-3b}.$$

Näistä esimerkistä saadaan nyt ensimäisen nousun yhtälöiden yhdellä tuntemattomalla ratkaisemiselle selvästi seuraava sääntö: *Ensin vapautetaan yhtälön puolet kaikista nimittäjistä ja kaikki merkityt yleislasku-teokset tehdään, joten saadaan yhtälö, jonka puolet ovat kokomonioita; sitte muutetaan kaikki ne osiot, jotka sisältävät tuntemattoman, samalle puolelle yhtä-isouden merkkiä, tavallisesti yhtälön ensimäiseen puoleen, ja kaikki tunnetut osiot toiselle puolelle, siis tavallisesti yhtälön toiseen puoleen; sitte yhdistetään kaikki ne osiot, joissa tuntematon suuruus on kertojana, jos sen etukertojat ovat numerolukuja, mutta jos yhtälö on puustavi-yhtälö, niin silloin muodostetaan kaikki nämä osiot tuloksi, jossa tuntematon on yhtenä kertojana ja sen etukertojoiden summa toisena; vihdoin jaetaan näin saadun yhtälön puolet tällä tuntemattoman etukertojalla, joka jako tehdään täydellisesti, jos se on mahdollinen.*

Se on selvä, että, jos yhtälön puolissa on joku tunnettu suuruus yhteisenä kertojana, sillä voidaan jakaa kumpanenkin puoli, joten saadaan uusi ikäs kuin lyhennetty yhtälö ratkaistavaksi,

Esimerkkiä.

Esm. 1.
$$6x + 48 = 4x + 54$$
$$6x - 4x = 54 - 48$$
$$2x = 6$$
$$x = 3.$$

Esm. 2.
$$b^2 + ax = a^2 - bx$$
$$ax + bx = a^2 - b^2$$
$$(a + b)x = a^2 - b^2$$
$$x = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b.$$

Esm. 3.
$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = x - 7$$
$$\frac{15x}{3} + \frac{15x}{5} = 15x - 105$$
$$5x + 3x = 15x - 105$$
$$-7x = -105$$
$$x = \frac{-105}{-7} = 15.$$

Esm. 4.
$$\frac{ab}{x} - a = b$$
$$ab - ax = bx$$
$$ab = ax + bx$$
$$(a + b)x = ab$$
$$x = \frac{ab}{a + b}.$$

Esm. 5.
$$\frac{1}{4x - 1} = \frac{4}{x + 1}$$
$$\frac{(x + 1)(4x - 1)}{4x - 1} = \frac{4(4x - 1)(x + 1)}{x + 1}$$
$$x + 1 = 16x - 4$$
$$-15x = -5$$
$$x = \frac{-5}{-15} = \tfrac{1}{3}.$$

Esm. 6. $\frac{1}{2} - \frac{x+10}{6} = 2x - \frac{2-4x}{3}$

$$3-(x+10) = 12x - 2(2-4x)$$
$$3 - x - 10 = 12x - 4 + 8x$$
$$x = \frac{-3}{21} = -\tfrac{1}{7}.$$

Esm. 7. $\frac{2}{3x} - \frac{5}{2x} = \frac{11}{x-1}$

$$\frac{12x(x-1)}{3x} - \frac{30x(x-1)}{2x} = \frac{66x(x-1)}{x-1}$$
$$4(x-1) - 15(x-1) = 66x$$
$$-11(x-1) = 66x$$
$$-11x + 11 = 66x$$
$$77x = 11$$
$$x = \tfrac{1}{7}.$$

Esm. 8. $\frac{2(x-b)}{a-b} - 3a = \frac{2x}{a+b} - \frac{bx-a^2}{4b}$

$$8b(a+b)(x-b) - 12ab(a^2-b^2) =$$
$$= 8b(a-b)x - (a^2-b^2)(bx-a^2)$$
$$(a^2b + 16b^2 - b^3)x = a^4 + 12a^3b - a^2b^2 + 8ab^2$$
$$-12ab^3 + 8b^3$$
$$x = \frac{a^4 + 12a^3b - a^2b^2 + 8ab^2 - 12ab^3 + 8b^3}{b(a^2 + 16b + b^2)}.$$

Esm. 9. $1\tfrac{6}{11}x - 16 = 80.$ $\quad x = 66.$

Esm. 10. $\frac{8x}{5} - 11 = \frac{9x}{10} - 4.$ $\quad x = 10.$

Esm. 11. $4c - 3x + 2b = x + 6b.$ $\quad x = c - b.$

Esm. 12. $by - a^2 = 2a^2 - 5by.$ $\quad y = \frac{a^2}{2b}.$

Esm. 13. $\frac{7y}{5} - 11 = \frac{y}{5} + 1.$ $\quad y = 10.$

Esm. 14. $\frac{2x}{5} - \frac{x}{6} + \frac{x}{2} = 44.$ $\quad x = 60.$

Esm. 15. $a - \frac{bx}{c} = d.$ $\quad x = \frac{c(a-d)}{b}.$

Esm. 16. $\frac{2}{7}x + 9 = \frac{1}{3}x - 10.$ $x = 399.$

Esm. 17. $6x + 7 - \frac{2}{3}x = 2x - 1.$ $x = -2{,}4.$

Esm. 18. $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{12} + 630.$ $x = 7560.$

Esm. 19. $\frac{2}{9}x - 40 - \frac{1}{4}x = 60 - \frac{7}{6}x.$ $x = 87\frac{33}{41}.$

Esm. 20. $\frac{3a + x}{x} - 5 = \frac{6}{x}.$ $x = \frac{3(a-2)}{4}.$

Esm. 21. $\frac{3x}{5} - \frac{7x}{10} + \frac{3x}{4} - \frac{7x}{8} = -15.$ $x = 66\frac{2}{3}.$

Esm. 22. $\frac{a}{b} - \frac{a-b}{c} = \frac{1}{x}.$ $x = \frac{bc}{ac - ab + b^2}.$

Esm. 23. $\frac{60}{x-2} = \frac{24}{x+5}.$ $x = -9\frac{2}{3}.$

Esm. 24. $\frac{36}{x-1} + \frac{30}{x} - \frac{70}{x} = 0.$ $x = 10.$

Esm. 25. $\frac{3x+5}{5x-29} - 8 = -6.$ $x = 9.$

Esm. 26. $\frac{7{,}53x}{3} + 100 = \frac{2x}{5} + 3{,}86 - \frac{x}{6}.$ $x = -42{,}228\ldots$

Esm. 27. $13\frac{3}{4} - \frac{x}{2} = 2x - 8\frac{3}{4}.$ $x = 9.$

Esm. 28. $\frac{40}{3x} + 1 = \frac{81}{4x}.$ $x = 6\frac{11}{12}.$

Esm. 29. $x = \frac{a(x-1)}{3} + \frac{x+1}{6} - \frac{1-x}{2}.$ $x = \frac{a+1}{a-1}.$

Esm. 30. $c + \frac{ac}{x-c} = a.$ $x = \frac{c(2a-c)}{a-c}.$

Esm. 31. $\frac{x-1}{7} + \frac{23-x}{5} = 6 - \frac{x}{4}.$ $x = 8.$

Esm. 32. $\frac{25}{x+3} = \frac{3}{3x-2}.$ $x = \frac{59}{72}.$

Esm. 33. $x+12=\frac{3x-5}{2}-\frac{2x-1}{3}$. $x=-85$.

Esm. 34. $\frac{a^2}{b-x}-b=\frac{a^2}{b}$. $x=\frac{b^3}{a^2+b^2}$.

Esm. 35. $mn-my=n^2-ny$. $y=n$.

Esm. 36. $3\frac{2}{3}-x-\frac{3}{2}x+8=-17-\frac{3x}{5}+4\frac{1}{2}x$. $x=4\frac{23}{48}$.

Esm. 37. $\frac{1}{4}a^2+2ay=a^2-ay$. $y=\frac{a}{4}$.

Esm. 38. $\frac{a+3x}{4a}-\frac{7a-5x}{6b}+3-\frac{9x}{4}=\frac{x}{ab}+\frac{5x}{6b}$.

$$x=\frac{39ab-14a^2}{27ab-9b+12}.$$

Esm. 39. $3{,}25x-5{,}007-x=0{,}2-0{,}34x$. $x=2{,}01042\ldots$

Esm. 40. $\frac{2{,}416}{0{,}01}x-200x=20{,}8$. $x=\frac{1}{2}$.

Esm. 41. $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}$.

$$x=\frac{ab}{a+b}.$$

Esm. 42. $\frac{b^n(1+3x)}{3a}+\frac{a^{m-2}}{3b}-\frac{1}{3a^2b}=b^{2n+1}x+\frac{a^{m-1}b^n}{3}$.

$$x=\frac{1-a^m}{3ab^{n+1}}.$$

Muist. 1. Edellisissä esimerkissä on aina saatu yksi ainoa suuruus, joka pantuna tuntemattoman siaan toteuttaa yhtälön. Ensimäisen nousun yhtälöllä yhdellä tuntemattomalla ei voi ollakaan enemmän kuin yksi isoutensa suhteen määrätty juuri.

Todellakin on tämmöisen yhtälön ratkaisusäännöistä nähty, että se aina voipi saada muodon

$$ax=b,$$

jossa a ja b ovat tunnettuja ja tavallisesti äärellisiä, isoutensa

puolesta määrättyjä, suuruuksia. Jos nyt kaksi suuruutta m ja n pantuina x:n siaan kumpikin toteuttaisivat tämän yhtälön, niin tästä seuraisi selvästi, että
$am = b$ ja $an = b$ ja siis $am = an$ eli $\frac{am}{a} = \frac{an}{a}$, s. t. s. $m = n$.

Suuruudet m ja n, jotka toteuttavat saman ensimäisen nousun yhtälön yhdellä tuntemattomalla, ovat siis aina yhtä isot, eivätkä sentähden voi olla isoutensa puolesta eri suuruuksia, j. o. t.

Muist. 2. Jos kaikkien osioiden, jotka sisältävät tuntemattoman suuruuden, muutettua yhtä-isouden merkin samalle puolelle, tuntemattoman etukertojat laskettuina yhteen tekisivät nollan, joten yhtälö saisi muodon

$$0 \cdot x = a,$$

niin silloin toteuttaisi mikä äärellinen suuruus hyvänsä yhtälön, jos tunnettujen osioiden summa a myös olisi nolla, sillä $0 \cdot b = 0$, olipa b mikä äärellinen suuruus hyvänsä. Mutta jos a ei olisi nolla, niin silloin ei taas mikään ärellinen suuruus voisi toteuttaa yhtälöä, koska $0 \cdot b = 0$, eikä $= a$. Yhtälön juuri olisi silloin ääretön suuruus. Yhtälöstä $0 \cdot x = a$ saadaankin $x = \frac{a}{0} = \infty$, jos nollaa käytetään laskussa suuruutena.

Esimerkkiä.

Esm. 1. $\frac{3(2x+1)}{4} - \frac{5x+3}{6} + \frac{x+1}{3} = x + \frac{7}{12}$.

Tästä yhtälöstä saadaan nimittäjäin hävittämällä ja osioiden muuttamalla yhtälö

$$18x - 10x + 4x - 12x = 7 + 6 - 9 - 4$$

eli $0 \cdot x = 0$, josta taas seuraa

$x = \frac{0}{0} =$ mikä suuruus hyvänsä.

Esm. 2. $\frac{3(2x+1)}{4} - 5 - \frac{3x+2}{10} = \frac{2(3x-1)}{5}$.

Tästä yhtälöstä saadaan taas

$$30x - 6x - 24x = 81,$$

s. t. s. $0 \cdot x = 81$,

jota ei mikään äärellinen suuruus toteuta, jonkatähden

$$x = \infty.$$

Todellakin on, jos nollaa käytetään suuruutena, $x = \frac{81}{0} = \infty$.

Esm. 3. $\frac{3(4x-1)}{4} - 3 = 3x - \frac{15}{4}$.

$$x = \tfrac{0}{0} = \text{mikä suuruus hyvänsä.}$$

Esm. 4. $\frac{5}{x-2} - \frac{3}{4} = \frac{4-3x}{4(x-2)}$.

$$x = \tfrac{22}{0} = \infty.$$

§ 3.

Kysymyksiä, jotka ratkaistaan ensimäisen nousun yhtälöillä yhdellä tuntemattomalla.

Yleislaskussa saadaan ratkaistuiksi ainoastansa semmoiset kysymykset, joissa lausutuista keskuuksista tunnettujen ja tuntemattoman eli tuntemattomien suuruuksien välillä voidaan johtaa yhtälö eli useampia yhtälöitä.

Yleislasku-kysymyksien ratkaisemisessa on siis kaksi eri teosta, ensiksi kysymyksen lausuminen yleislasku-kielellä, s. t. s. kysymyksessä olevien suuruuksien keskuuksista yhden eli usiamman yhtälön johtaminen ja toiseksi sen eli niiden ratkaiseminen.

Jälkimäinen näistä teoksista tehdään aina määrättyjen sääntöjen johdolla, niin kuin ensimäisen nousun yhtälöistä yhdellä tuntemattomalla jo olemme nähneet, mutta edelliselle ei voida saada mitään vakinaisia sääntöjä, sillä se voipi tapahtua usiammalla eri tavalla, jonkatähden harjoitus sen paraiten opettaa. Harjoitukseksi otamme nyt tässä usiampia kysymyksiä ratkaistaviksi.

Kys. 1. *Kuin erään lu'un puolisko ja viides osa lasketaan yhteen ja summasta otetaan pois 10, niin tähteeksi saadaan 4; mikä se luku on?*

Kuin etsittävää (tuntematonta) lukua merkitsemme x:llä, niin sen puolisko on $\frac{x}{2}$ ja viides osa $\frac{x}{5}$, joidenka summa vähennettynä kymmenellä tekee $\frac{x}{2}+\frac{x}{5}-10$. Tämän tähteen pitää kysymyksessä lausutun ehdon mukaan oleman 4, josta saadaan selvästi yhtälö

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{5}-10=4$$

ja tämä yhtälö ratkaisten saadaan taas etsittävä luku

$$x=20.$$

Että 20 on se luku, joka täyttää lausutun ehdon on selvä, sillä kahdenkymmenen puolisko on 10 ja viides osa 4, joidenka summa 14 vähennettynä kymmenellä tekee 4.

Kys. 2. *Kuin erään lu'un puolisko, kolmas osa, neljäs osa ja luku 45 lasketaan yhteen, niin saadaan summa 448; mikä se luku on?*

Kuin taas etsittävää lukua merkitään x:llä, niin saadaan, samoin kuin edellisestäkin kysymyksestä, yhtälö

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+45=448$$

ja kuin tämä yhtälö ratkaistaan, niin saadaan

$$x=372.$$

Todellakin on

$$\frac{372}{2}+\frac{372}{3}+\frac{372}{4}+45=448.$$

Kys. 3. *Mitenkä pitkä on se vaaja, josta viides osa on maan sisässä, kolme seitsemättä osaa vedessä ja 13 jalkaa veden pinnan yläpuolella?*

Jos x (jalkaa) merkitsee vaajan pituutta, niin $\frac{x}{5}$ jalkaa on vaajasta maan sisässä, $\frac{3}{7}x$ vedessä ja 13 jalkaa veden pinnan yläpuolella; ja koska näiden osien pitää yhteensä tekemän koko vaajan pituuden, niin tästä saadaan selvästi yhtälö

$$\frac{x}{5}+\frac{3x}{7}+13=x$$

eli

$$7x + 15x + 455 = 35x$$

josta seuraa

$$x = 35 \text{ (jalkaa).}$$

Viides osa (joka on maan sisässä) tästä 35 jalan pituisesta vaajasta onkin 7 jalkaa ja $\frac{3}{7}$ siitä (joka on vedessä) on 15 jalkaa, jotka veden pinnan yläpuolella olevien 13 jalan kanssa todellakin tekevät koko vaajan pituuden, 35 jalkaa.

Kys. 4. *Kuin M oli antanut pois ensin $\frac{1}{4}$ ja sitte $\frac{1}{5}$ rahoistansa, niin hänen kukkaroonsa oli jäänyt vielä 462 markkaa; kuinka paljo rahaa oli hänellä ollut alkujansa?*

Kuin x merkitsee alkuperäistä markkalukua, niin tähdettä, joka jääpi, kuin ensin $\frac{1}{4}$ ja sitte $\frac{1}{5}$ x:stä otetaan pois, merkitään lausekkeella $x - \frac{x}{4} - \frac{x}{5}$. Kysymyksessä lausutun ehdon mukaan on tämä tähde 462 markkaa, josta saadaan yhtälö

$$x - \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 462,$$

josta taas seuraa

$$x = 840 \text{ (markkaa).}$$

Että luku 840 myös täyttää kysymyksessä sanotun ehdon, on helppo huomata.

Kys. 5. *Mikä luku on semmoinen, että, kuin se otetaan pois seitsemästä ja tähde jaetaan viidellä, näin saatu osa enennettynä kahdella tekee 6?*

Kuin tuntematonta, seitsemästä poistettavaa lukua merkitään x:llä, niin osa, jonka lisättynä kahdella pitää tekemän 6, on selvästi $\frac{7-x}{5}$, josta saadaan yhtälö

$$\frac{7-x}{5} + 2 = 6.$$

Tästä seuraa taas

$$x = -13.$$

Lu'usta 7 on siis otettava pois suuruus (-13), jos osan, joka saadaan tähteen jakamalla viidellä, enennettynä kahdella pitää tekemän 6, s. t. s. ei ainoastansa, että seitsemästä ei saa ottaa pois mitään lukua, mutta siihen päin vastoin pitää pantaman lisää 13, sillä se on sama, jos (-13) otetaan pois taikka luku 13 pannaan lisäksi johonkin suuruuteen.

Edellä löydetty poisto-arvo tuntemattomalle näyttää ensiksi, että kysymys tavallisessa merkityksessä on mahdotoin ratkaista ja toiseksi että lu'usta 7 saadaan enentämällä, eikä vähentämällä, semmoinen luku, joka jaettuna viidellä antaa osan, joka enennettynä kahdella tekee 6, sekä vihdoin, että sitä varten 7 on enennettävä lu'ulla 13.

Kys. 6. *Kaksi henkeä A ja B ovat alottaneet itsekukin kauppaliikkeensä yhtä isoilla rahasummilla, mutta kuin A on voittanut 480 markkaa, niin B on menettänyt 320 ja silloin on A:lla kolme kertaa niin paljo rahaa kuin B:llä, kuinka paljo oli kumpasellakin rahaa kauppaansa alottaessa?*

Merkitköön taas x (markkaa) etsittävää rahasummaa, joten A:lla voitettuansa 480 markkaa on $x+480$ ja B:llä, menetettyänsä 320, $(x-320)$ markkaa. Nytpä taas on A:n rahasumma kolme kertaa niin iso kuin B:n, josta selvästi saadaan yhtälö

$$x+480=3(x-320)$$

ja

$$x=720 \text{ (markkaa).}$$

Kys. 7. *Mikä on lukujen a ja b keskiluku (laskukeskinen)?*

Muist. Kahden lu'un keskilu'uksi (laskukeskiseksi) sanotaan sitä lukua, joka on yhtäpaljo pienempi isompata kuin isompi pienempätä niistä kahdesta lu'usta. Niin on esm. 4 lukujen 5 ja 3 keskiluku (laskukeskinen).

Olkoon nyt $a>b$ ja merkitkäämme x:llä niiden keskilukua, niin, koska x on yhtäpaljo pienempi a:ta kuin isompi b:tä, tästä saadaan yhtälö

$$a-x=x-b,$$

josta taas seuraa

$$x=\frac{a+b}{2}.$$

Koska nyt a ja b voivat merkitä mitä lukuja hyvänsä, niin tästä nähdään, että kahden lu'un keskiluku on aina puoli lukujen summasta. Niin on esm. lukujen $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{4}$ keskiluku $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{3}{8}$. Samoin sanotaan usiamman, kuinka monen lu'un hyvänsä keskulu'uksi sitä lukua, joka saadaan lukujen summan jakamalla sillä lu'ulla, joka näyttää lukujen paljouden, s. t. s. kuinka monta lukua on. Luku $\frac{5}{8}$ on esm. lukujen $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ ja 1 keskiluku.

Kys. 8. *Erässä seurassa oli talonpoikia, porvaria ja pappia, yhteensä 266 miestä. Talonpoikia oli kaksi kertaa niin monta kuin porvaria ja porvaria kaksi kertaa niin monta kuin pappia; kuinka monta miestä oli kustakin säädystä seurassa?*

Merkitköön x pappien lukua, niin porvarien luku on silloin $2x$ ja talonpoikien $2 \cdot 2x = 4x$, josta saadaan yhtälö

$$x + 2x + 4x = 266,$$

josta seuraa $x = 38$ (pappia)

ja sentähden $2x = 76$ (porvaria)

sekä $2 \cdot 2x = 152$ (talonpoikaa).

Kys. 9. *Luku a on jaettava kolmeen osaan, jotka ovat toisiinsa samassa suhteessa kuin lu'ut m, n ja p; kuinka isot ovat tämmöiset osat lu'usta a?*

Merkitköön x ensimäistä osaa, niin silloin on kysymyksessä lausutun ehdon mukaan x:(toiseen osaan) $= m:n$, josta saadaan toinen osa $=\frac{nx}{m}$. Samalla tavalla saadaan myös kolmas osa $=\frac{px}{m}$. Koska taas kaikki kolme osaa yhteensä tekevät lu'un a, niin tästä saadaan yhtälö

$$x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a,$$

josta seuraa, että ensimäinen osa

$$x=\frac{ma}{m+n+p}$$

ja siis toinen osa $=\frac{na}{m+n+p}$

sekä kolmas osa $= \frac{pa}{m+n+p}$.

Muist. Se on selvä, että kysymys ratkaistaisiin aivan samalla tavalla, jos luku olisi jaettava vielä usiampaan ja kuinka moneen osaan hyvänsä.

Kys. 10. *Kuinka monta vuotta pitää minkä rahasumman (a) hyvänsä olla lainattuna, kunneka vuotuiset kasvut yhteensä tekevät koko rahasumman, kuin kasvu on 5 sadalta vuodessa ja kuinka monta vuotta, jos kasvu on 6 sadalta vuodessa?*

Merkitköön nyt x vuosia, jotka rahasumma a markkaa on ollut lainassa. Kuin kasvu on 5 sadalta, niin yhdestä se silloin on selvästi $\frac{5}{100}$ ja a markasta siis $a \cdot \frac{5}{100}$ markkaa vuodessa ja x vuodessa vihdoin $a \cdot \frac{5}{100} \cdot x$. Tämän kasvun pitää taas oleman yhtä ison kuin alkuperäisen rahasumman a, josta saadaan yhtälö

$$a \cdot \tfrac{5}{100} x = a$$

ja sentähden

$$x = 20 \text{ (vuotta)}.$$

Kuin taas kasvu on 6 sadalta, niin saadaan samalla tavalla

$$x = \tfrac{100}{6} = 16\tfrac{2}{3} \text{ (vuotta)}.$$

Kys. 11. *Eräs mies saapi poislainatuista rahoistansa 3700 markkaa vuotuista kasvua. Kuinka paljo on häneltä lainassa, kuin $\frac{1}{2}$ lainatuista rahoistansa antaa 4 sadalta vuotuista kasvua, $\frac{1}{4}$ taas 5 ja viimenen $\frac{1}{4}$ vihdoin $5\frac{1}{2}$ sadalta?*

Merkitköön nyt x (markkaa) koko, lainassa olevata, rahasummaa, niin silloin on puolen summan vuotuinen korko selvästi $\frac{4}{100} \cdot \frac{x}{2}$, neljännen osan $\frac{5}{100} \cdot \frac{x}{4}$ ja viimesen neljännen osan $\frac{5\frac{1}{2}}{100} \cdot \frac{x}{4} = \frac{11}{200} \cdot \frac{x}{4}$, jotka kasvut yhteensä tekevät 3700 markkaa. Tästä saadaan yhtälö

$$\frac{4}{100} \cdot \frac{x}{2} + \frac{5}{100} \cdot \frac{x}{4} + \frac{11}{200} \cdot \frac{x}{4} = 3700,$$

josta seuraa

$$x = 80000 \text{ (markkaa)}.$$

Kys. 12. *Eräässä vaalissa sai kaksi viranhakijata huutoja. Se, joka tuli valituksi, sai 91 huutoa enemmän kuin toinen ja valitsioita oli 375. Kuinka monta huutoa sai itsekukin näistä hakijoista?*

Merkitköön x valitun huutoja, niin toisella oli silloin $x-91$ huutoa ja koska näiden huutojen yhteensä pitää tekemän 375, niin tästä saadaan selvästi yhtälö

$$x+x-91=375$$

ja tästä seuraa taas

$$x=233 \text{ (valitun huutojen luku)}$$

ja toisen huutojen luku on siis

$$x-91=142.$$

Kys. 13. *Eräs rahasumma on jaettava tasan usiamman hengen kesken. Jos rahaa olisi 12 markkaa enemmän, niin joka henki saisi 40 markkaa osaksensa; mutta jos rahaa taas olisi 28 markkaa vähemmän kuin sitä on, niin silloin saisi itsekukin ainoastansa 36 markkaa. Kuinka paljo silloin on rahaa ja kuinka monta henkeä, joidenka kesken se on jaettava?*

Merkitköön x niiden henkien lukua, joidenka kesken raha on tasan jaettava. Jos nyt jokaiselle hengelle annettaisiin 40 m., niin silloin pitäisi olla jaettavana $40x$ m., joka kysymyksen ensimäisen lauseen mukaan on 12 markkaa enempi kuin jaettava rahasumma, joka (jälkimäinen) siis on $(40x-12)$ markkaa. Toisen lauseen mukaan on taas jaettava rahasumma selvästi $(36x+28)$ m., sillä kuin joka hengelle annettaisiin vaan 36 markkaa, joka tekisi $36x$, niin silloin jäisi jälelle 28 m. Tästä saadaan nyt yhtälö

$$40x-12=36x+28$$

ja siis

$$x=10 \text{ (henkeä)}.$$

Tästä saadaan taas jaettava rahasumma helposti, sillä edellisen mukaan se on

$$40x-12 \text{ eli } 36x+28 \text{ s. t. s.}$$

$$40\cdot10-12=36\cdot10+28=388 \text{ m.}$$

Kys. 14. *Eräs työmies oli tingattu 48 päiväksi ja hänelle oli luvattu 40 kopeekkaa joka työpäivältä, mutta jokaiselta joutopäivältä oli hän puolestansa sitoutunut maksamaan 20 k. sakkoa. Työ-aijan, 48 päivän, kuluttua sai työmies 8 rup. 40 k.; kuinka monta päivää oli hän ollut työssä ja kuinka monta joutilassa?*

Jos x merkitsee työpäivien lukua, niin joutopäivien luku on selvästi $48-x$. Joka työpäivänä tienasi mies 40 k. ja yhteensä siis $40x$ k. Sakkonsa tekivät taas selvästi $20\cdot(40-x)$ k. ja kuin sakko otetaan pois ansiostansa, niin saadaan tilinteossa työmiehelle maksettu summa 8 r. 40 k. Tästä saadaan yhtälö

$$40x - 20\cdot(48-x) = 840,$$

josta taas seuraa

$$x = 30 \text{ (työpäivää)}$$

ja joutopäivien luku on siis

$$48 - 30 = 18.$$

Kys. 15. *Eräälle rengille oli määrätty 80 markkaa ja vaatepuku vuoden palkaksi, mutta yhdeksän kuukautta palveltuansa erosi hän palveluksestansa ja sai siltä aijalta vaatepu'un ja 8 markkaa; kuinka kallis oli se vaatepuku, jonka hän sai, kuin palkkansa yhdeksältä kuukaudelta oli samassa suhteessa koko vuoden palkkaan, kuin palvelusaikansakin koko vuoteen?*

Merkitköön x m. vaatepu'un hintaa, niin rengin palkka yhdeksältä kuukaudelta oli silloin $(x+8)$ m., jonka taas pitää olla samassa suhteessa koko vuoden palkkaan $(x+80)$ m., kuin 9 kuukautta on koko vuoteen s. t. s. 12 kuukauteen. Tästä saadaan verranto

$$(x+8):(x+80) = 9:12,$$

josta taas yhtälö

$$12\cdot(x+8) = 9(x+80)$$

ja vaatepu'un hinta

$$x = 208 \text{ (markkaa)}.$$

Kys. 16. *M vastasi kysymykseen, kuinka vanha hän oli, jos olisin kaksi kertaa niin vanha kuin olen ja siihen vielä pan-*

taisiin puoli sekä neljäs osa nykyistä ikääni, niin saataisiin yhtä monta vuotta yli kahden kymmenen, kuin nykyinen ikäni on lyhempi 100 vuotta; kuinka vanha oli M silloin?

Kuin x vuotta merkitsee *M*:n ikää, niin $2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x$ on *M*:n lauseen mukaan yhtä paljo isompi 20:tä, kuin 100 on isompi x vuotta. Tästä saadaan helposti yhtälö

$$2x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x - 20 = 100 - x$$

ja sentähden

$$x = 32 \text{ (vuotta)}.$$

Kys. 17. *Mies on 50:n ja poikansa 28 vuoden vanha; kuinka monen vuoden perästä tulee sitte isä kaksi kertaa niin vanhaksi kuin poikansa?*

Kuin x merkitsee vuosia, joidenka kuluttua isän ikä on kaksi kertaa niin iso kuin poijan, niin silloin on isän ikä $50 + x$ ja poijan $28 + x$ vuotta, josta kysymyksessä lausutun ehdon mukaan saadaan yhtälö

$$50 + x = 2(28 + x),$$

josta taas seuraa

$$x = -6.$$

Koska nyt lisäsuuruuksilla on merkitty tulevia vuosia, niin poistosuuruus $x = -6$ merkitsee menneitä. Sentähden pitäisi sekä isän että poijan saada nykyinen ikänsä vähennetyksi kuudella vuodella, jos isän ijän pitäisi tulla kaksi kertaa niin isoksi kuin poijan. Tämä vastaus, että kumpasenkin pitää elämän -6 vuotta, merkitsee siis, ei ainoastansa että se on mahdotoin isän enää tulla poikansa kaksinkertaiseen ikään, vaan myös hänen jo kuutta vuotta ennen olleen kaksi kertaa niin vanhan kuin poikansa. Todellakin oli isä kuutta vuotta ennen 44:tä ja poika 22:tä vuoden vanha.

Kys. 18. *Vanki pääsee karkuun ja kulkee $\frac{4}{3}$ peninkulmaa tunnissa. Kolme tuntia karattuansa saadaan tietää mihinkä päin hän on vaeltanut ja lähetetään häntä ajamaan perästä; kuinka monen tunnin kulutta saavuttaa takaa-ajaja, joka kulkee 2 peninkulmaa tunnissa, vangin?*

Merkitköön x tuntia, joidenka kuluttua vanki saadaan kiinni. Silloin on vangin kiinni-ottaja kulkenut $2x$ peninkulmaa, koska hän on ollut matkalla x tuntia ja joka tunnissa kulkenut 2 peninkulmaa. Vanki taas, joka kulkee $\frac{4}{3}$ peninkulmaa tunnissa, on ollut matkalla $x+3$ tuntia ja siis vaeltanut $\frac{4}{3}(x+3)$ peninkulmaa. Vangin kiinni saatua ovat taas sekä kiinni-ottajan että vangin vaeltamat matkat yhtä pitkät, josta saadaan yhtälö

$$2x = \tfrac{4}{3}(x+3).$$

Tästä seuraa

$$x = 6 \text{ (tuntia)}.$$

Vanki saadaan siis kiinni

$$2x = 12 \text{ peninkulmaa kulettuansa.}$$

Kys. 19. *Kahdella hevosella H ja W ajetaan kilpaa. H on 2500 kyynärää W:n edellä, mutta W juoksee 600 kynnärää minuutissa ja H ainoastaan 450; milloinka (kuinka monen minutin kuluttua) W pääsee H:n rinnalle?*

Kuin x merkitsee minuuttia, joidenka kuluttua hevoset ovat rinnakkain, niin silloin on W juossut $600x$ ja H $450x$ kyynärää. Edellisen matka on taas selvästi 2500 kyynärää pitempi kuin jälkimäisen, josta saadaan yhtälö

$$600x = 450x + 2500,$$

josta taas

$$x = 16\tfrac{2}{3} \text{ (minuuttia)}.$$

W tavoittaa siis H:n $16\frac{2}{3} \cdot 600 = 10000$ kyynärää juostuansa.

Kys. 20. *Koira ajaa repoa, joka on 60 revon askelta koiran edellä. Repo ottaa 9 askelta sillä aikaa kuin koira ottaa 6, mutta 3 koiran askelta ovat yhteensä yhtä pitkät kuin 7 revon askelta; kuinka monta askelta pitää koiran ottaa ennen kuin saapi revon kiinni?*

Merkitköön nyt x askelien lukua, jotka koiran pitää ottaa saavuttaaksensa revon. Jos nyt repo ottaisi vaan yhden askelen sillaikaa kuin koira ottaa 6, niin koiran yhtä askelta ottaessa ottaisi repo vaan $\frac{1}{6}$ askelta, mutta nyt se ottaa yhdeksän kertaa niin monta, siis $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ askelta koiran yhtä ottaessa ja $\frac{3}{2}x$ sillaikaa kuin koira ottaa x askelta. Koska taas 3 koiran askelta ovat yhteensä yhtä pitkät kuin 7 revon, niin koiran askel on selvästi yhtä pitkä kuin $\frac{7}{3}$ revon askelta ja x koiran askelta yhtä pitkät kuin $\frac{7}{3}x$ revon. Koira on siis juossut repoa ajaessansa $\frac{7}{3}x$ ja repo paetessansa $\frac{3}{2}x$ revon askelta ja koska koiran matka oli 60:tä askelta pitempi kuin revon, niin tästä saadaan selvästi yhtälö

$$\tfrac{7}{3}x = \tfrac{3}{2}x + 60,$$

josta taas seuraa

$$x = 72 \text{ (koiran askelta).}$$

Kys. 21. *Matka Helsingin ja Kuopion välillä on 457 virstaa. Eräs matkustavainen A lähtee Helsingistä Kuopioon samaan aikaan kuin toinen B Kuopiosta Helsinkiin. A kulkee 130 virstaa vuorokaudessa, mutta B vaan 98½; milloinka (kuinka monta vuorokautta matkalla oltuansa) nämä matkustavaiset kohtaavat toinen toisensa?*

Merkitköön taas x vuorokausia, joiden kuluttua A ja B tulevat yhteen. Silloin on A matkustanut $130x$ ja B $98\frac{1}{2}x$ virstaa ja koskaa nämä matkat yhteensä tekevät mainittujen kaupunkien välillä olevan matkan, 457 virstaa, niin tästä saadaan yhtälö

$$130x + 98\tfrac{1}{2}x = 457.$$

Tästä yhtälöstä saadaan taas

$$x = 2 \text{ (vuorokautta).}$$

Matkustavaiset kohtaavat siis toinen toisensa $130 \cdot 2 = 260$ virstaa kaukana Helsingistä ja $98\frac{1}{2} \cdot 2 = 197$ virstaa kaukana Kuopiosta, jotka matkat todellakin yhteensä tekevät $260 + 197 = 457$ virstaa.

Kys. 22. *Kello on seitsemän; kuinka pitkän aijan perästä tulee sen minuuttivisaari tuntiviisarin päälle?*

Koska kellon ollessa seitsemän tuntiviisaari on seitsemän ja minuuttiviisaari kahdentoista päällä, niin x:n merkitessä sitä matkaa minutissa, (joka minutti $\frac{1}{60}$ taulun kehästä), jonka tuntiviisari kulkee, minuuttiviisarin pitää kulkea $35 + x$ minuuttia. Minuuttivisari kulkee taas 12 kertaa niin nopeasti kuin tuntiviisari, sillä edellinen kulkee koko taulun kehän eli 60 minuuttia tunnissa ja jälkimäinen ainoastansa 5 minuuttia. Sentähden pitää minuuttiviisarin matkan $35+x$ oleman 12 kertaa niin ison kuin tuntiviisarin matka x, josta seuraa yhtälö

$$35+x=12x.$$

Tästä taas saadaan tuntiviisarin matka

$$x=3\tfrac{2}{11} \text{ (minuuttia)},$$

jonkatähden minuuttiviisarin matka on $35+3\tfrac{2}{11}=38\tfrac{2}{11}$. Viisarit tulevat siis päälletysten $38\tfrac{2}{11}$ minuuttia yli seitsemän, s. t. s. kl. 7 t. $38\tfrac{2}{11}$ m.

Kys. 23. *Mitenkä paljo on kello silloin, kuin tuntiviisari on neljän ja viiden välillä ja minuuttiviisari samassa linjassa tuntiviisarin kanssa?*

Merkitköön taas x minuuttia jotka tuntiviisari on kulkenut neljästä eteenpäin. Minuuttiviisari, joka silloin on kymmenen ja yhdentoista välillä, on ennen viisarien samaan linjaan tulemista kulkenut $50+x$ minuuttia, josta taas saadaan yhtälö

$$50+x=12x$$

ja tästä seuraa

$$x=\tfrac{50}{11}=4\tfrac{6}{11}.$$

Minuuttiviisarin matka on siis $50+4\tfrac{6}{11}=54\tfrac{6}{11}$ m. Kellon ollessa neljän ja viiden välillä ovat sentähden viisarit samassa linjassa kl. 4 t. $54\tfrac{6}{11}$ m.

Kys. 24. *Eräässä seurassa oli miehiä sekä naisia. Miehiä oli kolme kertaa niin paljo kuin naisia. Sitte meni 8 miestä vaimoinensa pois, jolloin miesten luku oli naisten lukuun samassa suhteessa kuin 5 : 1; kuinka monta miestä ja kuinka monta naista oli seurassa alkujansa?*

Merkitköön x seurassa olleiden naisten lukua, jolloin seurassa ensimäisen lauseen mukaan oli $3x$ miestä, mutta 8 miehen vaimoinensa pois mentyä jäi seuraan $x-8$ naista ja $3x-8$ miestä, josta toisen lauseen mukaan saadaan verranto

$$(3x-8):(x-8)=5:1,$$

josta taas seuraa yhtälö

$$3x-8=5(x-8).$$

Tästä saadaan

$$x = 16 \text{ (naista) ja siis}$$

$$3x = 48 \text{ (miestä).}$$

Kys. 25. *Eräältä matkustavaiselta kysyttiin kuinka kaukaa hän oli tullut, johonka hän vastasi: vaununi etupyörät ovat matkallani tehneet 3000 ympäripyöräystä enemmän kuin takapyörät ja kumpasenkin etupyörän kehä on $4\frac{1}{3}$ kyynärää, mutta molemman takapyörän $7\frac{2}{3}$ kyynärää, saattenko nyt selvän, kuinka monta virstaa olen kulkenut?*

Merkitköön x sitä lukua, joka näyttää kuinka monta kertaa takapyörät ovat pyörähtäneet ympäri, niin etupyörät ovat silloin tehneet $x + 3000$ ympäripyöräystä. Sentähden on takapyörien tekemä matka $7\frac{2}{3}x$ ja etupyörien $4\frac{1}{3}(x + 3000)$ k. ja koska nämä matkat ovat selvästi yhtä pitkät, niin tästä saadaan yhtälö

$$7\tfrac{2}{3}x = 4\tfrac{1}{3}(x + 3000),$$

josta seuraa

$$x = 3900.$$

Matkan pituus on siis $7\frac{2}{3} \cdot 3900 = 29900$ kyynärää eli $16\frac{11}{18}$ virstaa.

Kys. 26. *Tyttö vei kaupunkiin munia kaupaksi ja olisi myönyt 7 pennistä munan, vaan matkalla oli särkynyt 5 munaa, jonkatähden hän korotti munan hinnan 8 penniksi. Sillä keinoin sai hän yhtä paljon rahaa vielä ehyistä, kuin myödessään 7 pennistä munan olisi saanut kaikista; kuinka monta munaa oli tytöllä alkujansa?*

Kuin x merkitsee munien lukua ennen viiden särkymistä, niin tyttö olisi niistä saanut, seitsemästä pennistä joka munan myöden, $7x$ penniä. Kuin 5 munaa oli särkynyt ja tyttö möi tähteet 8 pennistä munan, niin hän sai $8(x - 5)$ penniä, joka lauseen mukaan on yhtä iso kuin edellinenkin rahasumma, $7x$ penniä. Tästä saadaan yhtälö

$$8(x - 5) = 7x,$$

josta taas seuraa

$$x = 40 \text{ (munaa).}$$

Kys. 27. *Hopeasepällä on 80 luotia 12-luotista*) hopeata, jonka hän tahtoo saada $13\frac{1}{2}$-luotiseksi; kuinka paljo pitää hänen ottaa pois vaskea ja sen siaan panna puhdasta hopeata metallisekoitukseensa, saadaksensa 80 luotia $13\frac{1}{2}$-luotista hopeata?*

Merkitköön x luotia, jotka hopeasepän pitää panna puhdasta hopeata vasken siaan metallisekoituksessansa saadaksensa 80 luotia $13\frac{1}{2}$-luotista hopeata. Koska nyt sepän hopeassa on $\frac{12}{16}$ luotia puhdasta hopeata joka luodissa, niin 80 luodissa on siis $80 \cdot \frac{12}{16} = 60$ luotia puhdasta hopeata. Kuin tähän nyt pannaan x luotia lisää, niin saadaan se määrä $(60 + x)$ l. puhdasta hopeata, joka tulee olemaan hänen uudessa metallisekoituksessansa. Uuden sekoituksen pitää taas painaman 80 luotia ja oleman $13\frac{1}{2}$-luotista hopeata, jonkatähden siinä tulee olemaan $80 \cdot \frac{13\frac{1}{2}}{16} = 67\frac{1}{2}$ luotia puhdasta hopeata. Tästä saadaan nyt helposti yhtälö

$$60 + x = 67\tfrac{1}{2},$$

josta taas seuraa

$$x = 7\tfrac{1}{2} \text{ (luotia).}$$

Kys. 28. *Erääsen astiaan voidaan laskea vettä kolmesta torvesta. Ensimäisestä torvesta laskiessa täytyy astia a minuutissa, toisesta b minuutissa ja kolmannesta laskiessa täytyy astia c minuutissa; kuinka monessa minuutissa täytyy sama astia, kuin joka kolmesta torvesta yhtaikaa lasketaan vettä?*

Merkitkäämme nyt etsittävää minuuttilukua x:llä ja astian isoutta yhdellä (1). Koska ensimäinen torvi täyttää astian a minuutissa, niin yhdessä minuutissa se laskee $\frac{1}{a}$ astiata vettä ja x minuutissa siis $\frac{x}{a}$ astiata. Samoin laskee toinen torvi $\frac{x}{b}$ ja kolmas $\frac{x}{c}$ astiata vettä x minuu-

*) Kaksitoista-luotiseksi sanotaan hopeata kuin siinä on $\frac{12}{16}$ luotia puhdasta hopeata joka luodissa. $13\frac{1}{2}$-luotista on se hopea, jossa on $\frac{13\frac{1}{2}}{16}$ luotia puhdasta hopeata joka luodissa j. n. e. n-luotiseksi sanotaan hopeata, jossa on $\frac{n}{16}$ luotia puhdasta hopeata luodissa. Puhdasta hopeata sanotaan taas 16-luotiseksi, sillä siinä on $\frac{16}{16}$ luotia puhdasta hopeata luodissa.

tissa. Yhteensä laskevat siis kaikki kolme torvea $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}$ astiata vettä x minuutissa ja koska tämä vesi täyttää koko astian, jonka isous on yksi, niin tästä saadaan yhtälö

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=1$$

ja sentähden

$$x=\frac{abc}{ab+ac+bc} \text{ (minuuttia).}$$

Kys. 29. *Yksi viiva on 10:n ja toinen $2\frac{1}{2}$ tuuman pituinen; kuinka monella tuumalla pitää kumpaistakin jatkettaman, kunneka pitempi tulee 6 kertaa niin pitkäksi kuin lyhempi viiva?*

Olkoot kumpikin jatkettavat x tuumalla, niin lauseen mukaan pitää $10+x$ tuumaa pitkän viivan oleman 6 kertaa niin pitkän kuin $2\frac{1}{2}+x$ tuuman pituinen viiva, josta saadaan yhtälö

$$10+x=6(2\tfrac{1}{2}+x)$$

ja tästä seuraa taas

$$x=-1.$$

Koska nyt pitentämistä on laskussa merkitty lisäsuuruudella, niin poistosuuruus (-1) merkitsee silloin lyhentämistä, josta huomataan, että kumpikin viiva on lyhennettävä tuumalla, jos pitemmän pitää tulla 6 kertaa niin pitkäksi kuin lyhemmän. Todellakin on

$$10-1=9=6(2\tfrac{1}{2}-1)=6\cdot\tfrac{3}{2}.$$

Kys. 30. *Kuin a kyynärän pituinen viiva on leikattava kahdeksi, niin kuinka pitkän pitää itsekunkin kappaleen oleman, jos ensimäinen on oleva toiseen samassa suhteessa, kuin luku m on lukuun n, s. t. s. jos ensimäinen on oleva $\frac{m}{n}$ toisesta?*

Kuin x kyynärää merkitsee ensimäisen kappaleen pituutta, niin silloin on toinen $a-x$ kyynärää pitkä, josta kysymyksessä lausutun ehdon mukaan saadaan verranto

$$x:(a-x)=m:n,$$

josta taas seuraa yhtälö

$$nx=m(a-x)$$

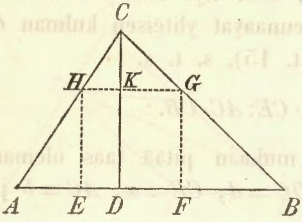
ja ensimä'sen kappaleen pituus on siis

$$x = \frac{am}{m+n}$$

ja toisen

$$a - x = \frac{an}{m+n}.$$

Kys. 31. *Kolmikulman ABC asema a ja korkeus k ovat tunnetut; mutta kuinkas iso on sivu neliössä, joka on piiretty kolmikulmaan siinä tilassa kuin seuraava kuva näyttää?*



Merkitköön taas x neliön sivua $EH = EF = KD$. Linjat $AB = a$, ja $CD = k$ ovat tunnetut ja sentähden on $CK = k - x$. Kolmikulmat ABC ja HGC ovat taas mukaiset (samanmuotoiset), koska joka kulma edellisessä on yhtä iso yhden kulman kanssa toisessa, josta saadaan

$$AB : AC = HG : HC \text{ eli } AB : HG = AC : HC,$$

mutta $AC : HC = CD : CK$, koska kolmikulmat ADC ja HKC myös ovat mukaiset, josta seuraa verranto $AB : HG = CD : CK$, s. t. s.

$$a : x = k : (k - x).$$

Tästä verrannosta saadaan taas yhtälö

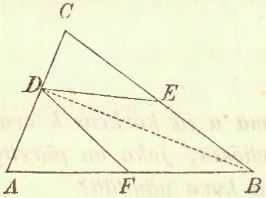
$$a(k - x) = kx \text{ ja}$$

$$x = \frac{ak}{a+k}.$$

Olisko esm. kolmikulman asema $a = 3\frac{1}{2}$ tuumaa ja korkeus $k = 4\frac{1}{3}$, niin silloin olisi neliön sivu

$$x = \frac{3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2} + 4\frac{1}{3}} = \frac{91}{47} \text{ (tuumaa).}$$

Kys. 32. *Kolmikulman ABC kaikki sivut sekä piste D eräällä niistä ovat tunnetut; mitenkä pisteestä D suora viiva DE on vedettävä (mihinkä pisteesen E toisella sivulla esm. CB), joka (viiva DE) jakaa kolmikulman niin, että toinen osa siitä on* *koko kolmikulmaan samassa suhteessa kuin luku m toiseen n, s. t. s. että mainittu osa on* $\frac{m}{n}$ *koko kolmikulmasta?*



Olkoon nyt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ja $CD = d$ (CD:n pituus d määrää pisteen D). Merkitköön sitte x linjan CE pituutta, joten piste E ja siis linja DE myös tulee määrätyksi (sioitetuksi). Kolmikulmat DEC ja ABC, joissa kulma C on yhteinen, ovat nyt toinen toiseensa kerrotussa suhteessa sivuista, jotka reunaavat yhteisen kulman C (Eukl. kirja 6 esit. 23 ja kirja 5 esit. 15), s. t. s.

$$\triangle DEC : \triangle ABC = DC \cdot CE : AC \cdot CB.$$

Kysymyksessä sanotun ehdon mukaan pitää taas oleman $\triangle DEC : \triangle ABC = m : n$ ja sitte on $DC = d$, $CE = x$, $AC = b$ ja $CB = a$, josta saadaan verranto

$$m : n = d \cdot x : b \cdot a \text{ ja}$$

$$\alpha. \qquad x = \frac{abm}{dn}.$$

Olisko $m : n = d : b$, niin $bm = dn$ ja siis $x = a$, jolloin DB olisi etsittävä, kolmikulman näin jakava, linja. Tämä onkin selvä seikka, koska silloin on $\triangle DCB : \triangle ACB = d : b = m : n$ (Eukl. 6 kirja 1 esit.). Mutta olisko taas $m : n > d : b$, s. o. $\frac{m}{n} > \frac{d}{b}$, niin $bm > dn$ ja $x > a$, jolloin kolmion ABC jakava linja leikkaisi sivun AB jossakin pisteessä F. Määrätäksemme pistettä F sivulla AB merkitkäämme linjan AF pituutta y:llä. Silloin on samoin kuin edelläkin $\triangle CAB : \triangle DAF = AC \cdot AB : AD \cdot AF$, s. t. s. $\triangle CAB : \triangle DAF = b \cdot c : (b - d) \cdot y$. Kysymyksessä lausutun ehdon mukaan on taas $\triangle CAB : \triangle CDFB = n : m$. Tästä saadaan (Eukl. 5 kirja 19 esit. seuraus) $\triangle CAB : \triangle DAF = n : (n - m)$ ja koska $\triangle CAB : \triangle DAF = b \cdot c : (b - d) \cdot y$, niin tästä seuraa

$$n : (n - m) = b \cdot c : (b - d) y,$$

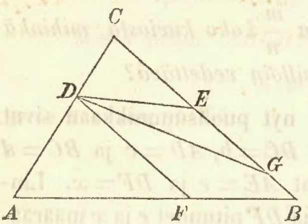
josta verrannosta saadaan yhtälö

$$n(b-d)y = bc(n-m).$$

Viimesestä yhtälöstä saadaan vihdoin

$$\beta. \qquad y = \frac{bc(n-m)}{n(b-d)}.$$

Seuraus. Jos kolmikulma ABC olisi edellisellä tavalla jaettava usiampiin osiin p, q, r, $s \cdots$ j. n. e. niin kolmikulmasta olisi leikattava ensin osa p, sitte $p+q$, ja sitte $p+q+r$ j. n. e. jolloin näin saadut jakolinjat selvästi rajoittaisivat etsittävät osat, p, q, r, $s \cdots$



Olkoot nyt kolmikulman sivut esm. $BC = a = 3$, $AC = b = 2\frac{1}{2}$ ja $AB = c = 3\frac{1}{2}$ sekä linja $CD = d = 1$ ja olkoon sitte kolmikulma jaettava neljään osaan, jotka ovat toisiinsa samassa suhteessa kuin lu'ut 3, 5, 7 ja 9, s. t. s. että osat ovat $\frac{3}{24}$, $\frac{5}{24}$, $\frac{7}{24}$ ja $\frac{9}{24}$ koko kolmikulmasta.

Koska nyt ensimäinen osa on $\frac{3}{24}$ koko kolmikulmasta, niin ensimäinen jakolinja tulee määrätyksi yhtälön α mukaan, sillä tässä on $\frac{m}{n} = \frac{3}{24}$, $\frac{d}{b} = \frac{1}{2\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$ ja siis $\frac{m}{n} < \frac{d}{b}$. Sentähden tulee piste E ja siis linja DE myös määrätyksi, kuin yhtälössä α pannaan $a = 3$, $b = \frac{5}{2}$, $d = 1$, $m = 3$ ja $n = 24$. Näin saadan

$$x = CE = \frac{3 \cdot \frac{5}{2} \cdot 3}{1 \cdot 24} = \frac{15}{16}.$$

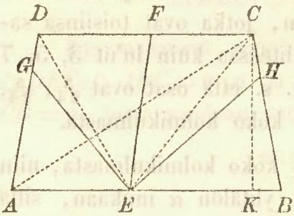
Koska taas ensimäisen ja toisen osan summa on $\frac{3}{24} + \frac{5}{24} = \frac{8}{24}$, niin nytkin on $\frac{m}{n} < \frac{d}{b}$, jonkatähden toinen jakolinja tulee myös määrätyksi yhtälön α mukaan. Tätä varten on pantava $a = 3$, $b = \frac{5}{2}$, $d = 1$, $m = 8$ ja $n = 24$, joten saadaan

$$x' = CG = \frac{3 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8}{24} = \frac{5}{2}.$$

Mutta kolmannen jakolinjan pitää leikata $\frac{3}{24} + \frac{5}{24} + \frac{7}{24} = \frac{15}{24}$ koko kolmikulmasta, jolloin on $\frac{m}{n} = \frac{15}{24}$, $\frac{d}{b} = \frac{2}{5}$ ja siis $\frac{m}{n} > \frac{d}{b}$. Sentähden tulee kolmas jakolinja määrätyksi yhtälön β mukaan, kuin siinä pannaan $b = \frac{5}{2}$, $c = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, $d = 1$, $m = 15$ ja $n = 24$. Tällä tavoin saadaan

$$y = AF = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}(24 - 15)}{24(\frac{5}{2} - 1)} = \frac{35}{16} = 2\frac{3}{16}.$$

Kys 33. *Eräs kokonansa tunnettu puolisuunnikas (nelisivuinen kuvio, jossa on kaksi yhtäsuuntaista sivua) ABCD on jaettava pisteestä E, toisella AB kuvion yhtäsuuntaisista sivuista, vedetyllä suoralla viivalla EF niin, että toinen osista on koko kuvioon samassa suhteessa kuin luku m lukuun n, s. t. s. linja EF on vedettävä niin, että se leikkaa* $\frac{m}{n}$ *koko kuviosta; mihinkä pisteesen F sivulla CD linja EF on silloin vedettävä?*



Olkoot nyt puolisuunnikkaan sivut $AB = a$, $DC = b$, $AD = c$ ja $BC = d$ sekä linjat $AE = e$ ja $DF = x$. Linjain AE ja DF pituudet e ja x määräävät pisteet E ja F yhtäsuuntaisilla sivulla AB ja DC, joten jakolinja EF myös tulee sioitetuksi. Tässä nyt on linjan DF pituus x etsittävä.

