

B. v. 19. t. N^o 20901.

PALLO-KOLMIO-MITANTO.

SUOMALAISEN
KIRJALLISUUDEN SEURA
HELSINGISSÄ.

Suomalaisen
PÄÄLLIS-
Kirjallisuuden Seuran
Toimituksia.

12 Osa,
Toinen wisko.

Helsingissä.
Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran Kirjapainossa,
1856.

PALLO-KOLMIO-MITANTO.

Toimitti

JOH. HENR. EKLÖF,

Filosofian Maisteri.

Helsingissä,

Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran Kirjapainossa,

1856.

PALMO-KOILIO-MITÄTÖ.

Imprimatur: C. A. Sanmark.

Esilause.

Tässä annan halullisille lukijoille Pallo-Kolmio-
mitannon niin lyhykäisesti selitettyä, kuin mahdol-
lista on. Tämä on kuin jatko ennen ilmistyneen,
minulta toimitettuun Tasannes-Kolmio-mitantoon; sen-
vuoksi olen myös viljellyt samoja määräys-sanoja,
ja osvitannut Tasannes-Kolmio-mitanton §§:oin ja
N:roin, missä selityksen vuoksi tarve on vaatinut.
Outoja määräys-sanoja tässä on ainoastaan: ero =
rest, huippu = spets, kertoa = multiplicera, luottaa
= addera, sivuke = kathet, sisältää = omgifva,
tulo = produkt, vastake = hypotenusu ja verranto
= proportion.

Näissä muutamissa lehdissä löytyy kaikki tar-
peelliset tiedot pallo-kolmioitten selitykseksi; ja esimerk-
kijä saa kyllin perään liitetystä taulusta; senvuoksi
en ole myös yhtään esimerkkiä numeroilla erino-

*mattain laskenut, niinkuin tasannes-kolmio-mitannos-
sani tein.*

*Toivoen tämän lukijoitteni hyödyksi tehneeni ja
toimittaneeni, suljen minä kirjaiseni sekä heidän että
yleisön suosioon.*

Helsingissä, Antin päivänä 1853.

J. H. E.

Pallo-Kolmio-mitanto.

Pallo-Kolmio-mitanto opettaa, kuinka kolmesta tietystä tai sivusta eli lopesta jokaisessa pallokolmiossa kolme tietymätöntä tai sivua eli loppea laskulla määrätään. Tasannes-kolmioissa määrätään sivut pituudensa suhteen; pallokolmioissa sen suhteen, kuinka monta pykälää tekevät eli ottavat pallon suuri-ympyrän kaaresta. Seuraavissa käsittelemme ainoastaan semmoisia pallo-kolmioita, joitten sivut ovat $< 180^\circ$, koska kaikki muut pallo-kolmiot näitten avulla helposti taitaan selittää.

§ 1. Opettama.

Jokaisessa pystyloppisessa pallo-kolmiossa on sivukkeen Sinus yhtä iso kuin vastaanseisovan lopen Sinus, kerrottu vastakkeen Sinuksella.

Olkoon ABC pallo-kolmio, jonka loppi C on 90° . Vedettäköön pallon keskipisteestä O jokai-

seen kolmion huippuun säteet, laskettakoon A:sta OB:tä vastaan AD, ja OC:tä vastaan AE pystyisesti, ja yhdistettäköön D ja E; tämän vuoksi on $AE \perp$ tasapintaa BOC:tä vastaan, niin myös ED:tä vastaan; vielä on $ED \perp$ OB:tä vastaan, jonka vuoksi $\sphericalangle ADE = \sphericalangle B$. Nyt on