Nyt on selvästi plsnn. $ABCD = \triangle ABC + \triangle ADC$ ja $\triangle ABC = \frac{1}{2}a \cdot CK$. $\triangle ACD = \frac{1}{2}b \cdot CK$. CK on puolisuunnikkaan $ABCD$ sekä $\triangle ABC$:n j. n. e. korkeus. Tästä saadaan sitte plsnn. $ABCD = \frac{1}{2}a \cdot CK + \frac{1}{2}b \cdot CK = \frac{1}{2}(a + b) \cdot CK$. Samoin on plsnn. $AEFD = \frac{1}{2}(e + x) \cdot CK$. Näistä yhtälöistä saadaan taas helposti verranto (Eukl. kirja esit. 15)

$$\text{plsnn. } AEFD : \text{plsnn. } ABCD = (e + x) : (a + b).$$

Kysymyksessä lausutun ehdon mukaan on taas plsnn. $AEFD$: plsnn. $ABCD = m : n$ ja sentähden on selvästi

$$m : n = (e + x) : (a + b),$$

josta saadaan yhtälö

$$n(e + x) = m(a + b) \text{ ja}$$

$$\alpha. \qquad x = DF = \frac{m(a + b) - ne}{n}.$$

Jos nyt olisi $m(a+b)=ne$, niin $x=DF=o$ ja ED olisi silloin jakolinja. Olisko taas $m(a+b)<ne$, niin x olisi silloin poistosuuruus ja EF kohtaisi linjan DC jatkon jossakin pisteessä D:n vasemmalla puolella. Tässä tapauksessa leikkaisi jakolinja myös sivun AD jossakin pisteessä G, joka nyt on määrättävä. Merkitkäämme sitä varten linjan AG pituutta y:llä. Nyt on samoin kuin edelläkin plsnn. $ABCD:\triangle AED=(a+b):e$ ja koska $\triangle AED:\triangle AEG=c:y$ (Eukl. 6 kirja 1 esit.), niin (3 luku 7 todisto ja Eukl. 5 kirja 15 esit.) tästä seuraa

$$\text{plsnn. } ABCD:\triangle AEG=c(a+b):ey.$$

Mutta plsnn. $ABCD:\triangle AEG=n:m$, jonkatähden on

$$n:m=c(a+b):ey,$$

josta saadaan yhtälö

$$eny=cm(a+b) \text{ ja}$$

$$\beta. \qquad y=\frac{cm(a+b)}{en}.$$

Olisko taas $x=DF=\dfrac{m(a+b)-ne}{n}=b$, niin silloin olisi EC jakolinja, mutta jos $x=\dfrac{m(a+b)-ne}{n}>b$, niin silloin kohtaisi jakolinja sivun DC jatkon pisteen C oikealla puolella ja leikkaisi myös sivun BC jossakin pisteessä H, joka nyt on määrättävä. Merkitköön nyt z linjan BH pituutta, jonka kautta piste H tulee määrätyksi. Samoista syistä kuin edellisissäkin tapauksissa on tässäkin

$$\text{plsnn. } ABCD:\triangle EBC=(a+b):(a-e)$$

$$\text{ja } \triangle EBC:\triangle EBH=d:z,$$

ja sentähden

$$\text{plsnn. } ABCD:\triangle EBH=d(a+b):(a-e)z.$$

Kysymyksessä mainitun ehdon mukaan pitää taas oleman

$$\text{plsnn. } ABCD:\text{ kuv. } AEHCD=n:m,$$

josta saadaan

$$\triangle EBH:\text{ kuv. } AEHCD=(n-m):m.$$

Vuorottamalla saadaan sitte kahdesta viimesestä verrannosta helposti

plsnn. $ABCD:\triangle EBH = n:(n-m)$,
jonkatähden on

$$n:(n-m) = d(a+b):(a-e)z,$$

josta seuraa yhtälö

$$n(a-e)z = d(a+b)(n-m) \text{ ja}$$

$$\gamma. \qquad z = BH = \frac{d(a+b)(n-m)}{n(a-e)}.$$

Seuraus. Olisko plsnn. $ABCD$ pisteestä E vedetyillä suorilla viivoilla jaettava usiampiin osiin, jotka ovat toisiinsa samoissa suhteissa kuin lu'ut $p, q, r, s, \cdots$, niin jakolinjat saataisiin määrätyiksi, niin kuin edellisenkin kysymyksen seurauksessa, ensin $\frac{p}{p+q+r+s+\cdots}$ leikkaamalla koko kuviosta, sitte osan $\frac{p+q}{p+q+r+s+\cdots}$ leikkaamalla j. n. e. Tässä tapauksessa olisi siis aina $n = p+q+r+s+\cdots$, mutta ensimäistä osaa leikatessa olisi $m = p$, toista leikatessa taas $m = p+q$ j. n. e.

Olkoon nyt plsnn. $ABCD$ esm. niitty, jonka sivut (reunat) ovat $AB = a = 820$ syltä, $DC = b = 680$ s., $AD = c = 620$ s. ja $BC = d = 650$ s. sekä pisteiden A ja E väli $= e = 300$ s. Jos tämä niitty sitte on jaettava neljän talon kesken samassa suhteessa kuin talojen maiden isoudet, jotka ovat $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{4}$ manttaalia, niin tässä on $n = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4} = \frac{31}{12}$ ja ensimäistä rajalinjaa määrätessä on $m = \frac{1}{2}$.

Koska nyt $m(a+b) < ne$, sillä $m(a+b) = 750$ ja $ne = 775$, niin piste G sivulla AD saadaan määrätyksi yhtälön β mukaan. Tässä on nyt

$$y = AG = \frac{620 \cdot \frac{1}{2}(820+680)}{300 \cdot \frac{31}{12}} = 600 \text{ (syltä)}.$$

Näin on nyt linja EG tullut vedetyksi ja ensimäisen talon osaksi tulee kolmikulmainen niittypalsto AEG.

Toinen jakolinja saadaan määrätyksi yhtälön α mukaan, sillä nyt on $m = \frac{1}{2}+\frac{2}{3} = \frac{7}{6}$ ja sentähden $m(a+b) > ne$. Linjan DF pituus, joka määrää pisteen F, on siis

$$x = DF = \frac{\frac{7}{6} \cdot (820+680) - \frac{31}{12} \cdot 300}{\frac{31}{12}} = 377\tfrac{13}{31} \text{ (syltä)}.$$

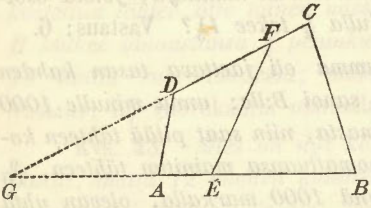
Toisen talon osaksi tulee sitte ensimäisen ja toisen rajalinjan välillä oleva niittypalsto *EGDF*.

Kolmatta rajalinjaa määrätessä on taas $m = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{11}{6}$ ja siis $\frac{m(a+b) - ne}{n} > b$, jonkatähden rajalinja, joka kohtaa sivun *BC*, on määrättävä yhtälön γ mukaan. Linjan *BH*, joka määrää pisteen *H*, pituus on sentähden selvästi

$$z = BH = \frac{650 \cdot (820 + 680)(\frac{31}{12} - \frac{11}{6})}{\frac{31}{12}(820 - 300)} = 544\tfrac{11}{31} \text{ (syltä)}.$$

Kolmannen talon osaksi tulee sentähden niittypalsto *EFCH* ja neljännen *EHB*.

Kys. 34. *Eräs kokonansa tunnettu nelisivuinen kuvio ABCD, jossa ei yksikään sivu ole suuntainen toisen kanssa, on jaettava tunnetusta pisteestä E sivulla AB vedetyllä suoralla viivalla EF kahteen osaan, joista toinen on* $\frac{m}{n}$ *koko kuviosta; mihinkä pisteesen F sivulla CD on silloin linja EF vedettävä?*



Kuin sivut *AB* ja *CD* vedetään yhtä suoraan kunneka ne kohtaavat toisensa jossakin pisteessä *G*, niin linjain *BG* ja *CG* pituudet saadaan helposti joko mittaamalla eli tasakolmiomitannon sääntöjen mukaan laskemalla, koska sivu *BC* sekä kolkat *B* ja *C* kolmiossa *BGC* ovat tunnetut. Olkoon nyt

$$BG = a, \; CG = b, \; AG = c, \; DG = d, \; EG = e \text{ ja } GF = x,$$

niin tässä taas on (Eukl. 6 kirja 23 esit. ja 5 kirja 15 esit.)

$$\triangle BGC : \triangle AGD = ab : cd,$$

josta saadaan (Eukl. 5 kirja 17 esit.)

1. $\quad$ kuv. $ABCD : \triangle AGD = (ab - cd) : cd.$

Samoin on $\triangle EGF : \triangle AGD = ex : cd$ ja sentähden myös

2. $\quad$ kuv. $EFDA : \triangle AGD = (ex - cd) : cd.$

Verrannoista 1 ja 2 saadaan vuorottamalla ja Eukl. 5 kirjan 11 esitelmän mukaan seuraava verranto

$$\text{kuv. } ABCD : \text{kuv. } EFDA = (ab - cd) : (ex - cd).$$

Kysymyksessä lausutun ehdon mukaan on taas kuv. $ABCD$: kuv. $AEFD = n:m$, josta seuraa verranto

$$n:m = (ab - cd) : (ex - cd)$$

ja tästä saadaan taas yhtälö

$$n(ex - cd) = m(ab - cd) \text{ sekä}$$

$$x = \frac{m(ab - cd) + ncd}{ne}.$$

Harjoitusesimerkiksi otamme vielä seuraavat kysymykset, jotka edellisten selityksien johdolla helposti voidaan ratkaista.

Kys. 35. *Kuin eräs luku jaetaan kolmella ja kahdeksalla, niin siitä saadaan osat, joidenka summa on 22; mikä se luku on?* Vastaus: 48.

Kys. 36. *Mikä on sen murtolu'un nimittäjä, jonka osottaja on 5 ja joka lisättynä lu'ulla $\frac{1}{2}$ tekee $1\frac{1}{3}$?* Vastaus: 6.

Kys. 37. *Muuan rahasumma oli jaettava tasan kahden hengen, A ja B, kesken. A sanoi B:lle: anna minulle 1000 markkaa ja $\frac{1}{10}$ koko rahasummasta, niin saat pitää tähteen kokonansa. Tähän suostui B huomattuansa mainitun tähteen, $\frac{9}{10}$ koko rahasummasta vähennettynä 1000 markalla, olevan yhtä ison kuin A:nkin vaatiman summan; kuinka iso oli se jaettava rahasumma?* Vastaus: 2500 markkaa.

Kys. 38. *Kahden hengen, A ja B, kesken on jaettavana 12,600 markkaa, joista B tulee saamaan 1800 markkaa enemmän kuin A; kuinka paljo tulevat he sitte saamaan itsekukin osaksensa?* Vastaus: *A* saapi 5400 ja *B* 7200 markkaa.

Kys. 39. *Kaksi miestä M ja N matkustavat samaa tietä ja yhdänne päin. M on 8 peninkulmaa N:n edellä, mutta N vaeltaa $1\frac{1}{4}$ peninkulmaa tunnissa ja M ainoastansa $\frac{3}{4}$ peninkulmaa; kuinka monta tuntia matkalla oltuansa tavoittaa sitte N M:n?* Vastaus 16 tuntia matkalla oltuansa.

Kys. 40. *Yhdestä kaupungista lähetettiin toiseen kaupunkiin sanansaattaja, joka matkusti 10 peninkulmaa vuorokaudessa, mutta kolmen vuorokauden kuluttua lähetettiin taas toinen sanansaattaja, jonka piti matkalla saavuttaa ensimäisen, hänelle uusia ilmoituksia antaaksensa. Kuin viimeksi lähetetty sanansaattaja kulki 15 peninkulmaa vuorokaudessa, niin kuinka monta peninkulmaa matkustettuansa tapasi hän ensiksi lähetetyn?* Vastaus: 90 peninkulmaa matkustettuansa.

Kys. 41. *Eräästä kaupungista lähtee A kulkemaan toiseen kaupunkiin, josta samaan aikaan toinen mies B lähtee vaeltamaan ensimäiseen kaupunkiin. Kaupunkien välillä oleva matka on 18 peninkulmaa ja A astuu 4 ja B 3 peninkulmaa vuorokaudessa. Missä, kuinka kaukana itsekustakin kaupungista, kohtaavat miehet A ja B sitte toinen toisensa?* Vastaus: $10\frac{2}{7}$ peninkulman päässä ensimäisestä ja $7\frac{5}{7}$ peninkulman päässä toisesta kaupungista.

Kys. 42. *A lähtee matkalle ja kulkee 10 tuntia vuorokaudessa ja peninkulman joka tunnissa. A:n 20 peninkulmaa matkustettua lähtee sitte toinen mies B samasta paikasta A:n jälestä. B kulkee ainoastansa $\frac{3}{4}$ peninkulmaa tunnissa, mutta matkustaa 18 tuntia vuorokaudessa; milloinkahan B sitte tavoittaa A:n?* Vastaus: $5\frac{5}{7}$ vuorokautta matkalla oltuansa.

Kys. 43. *Mies on nyt kolme kertaa niin vanha kuin poikansa, mutta 12 vuoden kuluttua tulee isän ikä olemaan ainoastansa kaksi kertaa niin iso, kuin poijan ikä silloin on; kuinka vanhat he nyt sitte ovat, kuinka vanha on isä ja kuinka vanha hänen poikansa?* Vastaus: isä on 36 ja poika 12 vuoden vanha.

Kys. 44. *Perintösumma, 30,000 markkaa, on jaettava erään lesken, hänen kahden poikansa ja kolmen tyttärensä kesken niin, että äiti saapi 2000 markkaa enemmän kuin kaikki lapsensa yhteensä ja kumpikin poika saapi kaksi kertaa niin paljo kuin itsekukin tytär; kuinka paljo tulevat nämä perilliset saamaan jokainen osaksensa?* Vastaus: äiti saapi 16,000, kumpikin poika 4000 ja jokainen tytär 2000 markkaa.

Kys. 45. *Kaksi henkeä A ja B rupesivat korttia lyömään. Pelin alussa oli A:lla 60 ja B:llä 48 ruplaa, mutta pelin lopussa* *oli kumpasellakin yhtä paljo rahaa; kuinka paljo oli silloin A voittanut B:ltä?* Vastaus: *A* oli päin vastoin menettänyt ja *B* voittanut *A*:lta 6 ruplaa.

Kys. 46. *Eräältä mieheltä kysyttiin, kuinka paljo vuotuisia tuloja hänellä oli, johonka hän vastasi: minulta menee 3500 markkaa vuodessa, mutta tuloja minulla ei ole läheskään niin paljon. Olisivatko taas tuloni $2\frac{1}{3}$ kertaa niin isot, kuin ne nyt ovat, niin sitte minullle jäisi joka vuosi saman verran rahaa tähteeksi kuin minulta nyt puuttuu; kuinka isot olivat miehen vuotuiset tulot?* Vastaus: 2100 markkaa.

Kys. 47. *Seppä tekee kolmessa päivässä aseen, jota tehdessä sepän oppilaalta menisi 4 päivää; kuinka monta päivää menisi heiltä sitte samaa asetta kahden miehen tehdessä?* Vastaus: $1\frac{5}{7}$ päivää.

Kys. 48. *Eräs mestari ansaitsee neljässä päivässä rahasumman, jota ansaitaksensa hänen kisällinsä pitää tekemän työtä 5, mutta oppipoikansa 8 päivää; kuinka monta päivää pitää kaikkien kolmen tekemän työtä saman rahasumman edestä?* Vastaus: $1\frac{17}{23}$ päivää.

Kys. 49. *Muuan sekoitus kahdesta metallista painaa a luotia ja siinä olevien metallien painot ovat toisiinsa samassa suhteessa kuin lu'ut m ja n. Kuinka monta luotia pitää sitte otettaman pois ensimäistä ja sen siaan pantaman toista metallia, jos uusi myös a luotia painava metallisekoitus on saatava, jossa näiden kahden metallin painot ovat toisiinsa samassa suhteessa kuin lu'ut p ja q?* Vastaus: $\frac{a(mq-np)}{(m+n)(p+q)}$ luotia.

Kys. 50. *Kaksi kappaletta A ja B lähtevät liikkeelle itsekukin paikastansa ja kulkevat sitte jälekkäin samaa tietä, B edellä ja A jälestä; milloinka tavoittaa A sitte B:n, jos lähtöpaikkojen välillä oleva matka on a kyynärää ja A kulkee m ja B n kyynärää minuutissa?* Vastaus: $\frac{a}{m-n}$ minuutin kuluttua.

Nyt otamme vielä poistavat arvot ja yleislasku kaavat tarkemmin selitettäviksi.

Edellä, kysymyksien 5, 17 ja 29 ratkaisemisessa on jo selitetty mitenkä itsekustakin näistä kysymyksistä tuntemattomalle saatu poistava arvo on ymmärrettävä. Näissä kysymyksissä on nähty, että ne ovat mahdottomat suoraan vastata, mutta tuntemattomalle itsekustakin saatu poistava arvo on kuitenkin vastaus samanlaiseen kysymykseen vastasuuntaisessa merkityksessä. Samoin näyttää aina tuntemattomalle ensimäisen nousun yhtälöstä saatu poistava arvo jonkun virheen kysymyksen, josta yhtälö on seurannut, lausutuissa ehdoissa eli edes yhtälössä, joka on kysymyksen käännös laskukieleen. Tämä poistava arvo voidaan myös sen merkistä huolimatta aina pitää vastauksena johonkin toiseen kysymykseen, joka eroaa esitellystä ainoastansa sillä tavoin, että jotkut lisäsuuruudet jälkimäisessä ovat tulleet poistosuuruuksiksi edelliseen eli jotkut poistosuuruudet päin vastoin lisäsuuruuksiksi.

Todellakin saadaan ensimäisen nousun yhtälöstä poistava arvo tuntemattomalle ainoastansa silloin, kuin jostakin lu'usta on otettava pois isompi luku, joka tietysti on mahdotoin tehdä.

Jos taas tuntemattoman x siaan ensimäisen nousun yhtälössä pannaan $-x$, niin jokaisen osion yhtälön puolissa, jossa x on kertojana, merkki muuttuisi vastaiseksi, s. t. s. enentävä semmoinen osio muuttuisi vähentäväksi ja päin vastoin. Olisko esm. alkuperäisessä yhtälössä enentävä osio ax, niin siitä saataisiin, $-x$ kirjoittaen x:n siaan, $a\cdot(-x) = -ax$. Samoin saataisiin vähentävästä osiosta esm. $-bx$, x:n siaan $-x$ pannen, $-b\cdot(-x) = +bx$. Jos sitte näin saatu yhtälö käännettäisiin tavalliseen kieleen, niin siitä saataisiin lause (kysymys), jossa jotkut alkuperäisen kysymyksen lisäsuuruudet olisivat poistosuuruuksina ja päin vastoin. Mutta tästä uudesta yhtälöstä tuntemattomalle saatu arvo olisi lisäsuuruus ja siis suora vastaus samasta yhtälöstä saatuun kysymykseen. Todellakin voidaan jokainen ensimäisen nousun yhtälö, josta saadaan poistava arvo tuntemattomalle, aina saada muotoon $ax = -b$, jossa a ja b merkitsevät lukuja. Tästä yhtälöstä seuraa $x = -\frac{b}{a}$, mutta jos $-x$ kirjoitetaan x:n siaan, niin samasta yhtälöstä saadaan toinen $-ax = -b$ ja merkkien muuttamalla vastaisiksi $ax = b$, josta $x = +\frac{b}{a}$, j. o. t.

Tuntemattomalle saadun poistavan arvon tämmöinen käsitys ja puustavien käyttäminen myös tunnettujen suuruuksien merkitsemiseksi antaa kysymyksien ratkaisemiselle ison yleisyyden. Kuin nimittäin joku kysymys on kerran näin ratkaistu ja kaikki tunnetut suuruudet tuntemattoman arvossa ovat puustavilla esitellyt, niin silloin on saatu kaava, josta kaikille samankaltaisille kysymyksille vastaukset hyvin helposti saadaan. Tässä kaavassa oleville puustaville tulee vaan itsekussakin eritapauksessa määrätyt arvonsa annettaviksi, joten saatu määratty arvo tuntemattomalle on vastaus tähän erityiseen kysymykseen. Tämmöisessä kaavassa voidaan möys mikä puustavisuuruus hyvänsä panna ensin tuntemattomaksi ja sen arvo sitte etsiä kaikille muille puustaville antaen määrätyt arvonsa ja näin saatu yhtälö ratkaisten.

Näyttääksemme kuinka tämmöisestä kaavasta saadaan vastaus moneen samanlaatuiseen kysymykseen otamme nyt tarkemmin tarkastettavaksi kysymyksen 50 ja siitä saadun kaavan

$$x = \frac{a}{m - n} \text{ (minuuttia)},$$

josta kappaletten A ja B yhteen sattumisen aika on joka tapauksessa saatava.

Olkoon nyt ensiksi $m > n$ esm. $m = 40$, $n = 20$ ja $a = 100$ kyynärää, niin silloin saadaan $x = \frac{100}{40 - 20} = 5$, joka on suora vastaus esiteltyyn kysymykseen. Tässä tapauksessa onkin hyvin helppo huomata tämän vastauksen olevan aivan oikean, sillä A kulkee joka minuutissa kaksi kertaa niin monta kyynärää kuin B, jonkatähden A tavoittaa B:n silloin kuin edellisen matka on kaksi kertaa niin pitkä kuin alkuperäinen välimatka 100 k. ja 5:ssä minuutissa onkin A kulkenut 200 ja B 100 kyynärää.

Kuin $m < n$ esm. $m = 30$, $n = 40$ ja $a = 100$ k., niin silloin on $x = \frac{100}{30 - 40} = -10$. Tämä tuntemattomalle saatu poistava arvo on ymmärrettävä niin, että kappaleet A ja B, jos ne ovat olleet liikkeellä ennen, kuin niiden välillä on 100:n kyynärän matka, ovat jo 10 minuuttia sitä ennen olleet yhdessä ja sitte eronneet. Se onkin selvä että A ei voi tavoittaa B:tä, joka kulkee kiireemmästi kuin A, mutta jos ne 10 minuuttia ennen ovat olleet yhdessä, niin silloin niiden välillä oleva matka todellakin on 100 kyynärää, sillä 10 minuutissa on B kulkenut 400 ja A ainoastansa 300 kyynärää. Se on selvä, että $x=10$ on suora vastaus kysymykseen: milloin ovat kappaleet A ja B olleet yhdessä, kuin niiden välillä oleva matka nyt on 100 kyynärää ja A on kulkenut 30 ja B 40 kyynärää minuutissa? Yhtälöstä $x=-10$ saadaan $x=10$, x muuttaen $-x$:ksi ja kysymyksessä muutetaan tuleva aika, jota ensin etsittiin menneeksi, jota viimesessä kysymyksessä etsitään. Sentähden merkitsee poistosuuruus mennyttä aikaa kuin lisäsuuruudella merkitään tulevaa ja päin vastoin.

Olisko taas $m=n$ esm. $m=n=50$, niin silloin olisi $x=\frac{100}{50-50}=\frac{100}{0}=\infty$. Tässä tapauksessa yhtyvät kappaleet vasta äärettömän paljo minuuttia kulettuansa, s. t. s. eivät koskaan. Se onkin aivan selvä, koska kappaleet kulkevat yhtä kiireesti, joten niiden välillä oleva matka ei koskaan voi lyhetä.

Mutta jos taas $m=n$ ja $a=o$, niin silloin on $x=\frac{0}{0}$ aivan määrämätöin suuruus, joka voipi merkitä mitä lukua hyvänsä. Tästä seuraa, että kappaleet ovat yhdessä kuinka monen minuutin kuluttua hyvänsä, s. t. s. ne kulkevat aina yhdessä.

Jos taas on $m \gtreqless n$ ja $a=0$, niin silloin on $x=\frac{0}{m-n}=0$, s. t. s. että kappaleet ovat yhdessä ainoastansa liikkeelle lähtiessänsä.

Kysyttäisiinkö taas esm. kuinka pitkä matka oli kappaletten A ja B välillä niiden liikkeelle lähtiessä kumpasenkin yhtaikaa ja yhdänne päin, kuin A, joka kulki 40 k. minuutissa, 8 minuutin kuluttua tavoitti B:n, joka kulki 25 kyynärää minuutissa, niin tähän saadaan myös helposti vastaus edellisestä kaavasta. Tässä on $x=8$ ja etsittävä a saadaan yhtälöstä $8=\frac{a}{40-25}$, josta seuraa $a=120$.

Samoin saadaan kysymykseen: kuinka nopeasti pitää A:n kulkea, kuin sen pitää 6 minuutissa tavoittaa B, joka on 240 kyynärää A:n edellä ja kulkee 60 kyynärää minuutissa? vastaus $m=100$ kyynärää minuutissa. Tämä vastaus saadaan selvästi yhtälöstä $6=\frac{240}{m-60}$.

§ 4.

Ensimäisen nousun yhtälöistä usiammalla tuntemattomalla.

Edellisissä pykälöissä on nähty, että yhdestä ensimäisen nousun yhtälöstä yhdellä tuntemattomalla aina saadaan tuntemattomalle yksi ainoa määrätty arvo, joka toteuttaa yhtälön. Mutta olisko nyt yksi ensimäisen nousun yhtälö kahdella tuntemattomalla esm.

$$\frac{3x}{4}-\frac{y}{2}=2-\frac{x}{3}+\frac{2y}{3},$$

niin tästä saadaan nimittäjäin hävittämällä, osioiden muuttamalla ja samankaltaisten osioiden yhdistämällä

$$13x-14y=24.$$

Samoin voidaan jokainen ensimäisen nousun yhtälö kuinka monella tuntemattomalla hyvänsä muodostaa toiseksi, jonka puolet ovat koko monioita.

Jos edellisestä yhtälöstä etsitään x:n arvo y:tä pitäen tunnettuna suuruutena, niin saadaan

$$x=\frac{24+14y}{13}.$$

Samoin saadaan, kuin x pidetään tunnettuna suuruutena,

$$y=\frac{13x-24}{14}.$$

Jos nyt edellisessä annetaan y:lle joku määrätty arvo, niin x saapi myös sitä vastaavan määrätyn arvon.

Kuin esm. $y=0$, niin $x=\frac{24}{13}$, kuin $y=1$, niin $x=\frac{38}{13}$ ja kuin $y=2$, niin $x=4$ j. n. e. Koska y:lle nyt voidaan antaa mikä arvo hyvänsä ja x aina saapi sitä vastaavan määrätyn arvon, joka toteuttaa yhtälön, niin tällä yhtälöllä on äärettömän paljo juuria, joista aina kaksi ja kaksi (toinen pantuna y:n ja sitä vastaava x:n siaan) toteuttavat yhtälön. Jälkimäisestä saadaan taas yhtä helposti y:lle määrätty arvo, annettiinpa x:lle mikä määrätty arvo hyvänsä. Alkuperäisessä yhtälössä voipi siis toinen tuntematon esm. x saada kuinka monta ja minkälaista arvoa hyvänsä, jolloin toinen y saapi myös yhtä paljo vaan kaikki x:n arvojen kautta määrättyjä arvoja. Tällöin saapi x nimen *vapaasti muuttuvainen* ja y:tä sanotaan x:n *tekemäksi*

Se on selvä, että y voitaisiin yhtä hyvin ottaa vapaasti muuttuvaiseksi, jolloin x saisi nimen y:n tekemä, koska y:lle voidaan antaa mikä arvo hyvänsä ja x aina saapi sitä vastaavan määrätyn arvon.

Että suuruus y on toisen x tekemä, merkitään seuraavalla tavalla

$$y = f(x),\ y = F(x),\ y = \varphi(x), \text{ j. n. e.},$$

jolloin puustavit f, F, $\varphi, \cdots$ merkitsevät, että y:n ja x:n välillä on yhtälö, jonkatähden y:n arvo aina perustaksen x:n arvoon, joka sille voidaan vapaasti annettaa.

Olisko taas kaksi yhtälöä kahdella tuntemattomalla esm.

$$\begin{cases} 11x - 10y = 14 \\ 3x + 7y = 33, \end{cases}$$

niin näistä saataisiin y:n suhteen ratkaisten

$$\begin{cases} y = \dfrac{11x - 14}{10} \\ y = \dfrac{33 - 3x}{7}. \end{cases}$$

Kuin nyt semmoisia arvoja tuntemattomille etsitään, jotka toteuttavat kumpasenkin yhtälön, niin näiden arvojen pitää oleman samojen kumpasessakin, jonkatähden alkuperäisistä yhtälöistä saadut y:n arvot ovat pidettävät yhtä isoina.

Sentähden on

$$\frac{11x - 14}{10} = \frac{33 - 3x}{7}.$$

Tässä on nyt yksi yhtälö yhdellä tuntemattomalla, josta, koska se on ensimäisestä noususta, saadaan yksi ainoa arvo x:lle, joka tekee y:n arvot yhtä isoiksi alkuperäisissä yhtälöissä. Kuin nyt yhtälö

$$\frac{11x - 14}{10} = \frac{33 - 3x}{7}$$

ratkaistaan, niin siitä saadaan $x = 4$ ja kuin luku 4 pannaan x:n siaan alkuperäisissä yhtälöissä, niin niistä saadaan

$$\begin{cases} 11\cdot4 - 10y = 14 \\ 3\cdot4 + 7y = 33, \end{cases}$$

joista kumpasestakin saadaan y:lle todellakin sama arvo, nimittäin 3. Yhtälöiden juuret ovat siis:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3. \end{cases}$$

Kahdesta ensimäisen nousun yhtälöstä kahdella tuntemattomalla saadaan siis yksi ainoa arvo itsekullekin tuntemattomalle, sillä se on selvä että kahden tämmöisen yhtälön, olivatpa ne muuten minkälaiset hyvänsä, kanssa voidaan menettää aivan samoin kuin edellisienkin.

Kahdesta yhtälöstä kahdella tuntemattomalla sanotaan toinen tuntematon *eroitettavan pois*, kuin yhtälöistä johdetaan yksi yhtälö, jossa tätä tuntematonta ei olę. Näin saatua yhtälöä yhdellä tuntemattomalla sanotaan *loppu-yhtälöksi.*

Samoin sanotaan kuinka monesta yhtälöstä ja kuinka monella tuntemattomalla hyvänsä yksi tuntematon eroitettavan pois, kuin alkuperäisistä yhtälöistä johdetaan tästä tuntemattomasta vapaat yhtälöt, joidenka luku on yhtä pienempi kuin alkuperäisten.

Kuin sitte tuntemattomia eroitetaan yksi toisensa perästä, kunneka saadaan yksi ainoa yhtälö yhdellä tuntemattomalla, niin se saapi nimen loppu-yhtälö.

Kuin edellisistä yhtälöistä

$$11x - 10y = 14$$

$$3x + 7y = 33$$

saadut y:n arvot panimme yhtä isoiksi, niin y tuli eroitetuksi pois ja saimme loppu-yhtälön

$$\frac{11x - 14}{10} = \frac{33 - 3x}{7},$$

josta taas saimme yhden ainoan määrätyn arvon x:lle.

Tämmöistä eroituskeinoa sanotaan *vertauskeinoksi,* sillä y:n arvoja verrataan tässä toisiinsa, kuin ne pannaan yhtä isoiksi.

Olkoot vielä yhtälöt

$$\begin{cases} x + 4y = 34 \\ 4x + \ \ y = 16 \end{cases}$$

ratkaistavat, niin ensimäisestä saadaan $x = 34 - 4y$ ja koska tuntemattomilla pitää olla samat arvot kumpasessakin yhtälössä, niin tämä arvo voidaan panna x:n siaan toisessa yhtälössä, joten saadaan loppu-yhtälö

$$4 \cdot (34 - 4y) + y = 16,$$

jossa y on ainoana tuntemattomana ja x siis eroitettu pois. Tätä eroituskeinoa, jossa eroitettavan tuntemattoman arvo otetaan yhdestä yhtälöstä ja pannaan saman tuntemattoman siaan toisessa sanotaan *sioituskeinoksi.*

Loppu-yhtälöstä

$$4 \cdot (34 - 4y) + y = 16$$

saadaan

$$136 - 16y + y = 16, \text{ josta taas}$$
$$-15y = -120 \text{ eli}$$
$$15y = 120 \text{ ja siis } y = 8,$$

joka taas pantuna y:n siaan esm. toisessa alkuperäisessä yhtälössä antaa

$$4x + 8 = 16, \text{ josta seuraa } x = 2.$$

Yhtälön juuret ovat siis

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 8. \end{cases}$$

Kuin taas yhtälöt

$$\begin{cases} 5x + 7y = 43 \\ 11x + 9y = 69 \end{cases}$$

ovat ratkaistavat, niin näistä, niin kuin muistakin, voidaan johtaa toiset, joissa toisella tuntemattomalla esm. y:llä on sama etukertoja. Kertokaamme sitä varten ensimäisen yhtälön puolet 9:llä ja toisen 7:llä. Näin saadaan yhtälöt

$$45x + 63y = 387$$
$$77x + 63y = 483$$

ja koska tuntemattomilla x ja y pitää olla samat arvot kumpasessakin yhtälössä, niin ensimäisen puolet poistaen toisen vastaavista puolista saadaan

$$32x = 96$$

seuraavalla tavalla:

$$\begin{array}{r} 77x + 63y = 483 \\ \mp 45x \mp 63y = \mp 387 \\ \hline 32x = 96 \end{array}$$

ja kuin tämä loppu-yhtälö ratkaistaan, saadaan $x = 3$, joka arvo pantuna x:n siaan esm. ensimäisessä yhtälössä antaa

$$5 \cdot 3 + 7y = 43,$$

josta saadaan $y = 4$. Yhtälön juuret ovat siis

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4. \end{cases}$$

Käyttäkäämme vielä tätä eroituskeinoa seuraavien yhtälöiden ratkaisemisessa.

$$\begin{cases} 8x - 21y = 33 \\ 6x + 35y = 177. \end{cases}$$

Jos y:n etukertojoiden pienin yhteinen jaettava 105 jaetaan lu'ulla 21 ja ensimäisen yhtälön puolet kerrotaan saadulla osalla 5 ja toisen taas osalla 3, joka saadaan 105 jakaen lu'ulla 35, niin saadaan yhtälöt

$$40x - 105y = 165$$
$$18x + 105y = 531.$$

Kuin näiden yhtälöiden puolet sitten lasketaan yhteen ensimäiset keskenänsä ja toiset taas keskenänsä, niin saadaan y:stä vapaa loppu-yhtälö

$$58x = 696,$$

joka ratkaistuna antaa $x = 12$. Tämä arvo pantuna x:n siaan esm. toisessa yhtälössä antaa

$$6 \cdot 12 + 35y = 177 \text{ eli}$$

$$35y = 105, \text{ josta saadaan } y = 3.$$

Yhtälön juuret ovat siis

$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 3. \end{cases}$$

Kahdessa viimesessä esimerkissä käytettyä eroituskeinoa sanotaan *yhteenlasku- ja poistokeinoksi* ja sen sääntö on, niin kuin esimerkistä jo nähdään lyhyesti seuraava: *sitte kuin yhtälöt ovat muodostetut niin, että vähintäinkin kaikki ne osiot, jotka sisältävät eroitettavan tuntemattoman, ovat yhdistetyt ja samalla puolen yhtä-isouden merkkiä kumpasessakin yhtälössä, kerrotaan itsekunkin yhtälön puolet semmoisella suuruudella, että eroitettavalla tuntemattomalla tulee olemaan numero-arvonsa puolesta sama etukertoja kumpasessakin yhtälössä; sitte lasketaan yhtälöiden samanpuoleiset puolet yhteen, jos ne osiot, jotka sisältävät eroitettavan tuntemattoman, ovat vastaismerkkiset, mutta toisen puolet poistetaan toisen puolista, jos mainitut osiot ovat samamerkkiset.*

Muist. Niin kuin viimesessä esimerkissä on nähty, saadaan pienimmät semmoiset suuruudet, joilla yhtälöiden puolet ovat kerrottavat, kuin eroitettavan tuntemattoman etukertojoiden pienin yhteinen jaettava etsitään ja se sitte jaetaan eroitettavan etukertojalla itsekussakin yhtälössä.

Muist. Että kaikki kolme edellä selitettyä eroituskeinoa ovat pää-asiallisesti yhtäläiset on selvä, sillä kaikki perustautuvat päätökseen, että tuntemattomilla pitää oleman samat arvot kumpasessakin yhtälössä.

Jos taas olisi kaksi yhtälöä kolmella tuntemattomalla, niin edellisten sääntöjen mukaan voitaisiin yksi tuntematon eroittaa pois, joten saataisiin yksi yhtälö kahdella tuntemattomalla. Tässä yhtälössä voidaan sitte antaa yhdelle näistä tuntemattomista mikä arvo hyvänsä, joten toinen saapi määrätyn arvon, jotka arvot sitte pantuina näiden tuntemattomien siaan missä alkuperäisessä yhtälössä hyvänsä antavat myös kolmannelle tuntemattomalle määrätyn arvon. Yksi tuntematon voipi siis saada mitä arvoja hyvänsä, mutta toiset saavat aina vastaavia määrättyjä arvoja. Sentähden on yksi tuntematon kahdessa yhtälössä kolmella tuntemattomalla vapaasti muuttuvainen ja toiset sen tekemiä.

Yhdestä yhtälöstä kolmella tuntemattomalla saadaan taas ainoastansa kolmannelle määrätty arvo, sitte kuin kahdelle on annettu mitkä arvot hyvänsä.

Tässä on siis kaksi vapaasti muuttuvaista ja kolmas niiden tekemä.

Että joku suuruus u on kahden x, y eli usiamman x, y, z... suuruuden tekemä merkitään seuraavalla tavalla:

$$u = f(x, y),\ u = F(x, y),\ u = f(x, y, z\ldots) \text{ j. n. e.}$$

Olisko taas kolme yhtälöä kolmella tuntemattomalla esm.

$$A.\quad \begin{cases} 5x - 6y + 4z = 15 \\ 7x + 4y - 3z = 19 \\ 2x + y + 6z = 46, \end{cases}$$

niin yksi tuntematon voidaan eroittaa pois esm. ensimäisestä ja toisesta, sekä toisesta ja kolmannesta, kuin jokaisella tuntemattomalla pitää oleman sama arvo jokaisessa yhtälössä. Eroittakaamme nyt esm. z. Kuin sitä varten kerromme ensimäisen yhtälön puolet 3:lla ja toisen 4:llä, niin saamme

$$\begin{aligned} 15x - 18y + 12z &= 45 \\ 28x + 16y - 12z &= 76 \end{aligned}$$

ja kuin näiden yhtälöiden samanpuoleiset puolet lasketaan yhteen, niin saadaan

$$43x - 2y = 121.$$

Toisesta ja kolmannesta yhtälöstä tulee taas z eroitetuksi, kuin toisen puolet kerrotaan 2:lla ja näin saadun ja kolmannen yhtälön puolet lasketaan yhteen, joten saadaan

$$16x + 9y = 84$$

seuraavalla tavalla

$$\begin{array}{r} 14x + 8y - 6z = 38 \\ 2x + y + 6z = 46 \\ \hline 16x + 9y \phantom{{}- 6z} = 84. \end{array}$$

Nyt on saatu kaksi yhtälöä

$$B.\quad \begin{cases} 43x - 2y = 121 \\ 16x + 9y = 84 \end{cases}$$

kahdella tuntemattomalla x ja y.

Nämä yhtälöt ovat nyt johdetut alkuperäisistä, sillä ehdolla, että jokaisella tuntemattomalla pitää oleman sama arvonsa niin hyvin johdetuissa kuin alkuperäisissäkin yhtälöissä, jonkatähden yhtälöistä B taas voidaan eroittaa pois toinen tuntematon esm. y.

Kertokaamme sitävarten ensimäisen puolet 9:llä ja toisen 2:lla, joten saamme

$$387x - 18y = 1089$$
$$32x + 18y = 168,$$

joista taas yhtälöiden puolet laskien yhteen saadaan

$$419x = 1257.$$

Tästä yhtälöstä saadaan taas $x = 3$.

Kuin tämä arvo pannan x:n siaan esm. toisessa yhtälöistä B, niin saadaan

$$48 + 9y = 84 \text{ eli}$$
$$9y = 36,$$

josta seuraa $y = 4$.

Kuin x:n ja y:n siaan pannaan näin saadut arvot 3 ja 4 missä hyvänsä alkuperäisistä yhtälöistä A, niin saadaan kolmannen tuntemattoman z arvo. Pankaamme lu'ut 3 ja 4 x:n ja y:n siaan esm. kolmannessa yhtälössä A. Näin saadaan

$$6 + 4 + 6z = 46 \text{ eli } 6z = 36,$$

josta seuraa $z = 6$. Yhtälöiden juuret ovat siis

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 6. \end{cases}$$

Olipa nyt kuinka monta (n) yhtälöä hyvänsä yhtä monella (n) tuntemattomalla, niin ratkaisemisen sääntö on kuin jo edellisestä esimerkistä selvästi nähdään, seuraava: *Yksi tuntematon eroitetaan pois kahdesta yhtälöstä ja sitte sama tuntematon taas toisesta kahdesta, joista ainoastansa toinen voipi olla yksi edellisiä j. n. e., kunneka saadaan (n — 1) yhtälöä (n — 1):llä tuntemattomalla.*

Tämä eroittaminen voipi tapahtua esm. yhden yhtälön puolet verraten itsekunkin (n — 1) toisista yhtälöistä puolien kanssa, niin että sama tuntematon tulee aina eroitetuksi.

Näin saatujen (n — 1):den yhtälön kanssa menetetään sitte samoin kuin alkuperäistenkin, joku toinen tuntematon eroittaen. Näin saadaan (m — 2) yhtälöä (m — 2) tuntemattomalla, joista taas samalla tavalla eroitetaan joku kolmas tuntematon. Näin menetetään kunneka saadaan yksi yhtälö yhdellä tuntemattomalla, jonka arvo tästä yhtälöstä etsitään. Tämä arvo pannaan sitte sen tuntemattoman siaan kumpasessa tahansa edellisistä kahdesta yhtälöstä kahdella tuntemattomalla, joista loppu-yhtälö on johdettu. Näin saadusta yhtälöstä etsitään siinä olevan toisen tuntemattoman arvo. Nämä kahden tuntemattoman arvot pannaan sitte samojen tuntemattomien siaan, jossakin edellisistä kolmesta yhtälöstä, josta taas saadaan kolmannen tuntemattoman arvo. Näin menetetään, kunneka ensimäiseksi eroitetun tuntemattoman arvo saadaan jostakin alkuperäisestä yhtälöstä, kaikkien muiden siinä olevien tuntemattomien arvot niiden siaan siinä pantua.

Se tapahtuu usiasti, ettei kaikki yhtälöt sisällä kaikkia tuntemattomia, jolloin eroittaminen myös tapahtuu helpommin. Esimerkiksi otamme seuraavat yhtälöt ratkaistaviksi.

$$2x - 3y + 2z = 13 \quad .\,.\,.\,. \quad (1)$$
$$4v - 2x = 30 \quad .\,.\,.\,. \quad (2)$$
$$4y + 2z = 14 \quad .\,.\,.\,. \quad (3)$$
$$5y + 3v = 32 \quad .\,.\,.\,. \quad (4).$$

Näitä yhtälöitä tarkastellen huomataan helposti, että z eroittaen ensimäisestä ja kolmannesta saadaan yksi yhtälö, joka sisältää vaan tuntemattomat x ja y.

Samoin saadaan v eroittaen toisesta ja neljännestä toinen yhtälö, joka sisältää ainoastansa tuntemattomat x ja y.

Kuin nyt z eroitetaan ensimäisestä ja kolmannesta yhtälöstä ja v toisesta ja neljännestä, niin saadaan yhtälöt

$$7y - 2x = 1$$
$$20y + 6x = 38.$$

Kuin sitte ensimäisen näistä yhtälöistä puolet kerrotaan 3:lla ja näin saadun yhtälön $21y - 6x = 3$ ja toisen edellisistä, puolet lasketaan yhteen, niin x tulee eroitetuksi pois ja saadaan loppuyhtälö

$$41y = 41 \text{ eli}$$
$$y = 1.$$

Tämä arvo pantuna y:n siaan esm. toisessa edellisistä yhtälöistä antaa

$$20+6x=38 \text{ eli } 6x=18,$$

josta seuraa

$$x=3.$$

Kuin y:n arvo (1) taas pannaan sen siaan kolmannessa ja neljännessä alkuperäisistä yhtälöistä, niin saadaan

$$4+2z=14 \text{ ja } 5+3v=32,$$

joista seuraa $z=5$ ja $v=9$.

Yhtälöt ovat siis täydellisesti ratkaistut ja niiden juuret ovat, $x=3$, $y=1$, $z=5$, $v=9$.

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $\begin{cases} x+y=20, \\ x-y=4. \end{cases}$ $\begin{cases} x=12, \\ y=8. \end{cases}$

Esm. 2. $\begin{cases} \frac{2}{3}y+\frac{1}{4}x=9, \\ \frac{2}{3}y-\frac{1}{3}x=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x=12, \\ y=9. \end{cases}$

Esm. 3. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+1=6, \\ \dfrac{x-y}{7}+3=4. \end{cases}$ $\begin{cases} x=11, \\ y=4. \end{cases}$

Esm. 4. $\begin{cases} 6x-3y=9, \\ 2y-3x=12. \end{cases}$ $\begin{cases} x=18, \\ y=33. \end{cases}$

Esm. 5. $\begin{cases} 5x-8\frac{1}{2}=7y-44, \\ 2x=y+\frac{5}{7}. \end{cases}$ $\begin{cases} x=4\frac{1}{2}, \\ y=8\frac{2}{7}. \end{cases}$

Esm. 6. $\begin{cases} 2x+6y=5, \\ 8x-9y=1. \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{17}{22}, \\ y=\frac{19}{33}. \end{cases}$

Esm. 7. $\begin{cases} 2x+y=0, \\ x-10y=10\frac{1}{2}. \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=-1. \end{cases}$

Esm. 8. $\begin{cases} 2x-\frac{1}{3}y=-3, \\ \frac{1}{2}x-3y=8. \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2, \\ y=-3. \end{cases}$

Esm. 9. $\begin{cases} \dfrac{3x-5y}{5}+\dfrac{x}{2}=9, \\ \dfrac{3x+y}{4}-y=6. \end{cases}$ $\begin{cases} x=10, \\ y=2. \end{cases}$

Esm. 10. $\begin{cases} \dfrac{a+x}{2}=3y, \\ \dfrac{a-y}{3}=5x. \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{5a}{91}, \\ y=\dfrac{16a}{91}. \end{cases}$

Esm. 11. $\begin{cases} 3x+8y=-3{,}6, \\ -0{,}5x+2y=1{,}6. \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2, \\ y=0{,}3. \end{cases}$

Esm. 12. $\begin{cases} x+y=a, \\ bx=cy. \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{ac}{b+c}, \\ y=\dfrac{ab}{b+c}. \end{cases}$

Esm. 13. $\begin{cases} x+y=18{,}73, \\ 0{,}56x-2{,}7y=0{,}122. \end{cases}$ $\begin{cases} x=15{,}55, \\ y=3{,}18. \end{cases}$

Esm. 14. $\begin{cases} \dfrac{a}{c+x}=\dfrac{b}{b-y}, \\ b(x+c)=y. \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{a-c(a+1)}{a+1}, \\ y=\dfrac{ab}{a+1}. \end{cases}$

Esm. 15. $\begin{cases} x+2y+2z=100, \\ 3x+y+3z=160, \\ 4x+4y+z=150. \end{cases}$ $\begin{cases} x=20, \\ y=10, \\ z=30. \end{cases}$

Esm. 16. $\begin{cases} 2x+3y-4=0, \\ 5x+3z+4=0, \\ 6y-z-7=0. \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=\frac{2}{3}, \\ z=-3. \end{cases}$

Esm. 17. $\begin{cases} x+\dfrac{y-z}{2}=6, \\ y+\dfrac{x-z}{3}=4, \\ z+\dfrac{x-y}{4}=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x=5\frac{1}{3}, \\ y=2\frac{2}{3}, \\ z=1\frac{1}{3}. \end{cases}$

Esm. 18. $$\begin{cases} \dfrac{2x+3y-z}{2y-x}=\tfrac{2}{3}, \\ \dfrac{2x-z}{x-3z}=-\tfrac{1}{2}, \\ \dfrac{4x-3y}{2z-1}=2\tfrac{1}{3}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1, \\ y=1, \\ z=-1. \end{cases}$$

Esm. 19. $$\begin{cases} ax+by=c, \\ by+cz=a, \\ ax+cz=b. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{b+c-a}{2a}, \\ y=\dfrac{a+c-b}{2b}, \\ z=\dfrac{a+b-c}{2c}. \end{cases}$$

Esm. 20. $$\begin{cases} 4x+7y+159=0, \\ 3\tfrac{1}{3}x=\tfrac{1}{6}z-55, \\ 2x+y+9z=498. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-13\tfrac{1}{2}, \\ y=\ \ 15, \\ z=60. \end{cases}$$

Esm. 21. $$\begin{cases} v+2x+2y+2z=19, \\ 3v+x+3y+3z=26, \\ 4v+4x+y+4z=31, \\ 5v+5x+5y+z=34. \end{cases} \qquad \begin{cases} v=1, \\ x=2, \\ y=3, \\ z=4. \end{cases}$$

Esm. 22. $$\begin{cases} 3x+4y-5z=-11, \\ 11t-8y=13\tfrac{1}{8}, \\ 16z-9x=38, \\ 16t-5z=12. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\tfrac{2}{3}, \\ y=\tfrac{1}{4}, \\ z=2, \\ t=1\tfrac{3}{8}. \end{cases}$$

Esm. 23. $$\begin{cases} ax=by, \\ cz=dv, \\ ey=fz, \\ gx=hv. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=0, \\ v=0. \end{cases}$$

Esm. 24. $$\begin{cases} u+v+x+y+z=1, \\ 2u-v-3x+5y-z=0, \\ u-2v+x+2y-3z=2, \\ 4u+3v+2x-4y+z=-1, \\ 3u-2v-3x-5y-2z=2. \end{cases} \qquad \begin{cases} u=1, \\ v=-3, \\ x=1, \\ y=0, \\ z=2. \end{cases}$$

Esm. 25. *) $\begin{cases} x+y+z+t+u=a, \\ x+y+z+t+v=b, \\ x+y+z+u+v=c, \\ x+y+t+u+v=d, \\ x+z+t+u+v=e, \\ y+z+t+u+v=f. \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{s}{5}-f, \\ y=\frac{s}{5}-e, \\ z=\frac{s}{5}-d, \\ t=\frac{s}{5}-c, \\ u=\frac{s}{5}-b, \\ v=\frac{s}{5}=a, \\ \text{joissa on } s=a+b+\cdot\cdot f. \end{cases}$

Muist. Edellisestä on nyt selvä, että kuinka monesta ensimäisen nousun yhtälöstä hyvänsä, kuin niissä olevien tuntemattomien luku on sama kuin yhtälöidenkin, saadaan yksi määrätty arvo jokaiselle tuntemattomalle.

Tässä on kuitenkin muistettava, että yhtälöiden seassa ei saa olla yhtäkään, joka on jollakin tavalla johdettu toisista näistä yhtälöistä, sillä silloin on todellakin erilaisten yhtälöiden luku pienempi kuin tuntemattomien, jolloin yhtälöillä on äärettömän paljo juuria.

Olisivatko esm. yhtälöt

$$x-\tfrac{2}{3}y=0 \;.\;.\;.\;.\; (1)$$
$$x+y\;=2z.\;.\;.\;.\; (2)$$
$$5y=6z.\;.\;.\;.\; (3)$$

ratkaistavat, niin, kuin z eroitetaan pois toisesta ja kolmannesta, saadaan $3x-2y=0$, joka on sama kuin ensimäinenkin. Yhtälöt toteutuvat siis annettiinpa y:lle mikä arvo hyvänsä, kuin vaan $x=\frac{2}{3}y$ ja $z=\frac{5}{9}y$.

Jos yhtälöt taas ovat mahdottomia, toisiansa vastaan sanovia, niin silloin ei mitkään arvot tuntemattomille voi toteuttaa niitä, joka näytäksen siitä, että niistä saadaan mahdoton loppuyhtälö.

---

*) Muist. Esimerkin 25 yhtälöt saadaan helposti ratkaistuiksi, kuin niiden kaikkien puolet lasketaan yhteen, joten saadaan yhtälö

$$5x+5y+5z+5t+5u+5v=a+b+c+d+e+f=s,$$

eli

$$x+y+z+t+u+v=\tfrac{s}{5}$$

ja kuin tämän yhtälön puolista sitte otetaan pois itsekunkin alkuperäisistä yhtälöistä puolet, joten 5 tuntematonta tulee joka kerran eroitetuksi ja kuudennen arvo samassa saaduksi.

Niin saadaan esm. yhtälöistä

$$\begin{aligned} 2x + y - 8z &= 10 \\ 3x - 2y + 5z &= 14 \\ 8x - 3y + 2z &= 35 \end{aligned}$$

y eroittaen pois yhtälöt

$$\begin{aligned} 7x - 11z &= 34 \\ 14x - 22z &= 65, \end{aligned}$$

jotka ovat mahdottomat samoilla arvoilla x:lle ja z:lle toteuttaa ja antavatkin mahdottoman loppu-yhtälön

$$3 = 0.$$

Olisko taas kuinka monessa (n) yhtälössä hyvänsä enemmän tuntemattomia kuin yhtälöitä, niin edellisestä on selvä, että yhtälöistä voidaan eroittaa pois $(n-1)$ tuntematonta, joten saadaan loppu-yhtälö aina usiammalla, kuin yhdellä tuntemattomalla, koska niiden luku on isompi kuin n. Tässä loppu-yhtälössä voidaan taas antaa mitä arvoja hyvänsä kaikille muille paitsi yhdelle tuntemattomalle, joka aina saapi muiden arvoja vastaavan määrätyn arvon ja sen kautta saavat myös kaikki eroitetut tuntemattomat määrättyjä arvoja. Jos tuntemattomien luku olisi m, niin edellisestä on selvä, että $(m-n)$ tuntematonta voisi saada mitä arvoja hyvänsä, olla vapaasti muuttuvaista, mutta toiset n olisivat niiden tekemiä.

Jos taas olisi enemmän yhtälöitä kuin niissä olevia tuntemattomia, niin tuntemattomien arvot saataisiin jo niin monesta yhtälöstä kuin niissä on tuntemattomia, jolloin samojen arvojen pitäisi toteuttaa toisetkin, jos samojen arvojen tuntemattomille pitäisi toteuttaa kaikki yhtälöt. Olisivatko esm. yhtälöt

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ x - y &= b \\ 2x + 4y &= c \end{aligned}$$

ratkaistavat, niin kahdesta ensimäisestä yhtälöstä saadaan

$$x = \frac{a+b}{2}$$

$$y = \frac{a-b}{2}$$

ja kuin nämä arvot pannaan tuntemattomien siaan kolmannessa yhtälössä, niin saadaan yhtälö

$$a + b + 2(a - b) = c,$$

jossa on ainoastansa tunnettuja suuruuksia. Jos tämä viimenen yhtälö nyt on oikea, niin x:n ja y:n arvot $\frac{a+b}{2}$ ja $\frac{a-b}{2}$ toteuttavat kaikki kolme alkuperäistä yhtälöä. Tätä yhtälöä tunnettujen suuruuksien välillä, jonka pitää olla oikean, jos samojen arvojen tuntemattomille pitää toteuttaa kaikki alkuperäiset yhtälöt, sanotaan *ehto-yhtälöksi.*

Niin saadaan yhtälöistä

$$\begin{aligned} x &= a z + c \\ y &= b z + d \\ x &= a' z + c' \\ y &= b' z + d' \end{aligned}$$

ehto-yhtälö

$$\frac{c' - c}{a - a'} = \frac{d' - d}{b - b'}.$$

Kysymyksiä, joista saadaan usiampia ensimäisen nousun yhtälöitä usiammalla tuntemattomalla.