$$AE = OA \cdot \sin b,$$

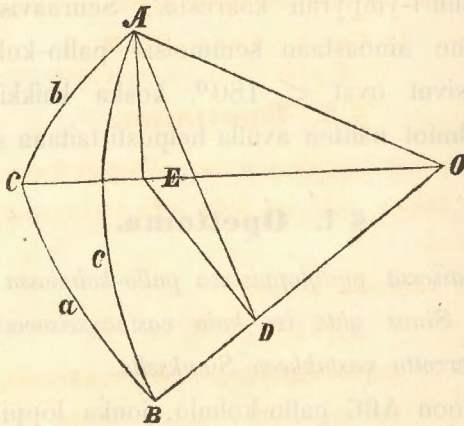
$$AE = AD \cdot \sin B = OA \cdot \sin c \cdot \sin B,$$

niin muodoin $OA \cdot \sin b = OA \cdot \sin c \cdot \sin B$, josta

$$1) \sin b = \sin c \cdot \sin B.$$

Samalla tavalla saadaan myös

$$2) \sin a = \sin c \cdot \sin A.$$



§ 2. Opettama.

Jokaisessa pystyloppisessa pallo-kolmiossa on vastakkeen vieressä makaavan lopen Cosinus yhtä iso kuin samaa loppea vastaan seisovan sivukkeen Cosinus, kerrottu toisen vastakkeen vieressä makaavan lopen Sinuksella.

Sillä samasta saadaan

$$DE = AD \cdot \cos B = OA \cdot \sin c \cdot \cos B,$$

$$DE = OE \cdot \sin a = OA \cdot \cos b \cdot \sin a,$$

niin muodoin $OA \cdot \sin c \cdot \cos B = OA \cdot \cos b \cdot \sin a$, josta

$$\sin c \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin a, \text{ eli}$$

$$\cos B = \cos b \cdot \frac{\sin a}{\sin c} = \cos b \cdot \frac{\sin c \cdot \sin A}{\sin c}, \quad (2)$$

seuraavasti 3) **Cos B = Cos b . Sin A.**

Samalla tavalla saadaan myös

$$4) \text{ **Cos A = Cos a . Sin B.**}$$

§ 3. Opettama.

Jokaisessa pystyloppisessa pallo-kolmiossa on vastakkeen Cosinus yhtä iso kuin tulo molempain sivukkein kerrosta.

Sillä samasta seuraa

$$OD = OA \cdot \cos c, \text{ eli}$$

$$\cos c = \frac{OD}{OA} = \frac{OE \cdot \cos a}{OA} = \frac{OA \cdot \cos b \cdot \cos a}{OA},$$

josta 5) **Cos c = Cos a . Cos b.**

§ 4. Opettama.

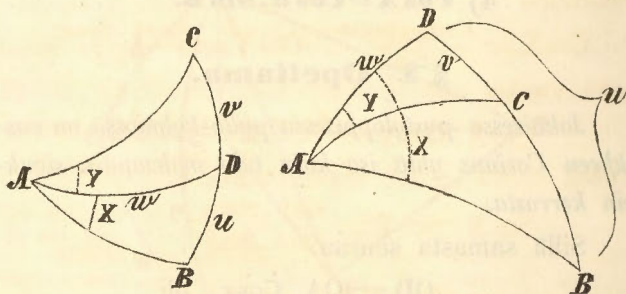
Jokaisessa pallo-kolmiossa ovat sivuin Sinukset samassa verrannossa kuin heitti vastaan seisovain loppuin Sinukset.

Olkoon ABC minlainen pallo - kolmio tahansa; laskettakoon jostakusta lopenhuipusta kaari pysty-kulmaisesti vastaanseisovaa sivua vastaan, esim. $AD \perp BC$, ja pantakoon lyhyiden vuoksi $\angle BAD = X$, $\angle CAD = Y$, $BD = u$, $CD = v$ ja $AD = w$. Näistä saadaan

$$\text{ja} \quad \left. \begin{array}{l} \sin w = \sin c \cdot \sin B, \\ \sin w = \sin b \cdot \sin C; \end{array} \right\} (1, 2)$$

niin muodoin $\sin c \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin C$,

eli yleisesti samalla muotoa



6) $\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A$,

7) $\sin b \cdot \sin C = \sin c \cdot \sin B$,

8) $\sin c \cdot \sin A = \sin a \cdot \sin C$,

taikka lyhykäisesti kirjoitetut

$$9) \sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin C.$$

§ 5. Opettama.