Kys. 1. *Mikä murtoluku on se, josta tulee $\frac{1}{4}$, kuin sen sekä osottajasta että nimittäjästä otetaan pois 3, mutta josta saadaan $\frac{1}{2}$, kuin sen sekä osottajaan ettää nimittäjään pannaan 5?*

Merkitköön nyt x etsittävän murtolu'un osottajaa ja y sen nimittäjää, joten $\frac{x}{y}$ merkitsee itseänsä murtolukua. Kuin tämän murtolu'un osottajasta sekä nimittäjästä otetaan pois 3, niin siitä saadaan $\frac{x-3}{y-3}$, jonka ensimäisen kysymyksessä lausutun ehdon mukaan pitää oleman $\frac{1}{4}$. Samoin pitää toisen ehdon mukaan lausekkeen $\frac{x+5}{y+5}$ tekemän $\frac{1}{2}$. Tästä seuraa nyt selvästi yhtälöt

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{y-3}=\frac{1}{4} \\ \dfrac{x+5}{y+5}=\frac{1}{2}, \end{cases}$$

joista saadaan $x=7$, $y=19$ ja siis murtoluku $\dfrac{x}{y}=\dfrac{7}{19}$.

Kys. 2. *Eräs mies on lainannut pois 40000 markkaa ja saapi vuotuista kasvua (intressiä) osasta 5 sadalta ja toisesta osasta vaan 4 sadalta. Koko summasta saapi hän yhteensä 1856 m. kasvua vuodessa; kuinka ison osan edellä mainitusta summasta on hän nyt lainannut 5:stä ja kuinka ison 4:stä sadalta?*

Merkitköön nyt x summaa, josta velanantaja saapi kasvua 5 ja y summaa, josta hän saapi 4 sadalta. Vuoden kasvu summasta x on nyt selvästi $\dfrac{5x}{100}$ ja summan y vuotuinen kasvu on taas $\dfrac{4y}{100}$. Nämä kasvut tekevät yhteensä 1856 m. ja koska x ja y tekevät yhteensä 40000 m., niin tästä saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} x+y=40000 \\ \dfrac{5x}{100}=\dfrac{4y}{100}=1856. \end{cases}$$

Nämä yhtälöt ratkaisten saadaan sitte $x=25600$ ja $y=14400$ markkaa.

Kys. 3. *M on antanut lainaksi 30000 markkaa, joista hän saapi vuotuisen kasvun, mutta sen jälkeen on hänen täytynyt ottaa lainaksi 20000 markkaa, joista hänen pitää maksaa vuotuinen kasvu. Kasvu, jonka hän saapi on 800 markkaa isompi kuin se, joka hänen pitää maksaa. Toinen mies N on taas antanut lainaksi 35000 m., joista hän saapi kasvua yhtä monta sadalta, kuin M maksaa 20000 markasta sadalta. Sitte on N ottanut lainaksi 24000 m., joista hän maksaa vuotuista kasvua yhtä monta sadalta, kuin M saapi 30000 markasta sadalta. Kasvu, jonka N saapi on 310 markkaa isompi kuin se, jonka hän maksaa vuodessa; kuinka monta sadalta saapi sitte M vuotuista kasvua ja kuinka monta sadalta maksaa hän?*

Merkitköön nyt x lukua, jonka M saapi sadalta vuotuista kasvua ja y sitä, jonka hän maksaa. Silloin saapi hän 30000 markasta kasvua vuodessa $\frac{30000x}{100} = 300x$ ja 20000 markasta pitää hänen taas maksaman $\frac{20000y}{100} = 200y$ markkaa vuodessa. Ensimäisen lauseen mukaan on taas kasvu, jonka hän saapi 800 m. isompi kuin se, jonka hän maksaa, josta selvästi saadaan yhtälö

1. $$300x = 200y + 800.$$

Samalla tavalla saadaan taas kysymyksen toisesta lauseesta yhtälö

2. $$350y = 240x + 310.$$

Kuin yhtälöt 1 ja 2 sitte ratkaistaan, niin niistä saadaan $x = 6$ ja $y = 5$.

Kys. 4. *Kahdella hengellä oli munia kaupan ja ensimäinen sanoi toiselle: jos annat minulle 2 munaa omistasi, niin sitte on minulla yhtä monta munaa kuin sinullakin; tähän vastasi toinen: annapas sinä minulle 2 munaa omistasi, niin minulla on sitte kaksi kertaa niin monta kuin sinulla. Kuinka monta munaa oli heillä itsekullakin?*

Merkitköön nyt x ensimäisen ja y toisen munien lukua, niin ensimäisen munan kauppiaan lauseesta, josta havaitaan, että hänen munansa enennettyinä kahdella tekisivät yhtä monta kuin toisen vähennettyinä kahdella, saadaan selvästi yhtälö

$$x + 2 = y - 2.$$

Toisen munakauppiaan lauseesta saadaan samalla tavalla yhtälö

$$y + 2 = 2(x - 2).$$

Edellisistä yhtälöistä saadaan sitte helposti

$$x = 10 \text{ ja } y = 14 \text{ munaa.}$$

Kys. 5. *Eräs kolmenumeroinen luku on semmoinen, että siinä olevien numeroiden summa on 16, kymmenien numero on yhtä isompi kuin ykkösien numero ja kuin tähän lukuun pan-*

naan luku 594, niin saadaan toinen kolmenumeroinen luku, jossa etsittävän numerot ovat vastasuuntaisessa järjestyksessä, s. t. s., ykkösien numero on saatojen numerona ja satojen taas ykkösien numerona; mikä se luku on?

Merkitköön nyt x satojen, y kymmenien ja z ykkösien numeroa, niin kahden ensimäisen kysymyksessä lausutun ehdon mukaan saadaan selvästi seuraavat kaksi yhtälöä:

$$x+y+z=16$$
$$y=z+1.$$

Koska nyt x on satojen, y kymmenien ja z ykkösien numero, niin etsittävässä lu'ussa pitää oleman $100x$, $10y$ ja z ykköstä, joka tekee $100x+10y+z$. Tämän lu'un pitää taas lisättynä lu'ulla 594 tekemän $100z+10y+x$, jossa lu'ussa etsittävän numerot ovat vastasuuntaisessa järjestyksessä. Tästä saadaan yhtälö

$$100x+10y+z+594=100z+10y+x,$$

josta taas osioiden muuttamalla ja samankaltaisten osioiden yhdistämällä saadaan

$$99x-99z=-594 \text{ eli } x-z=-6.$$

Kuin sitte yhtälöt

$$\begin{cases} x+y+z=16 \\ y=z+1 \\ x-z=-6 \end{cases}$$

ratkaistaan, niin niistä saadaan $x=1$, $y=8$ ja $z=7$. Etsittävä luku on siis 187.

Kys. 6. *Vesi-astiaan, joka vetää 210 kannua, voidaan laskea vettä kahdesta eri torvesta. Koettelemalla on sitte huomattu että, kuin ensimäisestä torvesta lasketaan vettä 4 minuuttia ja toisesta 5 m., niin saadaan yhteensä 90 kannua, mutta kuin ensimäisestä lasketaan 7 ja toisesta $3\frac{1}{2}$ minuuttia, niin silloin saadaan yhteensä 126 kannua. Kuinka monta kannua vettä saadaan itsekustakin torvesta minuutissa ja kuinka monessa minuutissa täytyy koko astia kumpasestakin torvesta yhtaikaa laskiessa?*

Merkitköön nyt x kannulukua, joka juoksee ensimäisestä torvesta minuutissa ja y sitä, joka juoksee toisesta, niin neljässä minuutissa juoksee silloin ensimäisestä torvesta $4x$ kannua ja toisesta taas juoksee viidessä minuutissa $5y$ kannua, jotka ensimäisen lauseen mukaan tekevät 90 kannua. Tästä saadaan selvästi yhtälö

$$4x + 5y = 90.$$

Samalla tavalla saadaan toisesta kysymyksessä lausutusta kokemuksesta yhtälö

$$7x + 3\tfrac{1}{2}y = 126.$$

Näistä yhtälöistä saadaan sitte

$$x = 15 \text{ ja } y = 6$$

ja koko astia täytyy siis kumpasestakin torvesta yhtaikaa laskiessa 10 minuutissa.

Kys. 7. *Hopeasepällä on 10-luotista ja 15-luotista hopeata; kuinka paljo pitää hänen sitte ottaa kumpastakin lajia yhteen sulatettavaksi, saadaksensa 20 luotia 13-luotista hopeata?*

Merkitköön nytt x luotilukua, joka sepän pitää panna 10-luotista ja y sitä luotilukua, joka hänen pitää panna 15-luotista hopeata uuteen metallisekoitukseensa. Koska 10-luotisessa hopeassa on $\frac{10}{16}$ luotia puhdasta hopeata joka luodissa, niin x luodissa semmoisesta hopeasta on selvästi $x \cdot \frac{10}{16}$ luotia puhdasta hopeata. Samoin on y luodissa 15-luotisesta hopeasta $y \cdot \frac{15}{16}$ luotia puhdasta hopeata. Sepän uudessa sekoituksessa tulee siis kaikkiansa olemaan $(\frac{10}{16}x + \frac{15}{16}y)$ luotia puhdasta hopeata ja koska tämä sekoitus tulee olemaan 13-luotista hopeata ja painamaan 20 luotia, niin siinä pitää oleman $20 \cdot \frac{13}{16}$ luotia puhdasta hopeata. Tästä saadaan nyt selvästi yhtälöt

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ \frac{10}{16}x + \frac{15}{16}y = 20 \cdot \frac{13}{16}, \end{cases}$$

joista taas saadaan helposti

$$x = 8 \text{ luotia 10-luotista ja}$$
$$y = 12 \text{ luotia 15-luotista hopeata.}$$

Kys. 8. *Sepällä on kolme metallikappaletta, ja jokaisessa on kultaa, hopeata ja vaskea. Ensimäisessä kappaleessa on 5 luotia kultaa, 15 luotia hopeata ja 30 luotia vaskea; toisessa kappaleessa on 20 luotia kultaa, 28 luotia hopeata ja 48 luotia vaskea ja kolmannessa taas on 12 luotia kultaa, 39 luotia hopeata ja 24 luotia vaskea. Kuinka monta luotia pitää sitte sepän ottaa itsekustakin kappaleesta yhteen sulatettavaksi, saadaksensa uuden metallisekoituksen, jossa on 10 luotia kultaa, 23 luotia hopeata ja 26 luotia vaskea?*

Merkitkäämme nyt x:llä luotia, jotka sepän pitää ottaa ensimäisestä kappaleesta, y:llä luotia, jotka hänen pitää ottaa toisesta ja z:lla taas luotia, jotka hänen pitää ottaa kolmannesta metallikappaleesta. Koska nyt ensimäisessä kappaleessa on 5 luotia kultaa, 15 luotia hopeata ja 30 luotia vaskea, niin se painaa 50 luotia ja siinä on siis $\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$ luotia kultaa, $\frac{15}{50}=\frac{3}{10}$ luotia hopeata ja $\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$ luotia vaskea joka luodissa ja x luodissa, jotka sepän tästä kappaleesta ovat otettavat, on siis selvästi $x\cdot\frac{1}{10}$ luotia kultaa, $x\cdot\frac{3}{10}$ luotia hopeata ja $x\cdot\frac{3}{5}$ luotia vaskea. Samalla tavalla havaitaan, että toisesta kappaleesta otettavassa y luodissa on $y\cdot\frac{5}{24}$ luotia kultaa, $y\cdot\frac{7}{24}$ luotia hopeata ja $y\cdot\frac{1}{2}$ luotia vaskea. Kolmannesta kappaleesta otettavassa z luodissa on taas selvästi $z\cdot\frac{4}{25}$ luotia kultaa, $z\cdot\frac{13}{25}$ luotia hopeata ja $z\cdot\frac{8}{25}$ luotia vaskea. Sepän uuteen metallisekoitukseen tulee siis $\left(\frac{x}{10}+\frac{5y}{24}+\frac{4z}{25}\right)$ luotia kultaa, $\left(\frac{3x}{10}+\frac{7y}{24}+\frac{13z}{25}\right)$ luotia hopeata ja $\left(\frac{3x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{8z}{25}\right)$ luotia vaskea. Mutta siinä pitää kysymyksessä lausutun ehdon mukaan oleman 10 luotia kultaa 23 luotia hopeata ja 26 luotia vaskea. Tästä seuraa nyt yhtälöt

$$\left|\begin{aligned}&\frac{x}{10}+\frac{5y}{24}+\frac{4z}{25}=10,\\&\frac{3x}{10}+\frac{7y}{24}+\frac{13z}{25}=23,\\&\frac{3x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{8z}{25}=26.\end{aligned}\right.$$

Nämä yhtälöt ratkaisten saadaan $x=10$, $y=24$ ja $z=25$.

Muist. Uusi metallisekoitus painaa selvästi $x+y+z=59$ luotia, joka yhtälö myös saadaan edellisten kolmen yhtälön puolet laskien yhteen. Viimestä yhtälöä voidaan käyttää yhtälöitä ratkaistessa minkä edellisistä kolmesta yhtälöstä siassa hyvänsä.

Kys. 9. *Kuin hopeata punnitaan vedessä, niin se menettää* $\frac{2}{21}$ *painostansa, s. t. s. että 21* ℔. *hopeata painaa vedessä punnitessa vaan 19* ℔. *Samoin painaa 9* ℔. *vaskea ainoastansa 8* ℔. *vedessä punnitessa, s. o. vaski kepenee* $\frac{1}{9}$ *painoansa vedessä punnitessa. Eräs metallisekoitus hopeasta ja vaskesta painaa taas 148* ℔. *ja menettää vedessä punnitessa* $14\frac{2}{3}$ ℔. *painostansa; kuinka paljo siinä sekoituksessa on sitte hopeata ja kuinka paljo vaskea?*

Olkoon x℔. hopeata ja y℔. vaskea, niin silloin on selvästi $x+y=148$ ja koska naula hopeata kepenee vedessä $\frac{2}{21}$℔., niin x℔. kepenee silloin $x\cdot\frac{2}{21}$ ℔. Samoin on y℔. vaskea vedessä $y\cdot\frac{1}{9}$ ℔. kepeämpi. Koko metallisekoitus on taas vedessä $14\frac{2}{3}$ ℔. kepeämpi, josta taas seuraa yhtälö $\frac{2x}{21}+\frac{y}{9}=14\frac{2}{3}$. Kuin sitte yhtälöt

$$\begin{cases} x+y=148 \\ \frac{2x}{21}+\frac{y}{9}=14\frac{2}{3} \end{cases}$$

ratkaistaan, niin niistä saadaan

$$\begin{cases} x=112 \text{ ℔. hopeata ja} \\ y=36 \text{ ℔. vaskea.} \end{cases}$$

Kys. 10. *Kolme henkeä A, B ja C rupesivat kortinlyöntiin välipuheella, että tappaavan joka pelin lopussa piti maksaa kumpasellekin toiselle yhtä paljo kuin heidän itsekunkin kukkarossa silloin oli rahaa. Kolme peliä korttia lyötyänsä, joista A tappasi ensimäisen, B toisen ja C kolmannen, oli jokaisella heistä 120 markkaa; kuinka paljo oli kullakin rahaa peliin ruvetessansa?*

Merkitköön nyt x markkaa A:n, y m. B:n ja z m. C:n alkuperäistä rahasummaa, niin ensimäisen pelin jälestä jäi A:lle

$(x - y - z)$ m., koska hänen piti maksaman B:lle y ja C:lle z markkaa. Nyt oli siis B:llä $2y$ ja C:llä $2z$ markkaa. Toisen pelin jälestä, jonka B tappasi, piti hänen (B:n) taas maksaman A:lle $(x - y - z)$ markkaa, joka rahasumma A:lle oli ensimäisen pelin jälestä jäänyt. Samoin piti B:n maksaman C:lle $2z$ m. Näin oli toisen pelin jälestä A:lla $2(x - y - z) = (2x - 2y - 2z)$ m., B:llä $2y - (x - y - z) - 2z = (3y - x - z)$ m. ja C:llä oli taas $2 \cdot 2z = 4z$ m. Kolmannen pelin jälestä saivat taas A ja B yhtä paljo lisää kuin heillä toisen pelin jälestä oli rahaa, joten A:n rahasumma nyt oli $2(2x - 2y - 2z) = (4x - 4y - 4z)$ m. ja B:n $2(3y - x - z) = (6y - 2x - 2z)$ m. Koska C tappasi kolmannen pelin ja sentähden sai maksaa A:lle $(2x - 2y - 2z)$ ja B:lle $(3y - x - z)$ m., niin hänelle jäi selvästi $4z - (2x - 2y - 2z) - (3y - x - z) = (7z - x - y)$ m. Kolmannen pelin jälestä sanottiin taas jokaisella olleen 120 m., josta saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} 4x - 4y - 4z = 120, \\ 6y - 2x - 2z = 120, \\ 7z - x - y = 120. \end{cases}$$

Nämä yhtälöt ratkaisten saadaan sitte A:n alkuperäinen rahasumma $x = 195$, B:n $y = 105$ ja C:n $z = 60$ markkaa.

Kys. 11. *Eräs sekoitus kahdesta metallista painaa a ℔., mutta on vedessä punnitessa b ℔. kepeämpi. Sitte on huomattu, että m naulainen kappale ensimäisestä sekoituksessa olevista metallista on vedessä punnitessa p ℔. kepeämpi ja n naulaisen kappaleen toisesta metallista on taas huomattu olevan q ℔. kepeämmän vedessä punnitessa. Kuinka monta naulaa on sitte kumpastakin metallia mainitussa sekoituksessa?*

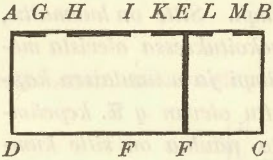
Olkoon nyt sekoituksessa x℔. ensimäistä ja y℔. toista metallia. Koska nyt m℔. painava kappale ensimäisestä metallista on vedessä punnitessa p℔. kepeämpi, niin naulan painava kappale on silloin selvästi $\frac{p}{m}$ ℔. kepeämpi ja x℔. painava on siis $x \cdot \frac{p}{m}$℔. kepeämpi vedessä punnitessa. Samoin on y℔. painava kappale toisesta metallista $y\frac{q}{n}$ ℔. kepeämpi vedessä punnitessa. Koko sekoitus, joka painaa $x+y=a$ ℔., on taas vedessä punnitessa b ℔ kepeämpi. Tästä saadaan nyt yhtälöt

$$\begin{cases} x+y=a, \\ \dfrac{px}{m}+\dfrac{qy}{n}=b, \end{cases}$$

joista sitte seuraa

$$\begin{cases} x=\dfrac{m(aq-nb)}{mq-np} \text{ ℔. ensimäistä ja} \\ y=\dfrac{n(mb-ap)}{mq-np} \text{ ℔. toista metallia.} \end{cases}$$

Kys. 12. *Eräs huonerakennos ABCD on jaettava kahdeksi suojaksi, joidenka välillä tulee olemaan c jalkaa paksu seinä. Isompi suoja pitäisi saataman a ja pienempi b jalkaa pitkäksi. Seinälle AB tulee taas asetettavaksi kolme d jalkaa leveätä ikkunaa niin, että yksmittaisuus saadaan niin hyvin rakennoksen ulko- kuin kumpasenkin suojan sisäpuolelle, s. t. s. että ikkunoiden välit HI ja KL saadaan yhtä pitkiksi sekä joka ikkuna yhtä etäälle lähimäisestä nurkasta kumpasenkin suojan sisässä, joten on* $AG=KE=EL=MB$. *Kuinka pitkät tulevat silloin ikkunoiden välit HI ja KL sekä jokaisen ikkunan ja lähimäisen nurkan väli AG j. n. e. olemaan?*



Merkitköön nyt x ikkunoiden väliä $HI=KL$ ja y ikkunan ja lähimäisen nurkan väliä $AG=MB$, niin koko seinän pituus on silloin selvästi $(2x+2y+3d)$ jalkaa. Koska taas suojat ovat isompi a ja pienempi b jalkaa pitkät ja väliseinä on c jalkaa paksu, niin koko seinä on sentähden selvästi $(a+b+c)$ jalan pituinen. Isompi suoja on taas selvästi $(x+2y+2d)$ ja pienempi $(2y+d)$ jalkaa pitkä, mutta ne ovat myös ensimäinen a ja toinen b jalan pituiset. Tästä saadaan nyt selvästi seuraavat kolme yhtälöä:

$$\begin{cases} 2x+2y+3d=a+b+c, \\ x+2y+2d=a, \\ 2y+d=b. \end{cases}$$

Kysymyksestä on nyt saatu kolme yhtälöä kahdella tuntemattomalla, jonkatähden ei kaikissa tapauksissa voida saada semmoisia arvoja tuntemattomille, jotka toteuttaisivat kaikki yhtälöt yhtaikaa. Mutta näistä yhtälöistä saadaan kuitenkin ehto-yhtälö tunnettujen suuruuksien a, b, c ja d kesken ja kysymys voidaan aina ratkaista kuin vaan nämä tunnetut suuruudet valitaan niin, että mainittu ehto-yhtälö on oikea.

Kuin nyt y eroitetaan pois ensimäisestä ja toisesta yhtälöstä ja loppu-yhtälö ratkaistaan, niin saadaan

$$x = b + c - d.$$

Samoin saadaan toisesta ja kolmannesta yhtälöstä

$$x = a - b - d.$$

Jos nyt nämä x:n arvot ovat yhtä isot, niin silloin toteuttavat samat arvot tuntemattomille kaikki kolme yhtälöä. Ehtoyhtälö on siis

$$b + c - d = a - b - d \text{ eli}$$
$$a = 2b + c.$$

Jos sentähden isompi suoja tehdään väliseinän paksuutta c pitemmäksi kuin pienemmän suojan kaksinkertainen pituus $2b$, niin kysymys voidaan ratkaista ja silloin on ikkunoiden väli

$$x = a - b - d = b + c - d$$

ja joka ikkunan ja lähimäisen nurkan väli

$$y = \frac{b - d}{2}.$$

Olisko esm. $d = 4$, $c = 1$, $b = 12$ ja $a = 25$ jalkaa, niin silloin olisi myös $x = 9$ ja $y = 4$ jalkaa.

Kys. 13. *Eräs sisäpuolelta a jalan pituinen huonerakennos on jaettava kolmeksi suojaksi kahdella c jalkaa paksulla väliseinällä. Isoimmassa suojassa, joka tulee olemaan keskellä, pitää oleman kolme, sen toisen puoleisessa kaksi ja toisen puoleisessa yksi ikkuna, kaikki samalla seinällä ja d jalkaa leveitä. Kuinka lähekkäin tulevat silloin ikkunat asetettaviksi ja kuinka lähelle nurkkia reunimaiset ikkunat ja kuinka pitkä pitää kukin* *niistä kolmesta suojasta tehtämän, jos yksmittaisuus on saatava niin hyvin rakennoksen ulko- kuin joka suojan sisäpuolellekin, s. t. s. että ikkunoiden pitää oleman yhtä kaukana toisistansa ja reunimaisten ikkunoiden yhtä kaukana lähimäisistä nurkista niin hyvin rakennoksen ulkopuolella kuin jokaisessa suojassakin?*

Kysymyksessä lausuttujen ehtojen mukaan eivät väliseinät tarvitse nyt olla keskellä ikkunoiden väliä, sillä keskisuojassa voivat reunimaiset ikkunat olla etempänä tai lähempänä nurkkia kuin sivusuojissa.

Merkitköön nyt x ikkunoiden väliä, y reunimaisen ikkunan ja sen läheisen nurkan väliä, z keskimäisen, u isomman ja v pienemmän sivusuojan pituutta. Nyt saadaan samalla tavalla kuin edellisestäkin kysymyksestä helposti seuraavat viisi yhtälöä

$$\begin{cases} 5x + 2y + 6d = a & 1. \\ z + u + v + 2c = a & 2. \\ 2x + 2(x - (y + c)) + 3d = z & 3. \\ x + 2y + 2d = u & 4. \\ 2y + d = v & 5. \end{cases}$$

Kuin näistä yhtälöistä eroitetaan pois z, u ja v niiden arvot yhtälöistä 3, 4 ja 5 pannen itsekunkin siaan yhtälössä 2, niin siitä saadaan sama yhtälö kuin ensimäinenkin. Tässä on siis oikeastaan vähemmän yhtälöitä kuin tuntemattomia, jonkatähden ne voivat saada äärettömän paljo arvoja ja kysymys voidaan ratkaista monella eri tavalla. Mutta jos vielä tehtäisiin joku ehto esm. että ikkunoiden välin pitäisi oleman kaksi kertaa niin ison kuin reunimaisen ikkunan ja sen läheisen nurkan, josta saadaan yhtälö

$$x = 2y,$$

niin silloin saataisiin tuntemattomille seuraavat määrätyt arvot:

$$1. \quad x = \frac{a - 6d}{6},\ y = \frac{a - 6d}{12},\ z = \frac{a - 4c}{2},\ u = \frac{a}{3},\ v = \frac{a}{6}$$

ja nyt on kysymys täydellisesti ratkaistu.

Pitäiskö väliseinien taas oleman lähimäisten ikkunoiden keskivälillä, josta seuraisi yhtälö

$$x = 2y + c,$$

niin tästä ja edellisistä yhtälöistä saataisiin tuntemattomille seuraavat arvot:

$$2.\quad x = \frac{a + c - 6d}{6},\ y = \frac{a - 5c - 6d}{12},\ z = \frac{a - c}{2},$$

$$u = \frac{a - 2c}{3},\ v = \frac{a - 5c}{6}.$$

Olisko rakennos esm. 72 jalan pituinen, jossa ikkunoiden pitäisi olla 4 j. leveät, väli seinien $\frac{1}{2}$ j. paksut sekä ikkunoiden välin kaksi kertaa niin ison kuin kumpasenkin reunimaisen ikkunan ja sen läheisen nurkan väli, niin kaavoista 1 saataisiin, niissä pannen $a = 72$, $d = 4$ ja $c = \frac{1}{2}$, $x = 8$, $y = 4$, $z = 35$, $u = 24$, ja $v = 12$ jalkaa, joten ikkunoiden siat sekä suojien pituudet rakennoksessa ovat selvästi määrätyt.

Seuraavat kysymykset voidaan edellisten selityksien johdolla helposti ratkaista.

Kys. 14. *Eräässä kaksinumeroisessa lu'ussa on kymmenien numero neljää isompi ykkösien numeroa ja kuin tämä luku lasketaan yhteen sen lu'un kanssa, jossa samat numerot ovat vastasuuntaisessa järjestyksessä, niin summaksi saadaan 110; mikä semmoinen luku on?* Vastaus: 73.

Kys. 15. *Kuin erään murtolu'un osottajaan pannaan 4, niin siitä saadaan murtoluku $\frac{1}{2}$, mutta kuin sen nimittäjään pannaan 2, niin siitä tulee luku $\frac{1}{4}$; mikä se murtoluku on?* Vastaus: $\frac{5}{18}$.

Kys. 16. *Kahden kokolu'un väli on 3 ja murtolukujen, joidenka osottajana on 1 ja itsekunkin nimittäjänä toinen näistä koko-lu'uista, summa on murtoluku, jonka osottaja on 7 ja nimittäjä mainittujen kokolukujen tulo; mitkä ovat semmoiset kokolu'ut?* Vastaus: 5 ja 2.

Kys. 17. *Miehellä on kaksi hevosta, ori ja ruuna, ja satula, joka maksaa 200 markkaa. Kuin satula silte on oriin selässä, niin ori maksaa satuloinensa $\frac{5}{4}$ kertaa niin paljo kuin ruuna, mutta kuin mies panee satulan ruunan selkään, niin ruuna maksaa satulan kanssa yhteensä 2 kertaa niin paljo kuin* *ori. Kuinka kalliit ovat nyt miehen hevoset?* Vastaus: ori maksaa 300 ja ruuna 400 markkaa.

Kys. 18. *Kuin kaksi omenan kaupalla kävelevää tyttöä yhtyivät ja lukivat toisiinsa omenat, niin ensimäinen sanoi toiselle: anna minulle kolme omenata omistasi, niin sitte on minulla yhtä monta kuin sinullakin; tähän vastasi toinen: annapas sinä kolme omenata omistasi minulle, niin sitte on minulla viisi kertaa niin monta kuin sinulla; kuinka monta omenata oli silloin kumpasellakin tytöllä?* Vastaus: ensimäisellä oli 6 ja toisella 12 omenata.

Kys. 19. *Kahden hengen piti yhteensä maksaman kolmannelle 324 markkaa. Ensimäinen sanoi nyt toiselle: jos koko summa olisi yksinäni maksettava, niin minulta puuttuisi $\frac{2}{3}$ sinun rahoistasi; tähän vastasi toinen: olisko taas koko summa minun maksettavani, niin minulta puuttuisi $\frac{3}{5}$ sinun rahoistasi. Kuinka paljo oli kumpasellakin rahaa?* Vastaus: ensimäisellä oli 180 ja toisella 216 markkaa.

Kys. 20. *Vitruvion kertomuksen mukaan painoi Syrakusan kuninkaan Hieron ruunu 20℔. ja oli vedessä mitatessa $1\frac{1}{4}$℔. kepeämpi. Jos se olisi ollut puhtaasta kullasta ja hopeasta, niin kuinka paljo olisi siinä ollut kumpaakin metallia, kuin $19\frac{1}{2}$℔. kultaa vedessä mitatessa kepenee naulan ja $10\frac{1}{2}$℔. hopeata kepenee myös naulan vedessä mitatessa?* Vastaus: $14\frac{43}{48}$℔. kultaa ja $5\frac{5}{48}$℔. hopeata.

Kys. 21. *Seppä on sulattanut yhteen 21-karaatin, 20-karaatin ja 15-karaatin kultaa ja näin saanut 60 luotia 18-karaatin kultaa. Sekoituksessa on 5 luotia enemmän 20-karaatin kultaa kuin 15-karaatin kultaa. Kuinka monta luotia on siinä silloin kustakin laadusta?* Vastaus: 5 luotia 21-karaatin, 30 luotia 20-karaatin ja 25 luotia 15-karaatin kultaa.

Muist. Kultaa sanotaan 18-karaatin kullaksi, kuin siinä on $\frac{18}{24}$ koko painostansa puhdasta kultaa ja siis $\frac{6}{24}$ koko painosta jotakin huonompata metallia esm. hopeata taikka vaskea eli kumpaakin sekaisin. 21-karaatin kulta on semmoinen, jossa on $\frac{21}{24}$ puhdasta kultaa, 15-karaatin semmoinen, jossa on $\frac{15}{24}$ koko painosta puhdasta kultaa j. n. e. Tämän mukaan sanotaan puhdasta kultaa 24-karaatin kullaksi.

Kys. 22. *Hopeasepällä on kolme hopeakappaletta, yksi 15-luotista, toinen 10-luotista ja kolmas 9-luotista hopeata, jotka yhteensä painavat 34 luotia. Jos hän sitte sulattaisi 15-luotisen ja 10-luotisen kappaleen yhteen, niin niistä saisi hän $11\frac{2}{3}$-luotista hopeata ja samoin saisi seppä 15-luotisen ja 9-luotisen kappaleen yhteen sulattamalla $11\frac{2}{3}$-luotista hopeata. Kuinka monta luotia painaa silloin kukin kappale?* Vastaus: 15-luotinen hopeakappale painaa 8, 10-luotinen 16 ja 9-luotinen 10 luotia.

Kys. 23. *Mikä on semmoinen neljänumeroinen luku, jonka numeroiden summa on 18, satojen numero kaksi kertaa niin iso kuin tuhansien numero ja jossa ykkösien numero on kymmenien numeroon samassa suhteessa kuin 2:3, ja itse luku on vihdoin tulo, joka saadaan, kuin luku 216 kerrotaan ykkösien numerolla etsitävässä lu'ussa?* Vastaus: 1296.

Viides Luku.

Koroista ja alukkeista.

§ 1.

Suuruuden a korottaminen korkoon, jonka korotin on kokoluku n, on tulon etsiminen, jossa on n kertojata a eikä muita paitsi ykkönen.

Tämän määrityksen mukaan on, kuin n merkitsee mitä kokolukua hyvänsä ja a mitä suuruutta hyvänsä,

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a (n \text{ kertojata } a),$$

s. t. s. a:n n:es korko on tulo kertojista kaikki yhtä isoja kuin a, joidenka luku on n.

Tästä saadaan taas

$$A. \qquad a^m \cdot a^n \cdot a^p \cdots = a^{m+n+p+\cdots},$$

kuin m, n ja $p \cdots$ merkitsevät, niin kuin koko tässä pykälässäkin, kokolukuja, sillä $a^m a^n a^p \cdots$ on tulo kertojista, joissa taas on ensimäisessä m, toisessa n ja kolmannessa p j. n. e. kertojata kaikki yhtä isoja kuin a, jonkatähden koko tulossa on $m+n$

$+p\cdots$ kertojata a. Korko $a^{m+n+p\cdots}$ on myös tulo, jossa on $m+n+p+\cdots$ kertojata a eikä muita paitsi ykkönen.

Sentähden on

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p \cdots = a^{m+n+p+\cdots}, \text{ j. o. t.}$$

Se on selvä, että, olipa kertojoiden a^m, a^n, $a^p\cdots$ luku mikä hyvänsä, niiden tulo on se korko a:sta, jonka korotin on summa $m+n+p\cdots$ kertojoiden korottimista, m, n, $p\cdots$.

Samoin on, kuin $m>n$,

$$B. \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

sillä jos molemmat lausekkeet kerrotaan korolla a^n, niin saadaan ensimäisestä $\frac{a^m a^n}{a^n}$ ja toisesta $a^{m-n}\cdot a^n$, mutta murtosuuruuden lyhennössäännön mukaan on $\frac{a^m a^n}{a^n} = a^m$ ja yhtälön A mukaan on taas $a^{m-n}\cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$ ja koska lausekkeet $\frac{a^m}{a^n}$ ja a^{m-n} kerrottuina samalla suuruudella a^n antavat saman tulon, niin ne ovat yhtä isot, j. o. t.

Tämän mukaan merkitään yleislaskussa osaa $\frac{a^m}{a^n}$ yleisesti lausekkeella a^{m-n}, joskohta m ei olekkaan isompi kuin n. Jos $m=n$, niin $m-n=0$, $a^{m-n}=a^0$ ja $\frac{a^m}{a^m}=1$, josta seuraa

$$C. \qquad a^0 = 1,$$

s. o. minkä äärellisen suuruuden hyvänsä korko, jonka korotin on nolla, on ykkönen.

Tämän yhtälön merkitys tulee vastedes tärkeämmin tarkastettavaksi.

Kuin taas yhtälön B kumpanenkin puoli $\frac{a^m}{a^n}$ ja a^{m-n} jaetaan korolla a^m, niin osat $\frac{1}{a^n}$ ja $\frac{a^{m-n}}{a^m}$ ovat yhtä isot. Koska taas B:n mukaan $\frac{a^{m-n}}{a^m} = a^{m-n-m} = a^{-n}$, niin tästä saadaan

$$D. \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Minkä suuruuden a hyvänsä korolla, jonka korotin on poistosuuruus, merkitään siis osaa, joka saadaan ykkönen jakaen saman suuruuden korolla, jonka korotin on entisen vastinainen lisäsuuruus.

Kuinka monen kertojan hyvänsä tulon korko on tulo kertojoiden samoista koroista, s. t. s.

$$E. \qquad (abc\cdots)^n = a^n b^n c^n \cdots.$$

Todellakin on koron määrityksen mukaan korko $(abc\cdots)^n$ tulo n kertojasta kaikki $a \cdot b \cdot c \cdots$ ja koska jokaisessa on yksi a, yksi b, yksi c j. n. e. kertojana, niin koko tulossa on siis n kertojata a, n kertojata b, n kertojata c j. n. e. $a^n b^n c^n\cdots$ on myös tulo, jossa on n kertojata a, n kertojata b, n kertojata c j. n. e. eikä muita paitsi ykkönen. Sentähden ovat molemmat tulot yhtä isot, s. o. $(abc\cdots)^n = a^n b^n c^n\cdots$, j. o. t.

Tästä seuraa taas, että

$$F. \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$

sillä jos nämä lausekkeet kerrotaan korolla b^n, niin saadaan tulot $b^n\left(\frac{a}{b}\right)^n$ ja $\frac{a^n b^n}{b^n}$. Yhtälön E mukaan on taas $b^n\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{ab}{b}\right)^n = a^n$ ja $\frac{a^n b^n}{b^n}$ on myös a^n. Sentähden on $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, koska ne kerrottuina samalla suuruudella b^n antavat saman tulon a^n.

Jokaisen suuruuden korko korotetaan uuteen korkoon sen korotin kertoen uudella korottimella, jonka säännön seuraava yhtälö sisältää:

$$G. \qquad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Koska korko $(a^m)^n$ on tulo n kertojasta a^m ja joka kertojassa on m kertojata a, niin siinä on $m \cdot n$ kertojata a eikä muita paitsi ykkönen. Korossa a^{mn} on myös koron määrityksen mukaan mn kertojata a eikä muita paitsi ykkönen.

Sentähden on $(a^m)^n = a^{mn}$, j. o. t.

Tämän säännön mukaan on taas $(a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{mn}$, koska $mn = nm$.

Mitenkä yksiö korotetaan mihinkä korkoon hyvänsä, jonka korotin on kokoluku, nähdään selvästi edellisistä säännöistä, joidenka käyttämiseen vielä otamme muutamia

Esimerkkiä.

Esm. 1. $(2ab^2)^2 = 4a^2b^4$.

Esm. 2. $(3abx)^3 = 27a^3b^3x^3$.

Esm. 3. $(-4ab^2)^2 = 16a^2b^4$.

Esm. 4. $(-3a^2bc^3)^3 = -27a^6b^3c^9$.

Esm. 5. $(10a^4)^4 = 10000a^{16}$.

Esm. 6. $(-ab^2xy^3)^5 = -a^5b^{10}x^5y^{15}$.

Esm. 7. $(\frac{1}{2}a)^3 = \frac{1}{8}a^3$.

Esm. 8. $(\frac{2}{3}b^2)^2 = \frac{4}{9}b^4$.

Esm. 9. $\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{b}{c}\right)^3 = \frac{27}{64}\cdot\frac{b^3}{c^3}$.

Esm. 10. $\left(\frac{3bx^2}{2a}\right)^4 = \frac{81b^4x^8}{16a^4}$.

Esm. 11. $\left(-\frac{3a^2m^2n}{10p^3}\right)^3 = -\frac{27a^6m^6n^3}{1000p^9}$.

Esm. 12. $\left(\frac{3a}{b}\right)^0 = 1$.

Esm. 13. $\left(-\frac{a^3bx}{2yz^2}\right)^6 = \frac{a^{18}b^6x^6}{64y^6z^{12}}$.

Esm. 14. $(ab^2)^{-2} = \frac{1}{a^2b^4}$.

Esm. 15. $(-3x)^0 = 1$.

Esm. 16. $\left(\frac{2a}{3b^2}\right)^{-2} = \frac{1}{\frac{4a^2}{9b^4}} = \frac{9b^4}{4a^2}$.

Esm. 17. $\left(-\frac{3a^2b}{2c^3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{3a^2b}{2c^3}\right)^3} = -\frac{8c^9}{27a^6b^3}$.

§ 2.

Kaksion korko. Newton'in kaksiotodisto.

Edellä on jo nähty, ensimäinen luku § 3, että

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

Samoin on myös

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ ja}$$
$$(a+b)^4 = (a+b)^3 \cdot (a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Nämä yhtälöt voidaan myös kirjoitaa seuraavalla tavalla:

$$(a+b)^2 = a^2 + \tfrac{2}{1}ab + \tfrac{2}{2}b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + \frac{3}{1}a^2b + \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}ab^2 + \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + \frac{4}{1}a^3b + \frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}a^2b^2 + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}ab^3 + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}b^4.$$

Näistä koroista voipi jo hyvin huomata korottimien säännön, sillä joka osion nousu on sama kuin kaksion korotin ja ensimäisen suuruuden a korotin saadaan joka osiossa sen korotin edellisessä osiossa vähentäen ykkösellä ja toisen b taas sen korotin edellisessä enentäen ykkösellä. Ensimäinen osio korossa on ensimäisen suuruuden sama korko, johon kaksio on korotettava. Joka osion numerokertoja voidaan myös Newton'in keksimän säännön mukaan kirjoittaa ja siis koko korko, olipa sen korotin mikä luku hyvänsä, muodostaa ilman edellisen hakematta ja se sitte kaksio alukkeella kertomatta.

Seuraava yhtälö sisältää Newton'in kaksiotodiston.

$$A.\quad (a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}a^{n-m}b^m$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m+1)}a^{n-(m+1)}b^{m+1}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)(n-(m+1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m+1)(m+2)}a^{n-(m+2)}b^{m+2} + \cdots$$
$$+ \frac{n}{1}ab^{n-1} + b^n.$$

Tämä yhtälö on tietysti oikea, kuin $n=2$, $n=3$ eli $n=4$, vaan sen yleisyys on todistettava. Tässä todistamme sen olevan oikean olipa n mikä kokoluku hyvänsä.

Jos yhtälö A on oikea, kuin korotin on koko luku n, niin se on myös oikea korottimen ollessa $n+1$. Tätä todistaaksemme pidämme sen nyt oikeana korottimen ollessa n.

Koska koron määrityksen mukaan $(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n$, niin, kuin tähän pannaan koron $(a+b)^n$ arvo yhtälöstä A, saadaan

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+ + \cdot\cdot$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}a^{n-m}b^m$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdot(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m+1)}a^{n-(m+1)}b^{m+1}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)(n-(m+1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m+1)(m+2)}a^{n-(m+2)}b^{m+2}+\cdot\cdot$$

$+\frac{n}{1}ab^{n-1}+b^n)$, josta taas yhtälön oikeassa puolessa oleva kertominen tehden saadaan

$$B.\quad (a+b)^{n+1}=a^{n+1}+a^nb+\frac{n}{1}a^nb+\frac{n}{1}a^{n-1}b^2+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-1}b^2+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^3+\cdot+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot m}a^{n-m+1}b^m$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdot(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}a^{n-m}b^{m+1}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdot(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m\cdot(m+1)}a^{n-m}b^{m+1}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot m\cdot(m+1)}a^{n-(m+1)}b^{m+2}$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-m)(n-(m+1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m+1)(m+2)}\cdot a^{n-(m+1)}b^{m+2}$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-m)(n-(m+1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot(m+1)(m+2)}a^{n-(m+2)}b^{m+3}+\cdots$$
$$+\frac{n}{1}a^2b^{n-1}+\frac{n}{1}ab^n+ab^n+b^{n+1}.$$

Kuin nyt samankaltaiset osiot (semmoiset, joissa sekä a että b ovat samoissa koroissa kumpasessakin) yhdistetään, niin edellisestä yhtälöstä saadaan seuraava yhtälö:

$$C.\quad (a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \frac{n+1}{1} a^n b + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} a^{n-1} b^2 + \cdots$$
$$+ \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdots m(m+1)} a^{n-m} b^{m+1} +$$
$$+ \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+1)(m+2)} a^{n-(m+1)} b^{m+2} + \cdots$$
$$+ \frac{(n+1)}{1} ab^n + b^{n+1}.$$

Yhtälössä C on ne yhtälön B osiot jätetyt kirjoittamatta, joidenka edelliset eli jälkeiset samankaltaiset osiot ovat jääneet pois yhtälöstä B.

Nyt nähdään helposti että yhtälö C on sama kuin A:kin sillä eroituksella vaan, että edellisessä C on $n+1$ siinä paikassa, jossa jälkimäisessä (A) on n.

Muist. Tämä huomataan vielä helpommin, jos niin hyvin korottimissa kuin etukertojissakin välin $(n-m)$ siaan kirjoitetaan $(n+1-(m+1))$ ja välin $(n-(m+1))$ siaan taas $(n+1-(m+2))$.

Jos sentähden kaksion $(a+b)$ korko saadaan yhtälön A mukaan, kuin korotin on joku kokoluku n, niin se saadaan myös saman säännön mukaan, kuin korotin on $n+1$. Yhtälö A on nyt oikea kuin korotin on 4, sentähden on se myös oikea, kuin korotin on 5 ja siis myös korottimen ollessa 6 j. n. e.

Yhtälö A on sentähden oikea olipa korotin n mikä kokoluku hyvänsä, j. o. t. Tästä yhtälöstä A saadaan nyt seuraava sääntö kaksion $a+b$ koron muodostamiselle, kuin korotin on mikä koko luku n hyvänsä.

Koron ensimäinen osio on korko a^n, toinen tulo $na^{n-1}b$ ja sitte saadaan joka osio edellisestä, sen etukertoja kertoen a:n korottimella siinä (edellisessä osiossa) ja jakaen edellisten osioiden lu'ulla ja vihdoin a:n korotin vähentäen ja b:n enentäen ykkösellä.

Se on selvä, että kaksion $(a-b)$ n:es korko saadaan saman säännön mukaan kuin kaksion $(a+b)$:kin, kuin b:n siaan vaan kirjoitetaan $-b$. Niin on

$$(a-b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}\cdot(-b) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}\cdot(-b)^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}\cdot(-b)^3 + \cdots$$
$$= a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots.$$

Osioiden luku kaksion n:sä korossa on $n+1$, koska siinä on yksi osio (viimenen), jossa ei a ole kertojana ja selvästi n osiota, joissa itsekussakin a:n joku korko ensimäisestä aina n:teen asti on kertojana.

Että kahdella osiolla, jotka ovat yhtä kaukana reunimaisista (toinen ensimäisestä ja toinen viimesestä), on sama etukertoja, jos a ja b ovat samamerkkiset, nähdään selvästi siitäkin, että m:nen osion etukertoja on sama, otetiinpa a eli b ensimäiseksi osioksi kaksiossa. Jos a ja b ovat erimerkkiset suuruudet, niin mainittuilla osioilla on etukertojina sama suuruus, kuin korotin n on pariluku mutta vastinaiset suuruudet, kuin se on liikaluku.

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $(2x+y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot(2x\cdot y) + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$.

Esm. 2. $(2a^2+3ab)^3 = (2a^2)^3 + 3(2a^2)^2\cdot 3ab + 3\cdot 2a^2\cdot(3ab)^2$
$+ (3ab)^3 = 8a^6 + 36a^5b + 54a^4b^2 + 27a^3b^3$.

Esm. 3. $(4a^2b - 3abc)^4 = (4a^2b)^4 + 4(4a^2b)^3\cdot(-3abc)$
$+ 6(4a^2b)^2\cdot(-3abc)^2 + 4\cdot 4a^2b\cdot(-3abc)^3$
$+ (-3abc)^4 = 256a^8b^4 - 768a^7b^4c + 864a^6b^4c^2$
$- 432a^5b^4c^3 + 81a^4b^4c^4$.

Monion korko saadaan myös kaksiotodiston mukaan monion osiot yhdistäen kahdeksi summaksi, näin saatu kaksio korottaen ja sitte siinä olevien monioiden kanssa tehden samoin, kunnekka koko korko on muodostettu monioksi sulkumerkittä.

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $(x+y+z)^3 = (x+y)^3 + 3(x+y)^2\cdot z + 3(x+y)\cdot z^2$
$+ z^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3x^2z + 6xyz + 3y^2z$
$+ 3xz^2 + 3yz^2 + z^3$.

Esm. 2. $(2a^2-4ab+3b^2)^3=(2a^2-4ab)^3+3(2a^2-4ab)^2\cdot 3b^2$ $+3(2a^2-4ab)\cdot(3b^2)^2+(3b^2)^3=8a^6-48a^5b+96a^4b^2$ $-64a^3b^3+36a^4b^2-144a^3b^3+144a^2b^4+54a^2b^4$ $-108ab^5+27b^6=8a^6-48a^5b+132a^4b^2-208a^3b^3$ $+198a^2b^4-108ab^5+27b^6$.

§ 3.

Alukkeista.

Minkä suuruuden a hyvänsä n:es aluke on suuruus, jonka n:es korko on a.

Tämä määritys on sisälletty yhtälössä

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

Niin kuin ensimäisessä lu'ussa jo on sanottu saapi luku n, joka ilmoittaa, mikä aluke suuruudesta on otettava, nimen alukkeen näyttäjä eli alotin.

Koska määrityksen mukaan $\sqrt[n]{a^n}$ on se suuruus, jonka n:es korko on a^n, niin $\sqrt[n]{a^n}=a$, sillä a:n n:es korko on juuri a^n.

Tästä seuraa taas selvästi, että

$$\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n,$$

sillä molemmat ovat yhtä isot kuin a.

Muist. Jos a on poistosuuruus ja n pariluku, niin silloin tämä yhtälö ei ole täydellisesti oikea, niin kuin ensi pykälässä tulemme näkemään.

Alukkeen määrityksestä ja edellisistä koron säännöistä saadaan seuraavat alukkeiden säännöt.

Tulon kuinka monesta kertojasta hyvänsä aluke on tulo kertojoiden samoista alukkeista. Tämän säännön sisältää seuraava yhtälö

$$A. \qquad \sqrt[n]{abc\cdots}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdots$$

Alukkeen määrityksen mukaan on todellakin $(\sqrt[n]{abc\cdots})^n=abc\cdots$ ja $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdots)^n$ on myös tämän lu'un ensimäisen pykälän ja sen yhtälön E sekä mainitun määrityksen mukaan $abc\cdots$, josta taas seuraa $\sqrt[n]{abc\cdots}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdots$ j. o. t.

Murtosuuruuden n:es aluke saadaan osottajan n:es aluke jakaen samalla alukkeella nimittäjästä, s. t. s.

$$B. \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Koska määrityksen mukaan $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$ ja (tämä luku § 1 *F*) $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$, niin sentähden on myös $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, j. o. t.

Näiden sääntöjen mukaan voidaan alukesuuruuksia paljo selventää, niin kuin seuraavista esimerkistä nähdään.

$$\sqrt{16a^2b^2} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^2} = 4ab.$$

$$\sqrt[3]{8a^3b^2} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^2} = 2a\sqrt[3]{b^2}.$$

$$\sqrt{\frac{25a^4b^3}{16c^2}} = \frac{\sqrt{25a^4b^3}}{\sqrt{16c^2}} = \frac{\sqrt{25}\sqrt{a^4}\sqrt{b^3}}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{c^2}} = \frac{5a^2\sqrt{b^3}}{4c} = \frac{5a^2\sqrt{b^2}\sqrt{b}}{4c} =$$
$$= \frac{5a^2b\sqrt{b}}{4c}.$$

Minkä alukkeen hyvänsä m:es korko saadaan suuruus alukemerkin alla korottaen m:teen korkoon, s. t. s.,

$$C. \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Todellakin on

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdots$$

tulo m kertojasta $\sqrt[n]{a}$.

Samoin on myös koron säännön ja yhtälön *A* mukaan

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a\cdot a\cdot a\cdots} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdots$$

tulo m kertojasta $\sqrt[n]{a}$, jonkatähden

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \text{ j. o. t.}$$

Suuruuden a aluke, jonka alotin on tulo $m\cdot n$, on m:es aluke a:n n:stä alukkeesta, ja päin vastoin on m:es aluke a:n n:stä alukkeesta $(m\cdot n)$:es aluke a:sta, s. t. s.

D. $$\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

Todellakin saadaan, jos $\sqrt[mn]{a}$ olisi esm. a', kumpikin nämä suuruudet korottaen (mn):teen korkoon $\left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn}=a'^{mn}$ ja koska alukkeen määrityksen mukaan $\left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn}=a$, niin $a=a'^{mn}$. Mutta nyt on (luku 5 § 1 *G*) $a'^{mn}=(a'^{m})^{n}$ ja sentähden $a=(a'^{m})^{n}$. Jos tämän yhtälön kumpasestakin puolesta taas otetaan n:es aluke, niin saadaan $\sqrt[n]{a}=a'^{m}$ ja näistä suuruuksista m:es aluke ottaen saadaan vihdoin $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=a'$. Mutta koska $a'=\sqrt[mn]{a}$, niin tästä seuraa selvästi, että

$$\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}},\ \text{j. o. t.}$$

Samalla tavalla voidaan todistaa että

$$\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Sentähden on myös

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Niin on esm.

$$\sqrt[8]{256}=\sqrt[4]{\sqrt{256}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt{\sqrt{16}}=\sqrt{4}=2.$$

Jos alukkeen näyttäjä, alotin, ja alukemerkin alla olevan suuruuden korotin kerrotaan eli jaetaan samalla suuruudella, niin aluke jääpi entisellensä, s. t. s. jos alukemerkin alla oleva suuruus korotetaan p:teen korkoon ja alukkeesta vielä otetaan p:es aluke, niin suuruus jääpi entisellensä.

Tämän säännön sisältää seuraava yhtälö:

E. $$\sqrt[mp]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^{n}}.$$

Nyt onkin edellisten alukkeen ja koron sääntöjen mukaan

$$\sqrt[mp]{a^{np}}=\sqrt[m]{\sqrt[p]{a^{np}}}=\sqrt[m]{\sqrt[p]{(a^{n})^{p}}}=\sqrt[m]{\left(\sqrt[p]{a^{n}}\right)^{p}}=\sqrt[m]{a^{n}},\ \text{j. o. t.}$$

Tämä sääntö ei kuitenkaan ole oikea, kuin p on pariluku ja a^n poistosuuruus, joka tapaus tulee seuraavassa pykälässä tarkastettavaksi.

§ 4.

Alukkeiden merkistä ja kuvasuuruuksista.

Kerronta säännön mukaan on $(-a)\cdot(-a) = +aa = +a^2$ ja koska $(-a)\cdot(-a) = (-a)^2$, niin $(-a)^2$ on samoin kuin $(+a)^2 = +a^2$. Nyt on taas, kuin n merkitsee mitä kokolukua hyvänsä, $(-a)^{2n} = ((-a)^2)^n = (+a^2)^n = +a^{2n}$. *Sentähden on jokaisen niin hyvin poisto- kuin lisäsuuruudenkin korko, jonka korotin on pariluku, lisäsuuruus.*

Nyt on taas korko $a^{2n+1} = a^{2n}\cdot a$ ja $(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n}\cdot(-a) = +a^{2n}\cdot(-a) = -a^{2n}\cdot a = -a^{2n+1}$.

Tästä nähdään, *että korko, jonka korotin on liikaluku, on lisäsuuruudesta lisäsuuruus ja poistosuuruudesta poistosuuruus.*

Jos nyt on $b^{2n} = a$, niin myös $(-b)^{2n} = a$, koska edellisen mukaan $(-b)^{2n} = b^{2n}$.

Alukkeen ottamalla näistä suuruuksista saadaan taas yhtälöt

$$\sqrt[2n]{a} = b \text{ ja } \sqrt[2n]{a} = -b,$$

s. t. s. $(2n)$:es aluke lisäsuuruudesta a on niin hyvin lisä- kuin poistosuuruuskin, sillä jos esm. $(+b)^{2n}$ on lisäsuuruus a, niin $(-b)^{2n}$ on myös $= +a$. *Pari-aluke (jonka alotin on pariluku) jokaisesta lisäsuuruudesta on siis aina kaksi arvoinen ja sen eri arvot ovat vastinaiset suuruudet.*

Niin on esm. $\sqrt{4} = \pm 2$, koska $(+2)^2 = 4$ ja $(-2)^2 = 4$. $\sqrt{25} = \pm 5$, sillä niin hyvin 5:den kuin (-5):kin toinen korko on $+25$.

Pari-aluke poistosuuruudesta on taas mahdotoin saada, sillä semmoista lisä- tai poistosuuruutta ei ole, jonka parikorko (jonka korotin on pariluku) olisi poistosuuruus, sillä niin hyvin lisä- kuin poistosuuruuksienkin semmoiset korot ovat lisäsuuruuksia. Semmoisia alukkeita nimitetään *kuvasuuruuksiksi*, jota vastoin kaikkia lisä- sekä poistosuuruuksia sanotaan *varsinaissuuruuksiksi.*

Kuva-suuruuksia ovat esm.

$\sqrt{-4}=2\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-16}=2\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[2n]{-a}=\sqrt[2n]{a}\sqrt[2n]{-1}$ j. n. e.

Koska taas, kuin n on mikä kokoluku hyvänsä, $a^{2n+1}=a^{2n}.a$ ja $(-a)^{2n+1}=(-a)^{2n}\cdot(-a)=-a^{2n}\cdot a=-a^{2n+1}$, niin, jos $a^{2n+1}=b$ ja siis $(-a)^{2n+1}=-b$, näistä suuruuksista alukkeet ottaen saadaan selvästi $\sqrt[2n+1]{b}=a$ ja $\sqrt[2n+1]{-b}=-a$.

Tästä nähdään nyt, *että liika-alukkeella (jonka alotin on liikaluku) on aina yksi arvo, joka on varsinaissuuruus ja samamerkkinen kuin alukemerkin alla oleva suuruuskin.*

Kuin joku toinen aluke on kuva suuruus esm. $\sqrt{-a}$, niin se kerrottuna itsellänsä antaa alukemerkin alla olevan poistosuuruuden $-a$ tuloksi, koska toisen alukkeen toinen korko on aina suuruus alukemerkin alla. Sentähden on, kuin a merkitsee mitä lukua hyvänsä, $(\sqrt{-a})^2=\sqrt{-a}.\sqrt{-a}=-a$, eikä $=\sqrt{(-a)^2}$, sillä $(-a)^2=a^2$, ja sentähden $\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{a^2}=\pm a$.

Niin on

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$$
$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\cdot\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2\cdot(\sqrt{-1})^2=(-1)(-1)=+1 \text{ j. n. e.}$$

Kahden kuva-alukkeen samalla alottimella eri suuruuksistakin tulo on aina poistosuuruus. Olisko esm. $\sqrt{-a}$ kerrottava kuvasuuruudella $\sqrt{-b}$, niin

$$\sqrt{-a}.\sqrt{-b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(\sqrt{-1})^2=-\sqrt{ab},$$

kuin a ja b merkitsevät lukuja.

Yleisesti on $\left(\sqrt[2n]{-a}\right)^{2n}=-a$, eikä sama kuin $\sqrt[2n]{(-a)^{2n}}=$ $=\sqrt[2n]{a^{2n}}=\pm a$.

Jos taas m ja n merkitsevät liikalukuja ja p parilukua, niin

$$\sqrt[m]{(-a)^n}=-\sqrt[mp]{(-a)^{np}}=-\sqrt[mp]{a^{np}}, \text{ eikä } +\sqrt[mp]{a^{np}},$$

sillä

$$\sqrt[m]{(-a)^n}=-\sqrt[n]{a^n} \text{ ja sentähden}$$

$$\sqrt[p]{\sqrt[m]{(-a)^n}}=\sqrt[mp]{(-a)^n}=\sqrt[p]{-\sqrt[m]{a^n}},$$

josta saadaan

$$\left(\sqrt[mp]{(-a)^n}\right)^p = \sqrt[mp]{(-a)^{np}} = \left(\sqrt[p]{-\sqrt[m]{a^n}}\right)^p = -\sqrt[m]{a^n} = -\sqrt[mp]{a^{np}},$$

j. o. t.

§ 5.

Alukkeen ottamisesta.

Alukkeen ottamiselle yksiöistä saadaan tämän lu'un kolmannen pykälän yhtälöistä kaikki tarpeelliset säännöt.

Alukkeen ottamiselle tulosta saadaan mainitun pykälän yhtälöstä A seuraava sääntö.

Tulon n:es aluke saadaan saman alukkeen ottamalla kaikista kertojista ja näiden alukkeiden tulon muodostamalla.

Olisko nyt $\frac{n}{m} = p$, josta $n = mp$ ja m, n, p kaikki kokolukuja, niin

$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{mp}} = \sqrt[m]{(a^m)^p} = a^p$ (luku 5 § 1 ja 3), koska $\sqrt[m]{a^m} = a$.
Korosta saadaan siis aluke korotin jakaen alottimella.

Koska taas aluke on otettava jokaisesta kertojasta erittäin, niin alukkeen ottamiselle yksiöstä saadaan seuraava täydellinen sääntö. *Yksiöstä otettava aluke otetaan sen numerokertojasta ja puustavikertojoiden korottimet jaetaan alottimella.*

Tämä sääntö on selvä jo yksiön korottamissäännöstäkin. Niin saadaan esm. yksiön $2a^3b^2$ 5:des korko numerokertoja 2 korottaen 5:teen korkoon ja puustavien a ja b korottimet 3 ja 2 kertoen 5:llä, joten on

$$(2a^3b^2)^5 = 32a^{15}b^{10}$$

ja sentähden saadaan yksiön $32a^{15}b^{10}$ 5:des aluke $(2a^3b^2)$ numerokertojasta 32 5:des aluke ottaen ja puustavien a ja b korottimet jakaen 5:llä.

Koska taas yhtälön C mukaan tämän lu'un kolmannessa pykälässä

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

niin *aluke alukkeesta saadaan alottimet kertoen toinen toisella ja tulo pannen alottimeksi suuruudelle alukemerkkien alla.*

Päin vastoin saadaan (mn):es aluke a:sta, ottaen ensin m:es aluke a:sta ja siitä sitte n:es, joka myös on selvä edellisestä yhtälöstä.

Aluketta ottaessa on aina muistettava, että pari-aluke on kaksi merkkinen ja liika-aluke vaan yksi- ja sama merkkinen kuin suuruus alukemerkin alla. Niin on esm.

$$\sqrt{9a^2b^4} = \pm 3ab^2,$$

jolloin lisäsuuruus, jonka toinen korko on $9a^2b^4$, on $+3ab^2$, jos $3ab^2$ on lisäsuuruus, mutta $-3ab^2$, jos $3ab^2$ on poistosuuruus, s. t. s. jos a on poistosuuruus, kuin b vaan ei ole kuvasuuruus. Samoin on se poistosuuruus, jonka toinen korko on $9a^2b^4$, $-3ab^2$, kuin $3ab^2$ on lisä-, mutta $+3ab^2$, kuin se on poistosuuruus.

Jos itsensä aluke merkin edelle kirjoitetaan kaksi merkkiä, joten

$$\pm\sqrt{9a^2b^4} = \pm 3ab^2,$$

niin yhtälön kumpasetkin puolet ovat otettavat samalla merkillä, kuin $3ab^2$ on lisäsuuruus, mutta vastaisilla, kuin se on poistosuuruus. Lyhyesti sanoen on vasemman puolen lisä merkki otettava sen merkin kanssa oikella puolella, joka tekee oikean puolisen suuruuden enentäväksi ja poistomerkki sen merkin kanssa, joka tekee suuruuden poistosuuruudeksi.

Jos yksiön numerokertojasta ei voida ottaa sitä aluketta, joka on otettava yksiöstä, s. t. s., jos numerokertoja ei ole se korko mistään lu'usta, jolla on alotin korottimena, eli yhden taikka usiamman puustavin korotinta ei voida jakaa tarkoin alottimella, niin silloin ei aluketta saada täydellisesti yksiöstä, vaan yksi taikka usiampiakin siinä olevista kertojista jääpi aluke merkin alle. Tämmöistä suuruutta sanotaan *alukesuuruudeksi*, jota vastoin jokaista alukemerkistä vapaata suuruutta sanotaan *järkinäissuuruudeksi.*

Kuin ne kertojat, joista aluke voidaan ottaa, tulevat sen tehtyä aluke merkin ulkopuolelle, niin alukesuuruus tulee näin selvennetyksi, niin kuin tämän lu'un kolmannessa pykälässä jo on nähty.

Olisko esm. yksiöstä $2a^3b^7c^2$ kolmas aluke otettava, niin tässä on kaksi kertojata, a^3 ja b^6, $(b^7 = b^6 \cdot b)$, joista kolmas aluke voidaan ottaa, joten saadaan

$$\sqrt[3]{2a^3b^7c^2} = \sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b^6}\sqrt[3]{2bc^2} = ab^2\sqrt[3]{2bc^2}$$

ja aluke on aina varsinaissuuruus sekä sama merkkinen kuin tulo alukemerkin alla, kuin vaan b ja c ovat varsinaisuuruuksia ja a lisäsuuruus.

Olkoon vielä kuudes aluke otettava yksiöstä $4a^8b^6c^{12}$, niin, koska

$$a^8 = a^6 \cdot a^2, \quad \sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{\sqrt{4}} \text{ ja } \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}},$$

tästä saadaan

$$\sqrt[6]{4a^8b^6c^{12}} = \sqrt[6]{a^6b^6c^{12}} \cdot \sqrt[6]{4a^2} = \sqrt[6]{a^6}\sqrt[6]{b^6}\sqrt[6]{c^{12}} \cdot \sqrt[6]{(2)^2}\sqrt[6]{a^2},$$

josta seuraa

$$\pm\sqrt[6]{4a^8b^6c^{12}} = \pm\, abc^2\sqrt[3]{2a},$$

joka yhtälö on niin ymmärrettävä, että

$$+\sqrt[6]{4a^8b^6c^{12}} = +\,2abc^2\sqrt[3]{2a}$$

$$-\sqrt[6]{4a^8b^6c^{12}} = -\,2abc^2\sqrt[3]{2a}$$

kuin tulo $2abc^2\sqrt[3]{2a}$ on lisäsuuruus, mutta

$$+\sqrt[6]{4a^8b^6c^{12}} = -\,2abc^2\sqrt[3]{2a}$$

$$-\sqrt[6]{4a^8b^6c^{12}} = +\,2abc^2\sqrt[3]{2a},$$

kuin $2abc^2\sqrt[3]{2a}$ on poistosuuruus.

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $\pm\sqrt{9a^2b^4} = \pm 3ab^2$.

Esm. 2. $\pm\sqrt{16a^8b^6} = \pm 4a^4b^3$.

Esm. 3. $\sqrt[3]{8a^3b^6} = 2ab^2$.

Esm. 4. $\sqrt[3]{-27a^6b^9c^3} = -3a^2b^3c$.

Esm. 5. $\sqrt[3]{-125a^3(b-c)^3} = -5a(b-c)$.

Esm. 6. $\pm\sqrt{81a^6(m+n)^4} = \pm 9a^3(m+n)^2$.

Esm. 7. $\sqrt[3]{4a^3} = a\sqrt[3]{4}$.

Esm. 8. $\pm\sqrt{8a^2b}=\pm\sqrt{4a^2\cdot 2b}=\pm 2a\sqrt{2b}.$

Esm. 9. $\sqrt[3]{16a^4b^4}=2ab\sqrt[3]{2ab}.$

Esm. 10. $\pm\sqrt{49a^5b^9}=\pm 7a^2b^4\sqrt{ab}.$

Esm. 11. $\pm\sqrt[4]{a^4b^6c^8}=\pm abc^2\sqrt[4]{b^2}=\pm abc^2\sqrt{b}.$

Esm. 12. $\pm\sqrt{25c^3(a^2-2ab+b^2)}=\pm\sqrt{25c^2(a-b)^2\cdot c}=$
$=\pm 5c(a-b)\sqrt{c}.$

Esm. 13. $\sqrt[5]{-64a^6}=\sqrt[5]{-32a^5\cdot 2a}=-2a\sqrt[5]{2a}.$

Esm. 14. $\pm\sqrt{\frac{1}{9}a^{2n}b^4}=\pm\frac{1}{3}a^nb^2.$

Esm. 15. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}x^{3m-3}(a-b)^4}=\frac{2}{3}x^{m-1}(a-b)\sqrt[3]{a-b}.$

Esm. 16. $\pm\sqrt{2ax^2-4ax+2a}=\pm\sqrt{2a(x-1)^2}=\pm(x-1)\sqrt{2a}.$

Esm. 17. $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}a^{3n}(b+c)^7}=-\frac{2}{5}a^n(b+c)^2\sqrt[3]{b+c}.$

Esm. 18. $\sqrt[3]{8a^3\sqrt{27a^3}}=2a\sqrt[3]{\sqrt{27a^3}}=2a\sqrt[6]{27a^3}=2a\sqrt{3a}.$

Edellä on nähty että jokainen alukemerkin alla oleva kertoja, josta aluke voidaan ottaa, saadaan se tehtyä panna alukemerkin ulkopuolelle.

Päin vastoin voidaan myös jokainen kertoja alukemerkin ulkopuolelta muuttaa sen alle, kuin vaan alotin pannaan kertojalle korottimeksi, s. t. s., kuin alukemerkistä vapaa kertoja korotetaan siihen korkoon, jonka korotin on alukkeen näyttäjä, alotin.

Niin on esm.

$$2a\sqrt{a-b}=\sqrt{2^2a^2}\cdot\sqrt{a-b}=\sqrt{4a^2(a-b)},$$

koska $\sqrt{2^2a^2}=\sqrt{4a^2}=2a.$ Tässä otamme vielä moniaita

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $\pm 2a^2\sqrt{\frac{1}{4}b^3}=\pm\sqrt{4a^4\frac{1}{4}\cdot b^3}=\pm\sqrt{a^4b^3}.$

Esm. 2. $\pm\sqrt{8a^3\sqrt[3]{2a}}=\pm 2a\sqrt{2a\sqrt[3]{2a}}=\pm 2a\sqrt{\sqrt[3]{8a^3\cdot 2a}}=$
$=\pm 2a\sqrt[6]{16a^4}=\pm 2a\sqrt[3]{4a^2}.$

Esm. 3. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{81}{16}a^3}=\sqrt[3]{(\frac{2}{3})^3\frac{81}{16}a^3}=\sqrt[3]{\frac{8}{27}\cdot\frac{81}{16}a^3}=a\sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$

Esm. 4. $2ab\sqrt{\frac{16c^3}{ab}}=\sqrt{\frac{64a^2b^2c^3}{ab}}=8c\sqrt{abc}.$

Esm. 5. $4c\sqrt[3]{\frac{a^4b^3}{16c^2}}=\sqrt[3]{4a^4b^3c}=ab\sqrt[3]{4ac}.$

Murtosuuruuden n:es aluke saadaan se ottaen erittäin osottajasta sekä nimittäjästä, jolloin osottajan aluke tulee osottajaksi ja nimittäjän nimittäjäksi murtosuuruuden alukkeessa.

Todellakin on tämän lu'un kolmannen pykälän (yhtälö B) mukaan

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

josta edellinen sääntö selvästi seuraa.

Edellisestä on jo selvä kuinka tämmöinen aluke voidaan selventää aluke ottaen erittäin jokaisesta kertojasta niin hyvin osottajassa kuin nimittäjässäkin, joten ainoastansa ne kertojat jäävät alukemerkkien alle, joidenka aluketta ei tarkoin voida ottaa. Näin voipi niin hyvin osottaja kuin nimittäjäkin tulla alukemerkistä vapaaksi ja toinen vaan jäädä alukesuuruudeksi.

Päin vastoin voidaan alukemerkistä vapaa nimittäjä panna osottajan alukemerkin alle, kuin nimittäjä ensin korotetaan siihen korkoon jonka korottimena osottajan alotin on. Samalla ehdolla voidaan alukemerkistä vapaa osottaja panna nimittäjän alukemerkin alle.

Niin on

$$\frac{\sqrt[3]{a^4b^3}}{ab}=\frac{\sqrt[3]{a^4b^3}}{\sqrt[3]{a^3b^3}}=\sqrt[3]{\frac{a^4b^3}{a^3b^3}}=\sqrt[3]{a},\ \text{sillä}\ ab=\sqrt[3]{a^3b^3}.$$

Samoin on

$$\frac{4a^2b}{\sqrt{8a^3}}=\frac{\sqrt{4^2\cdot a^4b^2}}{\sqrt{8a^3}}=\sqrt{\frac{16a^4b^2}{8a^3}}=\sqrt{2ab^2}=b\sqrt{2a}.$$

Alukkeen ottamiselle murtosuuruuksista otamme nyt muutamia

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $\pm\sqrt{\frac{9a^4}{25b^2}}=\pm\frac{3a^2}{5b}$.

Esm. 2. $\sqrt[3]{\frac{8a^3}{27b^6}}=\frac{2a}{3b^2}$.

Esm. 3. $\sqrt[3]{-\frac{125a^6}{64(b-c)^3}}=-\frac{5a^2}{4(b-c)}$.

Esm. 4. $\sqrt[3]{\frac{b^4}{24a^3}}=\frac{b\sqrt[3]{b}}{2a\sqrt[3]{3}}=\frac{b}{2a}\sqrt[3]{\frac{b}{3}}$.

Esm. 5. $\pm\sqrt[4]{\frac{4x^2y^6}{81z^8}}=\pm\frac{y}{3z^2}\cdot\sqrt[4]{4x^2y^2}=\pm\frac{y}{3z^2}\sqrt{4xy}$.

Esm. 6. $\sqrt{\frac{32a^5b^4}{49c^5}}=\frac{4a^2b^2}{7c^2}\sqrt{\frac{2a}{c}}$.

Esm. 7. $\sqrt{\frac{a^2n^2-a^2}{n+1}}=a\sqrt{\frac{n^2-1}{n+1}}=a\sqrt{n-1}$.

Esm. 8. $\sqrt[5]{-\frac{32a^6}{25(b-c)^{10}}}=-\frac{2a}{(b-c)^2}\sqrt[5]{\frac{a}{25}}$.

Esm. 9. $\sqrt[3]{\frac{27a^2}{b^4}}=\frac{3}{b}\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$.

Esm. 10. $\sqrt[3]{\frac{8p^9x^6(a^2-x^2)^{6n}}{125b^{3n-6}c^9}}=\frac{2p^3x^2(a^2-x^2)^{2n}}{5b^{n-2}c^3}$.

Esm. 11. $\sqrt[3]{\frac{8a^4}{27b^3}+\frac{16a^3}{27b^2}}=\sqrt[3]{\frac{8a^3}{27b^3}(a+2b)}=\frac{2a}{3b}\sqrt[3]{a+2b}$.

Esm. 12. $\sqrt{\frac{a^2x-2ax^2+x^3}{a^2+2ax+x^2}}=\sqrt{\frac{x(a-x)^2}{(a+x)^2}}=\frac{a-x}{a+x}\sqrt{x}$.

Esm. 13. $\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{1}{a^2-2ab+b^2}}=\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}}=\frac{1}{a+b}$.

Esm. 14. $\sqrt[n]{\frac{a^{3n+4}b^{n-3}c^{mn}}{d^{2n}f^{n}g^{3n+p-1}}}=\frac{a^3bc^m}{d^2fg^3}\sqrt[n]{\frac{a^4}{g^{p-1}}\cdot b^{-3}}=$
$=\frac{a^3bc^m}{d^2fg^3}\sqrt[n]{\frac{a^4}{b^3g^{p-1}}}.$

Etsikäämme nyt ensiksi sääntö toisen alukkeen ottamiselle monioista, jota varten tarkastakaamme monion korottamista toiseen korkoon.

Kaksion $a+b$ toinen korko on tietysti $a^2+2ab+b^2$. Samoin on kolmion toinen korko

$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$

Tästä nähdään että kolmion toinen korko on summa sen osioiden toisista koroista ja kaksinkertaisista tuloista, jotka saadaan, kuin kolmion osiot kerrotaan kaksi ja kaksi.

Sama seikka, olipa moniossa kuinka monta osiota hyvänsä, sillä jos tämä sääntö on oikea kuin osioiden luku on n, niin se on myös oikea niiden lu'un ollessa $(n+1)$.

Todellakin saadaan kuin monio $(a+b+\cdot+h+k)$ korotetaan toiseen korkoon, $(a+b+\cdot+h)$ pitäen yhtenä osiona,

$$((a+b+\cdot+h)+k)^2=(a+b+\cdot\cdot+h)^2+2k(a+b+\cdot\cdot+h)+k^2.$$

Jos nyt monion $(a+b+\cdot\cdot+h)$, jossa on n osiota, toinen korko on summa osioiden toisista koroista ja niiden kaksinkertaisista tuloista kerrottuina kaksi ja kaksi, niin monion, jossa on yksi osio k enemmän, siis $n+1$ osiota, toinen korko saadaan selvästi edelliseen pannen uuden osion (k) toinen korko ja kaksinkertaiset tulot, jotka saadaan jokainen edellinen kertoen osiolla k.

Tästä seuraa nyt selvästi, että, jos edellinen sääntö on oikea kuin osioiden luku on n, se myös on oikea niiden lu'un ollessa $(n+1)$. Mutta tämä sääntö on oikea kuin osioiden luku on kolme, sentähden on se myös oikea niiden lu'un ollessa neljä ja siis myös sen ollessa viisi j. n. e.

Se on siis oikea olipa moniossa kuinka monta osiota hyvänsä, j. o. t.

Tämä sääntö voidaan myös lausua seuraavalla tavalla: *monion toinen korko on summa ensimäisen osion toisesta korosta, ensimäisen ja toisen osion kaksinkertaisesta tulosta, toisen osion* *toisesta korosta, ensimäisen ja kolmannen sekä toisen ja kolmannen kaksinkertaisista tuloista, kolmannen osion toisesta korosta, j. n. e.*

Jos nyt monio M on toinen korko toisesta moniosta R, niin että

$$M = R^2,$$

ja moniot ovat järjestetyt pienenevillä korottimilla samasta puustavista esm. a, niin se on selvä, että se osio R:n toisessa korossa M, joka on R:n ensimäisen osion toinen korko, sisältää järjestyspuustavin isommalla korottimella kuin yksikään toinen osio, eikä siis voi olla yhdistetty jonkun toisen kanssa, sillä kuin R:n osioita merkitsemme puustavilla x, y, z, v,.., joista edellinen sisältää järjestyspuustavin a aina isommassa korossa kuin sen jälkimäinen, niin saamme

$$R^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 + 2xv + 2yv + 2zv + v^2 + \cdots$$

ja se on nyt aivan selvä, että $x^2 = x \cdot x$ sisältää isomman koron a:sta kuin jälkeiset osiot $2x \cdot y$, $y^2, \cdots$, koska x sisältää isomman koron a:sta kuin yksikään toinen osio y, z, $v, \cdots$.

Koska $R^2 = M$, niin tästä saadaan

$$M = x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 + 2xv + 2yv + 2zv + v^2 + \cdots.$$

Tämän yhtälön kumpasenkin puolen ensimäiset osiot sisältävät järjestyspuustavin a isommassa korossa kuin yksikään jälkeisistä, jonkatähden ne ovat yhtä isot, samat, sillä moniot ovat samat, ehkä oikean puolen osioita voipi vasemmassa puolessa olla yhdistettyinä.

Alukkeen ensimäinen osio x saadaan siis toinen aluke ottaen alkuperäisen monion M ensimäisestä osiosta. Poistakaamme nyt x^2 moniosta M, joten selvästi saamme, kuin tähdettä $M - x^2$ merkitsemme puustavilla T,

$$T = 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 + 2xv + 2yv + 2zv + v^2 + \cdots.$$

Tämän yhtälön puolissa ovat taas ensimäiset osiot selvästi samat, sillä osio $2xy$ sisältää a:n isommassa korossa kuin yksikään jälkeisistä $y \cdot y$, $2x \cdot z$ j. n. e. koska x sisältää sen isommassa korossa kuin y, y isommassa kuin z j. n. e., jonkatähden osio $2xy$ ei voi olla samankaltainen yhdenkään toisen kanssa.

Alukkeen toinen osio (y) saadaan siis tähteen (T) ensimäinen osio jakaen alukkeen kaksinkertaisella ensimäisellä osiolla ($2x$).

Kuin sitte tähteestä (T) poistetaan kaksio $2xy+y^2=(2x+y)y$, niin saadaan toinen tähde T' ja siis selvästi yhtälö

$$T' = 2xz + 2yz + z^2 + 2xv + 2yv + 2zv + v^2 + \cdots$$

Tämän yhtälön toisen puolen ensimäinen osio sisältää taas järjestyspuustavin a isommassa korossa kuin yksikään sen jälkimäisistä, jonkatähden se on sama kuin toisen tähteen (T') ensimäinen osio ja alukkeen kolmas osio (z) saadaan siis toisen tähteen (T') ensimäinen osio jakaen alukkeen ensimäisellä osiolla kerrottuna kahdella, s. o. suuruudella $2x$. Kuin sitte toisesta tähteestä (T') poistetaan kolmio $2xz + 2yz + z^2 = (2x + 2y + z)z$, niin saadaan kolmas tähde

$$T'' = 2xv + 2yv + 2zv + v^2 + \cdots,$$

josta taas, jos se ei vielä ole nolla, saadaan alukkeen neljäs osio v samoin, kuin ensimäisestä ja toisesta tähteestä saatiin alukkeen toinen ja kolmas osio y ja z.

Edellisestä saadaan nyt toisen alukkeen ottamiselle moniosta selvästi seuraava sääntö: *monio järjestetään pienenevillä koroilla jostakin siinä olevasta puustavista; sen ensimäisestä osiosta otetaan toinen aluke, joka on koko alukkeen ensimäinen osio (x); tämän osion toinen korko poistetaan alkuperäisestä moniosta ja tähteen ensimäinen osio jaetaan alukkeen ensimäisellä osiolla kerrotuna kahdella, joten saatu osa on alukkeen toinen osio (y), joka lasketaan kaksinkertaisen ensimäisen osion kanssa yhteen ja summa ($2x+y$) kerrotaan toisella osiolla (y), joten saatu tulo ($2x+y$)$\cdot y$ poistetaan ensimäisestä tähteestä; näin saadun toisen tähteen ensimäinen osio jaetaan taas alukkeen ensimäisellä osiolla kerrottuna kahdella, joten saatu osa on alukkeen kolmas osio (z); se lasketaan sitte edellisten (kahden) osioiden kerrottuina kahdella kanssa yhteen ja summa ($2x+2y+z$) kerrotaan kolmannella osiolla (z) joten saatu tulo poistetaan toisesta tähteestä; jos vielä jäisi kolmas tähde, niin sen kanssa menetettäisiin samoin kuin toisenkin j. n. e., s. t. s., jokaisen tähteen ensimäinen osio jaetaan alukkeen ensimäisellä osiolla kerrottuna kah-*

della, joten saadaan uusi osio alukkeessa, jolla entisten osioiden kaksinkertainen summa, laskettuna yhteen viimeksi saadun osion kanssa, kerrotaan ja näin saatu tulo poistetaan edellisestä tähteestä. Jos alkuperäinen monio on toinen korko jostakin toisesta moniosta, niin näin tehden saadaan viimein nolla tähteeksi, jolloin monion toinen aluke on täydellisesti saatu.

Jos taas monion ensimäisestä osiosta toista aluketta ei voitaisi saada järkinäisuuruudeksi eli jos saataisiinkin, mutta tämä aluke kerrottuna kahdella ei jakaisi tarkoin jotakin edellä mainittua tähdettä, niin silloin ei alkuperäinen monio olisi toinen korko mistään toisesta moniosta.

Olisko nyt toinen korko otettava esm. moniosta

$$49a^2b^2 - 24ab^3 + 25a^4 - 30a^3b + 16b^4,$$

niin teos saisi edellisen säännön mukaan seuraavan muodon:

$$\begin{array}{lr|l}
\text{Järjest. mon.} & 25a^4 - 30a^3b + 49a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4 & 10a^2 \ \text{ensim. osio kerrottuna 2:lla.} \\
 & \pm 25a^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & 5a^2 - 3ab + 4b^2 \ \text{aluke.} \\
\hline
\text{Ens. tähde.} & -30a^3b + 49a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4 & \\
 & \pm 30a^3b \mp 9a^2b^2 \qquad\qquad\qquad & (10a^2 - 3ab)(-3ab) \\
\hline
\text{Toinen tähde.} & +40a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4 & \text{poistetaan ensimäisestä tähteestä. } (10a^2 \\
 & \mp 40a^2b^2 \pm 24ab^3 \mp 16b^4 & -6ab + 4b^2).\ 4b^2 \text{ otetaan pois toisesta tähteestä.} \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Harjoitukseksi otamme vielä muutamia

Esimerkkiä.

Esm. 1. $\sqrt{25x^4 - 20x^2 + 4} = \pm(5x^2 - 2)$.

Esm. 2. $\sqrt{64a^6 + 4a^3 + \frac{1}{16}} = \pm(8a^3 + \frac{1}{4})$.

Esm. 3. $\sqrt{16x^4 - 48x^3 + 60x^2 - 36x + 9} = \pm(4x^2 - 6x + 3)$.

Esm. 4. $\sqrt{25x^6 - 50x^4y - 10x^3 + 25x^2y^2 + 10xy + 1} =$
$= \pm(5x^3 - 5xy - 1)$.

Esm. 5. $\sqrt{16x^6 - 24x^5 + 25x^4 - 20x^3 + 10x^2 - 4x + 1} =$
$= \pm(4x^3 - 3x^2 + 2x - 1)$.

Esm. 6. $\sqrt{9a^2 - 6ab + 30ac + 6ad + b^2 - 10bc - 2bd + 25c^2 + 10cd + d^2} = \pm(3a - b + 5c + d)$.

Esm. 7. $\sqrt{a^{2m}x^{2n}+10a^{2m-2}cx^{2n+1}-6a^{m+1}x^{n-1}+}$
$$\overline{+25a^{2m-4}c^2x^{2n+2}-30a^{m-1}cx^n+\frac{9a^2}{x^2}}=$$
$$=\pm\left(a^mx^n+5a^{m-2}cx^{n+1}-\frac{3a}{x}\right).$$

Olisko nyt moniosta M m:es aluke etsittävä, niin merkitkäämme alukkeen vielä tuntemattomia osioita puustavilla $x, y, z, \cdots$ ja olkoot alkuperäinen monio M ja sen m:es aluke $x+y+z+\cdots$ järjestetyt saman puustavin esm. a mukaan pienenevillä korottimilla, joten x merkitsee sitä osiota alukkeessa, jossa a:n isoin korko on kertojana, y sen jälkeistä j. n. e. Kuin nyt pidämme moniota $(x+y+z+\cdots)$ kaksiona, jonka ensimäinen osio on x ja toinen alukkeen muiden osioiden summa $(y+z+\cdots)$, niin saamme Newton'in kaksiotodiston mukaan

$$(x+y+z+\cdots)^m=M=x^m+mx^{m-1}(y+z+\cdots)$$
$$+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}(y+z+\cdot)^2$$
$$+\cdots$$

Se on nyt kertomis-säännöistä selvä, että ensimäinen osio x^n edellisen yhtälön toisessa puolessa sisältää järjestyspuustavin a isommassa korossa kuin yksikään toinen, eikä siis voi olla samankaltainen yhdenkään toisen osion kanssa.

Jos sentähden monio M on toisen monion $(x+y+z+\cdot\cdot)$ m:es korko, niin sen ensimäisen osion, joka sisältää a:n isoimman koron, pitää oleman m:es korko alukkeen ensimäisestä osiosta x, joka sentähden saadaan m:es aluke ottaen alkuperäisen monion ensimäisestä osiosta.

Kuin moniosta M sitte poistetaan alukkeen ensimäisen osion m:es korko x^m, niin saadaan selvästi, kuin tähdettä merkitsemme puustavilla T, uusi yhtälö

$$M-x^m=T=mx^{m-1}(y+z+\cdot\cdot)$$
$$+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}(y+z+\cdot\cdot)^2$$
$$+\cdots$$

jonka toisen puolen ensimäinen osio $mx^{m-1}y$ ei voi olla samankaltainen yhdenkään toisen kanssa, jonkatähden sen pitää olla osiona myös yhtälön ensimäisessä puolessa T.

Todellakin sisältää osio $mx^{m-1}y$ isomman koron a:sta kuin yksikään toinen osio yhtälön oikeassa puolessa.

Todistuksessa voidaan jättää pois etukertojat, jotka eivät sisällä järjestyspuustavia a.

Tulossa $x^{m-1}y$ on a isommassa korossa kuin yhdessäkään toisessa tulossa, esm. $x^{m-n}y^n$ $(n<m)$, x:n ja y:n koroista, sillä nämä tulot ovat samat kuin

$$x^{m-n}y \cdot x^{n-1} \text{ ja } x^{m-n}y \cdot y^{n-1},$$

joissa kumpasessakin on sama kertoja $x^{m-n}y$, mutta toinen kertoja x^{n-1} edellisessä sisältää selvästi isomman koron a:sta kuin toinen kertoja y^{n-1} jälkimäisessä, jonkatähden edellinen tulo sisältää myös isomman koron a:sta kuin jälkimäinen. Koska taas y sisältää isomman koron a:sta kuin sen jälkeiset osiot alukkeessa ja sentähden myös y^n isomman kuin yksikään toinen osio monion $(y+z+\cdot\cdot)$ n:sä korossa ja osiossa $mx^{m-1}y$ on kertojana isompi korko a:sta kuin jossakin toisessa $kx^{m-n}y^n$, (k merkitsee a:sta vapaata etukertojata), niin se on selvä, että $mx^{m-1}y$ sisältää isomman koron a:sta kuin yksikään toinen osio edellisen yhtälön toisessa puolessa, j. o. t.

Alukkeen toinen osio (y) saadaan siis tähteen (T) ensimäinen osio, joka sisältää a:n isoimman koron, jakaen alukkeen ensimäisen osion $(m-1)$:llä korolla kerrottuna alottimella m, s. o. suuruudella mx^{m-1}.

Kuin sitte kaksion $(x+y)$ m:es korko poistetaan alkuperäisestä, moniosta, niin voidaan samoin kuin edelläkin todistaa, että osio $mx^{m-1}z$ sisältää a:n isoimman koron toisessa tähteessä T', eikä sentähden voi olla samankaltainen yhdenkään toisen osion kanssa.

Sentähden saadaan alukkeen kolmas osio z toisen tähteen (T') ensimäinen osio jakaen alukkeen ensimäisen osion $(m-1)$:llä korolla kerrottuna alottimella (m), s. o. suuruudella mx^{m-1}.

Kuin sitte taas kolmion $(x+y+z)$ m:es korko poistetaan alkuperäisestä moniosta, niin kolmannesta tähteestä, jos semmoinen vielä jääpi, saadaan taas alukkeen neljäs osio samoin kuin toinen ensimäisestä ja kolmas toisesta tähteestä j. n. e.

Edellisestä saadaan nyt seuraava sääntö minkä alukkeen (m) hyvänsä ottamiselle moniosta: *ensin järjestetään monio jonkun puustavin mukaan pienenevillä korottimilla; sitte otetaan monion ensimäisestä osiosta m:es aluke, joka on koko alukkeen ensimäinen osio; tämän osion m:es korko poistetaan sitte moniosta ja tähteen ensimäinen osio jaetaan alukkeen ensimäisen osion* ($m-1$):llä *korolla kerrottuna alottimella (m), joten saatu osa on alukkeen toinen osio; sitte korotetaan alukkeen näin saatujen kahden osion summa m:teen korkoon, joka korko poistetaan alkuperäisestä moniosta; näin saadusta tähteestä saadaan sitte alukkeen kolmas osio samoin kuin toinenkin ensimäisestä tähteestä; näin menetetään kunnekka monion m:es aluke on saatu, s. t. s. saatujen osioiden summan m:es korko poistetaan alkuperäisestä moniosta ja tähteen ensimäinen osio jaetaan alukkeen ensimäisen osion* ($m-1$):llä *korolla kerrottuna alottimella (m), kunnekka alukkeen osioiden summa korotettuna m:teen korkoon on sama kuin alkuperäinen monio ja seuraava tähde siis nolla.*

Edellisen säännön käyttämiselle otamme ainoastansa seuraavan esimerkin. Olisko kolmas aluke otettava moniosta

$$54a^4b^2+36a^5b+27a^3b^3+8a^6,$$

niin tämä teos muodostuu seuraavasti, kuin a otetaan järjestyspuustaviksi:

$$\begin{array}{r|l}
8a^6+36a^5b+54a^4b^2+27a^3b^3 & 3\cdot 2^2(a^2)^2=12a^4 \\
\mp 8a^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \overline{2a^2+3ab} \text{ etsitty aluke.} \\
\hline
\text{1:nen tähde.} \; +36a^5b+54a^4b^2+27a^3b^3 & \\
8a^6+36a^5b+54a^4b^2+27a^3b^3 & \\
\mp 8a^6\mp 36a^5b\mp 54a^4b^2\mp 27a^3b^3 & (2a^2+3ab)^3=8a^6+36a^5b+54a^4b^2+2a^3b^3. \\
\hline
\text{2:nen tähde.} \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

§ 6.

Lasku alukesuuruuksien kanssa.

Alukesuuruuksia, joilla on sama alotin ja sama suuruus alukemerkin alla, sanotaan samankaltaisiksi.

Kuin taas alukesuuruuksien yhteenlaskua ja poistamista merkitään yleislaskussa, samoin kuin muidenkin, suuruudet kirjoittaen jälekkäin yhteenlaskettavat merkkinensä ja poistettavat entisiä vastaisilla merkillä, niin näin saaduissa monioissa voidaan samankaltaiset alukesuuruudet aina yhdistettää yhdeksi, yhteinen alukekertoja eroittaen ja etukertojoiden summa pannen sille etukertojaksi. Niin on esm.

$$2a\sqrt{3bc}-5c\sqrt{3bc}-4d\sqrt{3bc}+2\sqrt{3bc}=(2a-5c-4d+2)\sqrt{3bc}.$$

Usiasti voidaan alukesuuruuksia selventäen ne tehdä samankaltaisiksi.

Näin saadaan esm.

$$5\sqrt[3]{2b^2c^3}-\sqrt[3]{16b^2}-2c\sqrt[3]{2b^2}=5c\sqrt[3]{2b^2}-2\sqrt[3]{2b^2}-2c\sqrt[3]{2b^2}=$$
$$=(3c-2)\sqrt[3]{2b^2}.$$

Niin myös on

$$3\sqrt[6]{4a^2}-2\cdot\sqrt[3]{2a}=\sqrt[3]{2a},$$

sillä yhtälön D tämän lu'un kolmannessa pykälässä mukaan on

$$\sqrt[6]{4a^2}=\sqrt[3]{\sqrt{4a^2}}=\sqrt[3]{2a}.$$

Alukesuuruuksien yhteenlaskulle ja poistamiselle otamme vielä muutamia

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $5\sqrt{a}+3\sqrt{a}-4\sqrt{a}=4\sqrt{a}.$

Esm. 2. $3\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}=2\sqrt[3]{5}.$

Esm. 3. $4ab\sqrt[4]{2a-c}+5a^2\sqrt[4]{2a-c}-3ab\sqrt[4]{2a-c}=$
$=a(5a+b)\sqrt[4]{2a-c}.$

Esm. 4. $\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{c}{x}}-\frac{3a}{4}\sqrt{\frac{c}{x}}+\frac{a}{2}\sqrt{\frac{c}{x}}=\frac{5a}{12}\sqrt{\frac{c}{x}}.$

Esm. 5. $\frac{2a}{b}\cdot\sqrt[3]{a^2c^2}-d^2\sqrt[3]{a^2c^2}+\frac{b^2}{2a}\sqrt[3]{a^2c^2}=\left(\frac{2a}{b}-d^2+\frac{b^2}{2a}\right)\sqrt[3]{a^2b^2}.$

Esm. 6. $5\sqrt{a}-\sqrt{4a}=5\sqrt{a}-2\sqrt{a}=3\sqrt{a}.$

Esm. 7. $3c\sqrt{2b}+\sqrt{18a^4b}=3c\sqrt{2b}+3a^2\sqrt{2b}=3(c+a^2)\sqrt{2b}.$

Esm. 8. $\sqrt{8}+\sqrt{50}=2\sqrt{2}+5\sqrt{2}=7\sqrt{2}.$

Esm. 9. $\sqrt[3]{54a}-\sqrt[3]{16a}=3\sqrt[3]{2a}-2\sqrt[3]{2a}=\sqrt[3]{2a}.$

Esm. 10. $\sqrt{48ab^4}-b^2\sqrt{108a}=4b^2\sqrt{3a}-6b^2\sqrt{3a}=-2b^2\sqrt{3a}.$

Esm. 11. $\sqrt{4a}+\sqrt[4]{a^{10}}=2\sqrt{a}+\sqrt{a^5}=2\sqrt{a}+a^2\sqrt{a}=(2+a^2)\sqrt{a}.$

Esm. 12. $\sqrt[3]{\frac{54a}{c}}-\sqrt[3]{\frac{16a}{b^3c}}=3\sqrt[3]{\frac{2a}{c}}-\frac{2}{b}\sqrt[3]{\frac{2a}{c}}=\left(3-\frac{2}{b}\right)\sqrt[3]{\frac{2a}{c}}.$

Esm. 13. $8\sqrt{\tfrac{3}{4}}-\tfrac{1}{2}\sqrt{12}-4\sqrt{27}=-9\sqrt{3}.$

Esm. 14. $\sqrt{\frac{4a^4c}{b^3}}+\sqrt{\frac{9a^2c^3}{bd^2}}-\sqrt{\frac{a^2cd^2}{4b}}=\left(\frac{2a^2}{b}+\frac{3ac}{d}-\frac{ad}{2}\right)\sqrt{\frac{c}{b}}.$

Esm. 15. $\sqrt[3]{54a^{6+m}b^3}-\sqrt[3]{16a^{m+3}b^6}+\sqrt[3]{2a^{4m+9}}+\sqrt[3]{2c^3a^m}=$

$=(3a^2b-2ab^2+a^{m+3}+c)\sqrt[3]{2a^m}.$

Yhtälön A, tämän lu'un kolmannessa pykälässä, mukaan on

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdots=\sqrt[n]{abc\cdots},$$

josta alukesuuruuksien, joilla on sama alotin, kertomiselle saadaan seuraava sääntö: *alukemerkkien alla olevat suuruudet kerrotaan toisillansa ja tulo pannaan yhteisen alukemerkin alle.*

Se on selvä, että alukesuuruuksien etukertojoiden tulo on pantava etukertojaksi edellisen säännön mukaan saadulle alukekertojalle.

Yhtälön B mukaan samassa pykälässä on taas

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Kuin sentähden alukesuuruus on jaettava toisella alukesuuruudella, jolla on sama alotin, niin osa saadaan alukemerkin alla oleva suuruus jaettavassa jakaen alukemerkin alla olevalla suuruudella jakajassa ja näin saatu osa pannen yhteisen alukemerkin alle.

Tässäkin on selvä, että jaettavan etukertoja on jaettava jakajan etukertojalla ja osa pantava etukertojaksi edellisen säännön mukaan saadulle alukesuuruudelle.

Tämän lu'un kolmannessa pykälässä (yhtälö E) on jo sanottu, että alukesuuruuden alotin ja alukemerkin alla olevan suuruuden korotin voidaan kertoa eli jakaa samalla suuruudella alukesuuruuden arvon muuttamatta. Tästä todistosta saadaan helposti sääntö alukesuuruuksien eri alottimilla tekemiselle toisiksi samalla alottimella suuruuksien arvojen muuttamatta.

Olisko esm. suuruuksien $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{4b^2}$, $\sqrt[4]{c^5}$, $\sqrt[6]{4ab^2}$ tulo saatava, niin ne voidaan ensin tehdä alukesuuruuksiksi samalla alottimella, joidenka tulo sitte edellisen kertomis-säännön mukaan helposti saadaan.

Todellakin saadaan alottimien pienin yhteinen jaettava (12) alottimeksi kaikille suuruuksille, kuin se jaetaan itsekunkin alottimella ja alukemerkin alla oleva suuruus korotetaan siihen korkoon, jonka korottimena on näin saatu osa, jolla tietysti alotinkin on kerrottava saadaksemme pienin yhteinen jaettava alottimeksi.

Niin on

$$\sqrt{a} = \sqrt[12]{a^6},\ \sqrt[3]{4b^2} = \sqrt[12]{(4b^2)^4} = \sqrt[12]{4^4b^8},\ \sqrt[4]{c^5} = \sqrt[12]{c^{15}},\ \sqrt[6]{4ab^2} =$$
$$= \sqrt[12]{4^2a^2b^4}$$

ja sentähden myös

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{4b^2}\cdot\sqrt[4]{c^5}\cdot\sqrt[6]{4ab^2} = \sqrt[12]{a^6\cdot 4^4b^8c^{15}\cdot 4^2a^2b^4} = \sqrt[12]{4^6b^{12}a^8c^{15}} =$$
$$= 2bc\sqrt[12]{a^8c^3}.$$

Edellisestä esimerkistä on seuraava sääntö selvä: *alukesuuruudet eri alottimilla saadaan semmoisiksi samalla alottimella, kuin kaikkien alottimien pienin yhteinen jaettava jaetaan itsekullakin alottimella ja suuruus alukemerkin alla korotetaan siihen korkoon, jolla näin saatu osa on korottimena, joka tietysti tehdään suuruuden kertojoiden korottimet kertoen tällä osalla ja vihdoin mainittu pienin yhteinen jaettava pannaan alottimeksi jokaiselle suuruudelle.*

Tässä on aina muistettava mitä tämän lu'un neljännen pykälän lopussa en sanottu. Niin esm. on

$$\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[3]{-4a^2}=-\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2}=-\sqrt[6]{2^3a^3b^3}\cdot\sqrt[6]{4^2a^4}=$$
$$=-\sqrt[6]{2^3\cdot 2^4a^7b^3}=-2a\sqrt[6]{2ab^3},\text{ eikä}$$
$$\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[3]{-4a^2}=\sqrt[6]{2^3a^3b^3}\cdot\sqrt[6]{(-4a^2)^2}=\sqrt[6]{2^3a^3b^3}\cdot\sqrt[6]{4^2a^4}=2a\sqrt[6]{2ab^3}.$$

Alukesuuruuksien kertomiselle ja jaolle otamme vielä muutamia

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{2a}=\sqrt{4a^2}=2a$. (Tulo on lisä- eli poistosuuruus sen mukaan, kuin a on lisä- eli poistosuuruus).

Esm. 2. $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a^3b}=a\sqrt[3]{b}$.

Esm. 3. $\dfrac{\sqrt{2ax^2}}{\sqrt{6a^2x}}=\sqrt{\dfrac{2ax^2}{6a^2x}}=\sqrt{\dfrac{x}{3a}}$.

Esm. 4. $-\sqrt{\dfrac{2ac}{3b}}\cdot\sqrt{\dfrac{9ab}{2c}}=-a\sqrt{3}$. (Tulo on poisto- eli lisäsuuruus sen mukaan, kuin a on lisä- eli poistosuuruus).

Esm. 5. $\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}}{-\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}}=-\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}:\dfrac{b}{a}}=-\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^2}}$.

Esm. 6. $\dfrac{a}{2b}\sqrt{a-c}\cdot 3ab\sqrt{ac}=\dfrac{3a^2}{2}\sqrt{a^2c-ac^2}$.

Esm. 7. $\dfrac{2a^2\sqrt[4]{p^2qr}}{3ab\sqrt[4]{pqr^2}}=\dfrac{2a}{3b}\sqrt[4]{\dfrac{p}{r}}$.

Esm. 8. $\dfrac{-\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{4}=-2$.

Esm. 9. $-3\sqrt[3]{a^2}\cdot\left(-\sqrt[3]{bc}\right)\cdot 2a\sqrt[3]{9ac^2}=6a^2c\sqrt[3]{9b}$.

Esm. 10. $\sqrt[3]{18}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot=\sqrt[3]{72}=2\sqrt[3]{9}$.

Esm. 11. $$\frac{\sqrt{\dfrac{b-2a}{m+3n}}}{\sqrt{\dfrac{b^2-4a^2}{2(m^2-9n^2)}}}=\sqrt{\frac{2(m-3n)}{b+2a}}.$$

Esm. 12. $$\frac{\dfrac{ac-ad}{2b}\sqrt[5]{a^2x-ax^2}}{\dfrac{a}{2b}\sqrt[5]{a-x}}=(c-d)\sqrt[5]{ax}.$$

Esm. 13. $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{\frac{3}{8}}=\sqrt[6]{4^2}\cdot\sqrt[6]{\frac{3}{8}}=\sqrt[6]{6}.$

Esm. 14. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt[3]{4}}=\dfrac{2\sqrt[6]{2^3}}{3\sqrt[6]{4^2}}=\dfrac{2}{3}\sqrt[6]{\tfrac{1}{2}}.$

Esm. 15. $\dfrac{\sqrt[5]{12}}{3\sqrt[3]{3}}=\dfrac{1}{3}\sqrt[15]{\dfrac{12^3}{3^5}}=\dfrac{1}{3}\sqrt[15]{\dfrac{4^3\cdot3^3}{3^5}}=\dfrac{1}{3}\sqrt[15]{\dfrac{64}{9}}.$

Esm. 16. $\sqrt{x+z}\cdot\sqrt[3]{x-z}=\sqrt[6]{(x+z)^3}\cdot\sqrt[6]{(x-z)^2}=$
$\sqrt[6]{(x+z)(x^2-z^2)^2}.$

Esm. 17. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\sqrt[6]{32}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{(\frac{1}{2})^2}\cdot\sqrt[6]{32}=\sqrt[6]{64}=2.$

Esm. 18. $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[6]{\frac{4}{3}}=2\sqrt[12]{3}.$

Esm. 19. $$\frac{-\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}}{-\sqrt{\dfrac{a}{b}}}=\frac{-\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}}{-\sqrt[4]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}}=\sqrt[4]{\frac{b}{a}}.$$

Esm. 20. $$\sqrt[12]{\frac{a}{bc^3}}\cdot\sqrt[8]{\frac{a^mc^2}{b}}=\sqrt[24]{\frac{a^{3m+2}}{b^5}}.$$

Esm. 21. $$\frac{\sqrt[5]{ab^{n-1}c^2}}{\sqrt[5]{\dfrac{a^3b^2}{c^{n-1}d}}}=\sqrt[5]{\frac{b^{n-3}c^{n+1}d}{a^2}}.$$

Esm. 22. $\dfrac{\sqrt[2n]{\dfrac{a^m b}{c^2 d}}}{\sqrt[3n]{\dfrac{a^{m-1}c^3}{d^5}}} = \sqrt[6n]{\dfrac{a^{m+2}b^3d^7}{c^{12}}}.$

Esm. 23. $\dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$

Esm. 24. $\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \sqrt{\dfrac{2^2}{3^2}}\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}.$

Esm. 25. $\dfrac{2a+b}{2a-b}\sqrt{\dfrac{2a-b}{2a+b}} = \sqrt{\dfrac{2a+b}{2a-b}}.$

Esm. 26. $\dfrac{\sqrt{a^2-y^2}}{a+y} = \sqrt{\dfrac{a-y}{a+y}}.$

Esm. 27. $(x+1)\sqrt{\dfrac{f^3k}{x^2-1}} = f\sqrt{\dfrac{fk(x+1)}{x-1}}.$

Edellisistä esimerkistä on nyt selvästi nähty, että mitattomien lukujen tulo niin hyvin kuin osakin, joka saadaan kuin mitaton luku jaetaan toisella, voipi olla mitallinen luku. Niin on esm.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2.$$

$$\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

$$\sqrt[4]{12}\cdot\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{6} = 6.$$

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = 3.$$

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = 2.$$

Alukesuuruuksien korottamisen ja alukkeen semmoisista ottamisen säännöt ovat jo tämän lu'un kolmannessa pykälässä lausutut, jonkatähden nyt vaan otamme muutamia

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $(\sqrt[4]{4a^3})^2 = \sqrt[4]{(4a^3)^2} = \sqrt{4a^3} = 2a\sqrt{a}.$

Esm. 2. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9b^2}}=\sqrt[12]{9b^2}=\sqrt[6]{3b}.$

Esm. 3. $\left(\sqrt[3]{4a^2}\right)^2=\sqrt[3]{16a^4}=2a\sqrt[3]{2a}.$

Esm. 4. $\left(\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)^4=\frac{1}{81}\cdot\sqrt{6^4}=\frac{1}{81}\cdot 6^2=\frac{4}{9}.$

Esm. 5. $\left(\sqrt[6]{\frac{a^5x}{b^5}}\right)^3=\sqrt[6]{\left(\frac{a^5x}{b^5}\right)^3}=\sqrt{\frac{a^5x}{b^5}}=\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{ax}{b}}.$

Esm. 6. $\sqrt[3]{\sqrt{8a^3}}=\sqrt[6]{(2a)^3}=\sqrt{2a}.$

Esm. 7. $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{2}}{32}}=\sqrt[10]{\frac{2}{(32)^2}}=\frac{\sqrt[10]{2}}{\sqrt[5]{32}}=\frac{\sqrt[10]{2}}{2}.$

Esm. 8. $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{3^2}\cdot\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3}.$

Esm. 9. $\left(3\sqrt[3]{\frac{2}{3}a}\right)^5=3^5\sqrt[3]{\frac{2^5a^5}{3^5}}=\sqrt[3]{\frac{3^{15}\cdot 2^5a^5}{3^5}}=\sqrt[3]{3^{10}\cdot 2^5a^5}=$

$=54a\sqrt[3]{12a^2}.$

Laskulle alukkeiden kanssa yleisesti otamme vielä muutamia

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2=$

$=a+2\sqrt{ax}+x.$

Esm. 2. $2\sqrt{5}(\sqrt{5}+2\sqrt{6}+3\sqrt{10})=10+4\sqrt{30}+30\sqrt{2}.$

Esm. 3. $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=1.$

Esm. 4. $\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}-7\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=-8-\frac{37}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}.$

Esm. 5. $\left(-5-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)\left(-5+\sqrt{\frac{3}{4}}\right)=(-5)^2-\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2=24\frac{1}{4}.$

Esm. 6. $(9+2\sqrt{10})(9-2\sqrt{10})=41.$

Esm. 7. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=\frac{5}{6}-\frac{13}{36}\sqrt{6}.$

Esm. 8. $\left(4\sqrt{\frac{7}{3}}+5\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{7}{3}}+2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=14\frac{1}{3}+13\sqrt{\frac{7}{6}}.$

Esm. 9. $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-1)(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+1)=6\sqrt{2}-7.$

Esm. 10. $(\sqrt{a}+\sqrt{2b-c})(\sqrt{a}-\sqrt{2b-c})=a-(2b-c)=$
$=a-2b+c.$

Esm. 11. $(\sqrt{a}+c\sqrt[3]{b})(\sqrt{a}-c\sqrt[3]{b})=a-c^2\sqrt[3]{b^2}.$

Esm. 12. $\dfrac{\sqrt{72}+\sqrt{32}-4}{\sqrt{8}}=5-\sqrt{2}.$

Esm. 13. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=\dfrac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=\dfrac{\sqrt{3}-2}{-1}=2-\sqrt{3}.$

Esm. 14. $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}=$
$=\sqrt{15}+\tfrac{3}{2}\sqrt{6}.$

Esm. 15. $\dfrac{6-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\tfrac{3}{4}\sqrt{5}-\tfrac{9}{4}.$

Esm. 16. $\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}}}=\tfrac{1}{10}.$

Esm. 17. $\dfrac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{c}}=\dfrac{b\sqrt{a}-\sqrt{ac}}{b^2-c}.$

Esm. 18. $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}=17-12\sqrt{2}.$

Esm. 19. $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}=1+2x+2\sqrt{x+x^2}.$

Esm. 20. $\left(\sqrt{\dfrac{2x^2-4x}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{2x-4}}\right)^2=\dfrac{2x^2-4x}{3}+\dfrac{3}{2x-4}-2\sqrt{x}.$

Esm. 21. $\dfrac{\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\sqrt{1-x}.$

§ 6.

Koroista minkälaisilla korottimilla hyvänsä.

Edellä on puhuttu ainoastansa semmoisista koroista, joidenka korottimet ovat kokolukuja, mutta yleislaskussa käytetään nimitystä *korko* laveammassa merkityksessä. Tämän lu'un ensimäisessä pykälässä on jo sanottu, että korolla jostakin suuruudesta a, jonka korotin on kokoluku poistomerkillä esm. $-n$, merkitään osaa, joka saadaan ykkönen jakaen a:n n:llä korolla, s. t. s. että

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Samassa merkityksessä käytetään korkoa, jonka korotin on poistosuuruus, olipa korottimen numero-arvo mikä luku hyvänsä. Tämmöinen osan merkitseminen on saatu ja'on säännöstä.

Tämän lu'un viidennessä pykälässä on taas nähty, että n:es aluke minkä suuruuden a hyvänsä m:stä korosta saadaan korotin m jakaen alottimella n, jos n jakaa tarkoin kokolu'un m, s. t. s.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^p,$$

jos $\frac{m}{n} = p$ on kokoluku. Tässä tapauksessa on siis korottimen jako kokolu'ulla sama kuin alukkeen, jolla jakaja on alottimena, ottaminen korosta.

Sama merkitys annetaan yleislaskussa korottimen ja'olle, joskohta osa ei olekkaan kokoluku, joten suuruuden a korolla $a^{\frac{m}{n}}$, jonka korotin $\frac{m}{n}$ on murtoluku, merkitään sitä aluketta a:n m:stä korosta, jonka alotin on n, s. t. s.

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m},$$

olivatpa m ja n mitä kokolukuja hyvänsä.

Korkoa tässä merkityksessä käyttäen on siis esm.

$$a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3},\ a^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{a^7} = a\sqrt[4]{a^3},\ 4^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{4^4} = 4\sqrt[3]{4}.$$

Kuin korko otetaan näin laveassa merkityksessä, niin korkoon korottamisen yleinen määritys on seuraava: *suuruuden a* *korottaminen siihen korkoon, kuin luku b näyttää, on toisen suuruuden muodostaminen a:sta kertomalla samalla tavalla, kuin b on muodostettu ykkösestä yhteen laskemalla.*

Kuin b on kokoluku, niin se on saatu ykkösestä b ykköstä laskien yhteen, jonkatähden b:es korko a:sta määrityksen mukaan on tulo b kertojasta kaikki yhtä isoja kuin a. Jos taas b on murtoluku esm. $\frac{m}{n}$, niin silloin on ensin luku $\left(\frac{1}{n}\right)$ etsitty, josta saadaan ykkönen n semmoista laskien yhteen ja sitte on m semmoista lukua $\left(\frac{1}{n}\right)$ laskettu yhteen. Edellisen määrityksen mukaan saadaan siis b:es korko a:sta ensin semmoinen suuruus etsien, että n kertojata, kaikki yhtä isoja sen suuruuden kanssa, antavat a:n tuloksi (semmoinen suuruus on tietysti $\sqrt[n]{a}$) ja sitte muodostaen tulo, jossa on n semmoista kertojata eikä muita paitsi ykkönen, s. t. s. korottaen se $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ m:teen korkoon.

Näin saadaan selvästi määrityksen mukaan

$$a^b = a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Kuin b on mitaton luku, niin sitä ei voida ensinkään muodostettaa ykkösestä, mutta sen arvo voidaan kuitenkin merkitä kuinka lähimäärin hyvänsä jollakin murtolu'ulla $\frac{p}{q}$ ja koron a^b lähimäärinen arvo on silloin $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$, kuin a on lisäsuuruus.

Nyt voidaan myös yhtälön

$$a^0 = 1$$

merkitys tarkemmin selittää. Edellisen koron määrityksen mukaan on $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.

Merkitkäämme nyt a:n n:ttä aluketta puustavilla d, joten on $a^{1/n} = \sqrt[n]{a} = d$ ja merkitköön a ensin mitä lukua hyvänsä vaan isompaa ykköstä ja n myös ykköstä isompaa kokolukua. Koska nyt on $\sqrt[n]{a} = d$, josta $d^n = a$, niin d on aina pienempi kuin a, vaan isompi kuin ykkönen, olipa n mikä kokoluku hyvänsä, sillä olisko $d < 1$ esm. sama kuin $\frac{p}{q}$, niin $d^n = \frac{p^n}{q^n}$ olisi myös pienempi ykköstä eikä siis sama kuin a. Kuta isompi taas n on sitä pienemmän pitää d:n oleman, koska n kertojata d antavat a:n tuloksi ja näiden n yhtä ison kertojan pitää oleman sitä pienempiä kuta enemmän niitä on, kuin ne ovat isompia ykköstä ja tulo on aina sama.

Jos sentähden n kasvaa, niin $d = a^{1/n}$ siis pienenee, s. o. lähennee ykköstä, sillä se ei voi milloinkaan tulla ykköstä pienemmäksi, kuin $a > 1$.

Jos sentähden n kasvaa äärettömäksi, jolloin $\frac{1}{n}$ pienenee nollaksi, niin $d = a^{1/n}$ lähenee äärettömästi ykköstä, s. t. s. $a^{1/n}$ voipi tulla niin lähelle ykköstä, kuin vaan tahdotaan, jos n:n annetaan tarpeiksi kasvaa.

Jos taas a olisi pienempi ykköstä esm. sama kuin $\frac{e}{g}$, jossa e ja g merkitsevät koko lukuja ja $g > e$, niin $a^{1/n} = \sqrt[n]{a} = \frac{\sqrt[n]{e}}{\sqrt[n]{g}} = \frac{e^{1/n}}{g^{1/n}}$.

Edellisen mukaan tulevat taas korkojen $e^{1/n}$ ja $g^{1/n}$ arvot ja siis myös osan $\frac{e^{1/n}}{g^{1/n}}$ arvo, niin lähelle ykköstä kuin vaan tahdotaan, jos n vaan kasvaa tarpeiksi. Olipa siis a mikä luku hyvänsä, niin korko $a^{1/n}$ lähenee sitä enemmän ykköstä, kuta isommaksi n ja kuta pienemmäksi siis korotin $\frac{1}{n}$ tulee.

Ykköstä sanotaan koron $a^{1/n}$ rajaksi, kuin korottimen $\frac{1}{n}$ numero-arvo pienenee nollaksi. Tätä juuri merkitään yhtälöllä

$$a^0 = 1.$$

Koska koroilla, joidenka korottimet ovat murtolukuja, merkitään alukkeita, niin yleislaskussa tämmöisiä korkoja käyttäen voidaan alukemerkkiä välttää ja laskutyöt alukkeiden kanssa tehdä samojen sääntöjen mukaan kuin korkojenkin kanssa, joka on hyvin tärkeä ja hyödyllinen seikka.

Korkoja, joidenka korottimet ovat poistosuuruuksia, käyttäen voidaan taas jakomerkkiä välttää, jos niin tahdotaan, sillä nimittäjästä saadaan muuttaa jokainen kertoja kertojaksi osottajaan sekä osottajasta nimittäjään, kuin vaan kertojan korottimen merkki muutetaan vastaiseksi. Todellakin on esm.

$$\frac{a^m}{b^n} = a^m \cdot b^{-n} \text{ ja } \frac{a^m}{b^n} = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{1}{a^{-m}b^n},$$

$$\text{sillä } \frac{a^m}{b^n} = a^m \cdot \frac{1}{b^n} \text{ ja } \frac{1}{b^n} = b^{-n} \text{ ja } a^m = \frac{1}{a^{-m}}.$$

Se on helppo näyttää, että todistot, jotka tämän lu'un ensimäisessä pykälässä ovat todistetut koroista, joidenka korottimet ovat kokolukuja, ovat yleisesti todet, olivatpa korottimet kokoeli murtolukuja lisä- tai poistomerkillä.

Koska $a^{m/n}$ ja $\sqrt[n]{a^m}$ koron määrityksen mukaan merkitsevät aivan samaa suuruutta, niin vastedes muutamme aina ilman mitäkkään muistutuksetta koron murretulla korottimella alukesuuruudeksi ja päin vastoin.

Samoin kirjoitamme myös vastedes aina $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ilman mitäkkään muistutuksetta.

Jos puustavit $r, s, t, \cdots$ merkitsevät murtolukujakin, niin

$$A. \qquad a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

Olkoon $r = \frac{m}{n}$ ja $s = \frac{p}{q}$, jolloin $a^r = a^{m/n}$, $a^s = a^{p/q}$ ja $a^r \cdot a^s = a^{m/n} \cdot a^{p/q}$ ja sentähden $a^r \cdot a^s = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p}$. Alukesuuruuksien kertomis säännön mukaan on taas

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{mq/nq+np/nq} = a^{m/n+p/q}$$

ja sentähden, koska $\frac{m}{n} = r$ ja $\frac{p}{q} = s$, on $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, j. o. t.

Se on jo itsestänsä selvä, että, olipa kertojoiden $a^r, a^s, a^t, \cdots$ luku mikä hyvänsä,

$$a^r \cdot a^s \cdot a^t \cdots = a^{r+s+t+\cdots},$$

$$B. \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s},$$

Kuin $r = \frac{m}{n}$ ja $s = \frac{p}{q}$, niin $a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, $a^s = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ ja $\frac{a^r}{a^s} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}}$.

Alukkeiden jakosäännön mukaan on taas

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}.$$

Sentähden on $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ j. o. t., sillä $\frac{mq-np}{nq} = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} =$ $= r - s$.

C. $$(abc\cdots)^r = a^r \cdot b^r \cdot c^r \cdots$$

Jos $r = \frac{m}{n}$, niin $(abc\cdots)^r = (abc\cdots)^{m/n} = \sqrt[n]{(abc\cdots)^m} =$ $= \sqrt[n]{a^m \cdot b^m \cdot c^m \cdots} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} \cdot \sqrt[n]{c^m} \cdots = a^{m/n} b^{m/n} c^{m/n} \cdots = a^r b^r c^r \cdots$ j. o. t.

D. $$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

Kuin $r = \frac{m}{n}$, niin $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^{m/n} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} =$ $= \frac{a^{m/n}}{b^{m/n}} = \frac{a^r}{b^r}$, j. o. t.

E. $$(a^r)^s = a^{rs}.$$

Olkoon taas $r = \frac{m}{n}$ ja $s = \frac{p}{q}$, niin koron ja alukesääntöjen mukaan on $(a^r)^s = (a^{m/n})^{p/q} = \sqrt[q]{(a^{m/n})^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} =$ $= a^{mp/nq}$, josta selvästi seuraa $(a^r)^s = a^{rs}$; sillä $a^{mp/nq} = a^{m/n \cdot p/q} = a^{rs}$.

Jos taas puustavit r ja s merkitsevät lisä- eli poistosuuruuksia, olipa heidän numero-arvonsakin sitte koko- eli murtolukuja, niin edelliset yhtälöt ovat silloinkin oikeat.

Olisko esm. $r = \frac{m}{n}$ ja $s = -\frac{p}{q}$, niin $a^r a^s = a^{m/n} a^{-p/q}$, $a^r a^s =$ $= \frac{a^{m/n}}{a^{p/q}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{m/n - p/q}$ ja koska $\frac{m}{n} = r$, $-\frac{p}{q} = s$, niin $a^r a^s = a^{r+s}$.

Tästä seuraa selvästi, että

$$a^r a^s a^t \cdots = a^{r+s+t+\cdots},$$

olivatpa r, s, t, $\cdots$ mitä varsinais suuruuksia tahansa, ja ydtälö *A* on siis yleisesti oikea.

Olisko taas $s = -t$, niin $\frac{a^r}{a^s} = \frac{a^r}{a^{-t}} = a^r a^t = a^{r+t} = a^{r-(-t)} =$ $= a^{r-s}$.

Samoin todistetaan muidenkin edellisten yhtälöiden olevan oikeat, merkitsivätpä puustavit r, s, t, $\cdots$ mitä varsinais-suuruuksia hyvänsä.

Koska nyt nämä perustodistot ovat yleisesti todet, niin alukkeiden siassa voidaan aina käyttää korkoja murretuilla korottimilla, jonkatähden lasku alukkeiden kanssa on aivan sama kuin tämmöisten korkojenkin kanssa.

Tämmöiselle korkojen käyttämiselle otamme nyt vielä muutamia

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $\sqrt{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2} = a^{3/2}\cdot a^{2/3} = a^{3/2+2/3} = a^{13/6} = \sqrt[6]{a^{13}} = a^2\sqrt[6]{a}$.

Esm. 2. $\sqrt[4]{32a^2}\cdot\sqrt[3]{8a^5} = 2^{5/4}\cdot a^{1/2}\cdot 2a^{5/3} = 2^{5/4+1}\cdot a^{1/2+5/3} =$

$= 2^{9/4}\cdot a^{13/6} = 4a^2\sqrt[4]{2}\,\sqrt[6]{a}$.

Esm. 3. $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}} = a^{2/3}\cdot a^{-1/2} = a^{2/3-1/2} = a^{1/6} = \sqrt[6]{a}$.

Esm. 4. $\dfrac{\sqrt[5]{a^8}}{\sqrt[3]{a^4}} = a^{8/5}\cdot a^{-4/3} = a^{4/15} = \sqrt[15]{a^4}$.

Esm. 5. $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt{b}\cdot c}{\sqrt[4]{a^3}\cdot b} = a^{5/6}\cdot a^{-3/4}\cdot b^{1/2}\cdot b^{-1}c = a^{1/12}b^{-1/2}c = c\cdot\dfrac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[12]{b^6}} =$

$= c\sqrt[12]{\dfrac{a}{b^6}}$.

Esm. 6. $\dfrac{b}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt[3]{ac}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{c^3}}{\sqrt{b}} = a^{-1/2}\cdot b\cdot a^{1/3}\cdot c^{1/3}\cdot c^{3/4}\cdot b^{-1/2} =$

$= a^{-1/6}\cdot b^{1/2}\cdot c^{13/12} = a^{-2/12}\cdot b^{6/12}\cdot c^{13/12} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt[12]{a^2}}\cdot\sqrt[12]{b^6}\cdot\sqrt[12]{c^{13}} = c\sqrt[12]{\dfrac{b^6c}{a^2}}$.

Esm. 7. $a\sqrt[4]{2a^2b}\cdot 3\sqrt{ab^3}\cdot\sqrt[4]{ab^3}\cdot\dfrac{b}{a}\sqrt{\tfrac{1}{3}a^3b^{-3}} =$

$= a\cdot 2^{1/4}a^{2/4}b^{1/4}\cdot 3a^{1/2}b^{3/2}\cdot a^{1/4}b^{3/4}\cdot ba^{-1}\cdot 3^{-1/2}a^{3/2}b^{-3/2} =$

$= 3^{1/2}\cdot 2^{1/4}a^{11/4}b^{8/4} = a^2b^2\sqrt[4]{18a^3}$.

Esm. 8. $\dfrac{2a^4b^2}{\sqrt[3]{4a^5b^{-3}}} = 2a^4b^2 \cdot 4^{-1/3}a^{-5/3}b^{3/3} = 2^{1/3}a^{7/3}b^{9/3} = a^2b^3\sqrt[3]{2a}.$

Esm. 9. $\dfrac{a+b}{a-b}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} = (a+b)(a-b)^{-1}(a-b)^{1/2}(a+b)^{-1/2} =$

$= (a+b)^{1/2}(a-b)^{-1/2} = \sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}.$

Esm. 10. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{6}\cdot\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}}\cdot\sqrt[6]{\tfrac{3}{2}} = 2^{1/2}\cdot 6^{1/4}\cdot 2^{1/3}\cdot 3^{-1/3}\cdot 3^{1/6}\cdot 2^{-1/6} =$

$= 2^{11/12}3^{1/12} = 2^{12/12-1/12}3^{1/12} = 2\sqrt[12]{\tfrac{3}{2}}.$

Esm. 11. $\sqrt[5]{2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[5]{4\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}}}\cdot\sqrt[5]{\tfrac{2}{3}\sqrt[4]{6}}\cdot\sqrt[5]{4\sqrt{\tfrac{1}{2}}} =$

$= (2^{1/5}\cdot 3^{1/10})(2^{2/5}\cdot 3^{1/20}\cdot 2^{-1/20})(2^{1/5}\cdot 3^{-1/5}\cdot 2^{1/20}\cdot 3^{1/20})(2^{2/5}\cdot 2^{-1/10}) =$

$= 2^{11/10}\cdot 3^0 = \sqrt[10]{2^{11}} = 2\sqrt[10]{2}.$

Esm. 12. $\left(\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4a^2b}\right)^4 = (\tfrac{1}{2})^4\cdot 2^{8/3}a^{8/3}b^{4/3} = \dfrac{1}{2^4}\cdot 2^2\cdot 2^{2/3}a^2a^{2/3}bb^{1/3} =$

$= \tfrac{1}{4}a^2b\sqrt[3]{4a^2b}.$

Esm. 13. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8a^6b^3}\sqrt{c^3}} = (2^{3/4}a^{6/4}b^{3/4}c^{3/2})^{1/3} = 2^{1/4}a^{2/4}b^{1/4}c^{2/4} =$

$= \sqrt[4]{2a^2bc^2}.$

Esm. 14. $\sqrt{\left(ab\sqrt[5]{4ab^2c}\right)^5} = (a^5b^5\cdot 4ab^2c)^{1/2} = 4^{1/2}a^{6/2}b^{7/2}c^{1/2} =$

$= 2a^3b^3\sqrt{bc}.$

Esm. 15. $\sqrt[4]{32\left(\dfrac{a\sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{ab}}\right)^3} = 2^{5/4}\left(\dfrac{ab^{3/2}}{a^{1/3}b^{1/3}}\right)^{3/4} = 2\cdot 2^{1/4}(a^{2/3}b^{7/6})^{3/4} =$

$= 2\cdot 2^{2/8}a^{4/8}b^{7/8} = 2\sqrt[8]{4a^4b^7}.$

Esm. 16. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{a\sqrt{b^3}}{\sqrt[4]{a^5b^6}}}} = \dfrac{1}{(ab^{3/2}a^{-5/4}b^{-6/4})^{1/3}} = (a^{-1/4}b^0)^{-1/3} = \sqrt[12]{a}.$

Esm. 17. $\left(\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4} - \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{9}\right)^3 = (2^{-1}\cdot 2^{2/3} - 3^{-1}\cdot 3^{2/3})^3 =$

$= (2^{-1/3} - 3^{-1/3})^3 = (2^{-1/3})^3 - 3(2^{-1/3})^2\cdot 3^{-1/3} +$

$+ 3\cdot 2^{-1/3}\cdot(3^{-1/3})^2 - (3^{-1/3})^3 = 2^{-1} - 3\cdot 2^{-2/3}\cdot 3^{-1/3} +$

$$+3 \cdot 2^{-1/3} \cdot 3^{-2/3} - 3^{-1} = \tfrac{1}{2} - \sqrt[3]{\tfrac{9}{4}} + \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{1}{3} =$$
$$= \tfrac{1}{6} - \sqrt[3]{\tfrac{9}{4}} + \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}}.$$

Kuudes Luku.

§ 1.

Toisen nousun yhtälöistä yhdellä tuntemattomalla.

Jokaisesta yhtälöstä, jonka puolissa on alukesuuruuksia, voidaan johtaa toinen, jonka puolet ovat vapaat semmoisista. Olisko esm. yhtälö

$$1 - \sqrt[3]{x+4} = \tfrac{1}{2},$$

niin siitä saadaan osion 1 muuttamalla ensimäisestä puolesta toiseen

$$-\sqrt[3]{x+4} = \tfrac{1}{2} - 1,$$

josta taas seuraa

$$\sqrt[3]{x+4} = \tfrac{1}{2}.$$

Suuruudet $\sqrt[3]{x+4}$ ja $\frac{1}{2}$ ovat nyt pidettävät yhtä isoina, kuin tuntemattomalle (x) etsitään sitä arvoa, joka toteuttaa yhtälön, jonkatähden niiden kolmannet korot myös ovat yhtä isot. Jos sentähden yhtälön

$$\sqrt[3]{x+4} = \tfrac{1}{2}$$

puolet korotetaan kolmanteen korkoon niin saadaan yhtälö

$$\left(\sqrt[3]{x+4}\right)^3 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \text{ eli}$$
$$x + 4 = \tfrac{1}{8},$$

josta saadaan $x = \frac{1}{8} - 4 = -3\frac{7}{8}$.

Yhtälöstä

$$4 - \sqrt{2x} = \sqrt{x+7} - 1$$

saadaan osio -1 muuttaen toisesta puolesta ensimäiseen

$$5 - \sqrt{2x} = \sqrt{x+7},$$

josta taas puolet korottaen toiseen korkoon saadaan

$$(5-\sqrt{2x})^2=(\sqrt{x}+7)^2 \text{ eli}$$
$$25-10\sqrt{2x}+2x=x+7.$$

Kuin taas tämän yhtälön ensimäisestä puolesta alukemerkistä vapaat osiot muutetaan toiseen puoleen ja samankaltaiset osiot yhdistetään, niin saadaan puolien merkit myös muutettua vastaisiksi, yhtälö

$$10\sqrt{2x}=x+18,$$

jonka puolet korottaen toiseen korkoon saadaan

$$10^2(\sqrt{2x})^2=(x+18)^2 \text{ eli}$$
$$200x=x^2+36x+324,$$

josta taas osioiden muuttamalla ja samankaltaisten osioiden yhdistämällä saadaan

$$x^2-164x+324=0,$$

joka on vapaa alukemerkistä.

Yhtälön vapauttamiselle alukemerkistä saadaan nyt selvästi seuraava sääntö: *siltä puolelta yhtä-isouden merkkiä, jolla järkinäissuuruudeksi tehtävä alukesuuruus on, muutetaan kaikki muut osiot toiselle puolelle ja sitte korotetaan yhtälön puolet siihen korkoon, jolla mainitun alukesuuruuden alotin on korottimena.*

Kuin yhtälön yhdellä tuntemattomalla puolet ovat alukesekä sulkumerkistä vapaita kokolausekkeita, s. t. s., kuin sen puolissa ei ole murto- eikä aluke-suuruuksia ja kaikki sulkumerkillä merkityt kertomiset ovat tehdyt, niin sen nousuksi sanotaan siinä olevan tuntemattoman isointo korotinta. Niin on edellisen yhtälön

$$x^2-164x+324=0$$

nousu kaksi ja sitä sanotaan toisen nousun yhtälöksi yhdellä tuntemattomalla. Yhtälö

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

on taas kolmannen nousun yhtälö yhdellä tuntemattomalla j. n. e.

Yhtälön usiammalla tuntemattomalla nousuksi sanotaan taas summaa siinä olevien tuntemattomien korottimista siinä osiossa, jossa tämä summa on isoin. Niin on

$$3x^2y + 2y - 2xy = 12$$

kolmannen nousun yhtälö kahdella tuntemattomalla.

Edellä on sanottu, kuinka alukemerkit yhtälön puolista voidaan hävittää ja neljännen lu'un toisessa pykälässä on nähty, kuinka yhtälö voidaan vapauttaa sen puolissa olevista nimittäjistä ja koska osioita, niiden merkit muutettua vastaisiksi, voidaan muuttaa yhdestä puolesta toiseen, niin se on selvä, että jokainen toisen nousun yhtälö yhdellä tuntemattomalla voidaan edellä mainituilla teoksilla saada seuraavaan muotoon:

1. $$ax^2 + bx + c = 0,$$

jossa a, b ja c merkitsevät mitä tunnettuja suuruuksia hyvänsä, yksiöitä tai monioita. Jos sitte tämän yhtälön puolet vielä jaetaan ensimäisen osion etukertojalla a, niin se saapi seuraavan muodon

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} = 0$$

eli, kuin suuruuksia $\frac{b}{a}$ ja $\frac{c}{a}$ merkitsemme puustavilla p ja q,

2. $$x^2 + px + q = 0.$$

Tässä muodossa sanotaan yhtälöä *sievennetyksi* ja sen tämmöiseksi muodostamista sanotaan yhtälön *sieventämiseksi*.

Yhtälön sieventäminen on hyvin tärkeä ja ennen sen ratkaisemista välttämätöin teos, jonkatähden sieventämiselle otamme muutamia esimerkkiä, ennen kuin ryhdymme toisen nousun yhtälön ratkaisemiseen.

Olisko esm. yhtälö

$$\frac{4}{2x-1} + 1 = \frac{10}{x+2}$$

sievennettävä, niin sen puolet kertoen niissä olevien nimittäjöiden tulolla $(2x+1)(x+2)$ saadaan

$$\frac{4(2x-1)(x+2)}{2x-1} + (2x-1)(x+2) = \frac{10(2x-1)(x+2)}{x+2},$$

josta sitte murtosuuruudet lyhentäen sekä kertomiset tehden seuraa

$$4x + 8 + 2x^2 + 3x - 2 = 20x - 10,$$

josta taas osiot muutettua ensimäiseen puoleen ja samankaltaiset osiot yhdistettyä seuraa

$$2x^2 - 13x + 16 = 0.$$

Tästä saadaan vihdoin yhtälön puolet jakaen ensimäisen osion etukertojalla (2) sievennetty yhtälö

$$x^2 - \tfrac{13}{2}x + 8 = 0,$$

jossa yleisen yhtälön 2. $p = -\frac{13}{2}$ ja $q = 8$.

Yhtälöstä

$$\frac{ax}{a-x} - 3x = \frac{cx+1}{2a}$$

saadaan nimittäjöiden hävittämällä yhtälön puolet niiden tulolla $(a-x)2a$ kertoen

$$2a^2x - 6a^2x + 6ax^2 = acx - cx^2 + a - x,$$

josta taas osioiden muuttamalla toisesta puolesta ensimäiseen ja niiden osioiden yhdistämällä, joissa tuntemattomalla (x) on sama korotin seuraa

$$(6a + c)x^2 - (4a^2 + ac - 1)x - a = 0,$$

jonka puolet jakaen ensimäisen osion etukertojalla $(6a + c)$ vihdoin saadaan sievennetty yhtälö

$$x^2 - \frac{4a^2 + ac - 1}{6a + c}x - \frac{a}{6a + c} = 0.$$

Yhtälön

$$\sqrt{\frac{x^2}{a} - \frac{x^2}{c}} = 2\sqrt{b}$$

puolet korottaen toiseen korkoon saadaan

$$\frac{x^2}{a} - \frac{x^2}{c} = 4b,$$

josta seuraa

$$(c - a)x^2 - 4abc = 0 \text{ eli}$$

$$x^2 - \frac{4abc}{c-a} = 0,$$

joka myös on saman muotuinen kuin yleinen yhtälö 2, vaikka toisen osion etukertoja tässä yhtälössä on nolla.

Toisen nousun yhtälöä yhdellä tuntemattomalla sanotaan *vaillinaiseksi*, jos siinä on vaan kaksi osiota. Jos yhtälössä

$$x^2 + px + q = 0,$$

joku etukertojista p eli q on nolla, niin silloin se on vaillinainen ja saapi muodon

$$x^2 + px = 0, \text{ kuin } q = 0$$

ja

$$x^2 + q = 0, \text{ kuin } p = 0.$$

Muist. Sievennetyssä yhtälössä sanotaan tunnettuja suuruuksia, jotka ovat kertojina tuntemattoman eri koroilla, osioiden etukertojiksi. Yksin tuntemattomasta vapaata suuruuttakin sanotaan etukertojaksi.

Monio x^2+px+q voidaankin kirjoittaa $x^2+px+qx^0$, koska $x^0=1$ ja siis $q=qx^0$.

Vaillinaiset toisen nousun yhtälöt ovat helpot ratkaista, jonkatähden ne nyt otamme ensin ratkaistaviksi.

Yhtälöstä

$$x^2 + px = 0$$

saadaan yhteinen kertoja (x) sen ensimäisen puolen osioista eroittaen

$$x(x + p) = 0.$$

Tämä yhtälö on, niin kuin kaikki muutkin, ratkaistu, kuin tuntemattomalle kaikki ne arvot ovat saadut, jotka pantuina sen siaan toteuttavat yhtälön, tekevät sen puolet yhtä isoiksi.

Tässä on siis semmoiset arvot tuntemattomalle x etsittävät, jotka tekevät tulon $x(x+p)$ nollaksi. Tulo $x(x+p)$ on taas nolla olipa sen kertojista kumpanen hyvänsä x eli $(x+p) =$ nolla. Ne arvot tuntemattomalle x, jotka tekevät tulon $x(x+p)$ nollaksi, ovat nyt selvästi nolla ja $-p$, sillä $-p$ pantuna x:n siaan tekee selvästi kertojan $(x+p)$ nollaksi.

Yhtälö

$$x^2 + px = 0 \text{ eli } x(x+p) = 0$$

on nyt täydellisesti ratkaistu, koska tuntemattomalle x ne arvot ovat löydetyt, jotka tekevät yhtälön ensimäisen puolen yhtä isoksi toisen kanssa, jotka siis toteuttavat yhtälön. Yhtälön juuret ovat $x_{,} = 0$ ja $x_{,,} = -p$.

Sen näkeekin jo ensi katsannossa, että $x = 0$ toteuttaa yhtälön

$$x^2 + px = 0,$$

sillä nolla pantuna x:n siaan tekee kumpasenkin osion ensimäisessä puolessa nollaksi, joka myös on yhtälön toinen puoli.

Mutta kuin x ei ole nolla, niin yhtälön

$$x^2 + px = 0$$

puolet jakaen x:llä saadaan ensimäisen nousun yhtälö

$$x + p = 0,$$

josta taas seuraa $x = -p$.

Olisko esm. yhtälö

$$2x^2 - x = 0,$$

niin sieventäen saadaan siitä

$$x^2 - \tfrac{1}{2}x = 0 \text{ eli } x(x - \tfrac{1}{2}) = 0$$

ja sentähden $x = 0$ ja $x - \frac{1}{2} = 0$. Yhtälön juuret ovat siis

$$x_{,} = 0 \text{ ja } x_{,,} = \tfrac{1}{2}.$$

Olisko nyt vaillinainen yhtälö

$$x^2 + q = 0$$

ratkaistava, niin siitä saadaan ensin osio $+ q$ muuttaen ensimäisestä puolesta toiseen

$$x^2 = -q$$

ja koska tuntemattoman x toinen korko nyt on sama kuin suuruus $-q$, niin sen itsensä (x:n) pitää oleman suuruuden $-q$ toinen aluke joko lisä- tai poistomerkillä, sillä toinen aluke on aina kaksi merkkinen.

Tästä seuraa nyt selvästi, että ne arvot tuntemattomalle (x), jotka toteuttavat yhtälön

$$x^2 + q = 0,$$

ovat $x_{,} = +\sqrt{-q}$ ja $x_{,,} = -\sqrt{-q}$, jota lyhyesti merkitään seuraavalla tavalla

$$x = \pm\sqrt{-q}.$$

Todellakin saadaan, koska $(+\sqrt{-q})^2 = (-\sqrt{-q})^2$, pantiinpa kumpanen hyvänsä näistä arvoista x:n siaan yhtälössä $x^2 + q = 0$, $(\sqrt{-q})^2 + q = 0$, joka on sama kuin $-q + q = 0$ eli $0 = 0$.

Kuin q on poistosuuruus ja $-q$ siis lisäsuuruus, niin yhtälön $x^2 + q = 0$ juuret ovat varsinaissuuruuksia, mutta jos q on lisä- ja $-q$ siis poistosuuruus, niin yhtälön juuret ovat kuvasuuruuksia.

Niin esm. ovat yhtälön

$$x^2 - 1 = 0$$

juuret varsinaissuuruudet $x_{,} = 1$ ja $x_{,,} = -1$, mutta yhtälön

$$x^2 + 1 = 0$$

juuret ovat kuvasuuruudet $x_{,} = \sqrt{-1}$ ja $x_{,,} = -\sqrt{-1}$.

Yhtälöstä

$$x^2 - 9 = 0$$

saadaan samoin $x_{,} = 3$ ja $x_{,,} = -3$,
mutta yhtälöstä

$$x^2 + 9 = 0$$

saadaan $x_{,} = \sqrt{-9} = 3\sqrt{-1}$ ja $x_{,,} = -\sqrt{-9} = -3\sqrt{-1}$.

Edellä on nyt nähty, että vaillinaiset toisen nousun yhtälöt yhdellä tuntemattomalla ovat helpot ratkaista.

Jos sentähden täydellisestä yhtälöstä

$$A. \qquad x^2 + px + q = 0$$

saadaan muodostetuksi vaillinainen yhtälö jollakin toisella tuntemattomalla (y esm.), jonka arvoista x:n etsittävät arvot helposti saadaan, niin täydellinenkin yhtälö A tulee näin ratkaistuksi.

Pankaamme sentähden x:n siaan yhtälössä A kahden toisen tuntemattoman esm. y ja z summa, joten saadaan

$$x = y + z \text{ ja}$$

$$(y + z)^2 + p(y + z) + q = 0 \text{ eli } y^2 + (2z + p)y + z^2 + pz + q = 0.$$

Tässä on nyt kaksi yhtälöä

$B. \quad x = y + z$

$C. \quad y^2 + (2z + p)y + z^2 + pz + q = 0$

kolmella tuntemattomalla x, y ja z ratkaistavana ja koska tuntemattomia on yksi enemmän kuin yhtälöitä, niin yhdelle tuntemattomalle voidaan antaa mikä arvo hyvänsä, joten toiset saavat määrätyt arvot.

Yhtälö C tulee taas vaillinaiseksi, kuin z saapi semmoisen arvon, joka tekee toisen osion etukertojan $(2z + p)$ nollaksi. Tämä arvo tuntemattomalle z saadaan selvästi yhtälöstä

$D. \quad 2z + p = 0$

Näin on nyt saatu kolme yhtälöä B, C ja D kolmella tuntemattomalla ratkaistavaksi. Yhtälöstä D saadaan helposti $z = -\frac{p}{2}$ ja kuin tämä arvo pannaan z:n siaan yhtälöissä B ja C, niin niistä saadaan

$$x = y - \frac{p}{2} \text{ ja}$$

$$y^2 + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = 0.$$

Kuin toisessa näistä yhtälöistä samankaltaiset osiot $+\frac{p^2}{4}$ ja $-\frac{p^2}{2}$ yhdistetään ja tunnetut osiot muutetaan ensimäisestä puolesta toiseen, niin saadaan vaillinainen yhtälö

$$y^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

josta taas seuraa selvästi $y = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Nämä arvot pannen y:n siaan edellisessä yhtälössä, $x = y - \frac{p}{2}$, saadaan vihdoin

$$x = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2} \text{ eli } x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Nämä arvot $x_{,} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ja $x_{,,} = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

ovat yhtälön A juuret, sillä ne toteuttavat sen, koska ne ovat summat z:n arvosta $-\frac{p}{2}$ ja y:n itsekustakin arvosta $+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ ja $-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, jotka toteuttavat yhtälön C, joka taas on sama kuin A, silloin kuin $y+z=x$.

Nyt otamme yhtälön

$$x^2+px+q=0$$

ratkaistavaksi vielä toisellakin tavalla.

Kuin osiö q muutetaan yhtälön toiseen puoleen, niin saadaan

$$x^2+px=-q \text{ eli } x^2+2\cdot\frac{p}{2}x=-q.$$

Tämän yhtälön ensimäisestä puolesta saadaan kaksion $\left(x+\frac{p}{2}\right)$ toinen korko, kuin siihen pannaan alukkeen toisen osion $\left(\frac{p}{2}\right)$ toinen korko $\left(\frac{p^2}{4}\right)$. Jos sentähden yhtälön $x^2+2\cdot\frac{p}{2}x=-q$ kumpaseenkin puoleen panemme suuruuden $\frac{p^2}{4}$, niin saamme selvästi yhtälön

$$x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q \text{ eli } \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q,$$

josta selvästi seuraa

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \text{ ja}$$

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

siis aivan samat kuin edelläkin saadut arvot.

Se on selvä, että jokainen sievennetty toisen nousun yhtälö yhdellä tuntemattomalla voidaan ratkaista niin hyvin edellisellä kuin jälkimäiselläkin tavalla, mutta koska etukertojat p ja q yhtälössä

$$x^2+px+q=0$$

voivat merkitä mitä suuruuksia hyvänsä, niin yhtälön juuret

$$x_{,}=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \text{ ja } x_{,,}=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

voivat myös merkitä minkä toisen nousun yhtälön yhdellä tuntemattomalla juuria hyvänsä, jotka siis selvästi saadaan etukertojoiden p ja q ratkaistavassa yhtälössä olevien arvojen panemalla niiden siaan kaavassa

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Tämä kaava sisältää seuraavan säännön: *toisen nousun yhtälön yhdellä tuntemattomalla juuret saadaan yhtälö sieventäen ja toisen osion sievennetyssä yhtälössä etukertoja vastaisella merkillä jakaen kahdella ja näin saatu osa enentäen sekä vähentäen toisella alukkeella summasta, joka saadaan, kuin saman toisen osion etukertojan jaettuna kahdella toinen korko lasketaan yhteen kolmannen (tunnetun) osion kanssa vastaisella merkillä.*

Edellisen kaavan eli säännön mukaan saadaan, jos $q=0$,

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-0}=-\frac{p}{2}\pm\frac{p}{2} \text{ siis } x_{,}=0 \text{ sekä } x_{,,}=-p.$$

Jos taas $p=0$, niin silloin on

$$x=-\frac{0}{2}\pm\sqrt{\frac{0^2}{4}-q}=\pm\sqrt{-q} \text{ eli } x_{,}=\sqrt{-q} \text{ ja } x_{,,}=-\sqrt{-q},$$

aivan samat kuin edelläkin saadut vaillinaisten yhtälöiden juuret.

Tässä otamme esimerkiksi muutamia toisen nousun yhtälöitä yhdellä tuntemattomalla, jotka edellisen säännön selitykseksi täydellisesti ratkaisemme.

Olisko nyt yhtälö

$$\tfrac{3}{2}x+\sqrt{2x^2-4}=x+1$$

ratkaistava, niin alukemerkki on siitä ensin pois saatava, s. t. s. siitä on johdettava toinen yhtälö, jossa ei ole yhtään alukesuuruutta. Jos sentähden osio $\frac{3}{2}x$ muutetaan ensimäisestä puolesta toiseen ja yhdistetään samankaltaisen osion x kanssa ja näin saadun yhtälön puolet vihdoin korotetaan toiseen korkoon, niin sillä tavoin saadaan yhtälö

$$2x^2 - 4 = (-\tfrac{1}{2}x + 1)^2 \text{ eli}$$
$$2x^2 - 4 = \tfrac{1}{4}x^2 - x + 1,$$

josta taas saadaan sievennetty yhtälö

$$x^2 + \tfrac{4}{7}x - \tfrac{20}{7} = 0.$$

Tässä on nyt toisen osion etukertoja $\frac{4}{7}$ ja kolmannen taas $-\frac{20}{7}$, jonkatähden on selvästi

$$x = -\tfrac{2}{7} \pm \sqrt{\tfrac{4}{49} + \tfrac{20}{7}} \text{ eli}$$
$$x = -\tfrac{2}{7} \pm \tfrac{12}{7}.$$

Yhtälön juuret ovat siis $x_{,} = \frac{10}{7}$ ja $x_{,,} = -2$.

Olkoon nyt yhtälö

$$\sqrt{x+2} + 1 = \sqrt{2x-1}$$

ratkaistava, niin, kuin sen puolet korotetaan toiseen korkoon, siitä saadaan osioiden muuttamalla ja samankaltaisten osioiden yhdistämällä

$$2\sqrt{x+2} = x - 4.$$

Samalla tavalla saadaan taas viimesestä yhtälöstä sievennetty yhtälö

$$x^2 - 12x + 8 = 0,$$

josta seuraa

$$x = \tfrac{12}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{12}{2})^2 - 8} \text{ eli}$$
$$x = 6 \pm \sqrt{28}.$$

Alkuperäisen yhtälön toteuttaa ainoastansa $x_{,} = 6 + \sqrt{28}$.

Olisko vielä yhtälö

$$\sqrt{\frac{ax+1}{1-ax}} = \sqrt{\frac{bx-1}{1-ax}}$$

ratkaistava, niin siitä saataisiin yhtälön puolet korottaen toiseen korkoon

$$\frac{ax+1}{1-ax} = \frac{bx-1}{1-ax}, \text{ josta taas seuraa}$$
$$(1-ax)(ax+1) = (1-ax)(bx-1) \text{ eli}$$
$$1 - a^2x^2 = bx - 1 - abx^2 + ax,$$
$$(ab - a^2)x^2 - (a+b)x + 2 = 0,$$
$$x^2 - \frac{a+b}{ab-a^2}x + \frac{2}{ab-a^2} = 0.$$

Viimenen sievennetty yhtälö ratkaisten saadaan sitte

$$x = \frac{a+b}{2(ab-a^2)} \pm \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4(ab-a^2)^2} - \frac{2}{ab-a^2}},$$

josta helposti saadaan yhtälön juuret

$$x_{,} = \frac{2}{b-a} \text{ ja } x_{,,} = \frac{1}{a}.$$

Kuin yhtälö

$$2x^2 - 6x + 17 = 0$$

on ratkaistava, niin siitä saadaan yhtälön puolet jakaen kahdella

$$x^2 - 3x + \tfrac{17}{2} = 0,$$

josta taas seuraa

$$x = \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4} - \tfrac{17}{2}} \text{ eli}$$

$$x = \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{25}{4}}$$

ja koska $\sqrt{-\frac{25}{4}}$ on sama kuin $\sqrt{\frac{25}{4}\cdot(-1)} = \frac{5}{2}\sqrt{-1}$, niin yhtälön juuret ovat $x_{,} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{-1}$ ja $x_{,,} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{-1}$, siis molemmat kuvasuuruuksia.

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $x^2 - 10x + 21 = 0$. $x_{,} = 7$, $x_{,,} = 3$.

Esm. 2. $10 + \sqrt{40 - x^2} = 12$. $x_{,} = 6$, $x_{,,} = -6$.

Esm. 3. $x^2 - 4x + 4 = 0$. $x_{,} = 2$, $x_{,,} = 2$.

Esm. 4. $x^2 - \frac{7}{2}x - 2 = 0$. $x_{,} = 4$, $x_{,,} = -\frac{1}{2}$.

Esm. 5. $x^2 - x - 1 = 0$. $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Esm. 6. $x^2 - x - 2 = 0$. $x_{,} = 2$, $x_{,,} = -1$.

Esm. 7. $\frac{y^2}{a} - \frac{y^2}{b} = c$. $y_{,} = \sqrt{\frac{abc}{b-a}}$, $y_{,,} = -\sqrt{\frac{abc}{b-a}}$.

Esm. 8. $\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x} = \frac{5x}{a}$. $x_{,} = 0$, $x_{,,} = a\sqrt{0,2}$, $x_{,,,} = -a\sqrt{0,2}$.

Esm. 9. $9x^2 - 12x + 4 = 0$. $x_{,} = \frac{2}{3}$, $x_{,,} = \frac{2}{3}$.

Esm. 10. $\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}-5=0.\quad x=\frac{1\pm\sqrt{61}}{10}.$

Esm. 11. $9x^2-12x=-8.\quad x_I=\frac{2+2\sqrt{-1}}{3},\ x_{II}=\frac{2-2\sqrt{-1}}{3}.$

Esm. 12. $11\frac{3}{4}x-3\frac{1}{2}x^2=-41\frac{1}{4}.\quad x_I=5\frac{1}{2},\ x_{II}=-2\frac{1}{7}.$

Esm. 13. $x^2+16=-8x.\quad x_I=-4,\ x_{II}=-4.$

Esm. 14. $\frac{x}{7-x}+\frac{7-x}{x}=2{,}9.\quad x_I=5,\ x_{II}=2.$

Esm. 15. $x=\frac{7-x}{3x}.\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{85}}{6}.$

Esm. 16. $x-\frac{1}{3}\sqrt{2}=\frac{4(5x-7)}{3x+\sqrt{2}}.\quad x=\frac{10}{3}\pm\sqrt{2}.$

Esm. 17. $x^2+a^2=0.\quad x_I=a\sqrt{-1},\ x_{II}=-a\sqrt{-1}.$

Esm. 18. $\frac{a^2+x^2}{a-x}=3a+2x.\quad x_I=\frac{2}{3}a,\ x_{II}=-a.$

Esm. 19.*) $\frac{9b^2x^2-10abx+2a^2}{b^2-abx-ab}=1.\quad x_I=\frac{2a-b}{3b},\ x_{II}=\frac{a+b}{3b}.$

Esm. 20. $\frac{3x+2}{2x-1}-\frac{5}{2}=\frac{10x}{3x+1}.\quad x_I=1,\ x_{II}=-\frac{9}{52}.$

Esm. 21. $11x^2+x=180.\quad x_I=4,\ x_{II}=-4\frac{1}{11}.$

Esm. 22. $\sqrt{3x-18}+\sqrt{2x+7}=\sqrt{7x+1}.\quad x_I=9.$

Muist. Tätä yhtälöä ratkaistessa saatu toinen arvo $x_{II}=-\frac{18}{5}$ toteuttaa yhtälön $\sqrt{3x-18}-\sqrt{2x+7}=\sqrt{7x+1}$.

Esm. 23. $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x-1}}$ eli $\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}=$

$$=\sqrt{\frac{1}{x-1}}-\sqrt{x-1}.\quad x_I=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}},\ x_I=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}.$$

---

*) Tästä saadaan

$$x=\frac{a}{2b}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4b^2}-\frac{2a^2+ab-b^2}{9b^2}}=\frac{a}{2b}\pm\sqrt{\frac{a^2-4ab+4b^2}{36b^2}}=\frac{a}{2b}\pm\frac{a-2b}{6b}$$

josta edelliset arvot selvästi seuraavat.

Esm. 24. $\frac{ax^2}{b^2}+\frac{x}{a}=\frac{b^2}{a^2c}+\frac{x}{c}.\quad x_{,}=\frac{b^2}{ac},\ x_{,,}=-\frac{b^2}{a^2}.$

Esm. 25. $mnz^2+\frac{3m^2z}{p}=\frac{6m^2-2p^2+mn}{p^2}-\frac{n^2z}{p}.$

$z_{,}=\frac{2m-n}{mp},\ z_{,,}=-\frac{3m+2n}{np}.$

Esm. 26. $ab^3x^2+bd(1+c)\sqrt{c}+b^2cx^2=$
$=((ab+c)(1+c)+b^3d\sqrt{c})x.$

$x_{,}=\frac{bd\sqrt{c}}{ab+c},\ x_{,}=\frac{1+c}{b^2}.$

Esm. 27. $\sqrt{4-(2+x)x^2}=2-x.\quad x_{,}=0,\ x_{,,}=1,\ x_{,,,}=-4.$

Esm. 28. $\frac{1}{6}ax(a+c)\left(\frac{abcx-a}{a+c}-1\right)=\frac{a}{c}-\frac{abx-1}{2}.$

$x_{,}=\frac{2a+c}{abc},\ x_{,}=-\frac{3}{ac}.$

Esm. 29. $12a^{3m-3}c^7+2a^{2m-3}c^3(3a-c^4)x=a^{m-2}c^3x^2.$
$x_{,}=6a^m,\ x_{,,}=-2a^{m-1}c^4.$

Esm. 30. $\sqrt{\frac{2}{x}-1}+\sqrt{\frac{x}{2-x}}=2.\quad x=1.$

Esm. 31. $\sqrt{3x}-\sqrt{\frac{4}{3x}}=-\sqrt{6x-1}.\quad x=\frac{1}{3}.$

§ 2.

Toisen nousun yhtälöiden yhdellä tuntemattomalla omituisuuksista.

Nyt otamme toisen nousun yhtälöt yhdellä tuntemattomalla ja niiden juuret vielä tarkemmin tarkasteltaviksi.

Edellä on nähty, että yleisestä yhtälöstä

$$x^2+px+q=0$$

seuraa kaksi ensimäisen nousun yhtälöä, nimittäin

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ \text{ja}\ x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

eli kuin osiot toisista puolista muutetaan ensimäisiin

$$x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0 \text{ ja } x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0.$$

Kuin näiden yhtälöiden puolet sitte kerrotaan toisillansa ensimäinen ensimäisellä ja toinen toisella, niin saadaan

$$\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=0 \text{ eli}$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=0,$$

sillä kahden suuruuden $\left(x+\frac{p}{2}\right)$ ja $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ väli kerrottuna niiden summalla antaa tuloksi niiden toisten korkojen välin. Viimenen yhtälö on taas selvästi sama kuin

$$x^2+px+q=0.$$

Kuin sentähden toisen nousun yhtälön yhdellä tuntemattomalla juuret itsekukin kerrallansa poistetaan tuntemattomasta ja näin saadut välit kerrotaan toinen toisella, niin tuloksi saadaan sievennetyn yhtälön ensimäinen puoli, joten on, kuin yhtälön juuria merkitään puustavilla a ja b,

$$x^2+px+q=(x-a)(x-b).$$

Tämänkötähden liene suuruuksia, jotka pantuina tuntemattoman siaan toteuttavat yhtälön, ruvettu nimittämään yhtälön juuriksi, koska yhtälö voidaan helposti muodostaa, kuin nämä suuruudet vaan ovat tunnetut.

Edellinen toisen nousun yhtälön omituisuus voidaan myös seuraavalla tavalla todistaa. Jos suuruus a on yhtälön

$$x^2+px+q=0$$

juuri, niin kaksio $(x-a)$ jakaa tarkoin yhtälön ensimäisen osion. Todellakin muodostuu tämä jako seuraavasti

$$\begin{array}{l|l} x^2+px+q & x-a \\ \cline{2-2} \mp x^2 \pm ax & x+a+p \\ \cline{1-1} +ax+px+q & \\ +(a+p)x+q & \\ \mp(a+p)x\pm a^2\pm pa & \\ \cline{1-1} \qquad a^2+pa+q. & \end{array}$$

Osaksi on nyt saatu $(x+a+p)$ ja tähteeksi tuntemattomasta (x) vapaa suuruus (a^2+pa+q), jonka pitää oleman nollan, koska se on se suuruus, joka saadaan, kuin a pannaan tuntemattoman (x) siaan yhtälön

$$x^2+px+q=0$$

ensimäisessä puolessa ja a on yhtälön juuri, s. t. s. semmoinen suuruus, joka pantuna x:n siaan tekee yhtälön puolet yhtä isoiksi. Koska taas tähde on nolla, niin jako on tapahtunut tarkoin, j. o. t.

Päin vastoin on taas suuruus a yhtälön

$$x^2+px+q=0$$

juuri, jos kaksio $(x-a)$ jakaa tarkoin kolmion (x^2+px+q), sillä tähteen a^2+pa+q pitää silloin oleman nollan, koska jako ei muuten tapahtuisi tarkoin ja kuin $a^2+pa+q=0$, niin a silloin pantuna x:n siaan toteuttaa yhtälön ja on siis sen juuri.

Koska nyt kaksio $(x-a)$ jakaa tarkoin kolmion x^2+px+q, kuin a on yhtälön,

$$x^2+px+q=0$$

juuri ja osaksi saadaan, niin kuin edellä on nähty, $(x+a+p)$, niin tästä seuraa, että

$$x^2+px+q=(x-a)(x+a+p)=0.$$

Tulo $(x-a)(x+a+p)$ on taas nolla, olipa kumpanen hyvänsä sen kertojista $(x-a)$ eli $(x+a+p)$ nolla, josta saadaan $x-a=0$ ja $x+a+p=0$ eli $x=a$ ja $x=-a-p$.

Jos sentähden suuruus a on yhtälön

$$x^2+px+q=0$$

juuri, niin suuruus $(-a-p)$ on myös sen juuri ja edellinen sääntö siis näin todistettu, koska

$$(x-a)(x-(-a-p))=x^2+px+q.$$

Tästä seuraa myös selvästi, että jokaisella toisen nousun yhtälöllä yhdellä tuntemattomalla on aina kaksi juurta, eikä voi olla usiampia, sillä tuloa $(x-a)(x+a+p)$ ei muut suuruudet kuin a ja $(-a-p)$ pantuina x:n siaan voi tehdä nollaksi. Jos taas suuruudet a ja $(-a-p)$ ovat yhtä isot, niin yhtälöllä sanotaan silloin olevan kaksi yhtä isoa juurta. Kuin yhtälön juuret a ja $(-a-p)$ lasketaan yhteen, niin saadaan $a-a-p=-p$ ja koska taas $a^2+pa+q=0$, niin tästä saadaan $a(a+p)=-q$, josta seuraa selvästi $a(-a-p)=q$.

Tästä nähdään nyt, että jokaisessa selvennetyssä toisen nousun yhtälössä yhdellä tuntemattomalla

$$x^2+px+q=0$$

toisen osion etukertoja p on yhtälön juurien yleislasku-summa vastaisella merkillä ja kolmas, tunnettu, osio q on tulo yhtälön juurista. Tämä seikka voidaan suorastaankin todistaa. Merkitkäämme sitä varten yhtälön juuria a:lla ja b:llä, joten edellisen mukaan on $a=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ ja $b=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, josta saadaan

$$a+b=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=-p \text{ ja } ab=$$

$$=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=q,$$

j. o. t.

Tästä on taas selvä, että kaksi suuruutta x ja y esm., joidenka summa $x+y$ on yhtä iso kuin p ja tulo $xy=q$, ovat yhtälön

$$z^2-pz+q=0$$

juuret.

Edellisestä todistosta seuraa selvästi, että yhtälön

$$x^2+px+q=0$$

juuret, jos ne ovat varsinaissuuruuksia, ovat samamerkkiset, kuin niiden tulo, viimenen osio q, on lisäsuuruus, mutta vastaismerkkiset, kuin se on poistosuuruus.

Sievennetyn toisen nousun yhtälön yhdellä tuntemattomalla etukertojista voidaan jo päättää minkälaisia suuruuksia sen juuret ovat.

Olisivatko yhtälön

$$x^2+px+q=0$$

etukertojat p ja q lisä- ja siis $-p$ ja $-q$ poistosuuruuksia, niin, koska

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

yhtälön juuret ovat varsinaissuuruuksia kumpikin poistomerkillä, jos $\frac{p^2}{4}>q$, koska $\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$ silloin on lisäsuuruus ja $+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}<\sqrt{\frac{p^2}{4}}$, s. t. s. $+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}<\frac{p}{2}$. Jos taas $\frac{p^2}{4}=q$, niin yhtälön juuret ovat yhtä isot ja kumpikin $=-\frac{p}{2}$.

Tässä tapauksessa onkin yhtälö $x^2+px+q=0$ sama kuin $x^2+px+\frac{p^2}{4}=\left(x^2+\frac{p^2}{4}\right)^2=0$, josta selvästi saadaan $x+\frac{p}{2}=0$ ja siis $x=-\frac{p}{2}$.

Kuin taas $\frac{p^2}{4}<q$, niin yhtälön juuret ovat kuvasuuruuksia, sillä silloin on $\frac{p^2}{4}-q$ poistosuuruus, jonka toiset alukkeet ovat kuvasuuruuksia.

Kuin taas p on lisä- ja q poistosuuruus (ja siis $-q$ lisäsuuruus), niin silloin on $\frac{p^2}{4}-q$ aina lisäsuuruus ja yhtälön juuret siis varsinaissuuruuksia mutta vastaisilla merkillä, koska $+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}>\frac{p}{2}$.

Jos p taas on poisto- ja q lisäsuuruus, niin silloin ovat yhtälön juuret varsinais- ja lisäsuuruuksia, kuin $\frac{p^2}{4}>q$, sillä $\frac{p^2}{4}$ sekä $-\frac{p}{2}$ ovat tässä tapauksessa lisäsuuruuksia ja $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}<\frac{p}{2}$.

Kuin taas $\frac{p^2}{4} = q$, niin yhtälön juuret ovat yhtä isot, kumpikin $-\frac{p}{2}$, mutta ne ovat kuvasuuruuksia, jos $\frac{p^2}{4} < q$.

Olisivatko vihdoin sekä p että q poistosuuruuksia, niin yhtälön juuret ovat silloin varsinaissuuruuksia vastaisilla merkillä, koska $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} > \frac{p}{2}$.

§ 3.

Toisen nousun yhtälöiksi yhdellä tuntemattomalla voidaan monenlaisia korkeamman nousun yhtälöitä alennettaa ja semmoiset sillä keinoin ratkaista.

Olisko nyt ratkaistavana esm. neljännen nousun yhtälö

$$x^4 + px^2 + q = 0,$$

jossa ei kolmatta eikä ensimäistä korkoa tuntemattomasta x ole, niin siitä saadaan toisen nousun yhtälö, kuin siinä pannaan $x^2 = y$, joten on $x^4 = y^2$ ja yhtälö muuttuu seuraavaksi:

$$y^2 + py + q = 0.$$

Tästä saadaan nyt selvästi

$$y = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Yhtälöstä $x^2 = y$ saadaan taas $x = \pm\sqrt{y}$ ja sentähden on

$$x = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

Tästä nähdään nyt, että tuntemattomalla tämmöisessä yhtälössä on neljä arvoa, joista kaksi ja kaksi ovat vastinaisia suuruuksia, sillä ensimäisen alukemerkin alla on kaksi suuruutta $-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ja $-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ja kumpikin niistä voidaan sitte otettaa niin hyvin lisä- kuin poistomerkilläkin. Niin saadaan esm. yhtälöstä

$$x^4 - 25x + 144 = 0,$$

kuin siinä pannaan $x^2 = y$, toisen nousun yhtälö

$$y^2 - 25y + 144 = 0,$$

josta seuraa $y_{,} = 16$ ja $y_{,,} = 9$. Kuin itsekukin näistä arvoista sitte pannaan y:n siaan yhtälössä $x^2 = y$, niin siitä saadaan kaksi yhtälöä $x^2 = 16$ ja $x^2 = 9$, joista taas seuraa $x = \pm 4$ ja $x = \pm 3$. Tuntemattomalla x on siis neljä arvoa $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, $x_3 = 3$ ja $x_4 = -3$.

Olisko vielä yhtälö

$$x^4 - 7x^2 = 8$$

ratkaistavana, niin siitä saadaan, kuin siinä pannaan $x^2 = y$,

$$y^2 - 7y = 8$$

ja sentähden $y_{,} = 8$ sekä $y_{,,} = -1$. Tästä seuraa taas $x^2 = 8$ ja $x^2 = -1$ ja sentähden on $x = \pm 2\sqrt{2}$ ja $x = \pm\sqrt{-1}$.

Tuntemattoman x kaksi arvoa ovat siis varsinaissuuruuksia ja toiset kaksi kuvasuuruuksia.

Olisko nyt mikä x:n tekemä $f(x)$ hyvänsä semmoinen, että yhtälö $f(x) = k$, jossa k merkitsee tunnettua suuruutta, voidaan ratkaista, niin se on selvä, että silloin voidaan myös ratkaista yhtälö

$$(f(x))^2 + pf(x) + q = 0,$$

sillä kuin tässä yhtälössä pannaan $f(x) = z$, niin siitä saadaan toisen nousun yhtälö

$$z^2 + pz + q = 0,$$

josta taas seuraa $z_{,} = f(x) = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ja $z_{,,} = f(x) = -\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Näin on nyt saatu kaksi yhtälöä, joista x:n arvot saadaan, kuin vaan yhtälö $f(x) = k$ voidaan ratkaista, merkitsipä k mitä tunnettua suuruutta hyvänsä. Niin saadaan esm. yhtälöstä

$$(x^2 - 3)^2 - 4(x^2 - 3) + 3 = 0,$$

kuin siinä pannaan $x^2 - 3 = z$, toisen nousun yhtälö

$$z^2 - 4z + 3 = 0,$$

josta taas seuraa $z_{,}=3$ ja $z_{,,}=1$. Nämä z:n arvot pannen sen siaan yhtälössä $x^2-3=z$ saadaan sitte kaksi toisen nousun yhtälöä

$$x^2-3=3 \text{ ja } x^2-3=1,$$

joista seuraa $x_1=\sqrt{6}$, $x_2=-\sqrt{6}$, $x_3=2$ ja $x_4=-2$.

Samalla tavalla saadaan yhtälöstä

$$(x^2-2x+3)^2-7(x^2-2x+3)+12=0$$

$$x_1=0, x_2=2, x_3=1+\sqrt{2}=2{,}414\cdots \text{ ja } x_4=1-\sqrt{2}=-0{,}414\cdots$$

Nyt otamme vielä vaan muutamia

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $x^4+1225=74x^2$. $\quad x=\pm5,\ x=\pm7.$

Esm. 2. $x^4-4a^2x^2-12a^4=0$. $\quad x=\pm a\sqrt{6}=2{,}449\cdots a,$
$x=\pm a\sqrt{-2}.$

Esm. 3. $x^4+x^2-1=0$. $\quad x=\pm\sqrt{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$, s. t. s.
$x=\pm\sqrt{0{,}618\cdots}=\pm0{,}786\cdots$ ja
$x=\pm\sqrt{-1{,}618\cdots}$

Esm. 4. $18x^4-65x^2+7=0$. $\quad x=\pm\sqrt{3\frac{1}{2}}=\pm1{,}87\cdots,\ x=\pm\frac{1}{3}.$

Esm. 5. $2\sqrt{2}(6x-1)^2=1+(6x-1)^4$. $\quad x=\frac{1}{6}\pm\frac{1}{6}\sqrt{\sqrt{2}\pm1}.$

Esm. 6. $((x-1)^2-x)^2-8((x-1)^2-x)+7=0$. $\quad x=0,$
$x=3,\ x=\frac{3\pm\sqrt{33}}{2}.$

Esm. 7. $(x^2-x)(4-x^2(x-1)^2)=0$. $\quad x=0,\ x=1,\ x=2,$
$x=-1$ ja $x=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{2}.$

Muist. Koska tulo on aina nolla, kuin vaan yksi siinä olevista kertojista on nolla ja kaikki muut äärellisiä suuruuksia, niin jokainen kertoja viimesen yhtälön vasemmassa puolessa voidaan selvästi panna erikseenkin nollaksi, joten saadaan yhtälöt $x^2-x=0$, $2-x(x-1)=0$ ja $2+x(x-1)=0$, joista sitte edelliset arvot tuntemattomalle x helposti saadaan.

Neljännen nousun yhtälöitä, jotka voidaan alentaa toisen nousun yhtälöiksi, ratkaistessa tullaan usiasti toinen aluke ottamaan järkinäissuuruuden ja toisen alukkeen summasta eli välistä. Edellä olemme jo nähneetkin, että yhtälön

$$x^4+px^2+q=0$$

juuret ovat $x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}$ ja jos nyt lyhyyden vuoksi panemme $-\frac{p}{2}=A$ ja $\frac{p^2}{4}-q=B$, niin tämmöisiä yhtälöitä ratkaistessa on toinen aluke otettava seuraavan muotoisista suuruuksista:

$$A\pm\sqrt{B},$$

joissa A ja B merkitsevät järkinäissuuruuksia lisä- tai poistomerkillä ja B ei ole minkään lu'un toinen korko, jolloin $A\pm\sqrt{B}$ myös olisivat järkinäissuuruuksia.

Tarkastakaamme nyt ensiksi tämän muotoisien suuruuksien $A\pm\sqrt{B}$ ja $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$ korottamista toiseen korkoon. Niin ovat esm. suuruuksien $3\pm\sqrt{5}$ toiset korot $(3\pm\sqrt{5})^2=9\pm6\sqrt{5}+5=$ $=14\pm6\sqrt{5}$. Sentähden on myös päin vastoin

$$\sqrt{14\pm6\sqrt{5}}=\sqrt{14\pm\sqrt{180}}=3\pm\sqrt{5}.$$

Samoin on $(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})^2=3\pm2\sqrt{6}+2=5\pm\sqrt{24}$ ja sentähden myös

$$\sqrt{5\pm\sqrt{24}}=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}.$$

Näistä esimerkistä nähdään jo, että niin hyvin suuruus $A+\sqrt{B}$ kuin $A-\sqrt{B}$:kin voipi olla toinen korko kahden suuruuden summasta eli välistä, joista toinen eli kumpikin on alukesuuruus. Sentähden voidaan usiasti tämmöiset suuruudet, $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$, selventää ja saada muotoon $A'\pm\sqrt{B'}$ eli $\sqrt{A'}\pm\sqrt{B'}$. Tämmöinen selventäminen onkin tärkeä seikka, sillä sen tehtyä, kuin se on mahdollinen, on vaan yksi eli kaksi yksityistä aluketta otettavaa, eikä enää aluketta alukesuuruudesta.

Ottakaamme sentähden tutkittavaksi missä tapauksessa ja mitenkä alukesuuruudet $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ saadaan selvennetyiksi muotoon $A' \pm \sqrt{B'}$ eli $\sqrt{A'} \pm \sqrt{B'}$, s. t. s., missä tapauksessa suuruudet $A \pm \sqrt{B}$ ovat toiset korot itsekustakin toisista suuruuksista $A' \pm \sqrt{B'}$ eli $\sqrt{A'} \pm \sqrt{B'}$, kuin A, B, A' ja B' merkitsevät järkinäissuuruuksia lisä- taikka poistomerkillä.

Ensiksi voidaan helposti todistaa, että kuin $a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$, jossa a, b, a' ja b' merkitsevät mitallisia mutta $\sqrt{b}$ ja $\sqrt{b'}$ mitattomia lukuja, niin silloin on myös $a = a'$ ja $\sqrt{b} = \sqrt{b'}$, s. o., $b = b'$.

Todellakin saadaan yhtälöstä $a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$

$$\sqrt{b} = a' - a + \sqrt{b'}$$

ja tämän puolet korottaen toiseen korkoon saadaan taas

$$b = (a' - a)^2 + 2(a' - a)\sqrt{b'} + b' \text{ eli}$$
$$b - b' - (a' - a)^2 = 2(a' - a)\sqrt{b'}.$$

Viimesen yhtälön vasen puoli on nyt selvästi mitallinen suuruus, jonkatähden oikean puolen pitää myös oleman semmoisen. Mutta $\sqrt{b'}$ on mitaton luku ja $2(a' - a)\sqrt{b'}$ sentähden myös mitaton, ellei $a' - a = 0$. Sentähden on $a' - a = 0$ eli $a = a'$, josta taas seuraa, että $\sqrt{b} = \sqrt{b'}$ eli $b = b'$, j. o. t.

Jos sentähden on $A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{x}\sqrt{y}$, niin silloin on edellisen todiston mukaan $A = x + y$ ja $\sqrt{B} = 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$, jonkatähden myös on $-\sqrt{B} = -2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ ja siis $A - \sqrt{B} = x + y - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$.

Olkoon nyt

$$\alpha. \quad \begin{cases} A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2, \\ A - \sqrt{B} = x + y - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2, \end{cases}$$

josta selvästi seuraa

$$\beta. \quad \begin{cases} \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \\ \sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}. \end{cases}$$

Kuin nyt yhtälöiden α puolet lasketaan yhteen, sekä toisen puolet poistetaan ensimäisen vastaavista puolista, niin niistä saadaan

$$A = x + y \text{ ja } \sqrt{B} = 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} \text{ eli } xy = \frac{B}{4}.$$

Edellisessä pykälässä on jo nähty, että suuruudet x ja y, joidenka summa on A ja tulo $\frac{B}{4}$, ovat yhtälön

$$z^2 - Az + \frac{B}{4} = 0$$

juuret.

Viimesestä yhtälöstä saadaan taas helposti

$$z_{,} = x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} \text{ ja } z_{,,} = y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Kuin nämä arvot sitte pannaan x:n ja y:n siaan yhtälöissä β. niin niistä saadaan

$$1. \quad \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \text{ ja}$$

$$2. \quad \sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Jos nyt $A^2 - B$ on toinen korko jostakin suuruudesta C, s. t. s. jos $\sqrt{A^2 - B} = C$, niin se on edellisistä kaavoista selvä, että alukesuuruudet $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ silloin voidaan selventää ja saada muotoon $\sqrt{A'} \pm \sqrt{B'}$, joissa $A' = \frac{A + C}{2}$ ja $B' = \frac{A - C}{2}$. Tässä tapauksessa on taas selvästi $-\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = -(\sqrt{A'} \pm \sqrt{B'}) = -\sqrt{A'} \mp \sqrt{B'}$. Sitte voipi vielä joko $\sqrt{A'}$ eli $\sqrt{B'}$ olla järkinäissuuruus.

Niin on esm. lausekkeessa $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$, $A = 3$, $B = 8$ ja siis $A^2 - B = 1 = 1^2$, jolloin kaavan 1 mukaan saadaan $\sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} + 1$. Olkoon vielä $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{4 - \sqrt{12}}$, niin nyt on $A^2 - B = 4 = 2^2$ ja kaavan 2 mukaan saadaan $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2}{2}} - \sqrt{\frac{4-2}{2}} = \sqrt{3} - 1$.

Harjoitukseksi otamme muutamia

Esimerkkiä.

Esm. 1. $\sqrt{6\pm\sqrt{11}}=\sqrt{\frac{11}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ ja $-\sqrt{6\pm\sqrt{11}}=-\sqrt{\frac{11}{2}}\mp\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Esm. 2. $\sqrt{8-\sqrt{60}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ja siis $-\sqrt{8-\sqrt{60}}=-\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

Esm. 3. $\sqrt[4]{97\pm56\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{97\pm56\sqrt{3}}}=\sqrt{7\pm\sqrt{48}}=2\pm\sqrt{3}$.

Esm. 4. $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{5}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{6}{25}}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{10}}{2}}-\sqrt{\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{10}}{2}}=$
$=\sqrt{0{,}3}-\sqrt{0{,}2}=0{,}1005\cdots$

Esm. 5. $\sqrt{2+\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}=\sqrt{2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}=$
$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1{,}618\cdots$

Esm. 6. $\sqrt{2a\pm2\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{a+b}\pm\sqrt{a-b}$ (a ja b ovat lukuja).

Esm. 7. $\sqrt{xy+2z^2\pm2z\sqrt{xy+z^2}}=\sqrt{xy+z^2}\pm z$ (x ja y merkitsevät lukuja).

Esm. 8. $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1$.

Esm. 9. Yhtälöstä $x^4-12x^2+4=0$ saadaan
$x=\pm\sqrt{6\pm\sqrt{32}}=\pm(2\pm\sqrt{2})$, s. t. s.
$x=\pm(2+\sqrt{2})=\pm3{,}414\cdots$ ja $x=\pm(2-\sqrt{2})=$
$=\pm0{,}585\cdots$

Esm. 10. $x^4-10x^2+1=0$. $x=\pm\sqrt{5\pm\sqrt{24}}=\pm(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})$,
s. t. s. $x=\pm(\sqrt{3}+\sqrt{2})=3{,}146\cdots$,
$x=\pm(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\pm0{,}317\cdots$

§ 4.

Kysymyksiä, jotka ratkaistaan toisen nousun yhtälöillä yhdellä tuntemattomalla.

Kys. 1. *Luku 13 on jaettava kahteen osaan, joidenka tulo on $42\frac{1}{4}$; kuinka iso on silloin kumpikin osa?*

Kuin ensimäistä osaa merkitään x:llä, niin toinen osa on silloin selvästi $13-x$ ja koska osien tulon pitää oleman $42\frac{1}{4}$, niin tästä saadaan yhtälö

$$x(13-x)=42\tfrac{1}{4},$$

josta sieventäen saadaan

$$x^2-13x+42\tfrac{1}{4}=0,$$

josta taas seuraa $x=6\frac{1}{2}$ ja sentähden myös $13-x=6\frac{1}{2}$. Luku 13 on siis jaettava kahteen yhtä isoon osaan.

Kys. 2. *Mikä luku on kahden lu'un a ja b keskisuhteinen?*

Suuruutta x sanotaan suuruuksien a ja b keskisuhteiseksi, kuin a, x ja b ovat verrannolliset niin, että

$$a:x=x:b.$$

Kuin nyt a, b ja x merkitsevät lukuja, niin edellisestä verrannosta saadaan yhtälö

$$x^2=ab,$$

josta seuraa $x=\sqrt{ab}$.

Niin on esm. lukujen 2 ja 18 keskisuhteinen 6, lukujen 5 ja 20 keskisuhteinen on 10 j. n. e.

Kys. 3. *Eräs neito vastasi kysymykseen, kuinka vanha hän oli: minun äitini on 40 vuotta vanhempi minua ja kuin äitini ikävuosien luku kerrotaan minun ikävuosieni lu'ulla, niin tuloksi saadaan Methusalem'in ikä 969 (vuotta). Kuinka vanha oli neito silloin?*

Kuin x:llä merkitään tyttären ikävuosia, niin äidin ikä on selvästi $x+40$ vuotta, josta neidon lauseen mukaan saadaan yhtälö

$$x(x+40)=969$$

ja tästä yhtälöstä saadaan sitte $x=17$ ja $x=-57$.

Suora vastaus kysymykseen on siis selvästi: 17 vuoden vanha.

Muist. Vastauksella -57 vuotta on myös merkityksensä. Vuosi 57 vuotta ennen tyttären syntymistä oli nimittäin 17 vuotta ennen äidin syntymistä ja silloin oli tyttären ikä -57 ja äidin

-17 (vuotta), jotka suuruudet kerrottuina toisillansa antavat myös tuloksi 969.

Kys. 4. *Kuin eräs rykmentin päällikkö koetti asettaa väkeänsä täysinäiseen neliöön, hän asetti nimittäin sivulle jälekkäin yhtä monta miestä kuin eturivissä oli rinnakkain, niin hänellä oli 39 miestä liiaksi, mutta häneltä puuttui 50 miestä jatkaaksensa neliön sivua yhdellä miehellä, s. t. s. pannaksensa yhden miehen lisää joka riiviin ja siis myös yhden rivin lisää neliöönsä; kuinka monta miestä oli hänen rykmentissänsä?*

Merkitköön nyt x miesten lukua ensimäisen neliön eturivissä, niin koko neliössä on silloin $x \cdot x = x^2$ miestä, koska siinä on x riviä ja joka rivissä x miestä. Koko rykmentissä on siis ensimäisen lauseen mukaan $x^2 + 39$ miestä. Samoin on taas toisen lauseen mukaan koko rykmentissä $(x+1)^2 - 50$ miestä. Tästä saadaan nyt selvästi yhtälö

$$x^2 + 39 = (x+1)^2 - 50,$$

josta taas saadaan $x = 44$ ja $x^2 + 39 = 1975$ miestä koko rykmentissä.

Muist. Edellinen yhtälö on kyllä toisesta noususta, vaikka ensimäisen osion etukertoja sievennetyssä yhtälössä on nolla. Sievennetty yhtälö on nimittäin $0 \cdot x - 2x + 88 = 0$, josta saadaan $x = 44$ ja $x = \infty$. Se on selvä, että ääretön suuruus pantuna x:n siaan edellisessä yhtälössä toteuttaa sen, sillä kuin sen puolet jaetaan x:n toisella korolla, niin siitä saadaan $0 - \frac{2}{x} + \frac{88}{x^2} = 0$, josta taas $0 = 0$, kuin $x = \infty$.

Kys. 5. *Kolme työmiestä A, B ja C olivat samassa työssä ollessansa yhteensä ansainneet 245 markkaa ja jokainen oli ollut työssä yhtä monta päivää, kuin hän oli ansainnut markkaa päivässä. A oli taas ansainnut markan enemmän päivässä kuin B ja B markan enemmän kuin C. Kuinka monta päivää oli sitte itsekukin heistä ollut työssä?*

Merkitköön nyt x C:n työpäivien lukua, niin B:n työpäivien luku on silloin $x+1$ ja A:n $x+2$. Koska taas jokainen ansaitsi yhtä monta markkaa päivässä kuin hänellä oli työpäiviä, niin heidän koko ansionsa oli selvästi

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=245,$$

josta yhtälöstä saadaan $x=8$ ja $x=-10$. Suora vastaus kysymykseen on siis: A oli ollut työssä 10, B 9 ja C 8 päivää.

Kys. 6. *Mies maksoi verkakappaleesta kauppamiehelle 240 markkaa; jos hän olisi saanut 5 kyynärää enemmän samalla rahasummalla, niin silloin olisi kyynärä maksanut hänelle 4 m. vähemmän; kuinka monta kyynärää sai hän 240 markalla?*

Merkitköön taas x kyynärälukua, jonka mies osti, niin se on selvä, että kyynärä maksoi $\frac{240}{x}$ m., koska xk. maksoi 240 m. Olisko hän taas saanut 5 k. enemmän samalla rahasummalla, niin silloin olisi kyynärä maksanut $\frac{240}{x+5}$ m. Viimenen hinta on nyt kysymyksessä lausutun ehdon mukaan 4 m. pienempi kuin edellinen, josta saadaan yhtälö

$$\frac{240}{x+5}=\frac{240}{x}-4.$$

Tästä yhtälöstä saadaan sitte $x=15$ ja $x=-20$. Suora vastaus kysymykseen on siis: 15 kyynärää. Todellakin maksoi kyynärä 16 m., kuin hän sai $15k$. 240 markalla, mutta jos hän olisi saanut 5 k. enemmän, s. t. s. 20 k. samalla rahasummalla, niin silloin olisi kyynärä maksanut 12 m., joka on 4 m. vähemmän.

Poistava arvo -20 k., joka edellisestä yhtälöstä saadaan tuntemattomalle x, voidaan, sen merkistä huolimatta, pitää suorana vastauksena kysymykseen: *mies möi verkakappaleen 240 markasta; jos hän olisi antanut 5 k. vähemmän samasta rahasummasta, niin hän olisi saanut 4 m. enemmän kyynärästä; kuinka monta kyynärää möi hän?*

Kuin nyt x merkitsee kyynärälukua, jonka mies myöpi verkaa, ja kysymys ratkaistaan samoin kuin edellinenkin, niin siitä saadaan $x=20$ ja $x=-15$. Samat arvot olisi saatu tuntemattomalle, jos edellisessä yhtälössä olisi pantu $-x$ x:n siaan, s. t. s. jos ostaminen olisi muutettu myömiseksi.

Kys. 7. *Kaksi kauppiasta A ja B, möivät verkaa eri hinnasta, A 3 kyynärää enemmän kuin B, ja saivat yhteensä 350* *markkaa. Sitte sanoi A B:lle: minä olisin saanut 125 m., jos olisin myönyt verkaani yhtä monta kyynärää kuin sinä; tähän vastasi B: minäpä olisin saanut 240 m., jos olisin myönyt verkaani yhtä monta kyynärää kuin sinä; kuinka monta kyynärää möi nyt itsekukin heistä?*

Merkitköön nyt x kyynärälukua, jonka A möi, niin B möi silloin $x-3$ kyynärää. Koska taas A olisi saanut 125 m. $x-3$ kyynärästä, niin kyynärästä sai hän $\frac{125}{x-3}$ m. ja x kyynärästä siis $x \cdot \frac{125}{x-3}$ m. Samoin huomataan, että B sai verastansa $(x-3) \cdot \frac{240}{x}$ m. Nämä rahasummat tekevät taas yhteensä 350 markkaa, josta seuraa yhtälö

$$\frac{125x}{x-3}+\frac{240(x-3)}{x}=350$$

ja tästä yhtälöstä saadaan sitte $x=18$ ja $x=8$. Tähän kysymykseen saadaan siis kaksi eri vastausta: A möi 18 ja B 15 k. eli A 8 ja B 5 k.

Kys. 8. *Kauppias möi 11 markasta kauppatavaran, jolla hän sai voittoa yhtä monta sadalta, kuin hän oli maksanut markkaa myödystä tavarasta; kuinka paljo oli hän siitä maksanut?*

Merkitköön taas x markkalukua, jonka hän oli maksanut kysymyksessä olevasta tavarasta, joten hänen voittonsa oli $(11-x)$ m. Tämän voittonsa sanottiin tekevän x sadalta ja sentähden $\frac{x}{100}$ markalta ja x markalta vihdoin $x \cdot \frac{x}{100}$. Tästä saadaan yhtälö

$$11-x=\frac{x^2}{100},$$

josta taas seuraa $x=10$ markkaa.

Kys. 9. *Kauppias, joka oli alottanut kauppaliikkeensä a markalla, menetti ensimäisenä vuotena, mutta toisena vuotena voitti hän yhtä monta sadalta, kuin hän ensimäisenä vuotena oli menettänyt ja tämä toisen vuoden voittonsa teki b markkaa;*

kuinka monta sadalta menetti hän ensimäisenä ja voitti toisena vuotena?

Kuin x merkitsee lukua, jonka kauppias ensimäisenä vuotena menetti sadalta, niin hävikkinsä markalta oli silloin $\frac{x}{100}$ ja a markalta siis $a \cdot \frac{x}{100}$ markkaa. Toisen vuoden alussa oli hänellä siis kauppaliikkeessänsä $\left(a - \frac{ax}{100}\right)$ m. ja voittonsa, joka toisena vuotena oli x sadalta, oli edelliseltä summalta selvästi $\left(a - \frac{ax}{100}\right)\frac{x}{100}$ m. Tämän voiton sanottiin taas olevan b m., josta selvästi seuraa yhtälö

$$\left(a - \frac{ax}{100}\right)\frac{x}{100} = b.$$

Tästä yhtälöstä saadaan sitte $x = 50\left(1 \pm \sqrt{\frac{a-4b}{a}}\right)$.

Kys. 10. *Rahakauppias osti kaksi velkakirjaa, jotka olivat lunastettavat, toinen 8151 markalla 9 kuukauden kuluttua ja toinen 6864 markalla 8 kuukauden kuluttua; edellisestä maksoi hän 1200 markkaa enemmän kuin jälkimäisestä. Kuinka monta sadalta luki hän kasvua rahoillensa?*

Merkitkäämme x:llä lukua, jonka hän otti sadalta kuukaudessa, joten vuotuinen kasvu on $12x$ sadalta, niin 9 kuukauden kasvu on silloin $9x$ ja kahdeksan taas $8x$ sadalta. Se on nyt selvä, että 100 m. 9 kuukaudessa kasvaa $100 + 9x$ markaksi ja $100 + 8x$ markaksi 8 kuukaudessa, kuin x on kasvu sadalta kuukaudessa. Rahasummat ja niiden loppu arvot saman a'ian kuluttua ovat taas verrannolliset, kuin niistä maksetaan yhtä monta sadalta vuotuista kasvua. Tästä saadaan nyt selvästi seuraavat verrannot, kuin velkakirjain rahakauppiaan ne ostaessa olevia arvoja merkitään z:lla ja z':lla,

$$100 : (100 + 9x) = z : 8151$$
$$100 : (100 + 8x) = z' : 6864,$$

joista taas seuraa $z = \frac{100 \cdot 8151}{100 + 9x}$ ja $z' = \frac{100 \cdot 6864}{100 + 8x}$.

Kysymyksessä sanottiin myös ensimäisen velkakirjan sikäläisen' arvon z olevan 1200 m. isomman kuin toisen z'. Tästä saadaan vihdoin yhtälö

$$\frac{100 \cdot 8151}{100+9x} = \frac{100 \cdot 6864}{100+8x} + 1200,$$

josta seuraa $x = \frac{1}{2}$ ja $x = -20\frac{5}{36}$. Suora vastaus kysymykseen on siis $\frac{1}{2}$ sadalta kuukaudessa, joka tekee 6 sadalta vuodessa.

Kys. 11. *Mikä on kantaluku siinä lukujärjestyksessä, jossa meidän (kymmen-lukujärjestyksen) luku 235 kirjoitetaan 454?*

Meidän lukujärjestyksessämme on 10 kantalukuna, s. t. s. me luemme ykkösiä 10:een asti, sitte kymmeniä, $10 \cdot 10 = 10^2 =$ satoja, $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 =$ tuhansia j. n. e. Samalla tavalla voitaisiin joku toinenkin kokoluku x ottaa kantalu'uksi, johonka asti luettaisiin ykkösiä, sitte kantalu'un toisia korkoja x^2, sitte x^3 j. n. e. Lu'ussa 454 on, kuin x on kantaluku, selvästi $4 + 5x + 4x^2$ ykköstä ja koska se kymmen-lukujärjestyksessä tekee 235, niin tästä saadaan yhtälö

$$4x^2 + 5x + 4 = 235,$$

josta seuraa $x = 7$ ja $x = -\frac{33}{4}$. Vastaus kysymyksen on siis: 7.

Kys. 12. *Mitenkä paljo pitää a tuuman pituista suoraa viivaa jatkettaman, kunneka suorakulmio, jonka alkuperäinen ja koko jatkettu viiva sisältävät, tulee yhtä isoksi kuin neliö jatkolla?*

Merkitköön nyt x (tuumaa) jatkon pituutta, niin koko jatketun viivan pituus on sillloin selvästi $(a+x)$ t. ja kysymyksessä lausutun ehdon mukaan saadaan yhtälö

$$a(a+x) = x^2,$$

josta sitte seuraa $x = \frac{a(1 \pm \sqrt{5})}{2}$. Vastaus kysymykseen on siis: viiva pitää jatkettaman $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot a = 1{,}618 \cdots \times a$ tuumalla.

Muist. Tuntemattomalle saatu poistava arvo $\frac{a(1-\sqrt{5})}{2} =$ $= -0{,}618 \cdots \times a$ t. vastaa, kuin se otetaan lisämerkillä, kysymykseen: kuinka paljo pitää suorasta viivasta a leikattaman pois, kunneka suorakulmio, jonka koko viiva ja jälelle jäänyt kappale sisältävät, tulee yhtä isoksi kuin neliö pois leikatulla kappaleella? Tästä nähdään taas, että poistosuuruus merkitsee lyhennöstä, kuin lisäsuuruudella merkitään jatkoa.

Kys. 13. *Suorakulmaisen kolmikulman suoraa kulmaa vasten seisova sivu on a tuuman pituinen ja toinen sivuista, jotka reunaavat suoran kulman, on b tuumaa pitempi kuin toinen; kuinka pitkät ovat silloin kaksi viimeksi mainittua sivua?*

Merkitköön x t. lyhemmän etsittävistä sivuista pituutta, jolloin pitempi on $(x+b)$ tuuman pituinen. Tästä saadaan nyt selvästi (Eukl. kirj. 1 esit. 47) yhtälö

$$x^2+(x+b)^2=a^2,$$

josta taas seuraa $x=\frac{-b\pm\sqrt{2a^2-b^2}}{2}$.

Lyhempi suoraa kulmaa reunaavista sivuista on siis $\frac{-b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2}$ tuuman pituinen ja pitempi sentähden $\frac{-b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2}+b=$ $=\frac{b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2}$ tuuman pituinen.

Kuin näiden sivujen pituuksien pitää oleman varsinais- sekä lisäsuuruuksia, niin sentähden pitää myös oleman $b<\sqrt{2a^2-b^2}$, josta seuraa $2b^2<2a^2$ eli $b<a$ ja tässä pitää myös oleman $b^2\overline{\overline{<}}2a^2$ eli $b\overline{\overline{<}}a.\sqrt{2}$, sillä jos $b^2>2a^2$, niin silloin on $\sqrt{2a^2-ba^2}$ kuvasuuruus ja sentähden myös sivujen pituudet kuvasuuruuksia. Olisivatko suoraa kalmaa reunaavat sivut taas yhtä isot, niin silloin olisi $b=0$ ja kumpikin sivu $\frac{a\sqrt{2}}{2}=0,707..\times a$ tuuman pituinen.

Kys. 14. *Luku a on jaettava kahteen osaan, joidenka tulo on luku b; kuinka ison pitää kunkin osan oleman?*

Kuin x merkitsee toista näistä osista, niin toinen on silloin $a-x$ ja kysymyksessä lausutusta ehdosta saadaan yhtälö

$$x(a-x)=b,$$

josta sitte saadaan $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$ ja sentähden toinen osa

$a-x=\frac{a}{2}\mp\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$. Tässä voipi siis x merkitä kumpasta osaa hyvänsä, koska kumpikin x:n arvoista on etsitty osa lu'usta a.

Kuin a:n osien pitää oleman lukuja, samoin kuin a itsekin, niin silloin ei saa olla $b>\frac{a^2}{4}$, sillä jos $b>\frac{a^2}{4}$, niin x:n arvot ovat silloin kuvasuuruuksia ja kysymys tavallisessa merkityksessä mahdotoin ratkaista. Yleislaskussa voidaan kyllä lu'usta a poistaa minkälainen suuruus $\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$ hyvänsä ja tähdettä merkitään suuruudella $\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$ ja poistettavan ja tähteen tulo on kyllä b, mutta ne eivät ole samankaltaisia suuruuksia kuin luku a, jos $b>\frac{a^2}{4}$.

Nyt on nähty, että osien tulo b korkeintaan voipi olla yhtä iso kuin $\frac{a^2}{4}$. Tällä tavoin saadaan siis vastaus kysymykseen: *kuinka isojen pitää lu'un a kahden osan oleman, kuin niiden tulon pitää oleman isoimman?* Edellä on nähty että tulo b voipi korkeitansa olla $\frac{a^2}{4}$. Kuin taas $b=\frac{a^2}{4}$, niin silloin on x:n kumpikin arvo $\frac{a}{2}$ ja vastaus kysymykseen on siis: lu'un a osien pitää oleman yhtä isojen, s. t. s. luku a on jaettava kahtia, jos osien tulon pitää oleman isoimman.

Tästä nähdään nyt, että kuin tuntemattomalle jostakin toisen nousun yhtälöstä saadut arvot ovat kuvasuuruuksia, niin kysymys, josta yhtälö on saatu, on mahdotoin ratkaista, s. t. s., siinä lausutut ehdot ovat mahdottomia. Mutta tämmöisistä arvoista voidaan myös, niin kuin edellä on nähty, usiasti huomata mikä on isoin eli pienin arvo, jonka joku saman tuntemattoman tekemä voipi saada ja näin löytää se arvo tuntemattomalle, joka pantuna sen siaan tekemässä antaa sille isoimman eli pienimmän arvon. *Suuruuden x tekemän f(x) isoimmaksi arvoksi sanotaan taas jokaista sen arvoa, joka on isompi kuin sitä läheiset arvot. Samoin sanotaan tekemän f(x) pienimmäksi arvoksi sen jokaista arvoa,* *joka on pienempi kuin sitä läheiset arvot.* Olisko esm. $f(x) = A$, kuin $x = a$ ja A isompi kuin ne arvot, jotka $f(x)$ saapi, kuin x saapi pienemmän eli isomman arvon $a - h$ eli $a + h$ (h tarpeiksi pieni luku), niin A:ta sanotaan silloin tekemän $f(x)$ isoimmaksi arvoksi. Kuin A taas on pienempi kuin ne arvot, jotka tekemä $f(x)$ saapi, kuin vapaasti muuttuvainen x saapi vähä pienemmän eli isomman arvon $a - h$ eli $a + h$, niin silloin sanotaan A:ta $f(x)$:n pienimmäksi arvoksi. Näistä määrityksistä huomataan helposti, että samalla tekemällä voipi olla usiampiakin niin hyvin isoinpia kuin pienimmiäkin arvoja. Tässä otamme muutamia esimerkkiä, joissa jonkun suuruuden isoin eli pienin arvo voidaan saada toisen nousun yhtälöstä.

Kys. 15. *Millä kaikista yhtä isoista suorakulmioista, joidenka laajus on a neliötuumaa, on pienin ympärys (sivujen summa)?*

Se on selvä, että suorakulmion sivut voivat olla muuttuvaiset ja laajuus muuttumatoin, kuin vaan toinen niistä sivuista, jotka sisältävät suorakulmion, pitenee samassa suhteessa kuin toinen lyhenee. Kuin nyt x t. merkitsee suorakulmion yhtä sivua ja y ympärystä, niin toinen sivu on silloin $\frac{y}{2} - x$ t., koska vastakkain seisovat sivut ovat yhtä isot ja $\frac{y}{2}$ sentähden kahden sivun summa. Se on taas selvä, että, kuin x pidetään vapaasti muuttuvaisena, y on sen tekemä. Koska nyt x t. ja $\left(\frac{y}{2} - x\right)$ t. ovat niiden sivujen pituudet, jotka sisältävät suorakulmion ja a n.t. on sen laajuus, niin tästä saadaan yhtälö

$$x\left(\frac{y}{2} - x\right) = a,$$

josta sitte helposti saadaan

$$\textit{toinen sivu } x = \frac{y}{4} \pm \sqrt{\frac{y^2}{16} - a} \text{ t.}$$

$$\text{ja siis } \textit{toinen } \left(\frac{y}{2} - x\right) = \frac{y}{4} \mp \sqrt{\frac{y^2}{16} - a} \text{ t.}$$

Jos nyt x:n arvoissa, jotka ovat suorakulmion sisältävien sivujen pituudet, olisi $\frac{y^2}{16} < a$, josta seuraisi $y < 4\sqrt{a}$, niin suuruus $\frac{y^2}{16} - a$ alukemerkin alla olisi poistosuuruus, jolloin x:n arvot olisivat kuvasuuruuksia. Pienin arvo, jonka suorakulmion ympärys voipi saada, on siis $4\sqrt{a}$ t. Mutta kuin $y = 4\sqrt{a}$ eli $\frac{y^2}{16} = a$, niin silloin on x:n kumpikin arvo $= \frac{y}{4} = \sqrt{a}$ ja suorakulmio on sentähden neliö, jonka laajuus on a n.t. Tästä huomataan nyt selvästi, että kaikista yhtä isoista suorakulmioista neliöllä on pienin ympärys.

Kys. 16. *Mikä luku pantuna x:n siaan antaa lausekkeelle $\frac{x^2+4}{3x}$ pienimmän arvon?*

Olkoon

$$\frac{x^2+4}{3x} = y, \text{ niin siitä seuraa } x = \frac{3y \pm \sqrt{9y^2 - 16}}{2}.$$

Kuin x:n pitää oleman varsinaissuuruuden (lu'un), niin silloin ei saa olla $9y^2 < 16$. Pienin arvo, jonka y voipi saada, on siis $\frac{4}{3}$, jolloin on $x = \frac{3y}{2} = 2$. Lauseke $\frac{x^2+4}{3x}$ saapi siis pienimmän arvonsa, kuin 2 pannaan x:n siaan lausekkeessa. Tämän voipi myös helposti huomata x:n siaan lausekkeessa $\frac{x^2+4}{3x}$ isompia sekä pienempiä lukuja kuin 2 panemalla, joten lauseke aina saapi isomman arvon kuin $\frac{4}{3}$.

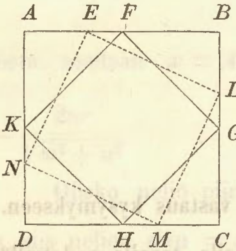
Kys. 17. *Kuin jännettä ympyrässä muutetaan, pannaan lähemmäksi keskipistettä eli etemmäksi siitä, niin suorakulmio, jonka tämä jänne ja sitä vasten keskipisteestä kohtisuoraan vedetty suora viiva sisältävät, muuttuu myös isoutensa puolesta, tulee isommaksi eli pienemmäksi; kuinka kaukana on sitte jänne keskipisteestä silloin, kuin mainittu suorakulmio on isoin?*

Merkitköön nyt r (tuumaa) ympyrän säteen, x t. keskipisteen ja jänteen välillä olevan matkan, s. t. s. keskipisteestä jännettä vasten vedetyn kohtisuoran viivan pituutta ja y (neliötuumaa) kysymyksessä olevan suorakulmion laajuutta. Puolen jänteen pituus on nyt selvästi $\sqrt{r^2 - x^2}$ ja koko jänteen siis $2\sqrt{r^2 - x^2}$ t. ja kysymyksestä saadaan sentähden yhtälö

$$2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot x = y,$$

josta taas seuraa $x^2 = \frac{r^2 \pm \sqrt{r^4 - y^2}}{2}$. Tästä nähdään nyt, että y:n isoin arvo on r^2 ja kuin $y = r^2$ eli $y^2 = r^4$, niin silloin on $x^2 = \frac{r^2}{2}$ eli $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ t. ja jänteen pituus $2\sqrt{r^2 - x^2} = 2r\sqrt{\tfrac{1}{2}} = r\sqrt{2}$ t. Mutta $r\sqrt{2}$ t. on ympyrään piirretyn neliön sivu. Tässä tilassa oleva jänne on siis ympyrään piirretyn neliön sivu ja suorakulmion, jonka jänne ja sitä vasten keskipisteestä kohtisuoraan vedetty viiva sisältävät, laajuus on yhtä iso kuin neliö ympyrän säteellä, sillä $x \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot r\sqrt{2} = r^2$.

Kys. 18. *Mikä neliö on pienin kaikista neliöistä, jotka voidaan piirtää tunnettuun neliöön?*

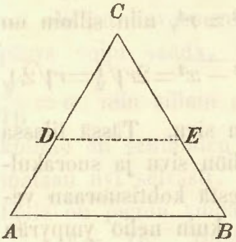


Merkitköön $AB = s$ alkuperäisen neliön sivun pituutta, $AE = BL = CM = DN = x$ neliöiden läheisien kulmien A ja E väliä ja y alkuperäiseen neliöön piirretyn neliön laajuutta, niin nyt on linja $EB = s - x$ ja sentähden on

$$(s - x)^2 + x^2 = y,$$

koska $EL^2 = y$ ja $EL^2 = EB^2 + BL^2$. Edellisestä yhtälöstä saadaan taas $x = \frac{s \pm \sqrt{2y - s^2}}{2}$, josta huomataan y:n ei voivan saada pienempää arvoa kuin $\frac{s^2}{2}$. Mutta kuin $y = \frac{s^2}{2}$, niin silloin on $x = \frac{s}{2}$. Neliöön piiretty neliö on siis pienin, kuin jälkimäisen kulmien kär'et ovat keskellä edellisen sivuja. Tässä tilassa on pienempi neliö puoli isommasta ja sen (pienemmän) sivu on yhtä pitkä kuin puoli isomman lävistäjää, sillä $FG = \sqrt{y} = s\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}s\sqrt{2}$ ja alkuperäisen neliön lävistäjä on $s\sqrt{2}$.

Kys. 19. *Kuin kolmikulma ABC on tunnettu ja siitä pitää aseman AB kanssa yhtä suuntaisella suoralla viivalla DE leikattaman osa DCE, joka on koko kolmikulmaan samassa suhteessa* *kuin luku m lukuun n, s. t. s., joka on* $\frac{m}{n}$ *koko kolmikulmasta, niin mistä pisteestä D sivulla AC on viiva DE silloin vedettävä?*



Olkoon nyt $AC = b$ ja $CD = x$. Koska nyt DE on yhtä suuntainen aseman AB kanssa, niin kolmikulmat DEC ja ABC ovat mukaiset keskenänsä ja sentähden samassa suhteessa toinen toiseensa kuin neliöt heidän kaimassivuillansa, s. t. s. $\triangle DEC : \triangle ABC = DC^2 : AC^2$. Mutta nyt on $\triangle DEC : \triangle ABC = m : n$ ja $DC = x$ sekä $AC = b$, josta siis seuraa

$$m : n = x^2 : b^2.$$

Tästä saadaan taas yhtälö

$$nx^2 = mb^2,$$

josta sitte saadaan

$$\alpha. \qquad x = \pm b\sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Poistava arvo $-b\sqrt{\frac{m}{n}}$ ei voi olla vastaus kysymykseen.

Jos taas kolmikulma ABC olisi samalla tavalla vedetyillä viivoilla jaettava usiampaan osaan p, q, r, s j. n. e., niin silloin leikattaisiin kolmikulmasta ensin osa p, sitte osa $p+q$, sitte osa $p+q+r$ j. n. e., jolloin toinen osa q olisi ensimäisen ja toisen jakolinjan välillä, kolmas osa r toisen ja kolmannen jakolinjan välillä j. n. e.

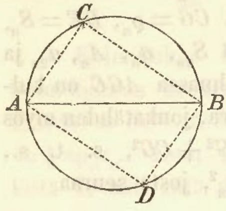
Pisteen C ja sivulla AC olevien pisteiden, joista aseman AB kanssa yhtä suuntaiset jakolinjat ovat vedettävät, välit saadaan sentähden kaavasta α., kuin siinä pannaan ensiksi $m = p$, sitte $m = p + q$, sitte $m = p + q + r$ j. n. e., $p + q + r + \cdot = n$. Kuin x', x'', x''' j. n. e. merkitsevät mainittuja väliä, niin silloin on selvästi

$$x' = b\sqrt{\frac{p}{n}}, \quad x'' = b\sqrt{\frac{p+q}{n}}, \quad x''' = b\sqrt{\frac{p+q+r}{n}} \text{ j. n. e.}$$

Olisko kolmikulma jaettava esm. kolmeen osaan, jotka ovat toisiinsa samoissa suhteissa kuin luut 3, 4 ja 5, niin silloin saataisiin selvästi

$$x' = b\sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}b \text{ ja } x'' = b\sqrt{\tfrac{7}{12}} = 0{,}7637\cdot\cdot \times b.$$

Kys. 20. *Ympyrän säde r on tunnettu; kuinka pitkät ovat silloin ympyrään piirretyn suorakulmion sivut, kuin sen leveys on pituuteen samassa suhteessa kuin luku m lukuun n?*



Olkoon sivu AC(= suorakulmion leveys) $= x$, niin sivu BC(= suorakulmion pituus) on silloin selvästi $= \frac{nx}{m}$, koska $AC:BC = m:n$. Mutta nyt on taas $AC^2 + BC^2 = AB^2$, s. t. s.

$$x^2 + \frac{n^2x^2}{m^2} = 4r^2,$$

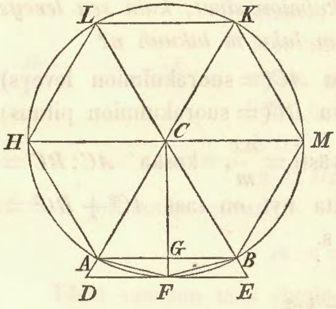
josta saadaan $x = AC = \frac{2mr}{\sqrt{m^2+n^2}}$ ja sentähden $\frac{nx}{m} = BC = \frac{2nr}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

Olisko neliö piirrettävä ympyrään, niin silloin olisi $m = n$ ja siis neliön sivu $= x = \frac{2r}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot r$.

Kys. 21. *) *Säännöllinen n-kulma on piirretty ympyrään, jonka säde (= r) ja säännöllisen n-kulman sivu (= s_n) ovat tunnetut ja nyt on etsittävä: 1:ksi säännölliseen n-kulmaan piiretyn ympyrän säde ϱ_n, 2:ksi alkuperäisen ympyrän ympäri piirretyn säännöllisen n-kulman sivu S_n, 3:ksi samaan ympyrään piirretyn säännöllisen 2n-kulman sivu s_{2n}, 4:ksi ympyrän ympäri piirretyn sään-*

*) Säännöllinen n-kulma on suoraviivainen kuvio, jonka sivujen luku on n ja jonka sekä sivut keskenänsä että kulmat keskenänsä ovat yhtä isot. Säännölliseen kuvioon piirretyn ympyrän sädettä sanotaan kuvion apotemiksi ja se on tärkeä tuntea, sillä tämmöisen kuvion laajuus on helppo saada laskemalla, kuin sen apotemi kerran on tunnettu.

nöllisen 2n-kulman sivu S_{2n}, *5:ksi ympyrään piirretyn säännöllisen n-kulman laajuus* a_n, *6:ksi ympyrän ympäri piirretyn säännöllisen n-kulman laajuus* A_n *ja vihdoin 7:ksi ympyrään piirretyn säännöllisen 2n-kulman laajuus* a_{2n} *sekä 8:ksi ympyrän ympäri piirretyn säännöllisen 2n-kulman laajus* A_{2n}.



Tässä ovat nyt $CA = CF = r$ ja $AB = BM = s_n$ tunnetut, mutta etsittäviä ovat $CG = \varrho_n$, $DE = S_n$, $AF = s_{2n}$ sekä S_{2n}, a_n, A_n, a_{2n} ja A_{2n}. Kolmikulmassa AGC on kulma AGC suora, jonkatähden myös on $AC^2 = AG^2 + CG^2$, s. t. s., $r^2 = \varrho_n^2 + \frac{1}{4}s_n^2$, josta seuraa

$$1. \qquad \varrho_n = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s_n^2}.$$

Koska taas kolmikulmat AGC ja DFC ovat mukaiset (Eukl. kir. 6 esit. 4), niin tästä saadaan $CG:GA = CF:FD$, s. t. s. $\varrho_n : \frac{1}{2}s_n = r : \frac{1}{2}S_n$, josta seuraa

$$2. \qquad S_n = \frac{rs_n}{\varrho_n} = \frac{rs_n}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2}}.$$

Kolmikulmasta AFG saadaan taas $AF^2 = AG^2 + GF^2$. Mutta $GF = CF - CG$, s. t. s., $GF = r - \varrho_n$ ja sentähden on $AF^2 = AG^2 + (CF - CG)^2$, s. o. $s_{2n}^2 = \frac{1}{4}s_n^2 + (r - \varrho_n)^2 = \frac{1}{4}s_n^2 + r^2 - 2r\varrho_n + \varrho_n^2$. Kuin sitte ϱ_n:n siaan edellisessä yhtälössä pannaan sen arvo yhtälöstä 1, niin siitä saadaan $s_{2n}^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2} = 2r(r - \varrho_n)$, josta vihdoin seuraa

$$3. \qquad s_{2n} = \sqrt{2r(r - \varrho_n)} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s_n^2}}.$$

Yhtälöstä 2 saadaan sitte S_{2n}:n arvo, kuin s_n:n siaan siinä pannaan s_{2n} eli sen arvo yhtälöstä 3. Näin saadaan

$$S_{2n} = \frac{rs_{2n}}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_{2n}^2}} \text{ eli } S_{2n} = \frac{r\sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2}}}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}\left(2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2}\right)}} =$$

$$= \frac{2r\sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2}}}{\sqrt{2r^2 + 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2}}} = \frac{2r(2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2})}{\sqrt{4r^4 - 4r^2(r^2 - \frac{1}{4}s_n^2)}} =$$

$$= \frac{2r(2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2})}{\sqrt{r^2 s_n^2}},$$ josta vihdoin saadaan

$$4. \quad S_{2n} = \frac{4r(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2})}{s_n} = \frac{4r(r - \varrho_n)}{s_n}.$$

Kolmikulma on taas yhtä iso kuin se suorakulmio, jonka kolmikulman korkeus ja puoli asemata sisältävät. Sentähden on $\triangle ABC = CG \cdot AG = \varrho_n \cdot \frac{1}{2}s_n$ ja koko säännöllinen n-kulma siis $= \frac{1}{2}n\varrho_n s_n$. Kuin tässä ϱ_n:n siaan sitte pannaan sen arvo yhtälöstä 1, niin siitä saadaan

$$5. \quad a_n = \tfrac{1}{2}n\varrho_n s_n = \tfrac{1}{2}ns_n\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s_n^2}.$$

Kolmikulman DEC korkeus on taas $= CF = r$ ja asema $DE = S_n$. Sentähden on $\triangle DEC = \frac{1}{2}rS_n$ ja ympyrän ympäri piirretyn säännöllisen n-kulman laajuus $A_n = \frac{1}{2}nrS_n$. Kuin tähän sitte pannaan S_n:n arvo yhtälöstä 2, niin siitä saadaan

$$6. \quad A_n = \frac{nr^2 s_n}{2\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2}} = \frac{1}{2}\frac{nr^2 s_n}{\varrho_n} = \frac{r^2}{\varrho_n^2} \cdot a_n.$$

Kuin taas n:n siaan yhtälössä 5 pannaan $2n$, niin siitä saadaan selvästi ympyrään piirretyn säännöllisen $2n$-kulman laajus. Niin on $a_{2n} = \frac{1}{2} \cdot 2ns_{2n}\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_{2n}^2} = ns_{2n}\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_{2n}^2}$ ja kuin tähän sitte pannaan s_{2n}:n arvo yhtälöstä 3, niin sillä tavoin saadaan

$$a_{2n} = n\sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s_n^2}}\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}(2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s_n^2})} =$$

$$= \tfrac{1}{2}n\sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s_n^2}}\sqrt{2r^2 + 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s_n^2}},$$ josta vihdoin seuraa

$$7. \quad a_{2n} = \tfrac{1}{2}nrs_n = \frac{r}{\varrho_n} \cdot a_n = \sqrt{\frac{r^2}{\varrho_n^2} \cdot a_n^2} = \sqrt{A_n \cdot a_n}.$$

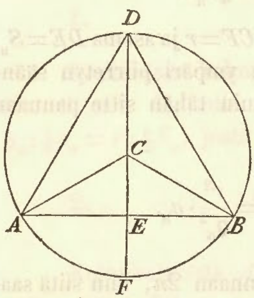
Viimeiset arvot a_{2n}:lle saadaan helposti sen ensimäisestä arvosta ja yhtälöistä 5 ja 6. Koska taas on $a_{2n} = \sqrt{A_n \cdot a_n}$, niin tästä seuraa $a_{2n}^2 = A_n \cdot a_n$ ja siis $a_n : a_{2n} = a_{2n} : A_n$, s. t. s., että ympyrään piirretty säännöllinen $2n$-kulma on ympyrään ja sen ympäri piirrettyjen säännöllisten n-kulmain keskisuhteinen.

Ympyrän ympäri piirretyn $2n$-kulman laajus on taas selvästi $2n$ kertaa suorakulmio, jonka ympyrän säde r ja $2n$-kulman puoli sivua $\frac{1}{2}S_{2n}$ sisältävät. Tästä saadaan siis $A_{2n} = 2n \cdot r\frac{1}{2}S_{2n} = nrS_{2n}$, josta taas yhtälön 4 avulla saadaan

$$8. \qquad A_{2n} = \frac{4nr^2(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2})}{s_n}.$$

Kys. 22. *Ympyrän säde r on tunnettu ja etsittäviä ovat muutamien ympyrään sekä sen ympäri piirrettyjen säännöllisten monikulmain sivujen pituudet sekä mainittujen kuvioiden laajuudet.*

I. *Kolmikulma ja kuusikulma.*



Nyt on $AC = DC = r$ tunnettu ja etsittäviä ovat $AB = AD = s_3$ sekä S_3, s_6, S_6, a_3, A_3, a_6 ja A_6. Yhtälön 3 edellisessä kysymyksessä mukaan on $s_6 = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_3^2}}$ ja koska $s_6 = r$ (Eukl. kirja 4 esit. 15, seuraus), niin tästä seuraa yhtälö

$$r = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_3^2}},$$

josta sitte helposti saadaan

$$1. \qquad s_3 = r\sqrt{3} = 1{,}732 \cdot\cdot \times r.$$

Sentähden on taas yhtälön 1 edellisessä kysymyksessä mukaan $CE = \varrho_3 = \sqrt{r^2 - \frac{3}{4}r^2} = \sqrt{\frac{1}{4}r^2}$, josta seuraa

$$2. \qquad \varrho_3 = \tfrac{1}{2}r = 0{,}5 \cdot r. \text{ *)}$$

---

*) Ympyrään piirretyn yhtäsivuisen kolmikulman sivu saadaan siis, kuin joku ympyrän säde leikataan kahteen yhtä isoon osaan ja jakopisteestä vedetään jänne kohtisuoraan mainittua sädettä vasten.

Ympyrään piirretyn yhtäsivuisen kolmikulman sivun pituus $= s_3$ saadaan helposti, joskohta samaan ympyrään piirretyn säännölisen kuusikulman sivun pituus $s_6 = r$ ei olisikaan tunnettu. Todellakin saadaan kolmikulmasta ADE $AD^2 = AE^2 + (DC + CE)^2$. Kolmikulmasta ACE saadaan taas $AC^2 = AE^2 + CE^2$, josta seuraa $CE = \sqrt{AC^2 - AE^2}$. Sentähden on $AD^2 = AE^2 + (DC + \sqrt{AC^2 - AE^2})^2$, s. t. s., $s_3^2 = \frac{1}{4}s_3^2 + (r + \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_3^2})^2$, josta sitte saadaan $s_3 = r\sqrt{3}$.

Vielä etsittäville suuruuksille S_3, S_6 j. n. e. saadaan sitte määrätyt arvot helposti edellisen kysymyksen yhtälöistä 2··· ja 8, kuin niissä pannaan $n = 3$ ja sentähden myös $s_3 = r\sqrt{3}$ sekä $\varrho_3 = \frac{1}{2}r$. Sillä tavoin saadaan

$$\begin{cases}(s_3 = r\sqrt{3} = 1{,}732\cdot\cdot \times r)\\ S_3 = 2r\sqrt{3} = 3{,}464\cdot\cdot \times r\end{cases}$$

$$\begin{cases}s_6 = r\\ S_6 = \dfrac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}r\sqrt{3} = 1{,}154\cdot\cdot \times r.\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_3 = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3} = 1{,}299\cdot\cdot \times r^2,\\ A_3 = 3r^2\sqrt{3} = 5{,}196\cdot\cdot \times r^2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_6 = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3} = 2{,}598\cdot\cdot \times r^2,\\ A_6 = 2r^2\sqrt{3} = 3{,}464\cdot\cdot \times r^2.\end{cases}$$

II. *Nelikulma (neliö) ja kahdeksankulma.*

Kysymyksessä 20 on nähty, että ympyrään piirretyn neliön sivu on $r\sqrt{2}$, s. t. s.

3. $$s_4 = r\sqrt{2} = 1{,}414\cdot\cdot \times r.$$

Kuin sitte kysymyksen 21 yhtälössä 1 pannaan $n = 4$ sekä $s_n = s_4 = r\sqrt{2}$, niin siitä saadaan $\varrho_4 = \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}r^2} = r\sqrt{\frac{1}{2}}$, s. t. s.

4. $$\varrho_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot r = 0{,}707\cdot\cdot \times r.$$

Kuin taas kysymyksen 21 yhtälöissä 2·· ja 8 pannaan $n = 4$ ja s_n:n sekä ϱ_n:n siaan edellä saadut arvot, nimittäin $s_4 = r\sqrt{2}$

ja $\varrho_4 = \frac{1}{2} r\sqrt{2}$, niin ympyrään sekä sen ympäri piirrettyjen neliöiden ja säännöllisten kahdeksankulmain sivuille ja laajuuksille saadaan seuraavat arvot.

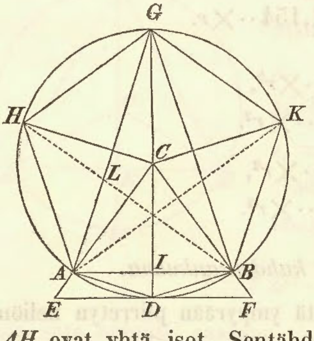
$$\begin{cases} (s_4 = r\sqrt{2} = 1{,}414 \cdots \times r,) \\ S_4 = 2r. \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0{,}765 \cdots \times r, \\ S_8 = 2r(\sqrt{2} - 1) = 0{,}828 \cdots \times r. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_4 = 2r^2, \\ A_4 = 4r^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_8 = 2r^2\sqrt{2} = 2{,}828 \cdots \times r^2, \\ A_8 = 8r^2(\sqrt{2} - 1) = 3{,}313 \cdots \times r^2. \end{cases}$$

III. *Viisikulma ja kymmenkulma.*



Tässä on taas $AC = r$ tunnettu ja ensiksi etsittävä on linjan AB pituus $= s_5$, jonka avulla sitte kaikkien muiden etsittävien, $EF = S_5$, $AD = s_{10}$ j. n. e. arvot helposti saadaan.

Kolmikulmat AGB ja ABL ovat mukaiset, sillä niillä on kulma GAB yhteinen ja kulmat AGB ja ABL ovat yhtä isot, koska kaaret AB ja AH ovat yhtä isot. Sentähden on myös $\wedge ABG = \wedge ALB$ ja siis

$$AG : AB = AB : AL.$$

Nyt on taas kaari GKB = kaari GHA ja siis $\wedge GAB = \wedge GBA$ ja sentähden myös $\wedge ALB = \wedge LAB$, josta seuraa, että $LB = AB$. Koska taas kaari AB = kaari HG ja siis $\wedge LGB = \wedge GBH$, niin $LG = LB = AB$, jonkatähden $AL = AG - AB$. Edellinen verranto on siis sama kuin: $AG : AB = AB : (AG - AB)$, eli kuin lyhyyden vuoksi linjan AG pituutta merkitsemme x:llä ja koska $AB = s_5$,

$$x : s_5 = s_5 : (x - s_5),$$

josta seuraa yhtälö

$$x^2 - s_5 x - s_5^2 = 0.$$

Tämä yhtälö ratkaisten saadaan sitte $x = \frac{s_5(1 \pm \sqrt{5})}{2}$ ja koska x:n poistava arvo ei voi tulla kysymykseen, niin sentähden on

$$x = AG = \tfrac{1}{2} s_5 (1 + \sqrt{5}).$$

Kolmikulmat DGA ja AGI ovat myös mukaiset, koska niillä on kulma AGD yhteinen ja suorat kulmat GAD ja GIA ovat yhtä isot. Sentähden on

$$DG : AG = AG : GI, \text{ s. t. s.},$$

$$2r : \tfrac{1}{2} s_5 (1 + \sqrt{5}) = \tfrac{1}{2} s_5 (1 + \sqrt{5}) : GI,$$

josta saadaan

$$GI = \frac{s_5^2 (3 + \sqrt{5})}{4r}.$$

Suorakulmaisesta kolmikulmasta AGI saadaan taas $AG^2 = AI^2 + GI^2$, josta seuraa

$$\tfrac{1}{4} s_5^2 (1 + \sqrt{5})^2 = \tfrac{1}{4} s_5^2 + \frac{s_5^4 (3 + \sqrt{5})^2}{16 r^2}.$$

Tämän yhtälön puolet jakaen yhteisellä kertojalla $\frac{1}{4} s_5^2$ ja yhtälö ratkaisten saadaan vihdoin $s_5 = r \sqrt{\frac{10 + 4\sqrt{5}}{7 + 3\sqrt{5}}}$ eli

5. $$s_5 = r \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = 1{,}175 \cdots \times r.$$

Kuin sitte s_5:n näin saatu arvo pannaan s_n:n siaan kysymyksen 21 yhtälössä 1, niin siitä saadaan

6. $$\varrho_5 = r \sqrt{1 - \frac{5 - \sqrt{5}}{8}} = \tfrac{1}{4} r \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \tfrac{1}{4} r (1 + \sqrt{5}) = 0{,}809 \cdots \times r.$$

Yhtälöistä 2·· ja 8 kysymyksessä 21 saadaan sitte taas, kuin niissä pannaan $n = 5$ ja $s_5 = r \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$ sekä $\varrho_5 = \tfrac{1}{4} r (1 + \sqrt{5})$,

$$\begin{cases} \left(s_5 = r\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}} = 1{,}175\cdots\times r,\right) \\ S_5 = 2r\sqrt{5-2\sqrt{5}} = 1{,}453\cdots\times r, \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{10} = \tfrac{1}{2}r(\sqrt{5}-1) = 0{,}618\cdots\times r, \\ S_{10} = 2r\sqrt{\tfrac{1}{5}(5-2\sqrt{5})} = 0{,}649\cdots\times r, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 = \tfrac{5}{8}r^2\sqrt{2(5+\sqrt{5})} = 2{,}377\cdots\times r^2, \\ A_5 = 5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}} = 3{,}632\cdots\times r^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{10} = \tfrac{5}{4}r^2\sqrt{2(5-\sqrt{5})} = 2{,}938\cdots\times r^2, \\ A_{10} = 10r^2\sqrt{\tfrac{1}{5}(5-2\sqrt{5})} = 3{,}249\cdots\times r^2. \end{cases}$$

Muist. 1. Koska $s_{10} = \frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$, niin $s_{10}{}^2 = \frac{1}{2}r^2(3-\sqrt{5})$ ja sentähden $r^2 + s_{10}{}^2 = \frac{1}{2}r^2(5-\sqrt{5}) = s_5{}^2$; mutta $r^2 = s_6{}^2$ ja sentähden on

$$s_5{}^2 = s_6{}^2 + s_{10}{}^2,$$

s. t. s., että neliö säännöllisen viisikulman sivulla on yhtä iso kuin neliöt säännöllisen kuusikulman sivulla ja säännöllisen kymmenkulman sivulla yhteensä, kuin nämä monikulmat ovat piirretyt samaan ympyrään.

Muist. 2. Edellä on nähty, kuinka ympyrään, jonka säde on tunnettu, piirrettyjen säännöllisten 3-, 4- ja 5-kulmain sivujen pituudet sekä kuvioiden laajuudet helposti saadaan ja kuinka sitte kysymyksen 21 kaavoista 1, 2,·· ja 8 voidaan laskea ympyrän ympäri piirrettyjen säännöllisten 3-, 4- ja 5-kulmain sekä ympyrään ja sen ympäri piirrettyjen säännöllisten 6-, 8- ja 10-kulmain sivujen pituudet ja kuvioiden laajuudet. Samojen kaavojen mukaan voidaan sitte laskea samanlaisten 12-, 16- ja 20-kulmain ja sitte 24-, 32- ja 40-kulmain j. n. e. sivujen pituudet sekä kuvioiden laajuudet. Tällä tavoin voidaan tutkia kaikki ympyrään sekä sen ympäri piirretyt säännölliset suoraviivaiset kuviot, joidenka sivujen luku on 2^n, $3\cdot 2^n$ eli $5\cdot 2^n$, olipa n mikä kokoluku hyvänsä.

Se on taas selvä, että kahden pisteen (paikan) välillä olevasta kahdesta tiestä, joidenka poukamat ovat aina yhdänne ja samanne päin, ulkopuoleinen on pitempi kuin sisäpuoleinen. Tästä seuraa selvästi, että ympyrän kehä on lyhempi kuin sen ympäri piirretyn suoraviivaisen kuvion ympärys, mutta pitempi kuin ympyrään piirretyn suoraviivaisen kuvion ympärys.

Jos sentähden edellisten kaavain mukaan lasketaan ympyrään sekä sen ympäri piirrettyjen säännöllisten m-kulmain sivujen pituudet ja ne sitte otetaan m kertaa, niin sillä tavoin saadaan kaksi pituutta, joista toinen on isompi ja toinen pienempi kuin ympyrän kehä. Kuta isompi taas ympyrään ja sen ympäri piirrettyjen säännöllisten kuvioiden sivujen luku m on, sitä pienempi on selvästi kuvioiden ympäryksien väli, josta seuraa, että ympyrän kehän pituus tällä tavoin voidaan saada niin lähimäärin kuin tahdotaan, sillä olisko ympyrän ympäri ja ympyrään piirrettyjen säännöllisten m-kulmain ympäryksien väli $= \frac{1}{k}$, niin ympyrän kehän ja siihen piirretyn m-kulman ympäryksen väli olisi silloin pienempi kuin $\frac{1}{k}$ ja kehän pituus olisi silloin saatu niin lähimäärin, että virhi olisi pienempi kuin $\frac{1}{k}$. Koska ympyröiden kehät taas ovat toisiinsa samassa suhteessa kuin niiden halkasiatkin, niin ympyrän kehän ja halkasian eli puolen kehän ja säteen välillä oleva suhde on aina sama, olipa ympyrä kuinka iso hyvänsä. Tämän suhteen ilmoittaja on mitaton luku, jota yleislaskussa merkitään Kreikan puustavilla π ja sen lähimäärinen arvo sadaan ympyrän, jonka säde on yksi (mitan pituus), puolen kehän pituus edellisellä tavalla lähimäärin luskemalla. Näin saadaan $\pi = 3{,}1415927\cdots$.

Kuin taas säännöllisen 2^n-, $3 \cdot 2^n$- eli $5 \cdot 2^n$- kulman sivun pituus on tunnettu, niin se on selvä, että tämmöiseen kuvioon sekä sen ympäri piirrettyjen ympyräin säteiden pituudet voidaan helposti saada kysymyksistä 21 ja 22 saaduista kaavoista. Mainitut kaavat eli yhtälöt ovat silloin ratkaistavat S_n, S_{2n}, s_n eli s_{2n} pitäen tunnettuina ja r tuntemattomana ja se on aina huomattava, että kaavoissa, joissa säännöllisen monikulman sivua merkitään S_n:llä eli S_{2n}:llä, r merkitsee monikulmaan piirretyn ympyrän sädettä, mutta kaavoissa, joissa s_n eli s_{2n} merkitsee monikulman sivua, merkitsee r monikulman ympäri piirretyn ympyrän sädettä. Niin saadaan esm. kaavasta

$$S_5 = 2r\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

säännölliseen viisikulmaan piirretyn ympyrän säde

$$r = \varrho_5 = \tfrac{1}{2}S_5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{2}S_5 \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{25-4\cdot 5}} = \tfrac{1}{2}S_5\sqrt{\tfrac{1}{5}(5+2\sqrt{5})} =$$
$$= 0{,}688 \cdot\cdot \times S_5.$$

Samoin saadaan kaavasta

$$S_{10} = 2r\sqrt{\tfrac{1}{5}(5-2\sqrt{5})}$$

$$r = \varrho_{10} = \tfrac{1}{2}S_{10}\sqrt{\frac{5}{5-2\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{2}S_{10}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 1{,}538 \cdot\cdot \times S_{10}.$$

Säännöllisen monikulman laajuus saadaan sitte helposti, kuin vaan kuvion sivun sekä apotemin, kuvioon piirretyn ympyrän säteen, pituudet kerran ovat tunnetut, sillä säännöllisen n-kulman laajuus a_n on $= \frac{1}{2}s_n\varrho_n$, jossa s_n merkitsee n-kulman sivua ja ϱ_n apotemia.

Kys. 23. *Neliön sivun pituus $= a$ (tuumaa) on tunnettu; minkä, tämän neliön kanssa yhtä ison, suorakulmion ympärys on b (tuumaa) pitempi kuin neliön ympärys?*

Koska neliön sivu on a tuuman pituinen, niin sen laajuus on $= a^2$ (neliötuumaa) ja ympärys $4a$ t. Merkitköön taas x (t.) suorakulmion pituutta, niin sen leveys on $(2a + \frac{1}{2}b - x)$ tuumaa, koska puoli suorakulmion ympäryksestä (kahden sivun summa) on yhtä iso kuin puoli neliön ympäryksestä enennettynä $\frac{1}{2}b$:llä. Suorakulmion laajuus on siis $x(2a + \frac{1}{2}b - x)$ (n.t.) ja koska sen pitää oleman yhtä ison neliön kanssa, niin tästä saadaan yhtälö

$$x(2a + \tfrac{1}{2}b - x) = a^2,$$

josta sitte saadaan suorakulmion pituus

$$x = \frac{4a + b \pm \sqrt{8ab + b^2}}{4}$$

ja sentähden leveys

$$2a+\tfrac{1}{2}b-x=\frac{4a+b\mp\sqrt{8ab+b^2}}{4}.$$

Tälle kysymykselle saadaan siis yksi ainoa vastaus, koska x:n toinen arvo merkitsee suorakulmion pituutta ja toinen sen leveyttä, Näistä x:n arvoista nähdään myös, että b ei voi olla poistosuuruus, sillä jos b olisi poistosuuruus ja $-b<8a$, niin x:n arvot olisivat kuvasuuruuksia ja jos taas $-b>8a$, niin silloin eivät x:n arvot olisi lisäsuuruuksia. Tästäkin nähdään siis, että kaikista yhtä isoista suorakulmioista neliöllä on pienin ympärys.

Kys. 24. *Kuin erääsen vuorikaivokseen heitetään kivi vapaasti putoamaan, niin sen kolaus kaivoksen pohjaan kuuluu a sekuntin kuluttua siitä silmänräpäyksestä, kuin kivi pudotetaan; kuinka syvä on sitte tämä kaivos?*

Se on luonnontieteestä tunnettu seikka, että vapaasti putoava kappale t sekuntissa putoaa $\frac{g}{2}\cdot t^2$ jalkaa, s. t. s., kuin v merkitsee matkaa, jonka kappale putoaa t sekuntissa, niin se matka saadaan kaavasta $v=\frac{gt^2}{2}$, jossa g merkitsee maan vetovoimaa, s. o. putoavan kappaleen pikaisuutta ensimäisen sekuntin lopussa, joka (maan vetovoima $=g$) meidän seuduilla on 33 jalkaa. Edellisestä yhtälöstä saadaan $t=\sqrt{\frac{2v}{g}}$ ja kuin tähän aikaan pannaan aika, jonka ääni viipyy kaivoksen pohjasta sen reunalle tullessansa, niin siten saadaan kiven heiton ja kolauksen kuulumisen välillä kulunut aika a. Luonnontieteestä on taas tunnettu, että ääni kuivassa, 0 pykälän lämpimässä, ilmassa kulkee 1120 jalan paikoille sekuntissa. Sentähden viipyy ääni v jalkaa pitkällä matkalla $\frac{v}{1120}$ sekuntia. Tästä saadaan nyt, kuin lukua 1120 lyhyyden vuoksi merkitään puustavilla b, yhtälö

$$\sqrt{\frac{2v}{g}}+\frac{v}{b}=a,$$

josta seuraa

$$v = \frac{b}{g}(ag + b \pm \sqrt{2agb + b^2}) \text{ (jalkaa).}$$

Näistä arvoista toteuttaa ainoastansa toinen, $v_{\prime\prime} = \frac{b}{g}(ag + b - \sqrt{2agb + b^2})$, edellisen yhtälön ja kaivoksen syvyys saadaan, kuitenkin vaan lähimäärin, kaavasta $v = \frac{b}{g}(ag + b - \sqrt{2agb + b^2})$, kuin siinä pannaan $b = 1120$ ja $g = 33$. Ensimäinen arvo v:lle $v_{\prime} = \frac{b}{g}(ag + b + \sqrt{2agb + b^2})$ toteuttaa yhtälön $\frac{v}{b} - \sqrt{\frac{2v}{g}} = a$. Viimesestä kaavasta saadaan siis vastaus kysymykseen: kuinka syvä on se kaivos, josta on huomattu, että sen ai'an, jonka ääni viipyy kaivokson pohjasta sen partaalle tullessansa, ja sen ai'an, jonka kivi viipyy kaivoksen pohjaan pudotessansa, väli on a sekuntia?

Seuraavat kysymykset voidaan edellisten johdolla helposti ratkaista, jonkatähden ne ovat jätetyt ilman selityksittä.

Kys. 25. *Mikä luku on yhtä iso toisen alukkeensa kanssa?* Vastaus: $x_{\prime} = 0$ ja $x_{\prime\prime} = 1$.

Kys. 26. *Luku 24 on jaettava kahteen osaan, joidenka tulo on 35 kertaa niin iso kuin niiden väli; kuinka ison pitää silloin itsekunkin osan oleman?* Vastaus: 14 ja 10 eli -60 ja 84, sillä $-60 + 84 = 24$ ja $-60 \cdot 84 = 35(-60 - 84)$.

Kys. 27. *Eräs sotapäällys oli asettanut väkensä täytenäiseen neliöön; jos hänellä olisi ollut 1125 miestä enemmän, niin hän olisi saanut panna 5 enemmän joka riviin neliössänsä; kuinka monta miestä oli hänen sotajoukossansa?* Vastaus: 12100 miestä.

Kys. 28. *Mikä on kantaluku semmoisessa lukujärjestyksessä, jossa meidän luku 29771 kirjoitetaan 20405?* Vastaus: 11.

Kys. 29. *Mies osti teetä 320 markalla; jos hän samalla rahasummalla olisi saanut 4 naulaa vähemmän, niin naula olisi hänelle maksanut 4 markkaa enemmän; kuinka monta naulaa osti hän?* Vastaus: 20 eli -16, s. t. s., hän osti 20 eli möi 16 naulaa.

Kys. 30. *Kaksi henkeä A ja B oli myönyt yhteensä 140 munaa toinen enemmän kuin toinen, vaan kumpikin oli saanut yhtä paljo rahaa; A sanoi sitte B:lle: jos minulla olisi ollut niin paljo munia kuin sinulla ja ne olisin myönyt samaan hintaan munan, kuin omistani sain, niin minä olisin saanut 3 m. 60 p. Tähän vastasi B: mutta jos minulla olisi ollut niin monta munaa kuin sinulla ja ne olisin myönyt samaan hintaan munan kuin omistani sain, niin minä olisin saanut 6 m. 40 p. Kuinka monta munaa oli kukin heistä myönyt?* Vastaus: *A* oli myönyt 80 ja *B* 60 munaa.

Kys. 31. *Eräs seura, jossa oli miehiä ja naisia, yhteensä 20 henkeä, teki huviretken, joka maksoi seuralle 192 markkaa; jokainen mies maksoi 4 m. enemmän kuin kukin nainen, joten kaikki miehet yhteensä maksoivat yhtä paljo kuin kaikki naisetkin yhteensä; kuinka monta miestä ja kuinka monta naista oli seurassa?* Vastaus: 8 miestä ja 12 naista.

Kys. 32. *Mies möi 24 markasta veneen, josta hän oli maksanut niin paljo enemmän, että hän tässä kaupassa menetti niin monta sadalta ostohinnastansa, kuin hän oli maksanut markkaa veneestä; kuinka paljo oli mies veneestä maksanut?* Vastaus: 60 eli 40 markkaa.

Kys. 33. *A osti kappaleen verkaa, joka maksoi 504 markkaa. Tästä verkakappaleesta leikkasi hän omaksi tarpeeksensa 12 kyynärää ja möi tähteen 420 markkaan, joten hän voitti 2 markkaa joka kyynärälle; kuinka pitkä oli sitte A:n ostama verkakappale?* Vastaus: 42 kyynärää.

Kys. 34. *Lääkäri Sangrados'en apulainen Gil Blas pani aina edeltä käsin neljännen osan päivän tulosta omaan kukkaroonsa ja sai iltasella tilinteossa neljännen osan tähteestä palkaksensa. Tällä tavoin päätti hän (si l'Arithmétique est une science certaine) saaneensa puolen koko päivän tulosta. Saiko hän todellakin puolen eli kuinka iso osa päivän tulosta olisi hänen pitänyt ottaa ja iltasella saada tähteestä, saadaksensa puolen koko päivän tulosta?* Vastaus: Hän sai vaan $\frac{7}{16}$ päivän tulosta ja saadaksensa puolen olisi hänen pitänyt edeltä käsin ottaa

$\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{1}{3{,}414\cdots}$ koko tulosta ja iltasella saada yhtä ison osan tähteestä palkaksensa.

Kys. 34.*) *M vastasi kysymykseen, kuinka paljo hänellä oli vuotuista tuloa: jos ruplaluku joka minulla on tuloa vuodessa lisätään lu'ulla 1578 ja vähennetään lu'ulla 142 ja näin saaduista lu'uista otetaan kolmas aluke, niin alukkeiden väli on 10; kuinka monta ruplaa oli M:llä vuotuista tuloa?* Vastaus: 150 ruplaa.

Kys. 35. *Yhtäsivuisen kolmikulman laajuus on* $=1\frac{1}{2}$ *neliötuumaa; kuinka pitkät ovat silloin sen sivut ja korkeus?* Vastaus: Joka sivu kolmikulmassa on $=\sqrt{2\sqrt{3}}=1{,}86\cdots$ tuumaa ja korkeus $=\sqrt{1{,}5\sqrt{3}}=1{,}61\cdots$ t.

Kys. 36. *Kukkatarhaksi, joka on tehtävä säännölliseksi kahdeksankulmaksi, pitää otettaman tynnyrin ala (14000 neliökyynärää) maata; kuinka pitkä sivu pitää silloin kahdeksankulmalle mitattaman ja kuinka pitkä tulee sen apotemi olemaan?* Vastaus: Kuviolle pitää otettaman $\sqrt{7000(\sqrt{2}-1)}=53{,}8\cdots$ kyynärää pitkä sivu ja apotemi tulee olemaan $\frac{1}{2}\sqrt{7000(\sqrt{2}+1)}=64{,}9\cdots$ kyynärää pitkä.

Kys. 37. *Kuinka paksu nelikulmainen hirsi voidaan veistää 17 tuuman paksuisesta pyöreästä pölkystä?* Vastaus: $8{,}5\cdot\sqrt{2}=$ $=12{,}02\cdots$ tuumaa paksu.

---

*) Tästä kysymyksestä saadaan yhtälö

$$\sqrt[3]{x+1578}=\sqrt[3]{x-142}+10,$$

jonka puolet korottaen kolmanteen korkoon ja kaikki selventämiset tehden sitte saadaan

$$24=\sqrt[3]{x-142}\cdot(\sqrt[3]{x-142}+10).$$

Mutta ensimäisen yhtälön mukaan on taas $\sqrt[3]{x-142}+10=\sqrt[3]{x+1578}$, josta saadaan yhtälö

$$24=\sqrt[3]{x-142}\cdot\sqrt[3]{x+1578}.$$

Tämän yhtälön puolet korottaen kolmanteen korkoon saadaan sitte toisen nousun yhtälö ratkaistavaksi.

Kys. 38. *Kuinka iso on vesirattaan ympärys (kehä), kuin sen lävistäjä on 16 jalkaa pitkä?* $16\pi = 50,26\cdots$ jalkaa.

Kys. 39. *Ympyrän pyöreä pöytä on tehtävä 12 hengelle; kuinka pitkän pitää sen lävistäjän oleman, jos joka hengen luullaan tarvitsevan* $\frac{3}{4}$ *kyynärää leveän tilan?* Vastaus: $\frac{9}{\pi} = 2,86\cdots$ kyynärää.

Kys. 40. *Kuinka laaja on ympyrä, jonka kehä on 100 jalkaa pitkä?* Vastaus: $\frac{100^2}{4\pi} = \frac{2500}{\pi} = 795,7\cdots$ neliöjalkaa.

Kys. 41. *Ympyrän pyöreän niitty-aituuksen sisässä on 4:n tynnyrin ala maata; kuinka pitkä on sen aita ja kuinka pitkä lävistäjä?* Vastaus: Aita on $= 2\sqrt{4 \cdot 14000\pi} = 838,8\cdots$ kyynärää ja lävistäjä $= 2\sqrt{\frac{4 \cdot 14000}{\pi}} = 267,02\cdots$ kyynärää.

Kys. 42. *Kuinka pitkä on saman niitty-ympyrän säde kartalla, jossa se (niitty) on kuvatta* $\frac{1}{1000000}$*:osassa isoudestansa (jossa niityn kuva on* $\frac{1}{1000000}$ *niityn laajuudesta)?* Vastaus: Säde on $= \frac{1}{1000}\sqrt{\frac{4 \cdot 14000}{\pi}} = 0,1335\cdots$ kyynärää pitkä.

Muist. Ympyröiden laajuudet ovat toisiinsa samassa suhteessa kuin neliöt niiden säteillä, jonkatähden säteet ovat toisiinsa samassa suhteessa kuin toiset alukkeet laajuuksista.

Kys. 43. *Ympyrän, jonka säde on 8 tuuman pituinen, ympäri on piirrettävä toinen ympyrä samalla keskipisteellä niin, että kehäin välillä oleva tila (ringin laajuus) on 324 neliötuumaa. Kuinka pitkän pitää silloin isomman ympyrän säteen oleman?* Vastaus: $\sqrt{\frac{324}{\pi} + 64} = 12,9\cdots$ tuumaa pitkän.

Kys. 44. *Kuinka pitkä on sen ympyrän säde, joka on yhtä iso kuin ympyrärinki, jonka leveys on b t. ja isompi säde r tuuman pituinen?* Vastaus: Semmmoisen ympyrän säde on $= \sqrt{b(2r - b)}$; se on siis keskisuhteinen ringin leveyden b ja toisen osan $(2r - b)$ isomman ympyrän lävistäjästä välillä, jonkatähden etsittävä säde on helppo piirtämälläkin määrätä.

Kys. 45. *Kuinka monen asteen kaari on yhtä pitkä kuin ympyrän säde?* Vastaus: $57^{\circ},29\cdots$, sillä kaarien samassa ympyrässä pituudet ja astelu'ut ovat aina verrannolliset, josta seuraa $2\pi r : r = 360^{\circ} : x^{\circ}$ ja $x = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$.

Kys. 46. *Mikä suorakulmio on isoin kaikista, joilla on sama ympärys?* Vastaus: neliö.

Kys. 47. *Mikä luku pantuna x:n siaan antaa lausekkelle $x^2 - 6x + 10$ pienimmän arvon?* Vastaus: 3.

Kys. 48. *Mikäs suuruus pantuna x:n siaan antaa lausekkeelle $\frac{ax}{bx^2 + c}$, jossa a, b ja c merkitsevät lukuja, isoimman arvon?* Vastaus: $x = \sqrt{\frac{c}{b}}$.

Kys. 49. *Mikä yhtäkylkinen kolmikulma on isoin kaikista, joidenka yhtä isot sivut ovat b tuuman pituiset?* Vastaus: se, jonka asema on $b\sqrt{2}$ tuumaa pitkä. Mutta $b\sqrt{2}$ on lävistäjä neliössä, jonka sivu on b ja kysymyksessä oleva kolmikulma on siis suorakulmainen ja sentähden helppo piirtää.

Kys. 50. *Mikä suuruus pantuna x:n siaan antaa lausekkeelle $\frac{4x^2 + 4x - 3}{6(2x + 1)}$ isoimman eli pienimmän arvon?* Vastaus: ei mikään, sillä kuin edellisen lausekkeen arvoa merkitään esm. y:llä ja kysymyksestä saatu yhtälö ratkaistaan, niin suuruus alukemerkin alla x:n arvoissa on aina lisäsuuruus, annettiinpa y:lle mitenkä isoja eli pieniä arvoja hyvänsä.

Kys. 51. *Mitkä jälekkäin olevat kokolu'ut x ja $x+1$ ovat semmoiset, että niiden kolmansien korkojen väli on yhtä iso kuin lukujen kolminkertainen tulo?* Vastaus: ei mitkään, sillä lukujen kolmansien korkojen väli on aina yhtä isompi kuin niiden kolminkertainen tulo. Kysymyksestä saadusta yhtälöstä saadaan vaan $x = \infty$.

§ 5.

Toisen nousun yhtälöistä kahdella ja usiammalla tuntemattomalla.

Jokainen toisen nousun yhtälö kahdella tuntemattomalla esm. x ja y voidaan, alukemerkkien sekä nimittäjöiden hävittämällä, kaikki osiot muuttaen ensimäiseen puoleen ja tuntemattomien suhteen samankaltaiset osiot yhdistäen, saada seuraavaan muotoon:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

jossa etukertojat a, b, c,$\cdots$ merkitsevät mitä tunnettuja suuruuksia hyvänsä.

Se on selvä, että tämmöisessä yhtälössä voidaan toiselle tuntemattomalle x esm. antaa mikä arvo hyvänsä, jolloin toinen y saapi kaksi sitä vastaavaa arvoa, jos ensimäisen osion etukertoja a ei ole nolla, jolloin yhtälö y:n suhteen olisi ensimäisestä nousutsa ja y saisi vaan yhden arvon, kuin x:lle annettaisiin joku määrätty arvo. Toinen tuntematon (x) esm. on siis tämmöisessä yhtälössä vapaasti muuttuvainen ja toinen (y) sen tekemä.

Olisko taas kaksi toisen nousun yhtälöä kahdella tuntemattomalla, x ja y, kumpikin muodostettu edellä mainitulla tavalla esm.

$$\text{I.} \quad ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$
$$\text{II.} \quad a'y^2 + b'xy + c'x^2 + d'y + e'x + f' = 0,$$

niin näistä voidaan tuntemattomien arvot muuttamatta johtaa kolmas esm. y:n suhteen ensimäisen nousun yhtälö, s. t. s., semmoinen jossa y:n toista korkoa ei ole.

Todellakin saadaan ensimäisen yhtälön puolet kertoen suuruudella a' ja toisen suuruudella a ja sitte poistaen esm. toisen puolet ensimäisen puolista

$$\text{III.} \quad mxy + nx^2 + py + qx + r = 0,$$

kuin väliä $a'b - ab'$, $a'c - ac'$, j. n. e. merkitään puustavilla m, n, p, q ja r.

Alkuperäisten yhtälöiden siaan voidaan nyt ratkaista esm. yhtälöt I ja III, koska tuntemattomien arvot ovat yhtälössä III samat kuin alkuperäisissäkin.

Yhtälöstä III saadaan

$$y = -\frac{nx^2 + qx + r}{mx + p}$$

ja kuin tämä arvo pannaan y:n siaan yhtälössä I, niin siitä saadaan

$$a\left(\frac{nx^2 + qx + r}{mx + p}\right)^2 - (bx + d)\frac{nx^2 + qx + r}{mx + p} + cx^2 + ex + f = 0.$$

Nimittäjöiden hävittämällä ja kertomiset tehden sekä ne osiot yhdistäen, joissa tuntemattoman (x) sama korko on kertojana, saadaan edellinen yhtälö seuraavaan muotoon:

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon = 0,$$

joka on neljännen nousun yhtälö yhdellä tuntemattomalla. Kahdesta yhtälöstä kahdella tuntemattomalla saadaan siis tavallisesti neljännen nousun loppu-yhtälö ratkaistavaksi.

Jos toisen nousun yhtälöiden sekä niissä olevien tuntemattomien luku olisi isompi, niin niistä saatu loppu-yhtälö olisi vielä isommasta noususta.

Yleisesti on loppu-yhtälön nousu tulo alkuperäisten yhtälöiden nousuista.

Tässä otamme nyt vaan semmoiset yhtälöt ratkaistaviksi, joista loppu-yhtälöksi jollakin tavalla saadaan toisen nousun yhtälö yhdellä tuntemattomalla.

Kuin yhtälöiden ja niissä olevien tuntemattomien luku on sama, mutta ainoastansa yksi yhtälö on toisesta ja kaikki muut ensimäisestä noususta, niin silloin saadaan aina loppu-yhtälöksi toisen nousun yhtälö yhdellä tuntemattomalla ja jokaiselle tuntemattomalle kaksi arvoa, joista ne arvot tuntemattomille kuuluvat yhteen, jotka pantuina niiden siaan toteuttavat kaikki yhtälöt.

Kuin m tämmöistä yhtälöä m tuntemattomalla on ratkaistavana, niin yhtälöistä voidaan eroittaa pois mikä tuntematon hyvänsä, sen arvo ottaen yhdestä ensimäisen nousun yhtälöstä ja pannen sen siaan kaikissa muissa, joten saadaan $(m - 1)$ yhtälöä $(m - 1)$:llä tuntemattomalla, joidenka kanssa sitte menetetään samoin kuin alkuperäistenkin. Näin tehdään, kunnekka saadaan yksi yhtälö yhdellä tuntemattomalla ratkaistavaksi, josta saadut arvot tälle tuntemattomalle pannaan sen siaan edellisessä ensimäisen nousun yhtälössä, josta sitte saadaan vastaavat arvot toiselle tuntemattomalle j. n. e.

Olisivatko esm. yhtälöt

$$xy = 12$$
$$2x - 3y + 1 = 0$$

ratkaistavat, joista edellinen on toisesta ja jälkimäinen ensimäisestä nousuista, niin jälkimäisestä saadaan

$$y = \frac{2x+1}{3}$$

ja kuin tämä arvo pannaan y:n siaan edellisessä, niin siitä saadaan

$$x \cdot \frac{2x+1}{3} = 12$$

ja sieventäen

$$x^2 + \tfrac{1}{2}x - 18 = 0,$$

josta taas

$$x = -\tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{1}{16} + 18} \text{ eli } x = 4 \text{ ja } x = -\tfrac{9}{2}.$$

Kuin toisessa alkuperäisessä yhtälössä x:n siaan pannaan 4, niin saadaan $y = 3$ ja $-\frac{9}{2}$ pannen x:n siaan saadaan $y = -\frac{8}{3}$.

Juure

$$x = 4 \text{ ja } y = 3$$

toteuttavat yhtälöt ja kuuluvat siis yhteen.

Samoin myös kuuluvat juuret

$$x = -\tfrac{9}{2} \text{ ja } y = -\tfrac{8}{3}$$

yhteen sillä ne toteuttavat myös yhtälöt, mutta

$$x = 4 \text{ ja } y = -\tfrac{8}{3} \text{ eli } x = -\tfrac{9}{2} \text{ ja } y = 3$$

eivät toteuta alkuperäisiä yhtälöitä.

Olisivatko vielä yhtälöt

I. $\quad x^2 - z^2 + 2x + 3y = 2$

II. $\quad 2x - y + z = -1$

III. $\quad x + y + z = 0$

ratkaistavat, niin y on helpoin ensin eroittaa, koska toisen nousun yhtälössä on ainoastansa sen ensimäinen korko.

Kolmannesta yhtälöstä saadaan

$$y = -x - z = -(x+z)$$

ja kuin tämä arvo pannaan toisiin yhtälöihin, niin niistä saadaan

$$\text{IV.} \qquad x^2 - z^2 - x - 3z = 2$$

$$\text{V.} \qquad 3x + 2z = -1.$$

Näistä taas seuraa

$$z = -\frac{1+3x}{2},$$

ja vihdoin

$$\text{VI.} \qquad x^2 - \left(\frac{1+3x}{2}\right)^2 - x + 3\frac{1+3x}{2} = 2.$$

Viimesestä yhtälöstä saadaan sievennetty yhtälö

$$x^2 - \tfrac{8}{5}x + \tfrac{3}{5} = 0,$$

josta taas

$$x_{,} = 1 \text{ ja } x_{,,} = \tfrac{3}{5}.$$

Kuin nämä arvot pannaan x:n siaan yhtälössä V, niin siitä saadaan z:n vastaavat arvot

$$z_{,} = -2 \text{ ja } z_{,,} = -\tfrac{7}{5}$$

ja kuin sitte x:n ja z:n ensimäiset arvot, 1 ja -2, pannaan esm. kolmanteen alkuperäisistä yhtälöistä, niin siitä saadaan $y_{,} = 1$.

Samoin saadaan x:n ja z:n toiset arvot, $\frac{3}{5}$ ja $-\frac{7}{5}$, pannen niiden siaan yhtälössä III $y_{,,} = \frac{4}{5}$.

Yhtälöiden juuret ovat siis joko

$$\begin{cases} x_{,} = 1, \\ y_{,} = 1, \\ z_{,} = -2, \end{cases} \text{ eli } \begin{cases} x_{,,} = \tfrac{3}{5}, \\ y_{,,} = \tfrac{4}{5}, \\ z_{,,} = -\tfrac{7}{5}. \end{cases}$$

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 1, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\tfrac{2}{5}, \\ y = -\tfrac{1}{5}. \end{cases}$

Esm. 2. $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - 3y = \tfrac{1}{4}, \\ x + y = \tfrac{3}{2}. \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1, \\ y = \tfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -7, \\ y = 8\tfrac{1}{2}. \end{cases}$

Esm. 3. $\begin{cases} ax^2 + by^2 = c, \\ x + \ y \ = 1. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{b \pm \sqrt{ac+bc-ab}}{a+b}, \\ y = \dfrac{a \mp \sqrt{ac+bc-ab}}{a+b}. \end{cases}$

Esm. 4. $\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 - y^2 = b^2. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{a^2+b^2}{2a} \\ y = \dfrac{a^2-b^2}{2a} \end{cases}$ $\begin{cases} x = +\infty, \\ y = -\infty. \end{cases}$

Esm. 5. $\begin{cases} xy = a^2, \\ mx = ny. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm a\sqrt{\dfrac{n}{m}}, \\ y = \pm a\sqrt{\dfrac{m}{n}}. \end{cases}$

Esm. 6. $\begin{cases} x + y = s, \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = q. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{s}{2}\left(1 \pm \sqrt{\dfrac{q-2}{q+2}}\right), \\ y = \dfrac{s}{2}\left(1 \mp \sqrt{\dfrac{q-2}{q+2}}\right). \end{cases}$

Esm. 7. $\begin{cases} 2x + 3y = 118, \\ 5x^2 - 7y^2 = 4333. \end{cases}$ $\begin{cases} x = 35, \\ y = 16; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 229\tfrac{6}{17}, \\ y = 192\tfrac{4}{17}. \end{cases}$

Esm. 8. $\begin{cases} xy + \ z = 2, \\ 2x + y + \ z = 4, \\ 4x - y + 3z = 3. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \tfrac{1}{2}, \\ y = 2, \\ z = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1, \\ y = \tfrac{7}{4}, \\ z = \tfrac{1}{4}. \end{cases}$

Esm. 9. $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2z - y = 2, \\ \tfrac{2}{3}(4v - \tfrac{1}{2}) = z, \\ y(x + 2z) - yz = 4v - 2. \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ y = 0, \\ z = 1, \\ v = \tfrac{1}{2}. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \tfrac{1}{2}, \\ y = -\tfrac{3}{2}, \\ z = \tfrac{1}{4}, \\ v = \tfrac{7}{32}. \end{cases}$

Olisko vielä kaksi isomman kuin ensimäisen nousun yhtälöä kahdella tuntemattomalla esm.

$$F(x, y) = 0 \text{ ja } \varphi(x, y) = 0,$$

joissa $F(x, y)$ sekä $\varphi(x, y)$ merkitsevät, tuntemattomien x ja y suhteen, kokolausekkeita, niin niistä saadaan määrätyt arvot tuntemattomille, jos ei yhtälöiden ensimäisissä puolissa ole yhteistä kertojata, joka sisältää yhden taikka kumpasenkin tuntemattoman, olipa niiden arvot mitkä hyvänsä.

Mutta jos lausekkeissa $F(x, y)$ ja $\varphi(x, y)$ on yhteinen kertoja esm. $f(x, y)$ sisältävä kumpasenkin tuntemattoman, niin se on selvä että kaikki ne arvot tuntemattomille, jotka tekevät yhteisen kertojan $f(x, y)$ nollaksi, tekevät myös molemmat lausekkeet $F(x, y)$ ja $\varphi(x, y)$ nollaksi ja toteuttavat siis alkuperäiset yhtälöt. Semmoiset arvot tuntemattomille x ja y saadaan taas yhtälöstä

$$f(x, y) = 0$$

ja koska tässä on yksi yhtälö kahdella tuntemattomalla, niin toiselle tuntemattomalle voidaan antaa mitä arvoja hyvänsä, jolloin toinen saapi niitä vastaavat arvot, joidenka luku siis on ääretöin. Tässä tapauksessa ei sentähden alkuperäisistä yhtälöistä saada tuntemattomille määrättyjä arvoja.

Jos taas lausekkeissa $F(x, y)$ ja $\varphi(x, y)$ olisi yhteinen kertoja esm. $f(x)$ sisältävä ainoastansa yhden tuntemattoman x, niin yhtälöstä

$$f(x) = 0$$

saataisiin x:lle täydellisesti määrätyt arvot, jotka tekisivät yhteisen kertojan $f(x)$ ja siis myös lausekkeet $F(x, y)$ ja $\varphi(x, y)$ nollaksi, olipa y:n arvot mitkä hyvänsä. Tässä tapauksessa saataisiin siis alkuperäisistä yhtälöistä toiselle tuntemattomalle (x) määrätyt arvot, mutta toiselle (y) voitaisiin antaa kuinka paljo ja mitä arvoja hyvänsä.

Jos sentähden yhtälöt

$$F(x, y) = 0 \text{ ja } \varphi(x, y) = 0$$

ovat täydellisesti määrätyt, s. t. s., jos niistä saadaan määrätyt arvot kumpasellekin tuntemattomalle, niin niiden ensimäisissä puolissa ei saa olla yhtään yhteistä kertojata, joka sisältää tuntemattomat eli yhden tuntemattoman millä tavalla hyvänsä. Mutta jos toiselle tuntemattomalle esm. y löydettäisiin joku määrätty arvo esm. $y_1 = a$, joka pantuna y:n siaan lausekkeissa $F(x, y)$ ja $\varphi(x, y)$ tekee jonkun lausekkeen x:stä esm. $f(x)$ yhteiseksi kertojaksi niissä, niin silloin saataisiin yhtälöstä

$$f(x) = 0$$

x:lle y:n arvoa a vastava arvo eli usiampiakin arvoja, koska silloin, kuin $y = a$, $f(x)$ on yhteinen kertoja lausekkeissa $F(x, a)$ ja $\varphi(x, a)$, jonkatähden ne tulevat nollaksi, kuin vaan $f(x)$ tulee nollaksi.

Jos lausekkeet $F(x, y)$ ja $\varphi(x, y)$, joilla ei ole yhteistä jakajata, taas järjestetään esm. x:n mukaan ja niiden kanssa menetetään samoin kuin isointa yhteistä jakajata etsittäessä, kunneka saadaan x:stä vapaa tähde esm. $\psi(y)$, niin yhtälöstä

$$\psi(y) = 0$$

saadaan kaikki semmoiset arvot y:lle, jotka tekevät tämän tähteen nollaksi ja viimesen jakajan siis yhteiseksi jakajaksi lausekkeille $F(x, y)$ ja $\varphi(x, y)$.

Jos sentähden itsekukin yhtälöstä

$$\psi(y) = 0$$

saatu y:n arvo pannaan sen siaan viimesessä jakajassa, niin näin saatu lauseke x:stä esm. $f(x)$ tulee yhteiseksi jakajaksi alkuperäisten yhtälöiden ensimäisille puolille, jotka siis tulevat nollaksi samalla kertaa kuin lauseke $f(x)$:kin, joka on kertojana kumpasessakin.

Viimenen tähde pantuna nollaksi,

$$\psi(y) = 0,$$

on siis loppu-yhtälö, josta saadaan määrätyt arvot y:lle ja niitä vastaavat arvot x:lle saadaan selvästi itsekukin y:n arvo pannen sen siaan viimesessä jakajassa ja se sitte pannen yhtä isoksi nollan kanssa ja näin saatu yhtälö yhdellä tuntemattomalla, $f(x) = 0$, vihdoin ratkaisten.

Olisivatko esm. yhtälöt

$$\text{I.} \qquad x^2 + y^2 - 130 = 0$$

$$\text{II.} \qquad 9x^2 + 65xy - 56y^2 = 0$$

ratkaistavat ja esm. x tahdottaisiin eroittaa pois, niin loppu-yhtälö saadaan edellisen mukaan seuraavalla tavalla, kuin yhtälöiden ensimäisien puolien isoin yhteinen jakaja etsitään.

$$\begin{array}{lr|l}
 & 9x^2 + 65xy - 56y^2 & x^2 + y^2 - 130 \\
 & \mp 9x^2 \qquad \mp 9y^2 \pm 1170 & 9 \text{ ensim. osa.} \\
\text{ensim. tähde} & + 65xy - 65y^2 + 1170. &
\end{array}$$

Tässä saadusta ensimäisestä tähteestä voidaan nyt jättää pois kertoja 65 ja ensimäinen jakaja kerrottuna y:llä on sitte jaettava tähteen toisella kertojalla $xy - y^2 + 18$. Näin saadaan:

$$\begin{array}{l|l}
yx^2 + y^3 - 130y & yx - y^2 + 18 \\
\hline
\mp yx^2 \pm y^2x \mp 18x & x + (y^2 - 18) \\
\hline
(y^2 - 18)x + y^3 - 130y & \\
y(y^2 - 18)x + y^4 - 130y^2 & \\
\mp y(y^2 - 18)x \quad \pm (y^2 - 18)^2 & \\
\hline
\text{toinen tähde} \quad y^4 - 130y^2 + (y^2 - 18)^2. &
\end{array}$$

Kuin tämä tähde, joka on vapaa x:stä pannaan yhtä isoksi kuin nolla, niin siitä saadaan loppu-yhtälö

$$y^4 - 130y^2 + (y^2 - 18)^2 = 0 \text{ eli } y^4 - 83y^2 + 162 = 0,$$

josta saadaan, kuin $y^2 = z$,

$$z^2 - 83z + 162 = 0.$$

Tämä toisen nousun yhtälö yhdellä tuntemattomalla voidaan helposti ratkaista ja siitä saadaan

$$z = 81 \text{ ja } z = 2$$

ja sentähden

$$y = \pm 9 \text{ ja } y = \pm\sqrt{2}.$$

Kuin sitte nämä arvot, jotka itsekukin tekevät viimesen tähteen nollaksi, pannaan yksi toisensa perästä y:n siaan viimesessä jakajassa $(yx - y^2 + 18)$, niin jokainen tekee sen yhteiseksi jakajaksi alkuperäisten yhtälöiden ensimäisille puolille, ja kuin näin saadut lausekkeet (yhteiset jakajat) pannaan jokainen yhtä isoksi kuin nolla, niin niistä saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned}
9x - 81 + 18 &= 0, \\
-9x - 81 + 18 &= 0, \\
\sqrt{2}\cdot x - 2 + 18 &= 0, \\
-\sqrt{2}\cdot x - 2 + 18 &= 0,
\end{aligned}$$

joista taas ne arvot x:lle saadaan, jotka, itsekukin sitä vastaavan y:n arvon kanssa, toteuttavat alkuperäiset yhtälöt. Näin saadaan juuri parit:

$$\begin{cases} x = 7, \\ y = 9, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -7, \\ y = -9, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{16}{\sqrt{2}} = -8\sqrt{2}, \\ y = +\sqrt{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8\sqrt{2}, \\ y = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Se on selvä, että edellistä eroituskeinoa voidaan käyttää olipa yhtälöiden luku mikä hyvänsä, sillä olisko m yhtälöä m tuntemattomalla, niin yhdestä yhtälöstä ja itsekustakin toisesta voidaan sama tuntematon eroittaa edellisellä tavalla, koska aina sama tuntematon on eroitettava vaan kahdesta yhtälöstä kerrallansa. Näin saadaan $(m-1)$ yhtälöä $(m-1)$:llä tuntemattomalla, joidenka kanssa menetetään samoin kuin alkuperäisten yhtälöidenkin kanssa. Näin voidaan tehdä kunnekka saadaan yksi yhtälö yhdellä tuntemattomalla, josta saadut arvot sitte pantuina viimeseen jakajaan antavat vastaavat arvot toiselle tuntemattomalle, kuin mainittu jakaja aina pannaan yhtä isoksi nollan kanssa ja yhtälö ratkaistaan. Kuin sitte edellä käytetty viimenen jakaja pannaan nollaksi ja edellä saatujen tuntemattomien vastaavat arvot pannaan niiden siaan tässä yhtälössä, niin siitä saadaan niitä vastaava arvo kolmannelle tuntemattomalle. Näin menetetään kunnekka kaikkien tuntemattomien arvot ovat löydetyt ja myös nähty mitkä arvot tuntemattomille yhtaikaa toteuttavat alkuperäiset yhtälöt.

Olisivatko esm. yhtälöt

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + y - 3 = 0 \\ \text{II.} & x^2 + y^2 - z^2 + 6z - 9 = 0 \\ \text{III.} & 4x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 = 0 \end{array}$$

ratkaistavat, niin x eroitetaan pois ensin yhtälöistä I ja II ja sitte yhtälöistä I ja III seuraavalla tavalla:

$$\begin{array}{l|l} \quad x^2 + y^2 - z^2 + 6z - 9 & x + y - 3 \\ \cline{2-2} \quad \mp x^2 \mp xy \pm 3x & x - (y-3) \\ \cline{1-1} -(y-3)x + y^2 - z^2 + 6z - 9 & \\ \pm(y-3)x \pm y(y-3) \mp 3(y-3) & \\ \cline{1-1} +y^2 + y(y-3) - 3(y-3) - z^2 + 6z - 9 & \end{array}$$

ja tämä tähde pannen nollaksi ja yhtälö sieventäen saadaan

$$\text{IV.} \qquad 2y^2 - 6y - z^2 + 6z = 0.$$

$$\begin{array}{l|l}
(4y^2-z^2)x^2-y^2z^2 & x+y-3 \\ \hline
\mp(4y^2-z^2)x^2\mp(y-3)(4y^2-z^2)x & (4y^2-z^2)x-(y-3)(4y^2-z^2) \\ \cline{1-1}
-(y-3)(4y^2-z^2)x-y^2z^2 & \\
\pm(y-3)(4y^2-z^2)x\pm(y-3)^2(4y^2-z^2) & \\ \cline{1-1}
(y-3)^2(4y^2-z^2)-y^2z^2. &
\end{array}$$

Kuin tämä tähde taas pannaan nollaksi ja yhtälö sievennetään, niin siitä saadaan

V. $4y^4-24y^3+36y^2-2y^2z^2+6yz^2-9z^2=0.$

Sitte eroitetaan taas esm. y yhtälöistä IV ja V seuraavalla tavalla:

$$\begin{array}{l|l}
4y^4-24y^3+36y^2-2z^2\cdot y^2+6z^2\cdot y-9z^2 & 2y^2-6y-z^2+6z \\ \hline
\mp 4y^4\pm 12y^3 \qquad \pm 2z^2\cdot y^2\mp 12z\cdot y^2 & 2y^2-6y-6z \\ \cline{1-1}
-12y^3+36y^2-12z\cdot y^2+6z^2\cdot y-9z^2 & \\
\pm 12y^3\mp 36y^2 \qquad \mp 6z^2\cdot y\pm 36z\cdot y & \\ \cline{1-1}
-12z\cdot y^2+36z\cdot y-9z^2 & \\
\pm 12z\cdot y^2\mp 36z\cdot y\mp 6z^3\pm 36z^2 & \\ \cline{1-1}
-6z^3+27z^2. &
\end{array}$$

Kuin tämä tähde pannaan nollaksi, niin siitä saadaan seuraava loppu-yhtälö yhdellä tuntemattomalla (z):

VI. $\quad -6z^3+27z^2=0$ eli $z^2(2z-9)=0,$

josta selvästi saadaan

$$z=0,\ z=0 \text{ ja } z=\tfrac{9}{2},$$

jotka arvot itsekukin tekevät viimesen tähteen nollaksi ja siis jakajan $(2y^2-6y-z^2+6z)$ yhteiseksi jakajaksi yhtälöiden IV ja V puolissa. Sentähden saadaan ne arvot y:lle, jotka vastaavien z:n arvojen kanssa toteuttavat yhtälöt IV ja V, kuin edelliset arvot toinen toisensa perästä pannaan z:n siaan yhtälössä

$$2y^2-6y-z^2+6z=0$$

ja tämä yhtälö sitte ratkaistaan. Näin saadaan

$$z=0,\ y=0 \text{ ja } y=3,$$
$$z=0,\ y=0 \text{ ja } y=3,$$
$$z=\tfrac{9}{2},\ y=\tfrac{3}{2}(1+\sqrt{-\tfrac{1}{2}}) \text{ ja } y=\tfrac{3}{2}(1-\sqrt{-\tfrac{1}{2}}).$$

Edelliset yhteen kuuluvat y:n ja z:n arvot tekevät nyt viimesen jakajan $(2y^2-6y-z^2+6z)$ nollaksi ja myös jakajaksi tähteelle V, koska z:n samat arvot tekevät tähteen VI nollaksi. Sentähden tekevät mainitut y:n ja z:n arvot myös tähteen V nollaksi. Mutta kuin tähteet IV ja V tulevat itsekukin nollaksi, niin silloin tulee jakaja $(x+y-3)$ yhteiseksi jakajaksi yhtälöiden I ja II sekä I ja III ensimäisille puolille (siis kertojaksi niissä), jolloin kaikkien alkuperäisten yhtälöiden ensimäiset puolet tulevat nollaksi, kuin vaan kolmio $x+y-3$ tulee nollaksi edellisillä arvoilla y:lle. Tuntemattomalle x saadaan siis vastaavat arvot, kuin itsekukin y:n edellisistä arvoista pannaan sen siaan yhtälössä

$$x+y-3=0.$$

Näin saadaan kaikille tuntemattomille seuraavat yhteen kuuluvat arvot.

$$\begin{cases} x=3, \\ y=0, \text{ kahdesti.} \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, \\ y=3, \text{ kahdesti.} \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=\tfrac{3}{2}(1\pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}}), \\ y=\tfrac{3}{2}(1\mp\sqrt{-\tfrac{1}{2}}), \\ z=\tfrac{9}{2}. \end{cases}$$

Olisivatko vielä yhtälöt

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x^2+y^2+z^2+v^2-4c^2=0 \\ \text{II.} & vx-yz=0 \\ \text{III.} & x+v-2a=0 \\ \text{IV.} & y+z-2b=0 \end{array}$$

ratkaistavat, niin niistä saadaan, x eroittaen pois:

$$\begin{array}{ll} \text{V.} & 2v^2-4av+y^2+z^2+4a^2-4c^2=0 \\ \text{VI.} & v^2-2av+yz=0 \\ \text{IV.} & y+z-2b=0, \end{array}$$

joista taas v eroittaen pois saadaan

$$\begin{array}{ll} \text{VII.} & y^2-2yz+z^2+4a^2-4c^2=0 \\ \text{IV.} & y+z-2b=0 \end{array}$$

ja näistä saadaan vihdoin y eroittaen pois loppu-yhtälö

$$z^2-2bz+a^2+b^2-c^2=0,$$

josta $z=b\pm\sqrt{c^2-a^2}$. Kuin sitte nämä z:n arvot pannaan sen siaan yhtälössä IV, niin siitä saadaan vastaavat arvot y:lle. Samoin saadaan v:n arvot yhtälöstä VI ja x:n vihdoin yhtälöstä III. Näin saavat tuntemattomat seuraavat arvot:

$$\begin{cases} x = a \pm \sqrt{c^2 - b^2}, \\ y = b \pm \sqrt{c^2 - a^2}, \\ z = b \mp \sqrt{c^2 - a^2}, \\ v = a \mp \sqrt{c^2 - b^2}. \end{cases}$$

Harjoitus-Esimerkkiä.

Esm. 1. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 19, \\ x^2 - 5y^2 = 4. \end{cases}$

Esm. 2. $\begin{cases} 3x^2 - x + 2y^2 = 4\frac{3}{4}, \\ y^2 + 2x - x^2 = 3. \end{cases}$

Esm. 3. $\begin{cases} x^2 - 4y^4 = a(x - y), \\ x - a = 2y^2. \end{cases}$

Esm. 4. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$

Esm. 5. $\begin{cases} x(x + y) = 2, \\ y(x + y) = 7. \end{cases}$

Esm. 6. $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ xy = b. \end{cases}$

Esm. 7. $\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 12, \\ xy = 12. \end{cases}$

Esm. 8. $\begin{cases} x + y = 2a, \\ x^3 + y^3 = (x + y)(xy + 4). \end{cases}$

Esm. 9. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 3\frac{1}{9} + \dfrac{y}{x}, \\ 3xy + 2 = 0. \end{cases}$

Esm. 10*) $\begin{cases} x+y=2xy, \\ x+y+x^2+y^2=4a^2. \end{cases}$

Esm. 11. $\begin{cases} x-y=1, \\ x^2-z^2=15, \\ y^2+2z-z^2=10. \end{cases}$

Esm. 12. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ y^2+2xz=b^2, \\ ax+bz=0. \end{cases}$

Esm. 13. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 10x+y+2z=2xy, \\ x^2+y^2=z^2. \end{cases}$

Esm. 14. $\begin{cases} xy=3, \\ y^2+6z=4\frac{1}{4}, \\ x^2-y^2-18z=23\frac{3}{4}. \end{cases}$

Esm. 15. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ 8xz=11y, \\ 18xyz=11. \end{cases}$

Esm. 16. $\begin{cases} x(y+z)=a, \\ y(x+z)=b, \\ z(x+y)=c. \end{cases}$

Esm. 17. $\begin{cases} xz=y^2, \\ vy=z^2, \\ x+v=9, \\ y+z=6. \end{cases}$

---

*) Kuin edellisistä yhtälöistä eroitetaan pois x, isoin yhteinen jakaja etsien monioille $x^2+x+y^2+y-4a^2$ ja $(2y-1)x-y$, niin niistä saadaan loppu-yhtälö $y^4-4a^2y^2+4a^2y-a^2=0$, s. o., $y^4-a^2(4y^2-4y+1)=0$, eli $y^4-a^2(2y-1)^2=0$, josta taas saadaan $y^2+a(2y-1)=0$ ja $y^2-a(2y-1)=0$. Kuin näistä yhtälöistä saadut y:n neljä arvoa sitte pannaan peräkkäin sen siaan ensimäisessä alkuperäisistä yhtälöistä, niin siitä saadaan helposti x:n vastaavat arvot. Yhtälöt voidaan kuitenkin ratkaista helpommin, jos summan $(x+y)$ arvo ensimäisestä yhtälöstä pannaan sen siaan toisessa, joten saadaan $(x+y)^2=4a^2$ eli $x+y=2a$ ja $x+y=-2a$. Kumpikin näistä yhtälöistä antaa sitte ensimäisen alkuperäisen yhtälön kanssa kaksi arvoa kumpasellakin tuntemattomalle.

Esm. 18. $\begin{cases} x = 2y, \\ x^2 - z^2 = 4, \\ y^2 - v^2 = 4, \\ z - v = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

Esm. 19. *) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ xy = 3(x + y). \end{cases}$

Esm. 20. **) $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = a, \\ (x + y)(x^2 + y^2) = b. \end{cases}$

Edellisistä esimerkistä 1—20 saadut arvot tuntemattomille.

1) $\begin{cases} x = 3, \\ y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ y = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3, \\ y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3, \\ y = -1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = -\frac{3}{2}. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = a, \\ y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = a + \frac{1}{2}, \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

---

*) Kuin näissä yhtälöissä pannaan $x + y = u$ ja $xy = v$, niin niistä saadaan $u^2 - 2v = 16$ ja $v = 3u$, joista sitte seuraa

$$\begin{cases} u_{,} = 8, \\ v_{,} = 24, \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} u_{,,} = -2, \\ v_{,,} = -6, \end{cases}$$

ja tuntemattomien x ja y arvot saadaan siis yhtälöistä $x + y = 8$ ja $xy = 24$ sekä $x + y = -2$ ja $xy = -6$. Koska nyt x:n ja y:n vastaavien arvojen summat ja tulot ovat tunnetut, niin ne arvot saadaan yhtälöistä $z^2 - 8z + 24 = 0$ ja $z^2 + 2z - 6 = 0$.

**) Kuin nyt taas pannaan $x + y = u$, ja $x - y = v$, jolloin on $x = \frac{u + v}{2}$ ja $y = \frac{u - v}{2}$, niin edelliset yhtälöt muuttuvat seuraaviksi: $uv^2 = a$ ja $\frac{u(u^2 + v^2)}{2} = b$, joista saadaan $u^3 = 2b - a$ ja sentähden on $u = \sqrt[3]{2b - a}$ sekä $v = \pm\sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{2b - a}}} = \pm\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[6]{2b - a}}$. Kuin sitte nämä u:n ja v:n arvot pannaan niiden siaan edellisissä x:n ja y:n arvoissa, niin niista saadaan

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{2b - a}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt[6]{2b - a}} = \dfrac{\sqrt{2b - a} \pm \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{2b - a}}, \\ y = \dfrac{\sqrt[3]{2b - a}}{2} \mp \dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt[6]{2b - a}} = \dfrac{\sqrt{2b - a} \mp \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{2b - a}}. \end{cases}$$

4) $\begin{cases} x = \pm 3, \\ y = \pm 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 2\sqrt{-1}, \\ y = \mp 3\sqrt{-1}. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = \pm \frac{2}{3}, \\ y = \pm \frac{7}{3}. \end{cases}$

6) $x = \pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b^2}}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{2},$

$y = \pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b^2}}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}{2}.$ 7) $\begin{cases} x = 4, \\ y = 3; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3, \\ y = 4. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x = a+1, \\ y = a-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = a-1, \\ y = a+1. \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \mp \frac{2}{3}; \end{cases}$

$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{5}, \\ y = \mp\sqrt{\frac{4}{5}} = \mp\frac{2}{5}\sqrt{5}. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x = a \pm \sqrt{a(a-1)}, \\ y = a \mp \sqrt{a(a-1)}; \end{cases}$

$\begin{cases} x = -a \pm \sqrt{a(a+1)}, \\ y = -a \mp \sqrt{a(a+1)}, \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x = 4, \\ y = 3, \\ z = 1. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x = \pm b\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}, \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{b(2a^2-ab+b^2)}{a+b}}, \\ z = \mp a\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm b\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}, \\ y = \mp\sqrt{\dfrac{b(2a^2-ab+b^2)}{a+b}}, \\ z = \mp a\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x = 3, \\ y = 4, \\ z = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -0{,}5, \\ y = 1{,}2, \\ z = 1{,}3. \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, \\ y = \pm 3\sqrt{2}, \\ z = -2\frac{7}{24}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 6, \\ y = \pm\frac{1}{2}, \\ z = \frac{2}{3}. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x = \frac{11}{6}, \\ y = \frac{2}{3}, \\ z = \frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{2}{3}, \\ z = \frac{11}{6}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{11\pm\sqrt{154}}{6}, \\ y = -\frac{2}{3}, \\ z = \dfrac{11\mp\sqrt{154}}{6}. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{(a+b-c)(a+c-b)}{2(b+c-a)}}, \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{(a+b-c)(b+c-a)}{2(a+c-b)}}, \\ z = \pm\sqrt{\dfrac{(b+c-a)(a+c-b)}{2(a+b-c)}}. \end{cases}$ 17) $\begin{cases} x = 8, \\ y = 4, \\ z = 2, \\ v = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 4, \\ v = 8. \end{cases}$

18) $\begin{cases} x = \pm 4, \\ y = \pm 2, \\ z = 2\sqrt{3}, \\ v = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 4\sqrt{\frac{7}{3}}, \\ y = \pm 2\sqrt{\frac{7}{3}}, \\ z = 10\sqrt{\frac{1}{3}}, \\ v = 4\sqrt{\frac{1}{3}}. \end{cases}$ 19) $\begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{7}, \\ y = -1 \mp \sqrt{7}; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2(2 \pm \sqrt{-2}), \\ y = 2(2 \mp \sqrt{-2}). \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2b-a} \pm \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{2b-a}}, \\ y = \dfrac{\sqrt{2b-a} \mp \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{2b-a}}. \end{cases}$

§ 6.

Kysymyksiä, jotka ratkaistaan toisen nousun yhtälöillä usiammalla tuntemattomalla.

Kys. 1. *Kahden suuruuden summa on* $= \frac{5}{4}$ *ja tulo* $= -\frac{3}{8}$; *mitkä ovat ne kaksi suuruutta?*

Yhtälöistä

$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{4}, \\ xy = -\frac{3}{8}, \end{cases}$$

saadaan loppu-yhtälö $x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{3}{8} = 0$, josta sitte seuraa $x_{,} = \frac{3}{2}$ ja $x_{,,} = -\frac{1}{4}$. Kuin itsekukin näistä arvoista sitte pannaan x:n siaan ensimäisessä alkuperäisessä yhtälössä, niin siitä saadaan y:n vastaavat arvot ja yhtälöiden juuret ovat

$$\begin{cases} x_{,} = \frac{3}{2}, \\ y_{,} = -\frac{1}{4}, \end{cases} \text{ eli } \begin{cases} x_{,,} = -\frac{1}{4}, \\ y_{,,} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Kys. 2. *Kuin kirjapainossa kysyttiin latojalta, kuinka monta riviä hän pani joka sivulle ja kuinka monta puustavia joka riviin kirjassa, jota hän paraikaa latoi, niin latoja vastasi: jos minä panisin 3 riviä enemmän joka sivulle ja 4 puustavia enemmän joka riviin, niin joka sivulle menisi 238 puustavia enemmän kuin nyt menee; vaan jos minä panisin 2 riviä vähemmän joka sivulle ja 3 puustavia vähemmän joka riviin, niin silloin sopisi 154 puustavia vähemmän joka sivulle kuin nyt sopii; kuinka monta riviä pani latoja joka sivulle ja kuinka monta puustavia joka riviin?*

Merkitköön nyt x rivien lukua joka sivulla ja y puustavien lukua joka rivillä, niin puustavien luku sivulla on selvästi $= xy$ ja latojan lauseista saadaan yhtälöt

$$\begin{cases}(x+3)(y+4) = xy + 238,\\ (x-2)(y-3) = xy - 154,\end{cases}$$

joista seuraa $x = 28$ ja $y = 38$.

Kys. 3. *Suorakulmaisen kolmikulman ympärys ($= p$ tuumaa) ja toinen suoraa kulmaa reunaavista sivuista ($= a$ tuumaa) ovat tunnetut; kuinka pitkät ovat kolmikulman toiset kaksi sivua?*

Merkitköön nyt x (t.) suoraa kulmaa vasten seisovaa ja y (t.) toista suoran kulman vierimäisistä sivuista, niin tästä saadaan selvästi yhtälöt

$$\begin{cases}x + y + a = p\\ x^2 = y^2 + a^2\end{cases}$$

ja nämä yhtälöt ratkaisten saadaan sitte

$$\begin{cases}x = \dfrac{p^2 - 2ap + 2a^2}{2(p-a)},\\[2ex] y = \dfrac{p^2 - 2ap}{2(p-a)}.\end{cases}$$

Kys. 4. *Millä kaikista suorakulmaisista kolmikulmista, joidenka suoraa kulmaa reunaavat sivut ovat yhteensä a tuumaa pitkät, on suoraa kulmaa vasten seisova sivu lyhyin?*

Merkitkööt x ja y suoraa kulmaa reunaavien sivujen pituuksia ja z sitä vastaisen sivun pituutta, niin kysymyksestä saadaan yhtälöt

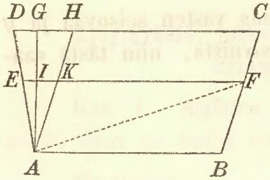
$$\begin{cases}x + y = a\\ x^2 + y^2 = z^2\end{cases}$$

ja kuin ne ratkaistaan x:n ja y:n suhteen, pitäen z:aa tunnettuna suuruutena, niin niistä saadaan

$$\begin{cases}x = \dfrac{a \pm \sqrt{2z^2 - a^2}}{2},\\[2ex] y = \dfrac{a \mp \sqrt{2z^2 - a^2}}{2}.\end{cases}$$

Jos nyt näissä x:n ja y:n arvoissa olisi $2z^2 < a^2$, s. o., $z < a\sqrt{\frac{1}{2}}$, niin ne olisivat kumpikin kuvasuuruuksia. Pienin arvo, jonka z voipi saada, on siis $z_{,} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$. Mutta kuin $2z^2 = a^2$, niin x:n ja y:n arvot ovat yhtä isot, kumpikin $= \frac{a}{2}$, ja kysymyksessä oleva kolmikulma on yhtä kylkinen.

Kys. 5. *Puolisuunnikas $ABCD$, jonka kaksi sivua AB ja CD ovat yhtä suuntaiset, on tunnettu ja siitä pitää sivujen AB ja CD kanssa yhtä suuntaisella suoralla viivalla EF leikattaman osa $ABFE$, jonka laajuus on $= l^2$ neliötuumaa.*



Kuin pisteestä A vedetään suora viiva AG sivua DC vasten kohtisuoraan, niin linjan AG pituus on kuvion $ABCD$ korkeus ja linjan AI pituus, joka on osan $ABFE$ korkeus on etsittävä. Olkoon linja AH yhtä suuntainen sivun BC kanssa ja $DC = a$, $AB = b$, $AG = k$, $AI = x$ ja $EF = y$, jolloin on $DH = a - b$ ja $EK = y - b$. Kolmikulmat ADH ja AEK ovat mukaiset keskenänsä ja sentähden on $DH : AH = EK : AK$ eli $DH : EK = AH : AK$. Mutta nyt on taas $AH : AK = AG : AI$, koska kolmikulmat AGH ja AIK ovat mukaiset keskenänsä. Sentähden on $DH : EK = AG : AI$, s. t. s., $(a - b) : (y - b) = k : x$, josta saadaan yhtälö

$$1. \qquad (a - b)x = k(y - b).$$

Nyt on taas nelikulma $ABFE = \triangle ABF + \triangle AEF = \frac{AB \cdot AI}{2} + \frac{EF \cdot AI}{2} = \frac{bx}{2} + \frac{yx}{2} = \frac{x(b + y)}{2}$ ja kysymyksen ehdon mukaan on nelikulma $ABFE = l^2$, josta saadaan yhtälö

$$2. \qquad \frac{x(b + y)}{2} = l^2.$$

Yhtälöistä 1 ja 2 saadaan sitte

$$\begin{cases} x = AI = \dfrac{k}{a - b}\left(\pm\sqrt{\dfrac{2l^2(a - b) + b^2k}{k}} - b\right), \\ y = EF = \pm\sqrt{\dfrac{2l^2(a - b) + b^2k}{k}}. \end{cases}$$

Se on selvä että alukesuuruudet ovat otettavat ainoastansa lisämerkillä, sillä muutoin olisivat linjain AI ja EF pituudet poistosuuruuksia.

Olisko nyt esm. $DC = a = 8$, $AB = b = 5$ ja $AG = k = 4$ tuumaa, jolloin koko nelikulman laajuus on $\frac{4(8+5)}{2} = 26$ neliötuumaa, ja olkoon siitä sitte leikattava osa $ABFE$, jonka laajuus on $= l^2 = 16$ neliötuumaa, niin edellisistä kaavoista saadaan $x = \frac{8}{3}$ ja $y = 7$ tuumaa.

Kys. 6. *Eräässä lu'unlasku kirjassa 14-vuosisadalta on seuraava lause: „A ja B pitävät yhteistä kauppaliikettä, johonka A on pannut 1/\2 ja B 388 guldenia ja tällä rahasummalla voittavat he 811 guldenia", josta voitosta vastauksen mukaan „A saapi 13/\ ja B 2/\8 guldenia". Mitä numeroita merkitsevät silloin edelliset merkit, /\ ja 8?*

Merkitköön nyt x ensimäistä etsittävää numerolukua (/\) ja y toista (8). A:n osa voitosta on nyt selvästi $130 + x$ ja B:n $200 + 10x + y$ guldenia ja koska nämä osat tekevät yhteensä koko voiton $100y + 11$, niin tästä saadaan yhtälö $130 + x + 200 + 10x + y = 100y + 11$ eli selvennettynä

$$1. \qquad x - 9y + 29 = 0.$$

A:n ja B:n osien voitosta pitää taas oleman samassa suhteessa toisiinsa, kuin rahasummatkin, jotka A ja B ovat panneet kauppaliikkeesen, josta saadaan verranto $(102 + 10x) : (300 + 11y) = (130 + x) : (200 + 10x + y)$. Tästä verrannosta seuraa taas yhtälö $(102 + 10x)(200 + 10x + y) = (300 + 11y)(130 + x)$, josta selventäen saadaan yhtälö

$$2. \qquad 100x^2 - xy + 2720x - 1328y - 18600 = 0.$$

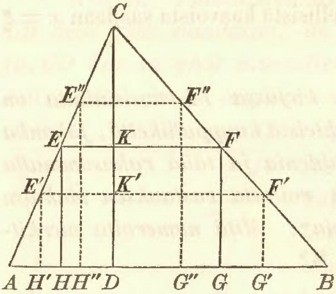
Kuin sitte x eroitetaan pois yhtälöistä 1 ja 2, niin niistä saadaan loppu-yhtälö

$$2697y^2 - 9673y - 4460 = 0,$$

josta sitte seuraa $y_{,} = 4$ ja $y_{,,} = -\frac{1115}{2697}$ ja kuin kukin näistä arvoista pannaan y:n siaan yhtälössä 1, niin siitä saadaan $x_{,} = 7$

ja $x_{,,} = -32\frac{648}{899}$. Vastaus kysymykseen on siis: numero $\wedge = 7$ ja $8 = 4$.

Kys. 7. *Kolmikulman ABC asema AB ($= a$ tuumaa) ja korkeus CD ($= k$ tuumaa) ovat tunnetut; mikä suorakulmio on sitte isoin kaikista, jotka voidaan piirtää kolmikulmaan niin, että yksi suorakulmion sivuista on osa kolmikulman asemasta?*



Olkoon suorakulmion sivu $HG = EF = x$ (t.) ja $EH = FG = y$ (t.) ja merkitköön z (n.t.) suorakulmion laajuutta, niin tästä saadaan yhtälö

$$1. \qquad xy = z.$$

Koska taas kolmikulmat ABC ja EFC ovat mukaiset keskenänsä, niin tästä saadaan verranto $AB:AC = EF:EC$ eli $AB:EF = AC:EC$. Mutta $AC:EC = CD:CK$, koska kolmikulmat ADC ja EKC ovat mukaiset. Sentähden on $AB:EF = CD:CK$, s. t. s., $a:x = k:(k-y)$, josta saadaan yhtälö

$$2. \qquad a(k-y) = kx.$$

Yhtälöt 1 ja 2 ratkaisten x:n ja y:n suhteen saadaan sitte

$$\begin{cases} x = HG = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{\dfrac{a(ak-4z)}{k}}\right) \text{ tuumaa.} \\ y = EH = \frac{1}{2}\left(k \mp \sqrt{\dfrac{k(ak-4z)}{a}}\right) \text{ tuumaa.} \end{cases}$$

Isoin arvo, jonka z voipi saada, on siis $= \dfrac{ak}{4} =$ puoli kolmikulmaa. Mutta kuin $z = \dfrac{ak}{4}$, niin silloin on $x = HG = \frac{1}{2}a$ ja $y = EH = \frac{1}{2}k$.

Kys. 8. *Kolmikulman ABC asema ja korkeus ovat tunnetut ja nyt on kolmikulmaan piirrettävä suorakulmio, joka seisoo osalla kolmikulman asemasta ja jonka laajus on $\frac{m}{n}$ kolmikulmasta.*

Kuin a, k, x ja y merkitsevät samoja linjoja kuin edellisessäkin kysymyksessä, niin tästä saadaan taas samoin kuin edelläkin yhtälö

1. $$kx = a(k - y).$$

Koska taas suorakulmion laajuus on $= xy$ (n. t.) ja kolmikulman laajuus $= \frac{ak}{2}$ (n.t.), niin tästä saadaan lausutun ehdon mukaan yhtälö $xy = \frac{m}{n} \cdot \frac{ak}{2}$ eli, kuin lyhyyden vuoksi pannaan $\frac{m}{n} = p$,

2. $$xy = \frac{akp}{2}.$$

Yhtälöt 1 ja 2 ratkaisten saadaan sitte

$$\begin{cases} x = \dfrac{a(1 \pm \sqrt{1 - 2p})}{2}, \\ y = \dfrac{k(1 \mp \sqrt{1 - 2p})}{2}. \end{cases}$$

Kuin näissä x:n ja y:n arvoissa alukesuuruudet otetaan ylimmäisillä merkillä, niin silloin saadaan suorakulmio $E'H'G'F'$, mutta kuin alimmaiset merkit annetaan alukesuuruuksille, niin silloin saadaan suorakulmio $E''H''G''F''$. Tässä saadaan siis kaksi eri vastausta kuin $p < \frac{1}{2}$, mutta yksi, kuin $p = \frac{1}{2}$ ja ei yhtään, kuin $p > \frac{1}{2}$, sillä kuin $p = \frac{1}{2}$, niin $x = \frac{a}{2}$ ja $y = \frac{k}{2}$ ja suorakulmio on silloin isoin kaikista, jotka voidaan piirtää kolmikulmaan, mutta kuin $p > \frac{1}{2}$, niin silloin ovat x:n ja y:n arvot kuvasuuruuksia. Olisko nyt esm. $p = \frac{9}{50}$, niin edellisistä kaavoista saataisiin $x_, = H'G' = 0{,}9 \cdot a$ ja $y_, = E'H' = 0{,}1 \cdot k$, sekä $x_{,,} = H''G'' = 0{,}1 \cdot a$ ja $y_{,,} = E''H'' = 0{,}9 \cdot k$.

Kuin taas on $p = \frac{2ak}{(a+k)^2}$, niin silloin saadaan edellisistä kaavoista

$$\begin{cases} x_, = \dfrac{a^2}{a+k}, \\ y_, = \dfrac{k^2}{a+k}, \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x_{,,} = \dfrac{ak}{a+k}, \\ y_{,,} = \dfrac{ak}{a+k}. \end{cases}$$

Tässä tapauksessa on siis toinen suorakulmio neliö, jonka sivu on $=\frac{ak}{a+k}$ ja olisko vielä $a=k$, niin molemmat suorakulmiot yhdistyisivät neliöksi sivulla $=\frac{a}{2}=\frac{k}{2}$. Tämä neliö olisi myös isoin kaikista kolmikulmaan tällä tavoin piirretyistä suorakulmioista. Jos taas on $a \gtrless k$, niin silloin on mainittu neliö pienempi kuin puoli kolmikulmaa, eikä siis isoin kysymyksessä olevista suorakulmioista.

Kys. 9. *Mies on antanut velaksi 10000 markkaa kahdessa osassa, kumpasenkin osan eri kasvulle sadalta vuodessa. Kasvut, jotka hän saapi sadalta vuodessa näistä kahdesta rahasummasta, tekevät yhteensä 11 markkaa ja kolmen vuoden kasvu toisesta osasta tekee 1125 m., mutta neljän kuukauden* ($=\frac{1}{3}$ *vuoden) kasvu toisesta osasta tekee 50 m. Kuinka isoissa osissa on hän lainannut rahansa ja kuinka monta sadalta saapi hän kasvua kustakin osasta vuodessa?*

Merkitköön nyt x (m.) ensimäistä osaa ja y (m.) kasvua, jonka mies saapi sadalta vuodessa tästä osasta, jolloin toinen osa on selvästi $(10000-x)$ m. ja sen kasvu sadalta $(11-y)$ m. vuodessa. Kysymyksessä lausutuista ehdoista saadaan sitte helposti seuraavat yhtälöt:

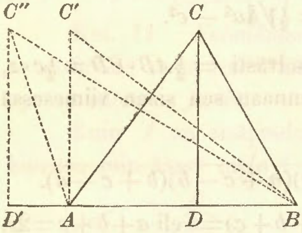
$$\begin{cases} \frac{3xy}{100}=1125, \\ \frac{(10000-x)(11-y)}{3\cdot 100}=50, \end{cases}$$

josta sitte seuraa

$$\begin{cases} x_{\prime}=7500, \\ y_{\prime}=5, \end{cases} \text{ eli } \begin{cases} x_{\prime\prime}=4545\tfrac{5}{11}, \\ y_{\prime\prime}=8\tfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Kysymykseen saadaan siis kaksi eri vastausta, nimittäin: mies oli lainannut 7500 m., joista hän sai 5 sadalta ja 2500 m., joista hän sai 6 sadalta vuotuista kasvua eli: hän oli lainannut $4545\frac{5}{11}$ m., joista hän sai $8\frac{1}{4}$ m. sadalta ja siis $5454\frac{6}{11}$ m., joista hän sai $2\frac{3}{4}$ m. sadalta vuotuista kasvua.

Kys. 10. *Kolmikulman ABC sivut ovat tunnetut ja sen korkeus CD, aseman osat AD ja BD, sekä kolmikulman laajuus ovat etsittävät.*



Olkoon nyt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ja merkitköön x linjan AD, y linjan BD pituutta ja z kolmikulman korkeutta CD, niin tästä saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} x + y = c, \\ x^2 + z^2 = b^2, \\ y^2 + z^2 = a^2. \end{cases}$$

Kuin sitte kolmannen yhtälön puolet poistetaan toisen vastaavista puolista, niin sillä tavoin saadaan $x^2 - y^2 = b^2 - a^2$ eli $(x+y)(x-y) = b^2 - a^2$ ja, koska $x + y = c$, $c(x-y) = b^2 - a^2$. Tästä ja ensimäisestä alkuperäisestä yhtälöstä saadaan sitte helposti x:n ja y:n arvot ja kuin y:n arvo sitte pannaan sen siaan kolmannessa alkuperäisessä yhälössä, niin siitä saadaan z:n arvot. Tällä tavoin saadaan kaavat:

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c},$$

$$y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c},$$

$$z = \sqrt{\frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}} =$$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Olisko nyt $b^2 + c^2 = a^2$, niin silloin olisi $x = \frac{0}{2c} = 0$, $y = c$ ja $z = b$, jolloin kolmikulma olisi suorakulmainen tilassa ABC', mutta kuin $b^2 + c^2 < a^2$, niin silloin on x:n arvo poistosuuruus, josta voidaan päättää kappaleen AD tulevan olemaan A:n vasemmalla puolella tilassa AD', jolloin kolmikulma on tilassa ABC''.

Jos kolmikulma taas olisi yhtäsivuinen, s. t. s. jos $c = b = a$, niin silloin on

$$x = \tfrac{1}{2}a,\ y = \tfrac{1}{2}a \text{ ja } z = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} = 0{,}866 \cdot\cdot \times a.$$

Mutta olisko vaan $b = a$, niin silloin olisi

$$x = \tfrac{1}{2}c,\ y = \tfrac{1}{2}c \text{ ja } z = \tfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}.$$

Kolmikulman laajuus on taas selvästi $= \tfrac{1}{2}AB \cdot CD = \tfrac{1}{2}c \cdot z$. Kuin sitte z:n edellä saatu arvo pannaan sen siaan viimesessä yhtälössä niin siitä saadaan

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Kuin nyt lyhyyden vuoksi pannaan $\tfrac{1}{2}(a+b+c) = s$ eli $a+b+c = 2s$, jolloin on $a+b-c = 2(s-c)$, $a+c-b = 2(s-b)$ ja $b+c-a = 2(s-a)$, niin edellisestä yhtälöstä saadaan kaava

$$\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

josta kolmikulman laajuus aina saadaan ja jossa a, b ja c merkitsevät kolmikulman sivujen ja s puolen ympäryksen pituutta.

Olisko esm. $a = 10$, $b = 8$ ja $c = 6$ t., niin silloin olisi kolmikulman laajuus $= \sqrt{12 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} = 24$ neliötuumaa.

Seuraus. *Puolisuunnikkaan $ABCD$ kaikki sivut ovat tunnetut ja sen laajuus etsittävä.*

Olkoon nyt (katso viidennen kysymyksen tässä pykälässä kuvaa) $AD = a$, $AH = BC = b$, $DH = DC - AB = c$, $AB = d$ ja $DC = e$, niin edellisen mukaan on

$$AG = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2c} =$$

$= \dfrac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kuin lyhyyden vuoksi pannaan $a+b+c = 2s$.

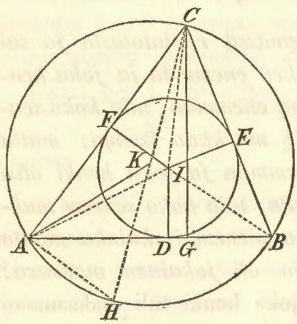
Nyt on taas selvästi puolisuunnikas $ABCD = \triangle ADH +$ suunnikas $ABCH = \tfrac{1}{2}AG \cdot DH + AG \cdot AB = (\tfrac{1}{2}c + d) \cdot AG$. Koska taas $c = e - d$ ja $AG = \dfrac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, niin edellisestä yhtälöstä saadaan helposti seuraava kaava:

$$\text{plsnn. } ABCD = \frac{d+e}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Olisko esm. $AB = d = 6$, $BC = b = 3$, $CD = e = 9$, $AD = a = 4$ ja siis $DH = c = 3$ tuumaa, niin silloin olisi puolisuunnikkaan laajuus $= 5\sqrt{5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} = 10\sqrt{5} = 22{,}36\cdots$ neliötuumaa.

Kys. 11. *Kolmikulman ABC sivut a, b ja c ovat tunnetut ja etsittäviä ovat kolmikulmaan sekä sen ympäri piirrettyjen ympyrien säteet r ja R.*

Kuin I on sisäpuoleisen ja K ulkopuoleisen ympyrän keskipiste, niin tässä on nyt



$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ sekä $ID = IE = IF = r$ ja $KA = KC = KH = R$. Nyt on

$$\triangle ABC = \triangle BIC + \triangle AIC + \triangle AIB,$$

s. t. s., $\triangle ABC = \dfrac{ar}{2} + \dfrac{br}{2} + \dfrac{cr}{2} = \dfrac{a+b+c}{2} \cdot r = sr$, kuin $\dfrac{a+b+c}{2} = s$.

Mutta edellisessä kysymyksessä saatiin $\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ja sentähden on $sr = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, josta saadaan

$$1. \qquad r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Koska taas kulmat AHC ja ABC seisovat samalla kaarella AC, niin ne ovat yhtä isot. Samoin ovat suorat kulmat CAH ja CGB yhtä isot keskenänsä. Sentähden on myös $\wedge ACH = \wedge BCG$ ja kolmikulmat CHA ja CBG ovat mukaiset, josta saadaan $CH : CA = CB : CG$, s. t. s., $2R : b = a : CG$, josta $R = \dfrac{ab}{2CG}$. Edellisestä kysymyksestä on taas saatu kolmikulman korkeus

$$= CG = z = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2c} =$$

$$= \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}.$$ Sentähden on

$$2. \qquad R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

jossa on samoin kuin edelläkin $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Yhtälöistä 1 ja 2 saadaan sitte

$$Rr = \frac{abc}{4s} \text{ eli } 2Rr = \frac{abc}{a+b+c}.$$

Kuin kolmikulma on yhtäsivuinen, s. o., kuin $a = b = c$, niin silloin on $r = a\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$ ja $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

Kys. 12. *Eräs seura oli lähtemässä ravintolasta ja sai tilinsä. Jos seurassa olisi ollut 5 henkeä enemmän ja joka hengen olisi pitänyt maksaman $\frac{1}{2}$ markkaa enemmän, niin koko seuran maksettava summa olisi ollut $26\frac{1}{6}$ markkaa isompi; mutta jos seurassa olisi ollut 3 henkeä vähemmän ja joka henki olisi päässyt $\frac{1}{3}$ markkaa vähemmällä maksulla, niin koko seuran maksettava summa olisi ollut $13\frac{2}{3}$ markkaa pienempi; kuinka monta henkeä oli seurassa ja kuinka paljo oli jokainen maksava?* Vastaus: Seurassa oli 14 henkeä ja joka henki tuli maksamaan $3\frac{1}{3}$ markkaa.

Kys. 13. *Mitkä kolme lukua ovat semmoiset, että, kuin itsekukin niistä kerrotaan toisten kahden summalla, tuloiksi saadaan lu'ut 20, 18 ja 14?*

Tästä kysymyksestä saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} x(y+z) = 20, \\ y(x+z) = 18, \\ z(x+y) = 14, \end{cases}$$

jotka ovat samallaiset kuin edellisen pykälän esimerkissä 16 ja kuin tästä esimerkistä saaduissa kaavoissa pannaan $a = 20$, $b = 18$ ja $c = 14$, niin kysymykseen saadaan vastaus: lu'ut 4, 3 ja 2. Poistosuuruudet -4, -3 ja -2 täyttävät myös kysymyksen ehdot.

Kys. 14. *Eräässä lu'ussa on kolme numeroa; keskimäisen numeron toinen korko on yhtä iso kuin reunimaisten tulo enennettynä neljällä; satojen numero ja ykkösien numero ovat yhteensä yhtä isot kuin kaksi kertaa kymmenien numero; ja kuin* *etsittävästä lu'usta poistetaan se luku, jossa samat numerot ovat vastasuuntaisessa järjestyksessä, niin tähteeksi saadaan 390 enennettynä etsittävän lu'un kymmenien numerolla; mikä on se luku?* Vastaus: 864.

Kys. 15. *Mitkä ovat ne kolme jaksossa verrannollista lukua, joidenka summa on $=3{,}7$ ja joidenka toisten korkojen summa on $4{,}81$?* Vastaus: 0,9; 1,2 ja 1,6.

Kys. 16. *Suorakulmion laajuus ($= a^2$ neliötuumaa) ja lävistäjä ($= b$ tuumaa) ovat tunnetut; kuinka pitkät ovat silloin suorakulmion sisältävät sivut?* Vastaus: pitempi sivu on $=$
$= \frac{\sqrt{b^2+2a^2}+\sqrt{b^2-2a^2}}{2}$ ja lyhempi $= \frac{\sqrt{b^2+2a^2}-\sqrt{b^2-2a^2}}{2}$ tuumaa.

Kys. 17. *Suorakulmaisen kolmikulman ympärys ($=p$ tuumaa) ja suoraa kulmaa vasten seisova sivu ($=a$ tuumaa) ovat tunnetut; kuinka isot ovat suoraa kulmaa reunaavat sivut ja kolmikulman laajuus?* Vastaus: pitempi etsittävistä sivuista on $= \frac{p-a+\sqrt{a^2+2ap-p^2}}{2}$ ja lyhempi $= \frac{p-a-\sqrt{a^2+2ap-p^2}}{2}$ tuumaa ja kolmikulman laajuus on siis $= \frac{1}{4}p(p-2a)$ neliötuumaa.

Kys. 18. *Suorakulmaisen kolmikulman laajuus on $=a^2$ (n.t.) ja suoraakulmaa reunaavien sivujen summa on $=b$ (t.); kuinka pitkät ovat silloin kolmikulman sivut?* Vastaus: suoraakulmaa reunaavat sivut ovat: pitempi $= \frac{b+\sqrt{b^2-8a^2}}{2}$ ja lyhempi $= \frac{b-\sqrt{b^2-8a^2}}{2}$ ja suoraa kulmaa vasten soisova sivu on $=\sqrt{b^2-4a^2}$.

Kys. 19. *Kuinka iso on kolmikulmainen peltokappale, jonka sivut ovat 130, 140 ja 150 jalan pituiset?* Vastaus: 8400 neliöjalkaa $=4\frac{4}{5}$ kapan alaa. (Tynnyrin ala $=32$ kapan alaa $=14000$ n.kyvnärää $=56000$ n.jalkaa).

Kys. 20. *Kuinka pitkät ovat saman peltokappaleen sivut kartalla, jossa se on piirretty $\frac{1}{10000}$:osassa isoudestansa?* Vastaus: 1,3; 1,4 ja 1,5 jalkaa eli 13, 14 ja 15 kymmenystuumaa.

Kys. 21. *Kahden suorakulmion A ja B laajuudet tekevät yhteensä 28 n.tuumaa ja asemat ovat yhteensä = 13 t., ja suorakulmioiden, joilla on: ensimäisellä A:n asema ja B:n korkeus ja toisella B:n asema ja A:n korkeus, laajuudet ovat: ensimäisen = 32 n.tuumaa ja toisen = 5 n.tuumaa; kuinka isot ovat suorakulmioiden A ja B asemat sekä korkeudet?* Vastaus: *A*:n asema on = 8 ja korkeus = 1 tuumaa ja *B*:n asema on = 5 ja korkeus = 4 tuumaa eli: *A*:n asema on = $10\frac{2}{5}$ ja korkeus $1\frac{12}{13}$ t. ja *B*:n asema on = $2\frac{3}{5}$ ja korkeus = $3\frac{1}{13}$ tuumaa.

Kys. 22. *Kuin kahden lu'un väli kerrotaan niiden toisten korkojen välillä, niin tuloksi saadaan 160, mutta kuin samojen lukujen summa kerrotaan niiden toisten korkojen summalla, niin tuloksi saadaan 580; mitkä ovat nämä kaksi lukua?* Vastaus: 7 ja 3.

Muist. Edellisestä kysymyksestä saadaan samanlaiset yhtälöt ratkaistaviksi kuin esimerkissä 20 edellisessä pykälässä ja edelliset arvot saadaan helposti kuin mainitusta esimerkistäs aaduissa kaavoissa pannaan $a = 160$ ja $b = 580$.

Kirjassa käytettyjen nimityssanojen luettelo.

Alkeisteos	Grundoperation.
Alotin	Rotens index.
Aluke	Rot.
Alukemerkki	Rottecken.
Alukesuuruus	Irrationel qvantitet, radikal.
Alukkeen otto	Rotutdragning.
Apotemi	Apotem.
Arvo	Värde.
Asema	Bas (en figurs).
Aste	Grad (om vinklar).
Ehto-yhtälö	Vilkorseqvation.
Enennösmerkki	Plustecken.
Epä-isouden merkki	Olikhetstecken.
Erityisosa	Partiel qvot.
Eroittaa	Eliminera.
Eroituskeino	Eliminationsmetod.
Etukertoja	Koefficient.
Isoin arvo	Maximum.
Isous	Storlek.
Jaettava	Dividend.
Jakaa	Dividera.
Jakaja	Divisor.
Jako	Division.
Jakomerkki	Divisionstecken.
Jänne	Korda.
Järjestys	System.
Järjestyspuustavi	Hufvudbokstaf (efter hvilken en polynom ordnas).
Järkinäissuuruus	Rationel qvantitet.
Kaari	Båge.

Kaava	Formel.
Kaksio	Binom.
Kantaluku	Bas i ett numerationssystem.
Kasvu	Ränta.
Kasvu sadalta	Procent.
Kehä	Periferi.
Kerrosmerkki	Multiplikationstecken.
Kertoa	Multiplicera.
Kertoja	Faktor.
Kertominen	Multiplikation.
Keskiluku eli laskukeskinen	Aritmetiska medeltalet.
Keskipiste	Medelpunkt.
Keskisuhteinen	Medelproportional.
Keskuus	Relation.
Kohtisuora	Vinkelrät.
Kokoluku	Helt tal.
Kolmikulma	Triangel.
Korkeus	Höjd.
Korko	Dignitet.
Korotin	Exponent.
Korottaa	Upphöja till dignitet.
Kulma	Vinkel.
Kuvasuuruus	Imaginär qvantitet.
Kuvio	Figur.
Kymmenluku-järjestys	Decimal system.
Kymmenystuumaa	Decimal tum.
Kysymys	Problem (algebraiskt).
Kääntää (verrannon jäsenet)	Vända om (termerna i en analogi).
Laajuus	Area, Vidd.
Laskea yhteen	Addera.
Laskusuhde	Aritmetiskt förhållande.
Laskutyö	Algebraisk operation.
Liikaluku	Udda tal.
Linja	Rät linje.
Lisämerkki	Additions l. plustecken.
Loppu-yhtälö	Finaleqvation.

Luku	Tal, antal.
Lukusuuruus	Analytisk storhet.
Lukusuuruus-tiede l. lu'unlasku	Aritmetik.
Luotinen	Lödig (om silfver).
Lu'unlasku	Räkning, kalkyl.
Lu'unlaskuteos	Aritmetisk operation.
Lävistäjä	Diagonal.
Metalli	Metall.
Mitallinen	Rationel (om tal).
Mitaton	Irrationel (om tal).
Mittausoppi	Geometri.
Mittaussuhde	Geometriskt förhållande.
Monikertainen	Mångfaldig.
Monikulma	Månghörning.
Monio	Polynom.
Mukainen	Likformig (om figurer).
Murtolauseke	Bruten expression.
Murtoluku	Bråk.
Murtosuuruus	Bruten qvantitet.
Määrittää	Definiera.
Määritys	Definition.
Neliö	Qvadrat.
Neliömitta	Qvadratmått.
Nimittäjä	Nämnare.
Nousu	Grad (en terms l. eqvations).
Numero-arvo	Nummervärde.
Numerokertoja	Nummerkoefficient.
Numeroluku	Nummer- l. siffertal.
Numero-yhtälö	Nummereqvation.
Osa	Qvot.
Osio	Term (i en polynom).
Osottaja	Täljare.
Pariluku	Jemnt tal.
Peruskertoja	Enkel faktor.
Pienin arvo	Minimum.
Piste	Punkt.
Poistaa	Subtrahera.

Poistettava	Subtrahend.
Poisto-arvo	Negativt värde.
Poistomerkki	Minustecken.
Poistosuuruus	Negativ qvantitet.
Puolisuunnikas	Parelleltrapezium.
Puustavisuuruus	Bokstafsqvantitet.
Puustavi-yhtälö	Bokstafseqvation.
Ratkaista (yhtälö, kysymys)	Lösa (en eqvation, ett problem).
Samankaltainen (osio)	Likformig (term).
Samanlaatuinen	Likartad (af samma slag).
Selventää	Förenkla.
Sieventää	Hyfsa.
Sioituskeino	Substitutionsmetod.
Sivu	Sida.
Suhde	Förhållande.
Suhteen jäsen	Term i ett förhållande.
Suhteen näyttäjä	Rations l. förhållandets exponent.
Sulkumerkki	Parentes.
Summa	Summa.
Suorakulmio	Rektangel.
Suunnikas	Parallelogram.
Suuruus	Storhet, qvantitet.
Suuruustiede	Matematik.
Säde	Radie.
Säännöllinen kuvio	Regulier figur.
Sääntö	Regel.
Tasakolmiomitanto	Plan trigonometri.
Tasa-osa	Part.
Tekemä	Funktion.
Tilasuuruus	Geometrisk storhet.
Tilavuus	Volym.
Todisto	Teorem.
Toteuttaa (yhtälö)	Satisfiera (en eqvation).
Tulo	Produkt.
Tähde	Rest.
Ulottuvaisuus	Utsträckning, dimension.
Vapaasti muuttuvainen	Oberoende variabel.

Varsinaissuuruus	Reel qvantitet.
Vastaismerkkinen	Till tecknet motsatt.
Vastinainen (suuruus)	Motsatt (qvantitet).
Verrannollinen	Proportionerlig.
Verrannon jäsen	Term i en analogi.
Verranto	Analogi.
Vertauskeino	Komparationsmetod.
Viiva	Linie.
Vuorottaa (verrannon jäsenet)	Vexla om (termerna i en analogi).
Vähennettävä	Minuend.
Yhdistettävä	Addend.
Yhteenlasku	Addition.
Yhteenlasku ja poistokeino	Additions- och subtraktionsmetod.
Yhtä-isouden merkki.	Likhetstecken.
Yhtäläinen (monio)	Homogen (polynom).
Yhtälö	Eqvation.
Yhtälön juuri	Eqvations rot.
Yhtälön puoli	Eqvations membrum.
Yhtä suuntainen	Parallel.
Ykkönen	Enhet, etta.
Yksiö	Monom.
Yleislasku	Algebra.
Yleislasku-lauseke	Algebraisk expression.
Yleislasku-suuruus	Algebraisk qvantitet.
Ympyrä	Cirkel.
Ympärys	Perimeter.
Äärellinen	Ändlig.
Ääretön	Oändlig.

Förteckning öfver de i boken begagnade tekniska termerna.

Addend	Yhdistettävä.
Addera	Laskea yhteen.
Addition	Yhteenlasku.
Additions- och sublaktionsmetod	Yhteenlasku- ja poistokeino.
Additionstecken	Lisämerkki.
Algebra	Yleislasku.
Algebraisk expression	Yleislasku-lauseke.
Algebraisk operation	Laskutyö.
Algebraisk qvantitet	Yleislaskusuuruus.
Analogi	Verranto.
Analytisk storhet	Laskusuuruus.
Antal	Luku.
Apotem	Apotemi.
Area, vidd	Laajuus.
Aritmetik	Lukusuuruustiede l. lu'unlasku.
Aritmetiskt förhållande	Laskusuhde.
Aritmetiskt medeltal	Keskiluku (laskukeskinen).
Axiom	Selviö.
Bas (en figurs)	Asema.
Bas (i ett numerations system)	Kantaluku.
Binom	Kaksio.
Bokstafseqvation	Puustavi-yhtälö.
Bokstafsqvantitet	Puustavisuuruus.
Bruten expression	Murtolauseke.
Bruten qvantitet	Murtosuuruus.
Bråk	Murtoluku.
Båge	Kaari.

Cirkel	Ympyrä.
Decimal system	Kymmenluku-järjestys.
Decimal tum	Kymmenystuuma.
Definiera	Määrittää.
Definition	Määritys.
Diagonal	Lävistäjä.
Dignitet	Korko.
Dimension	Ulottuvaisuus.
Dividend	Jaettava.
Dividera	Jakaa.
Division	Jako.
Divisionstecken	Jakomerkki.
Divisor	Jakaja.
Eliminationsmetod	Eroituskeino.
Eliminera	Eroittaa.
Enhet	Ykkönen.
Enkel faktor	Peruskertoja.
Eqvation	Yhtälö.
Eqvations membrum	Yhtälön puoli.
Eqvations rot	Yhtälön juuri.
Exponent	Korotin.
Faktor	Kertoja.
Figur	Kuvio.
Finaleqvation	Loppu-yhtälö.
Formel	Kaava.
Funktion	Tekemä.
Förenkla	Selventää.
Förhållande	Suhde.
Grad	Aste (geom.), Nousu (alg.).
Geometri	Mittausoppi.
Geometrisk storhet	Tilasuuruus.
Geometriskt förhållande	Mittaussuhde.
Grundoperation	Alkeisteos.
Helt tal	Kokoluku.
Homogen (polyn.)	Yhtäläinen.
Hufvudbokstaf (i en polyn.)	Järjestyspuustavi.
Hyfsa	Sieventää.

Höjd	Korkeus.
Imaginär qvantitet	Kuvasuuruus.
Irrationel	Mitaton.
Jemt tal	Pariluku.
Koefficient	Etukertoja.
Komparationsmetod	Vertauskeino.
Korda	Jänne.
Likartad (af samma slag)	Samanlaatuinen.
Likformig (figur)	Mukainen (kuvio).
Likformig (term)	Samankaltainen (osio).
Likhetstecken	Yhtä-isouden merkki.
Linie	Viiva.
Lödig (om silfver)	Luotinen.
Lösa (en eqvation, ett problem)	Ratkaista (yhtälö, kysymys).
Matematik	Suuruustiede.
Maximum	Isoin arvo.
Medelproportional	Keskisuhteinen.
Medelpunkt	Keskipiste.
Minimum	Pienin arvo.
Minuend	Vähennettävä.
Minustecken	Poistomerkki.
Monom	Yksiö.
Motsatt (qvantitet)	Vastinainen (suuruus).
Motsatt (till tecknet)	Vastaismerkkinen.
Multiplicera	Kertoa.
Multiplikation	Kertominen.
Multiplikationstecken	Kerrosmerkki.
Mångfaldig	Monikertainen.
Månghörning, polygon	Monikulma.
Negativ qvantitet	Poistosuuruus.
Negativt värde	Poisto- l. poistava arvo.
Nummereqvation	Numero-yhtälö.
Nummerkoefficient	Numerokertoja.
Nummertal	Numeroluku.
Nummervärde	Numero-arvo.
Nämnare	Nimittäjä.
Oberoende variabel	Vapaasti muuttuvainen.

Olikhetstecken	Epä-isouden merkki.
Oändlig	Ääretön.
Parallel	Yhtä suuntainen.
Parallelogram	Suunnikas.
Paralleltrapezium	Puolisuunnikas.
Parentes	Sulkumerkki.
Partiel qvot	Erityisosa.
Part	Tasa-osa.
Periferi	Kehä.
Perimeter	Ympärys.
Plan trigonometri	Tasakolmiomitanto.
Plustecken	Enennösmerkki.
Polynom	Monio.
Problem (algebraiskt)	Kysymys.
Procent	Kasvu sadalta.
Produkt	Tulo.
Proportionerlig	Verrannollinen.
Punkt	Piste.
Qvadrat	Neliö.
Qvadratmått	Neliömitta.
Qvot	Osa.
Radie	Säde.
Radikal	Alukesuuruus.
Rationel (om tal)	Mitallinen.
Rationel qvantitet	Järkinäissuuruus.
Rations exponent	Suhteen näyttäjä.
Reel qvantitet	Varsinaissuuruus.
Regel	Sääntö.
Regulier figur	Säännöllinen kuvio.
Rektangel	Suorakulmio.
Relation	Keskuus.
Rest	Tähde.
Rot	Aluke.
Rotens index	Alotin.
Rottecken	Alukemerkki.
Rotutdragning	Alukkeen otto.
Räkning, kalkyl	Lu'unlasku l. lasku.

Ränta	Kasvu.
Rät linie	Linja.
Satisfiera (en eqv.)	Toteuttaa (yhtälö).
Sida	Sivu.
Siffra	Numero.
Storhet, qvantitet	Suuruus.
Storlek	Isous.
Substitutionsmetod	Sioituskeino.
Subtrahend	Poistettava.
Subtrahera	Poistaa.
Summa	Summa.
System	Järjestys.
Tal	Luku.
Teorem	Todisto.
Term (i en analogi)	Jäsen (verrannon).
Term (i en polynom)	Osio.
Triangel	Kolmikulma.
Täljare	Osottaja.
Udda tal	Liika luku.
Upphöja till dignitet	Korottaa.
Utsträckning	Ulottuvaisuus.
Vexla om (termerna i en analogi)	Vuorottaa (verrannon jäsenet).
Vilkorseqvation	Ehto-yhtälö.
Vinkel	Kulma.
Vinkelrät	Kohtisuora.
Volym	Tilavuus.
Vända om (termerna i en analogi)	Kääntää (verrannon jäsenet).
Värde	Arvo.
Ändlig	Äärellinen.

Kaikissa maamme kirjakaupoissa:

Suomalaisen Kirjallisuuden-Seuran Toimituksia.

Hinta: 4 Markkaa.

B. i.
Helsinki
SKS
Toim.
39
(1865)