Jokaisessa pallo-kolmiossa saadaan jonkun lopen Cosinus, jos vastaanaseisovan sivun Cosinus vähetään sisältävään sivuun Cosinusten tulolla, ja tämä ero jaetaan samain sivuun Sinusten tulolla..

Edellisestä saadaan

$$\sin X = \frac{\sin u}{\sin c}, \quad \sin Y = \frac{\sin v}{\sin b}, \quad (1, 2)$$

ja

$$\cos X = \cos u \cdot \sin B, \quad \cos Y = \cos v \cdot \sin C, \quad (3, 4)$$

niin myös

$$\sin B = \frac{\sin w}{\sin c}, \quad \sin C = \frac{\sin w}{\sin b}, \quad (1, 2)$$

sentähden

$$\cos X = \frac{\cos u \cdot \sin w}{\sin c}, \quad \cos Y = \frac{\cos v \cdot \sin w}{\sin b};$$

jonka vuoksi

$$\cos X \cdot \cos Y = \frac{\cos u \cdot \cos v \cdot \sin^2 w}{\sin b \cdot \sin c},$$

$$\sin X \cdot \sin Y = \frac{\sin u \cdot \sin v}{\sin b \cdot \sin c}.$$

Näistä seuraa (Tas. Kolm. 14, 15)

$$\cos(X \pm Y)$$

$$= \frac{\cos u \cdot \cos v \cdot \sin^2 w \mp \sin u \cdot \sin v}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$= \frac{\text{Cos } u \cdot \text{Cos } v (1 - \text{Cos}^2 w) \mp \text{Sin } u \cdot \text{Sin } v}{\text{Sin } b \cdot \text{Sin } c} \quad (\text{Tas. Kolm. 1.})$$

$$= \frac{\text{Cos } u \cdot \text{Cos } v \mp \text{Sin } u \cdot \text{Sin } v - \text{Cos } u \cdot \text{Cos } v \cdot \text{Cos}^2 w}{\text{Sin } b \cdot \text{Sin } c}$$

$$= \frac{\text{Cos}(u \mp v) - \text{Cos } u \cdot \text{Cos } v \cdot \text{Cos}^2 w}{\text{Sin } b \cdot \text{Sin } c},$$

seuraavasti myös

$$\text{Cos } A = \frac{\text{Cos } a - \text{Cos } v \cdot \text{Cos } w \cdot \text{Cos } u \cdot \text{Cos } w}{\text{Sin } b \cdot \text{Sin } c}$$

eli (5)

$$10) \quad \text{Cos } A = \frac{\text{Cos } a - \text{Cos } b \cdot \text{Cos } c}{\text{Sin } b \cdot \text{Sin } c}.$$

Samalla tavalla saadaan myös

$$11) \quad \text{Cos } B = \frac{\text{Cos } b - \text{Cos } a \cdot \text{Cos } c}{\text{Sin } a \cdot \text{Sin } c}, \text{ ja}$$

$$12) \quad \text{Cos } C = \frac{\text{Cos } c - \text{Cos } a \cdot \text{Cos } b}{\text{Sin } a \cdot \text{Sin } b}.$$

§ 6. Opettama.

Jokaisessa pallo-kolmiossa saadaan jonkun sivun Cosinus, jos vasta-loppeen Cosinukseen luotetaan tulo jällelle jätneitten loppein Cosinuksista, ja tämä summa jaetaan samain loppein Sinusten tulolla.

Edellisistä saadaan (6, 7, 8)

$$\text{Sin } u \cdot \text{Sin } B = \text{Sin } X \cdot \text{Sin } w,$$

$$\text{Sin } v \cdot \text{Sin } C = \text{Sin } Y \cdot \text{Sin } w,$$

joista $\text{Sin } u = \frac{\text{Sin } X \cdot \text{Sin } w}{\text{Sin } B}, \quad \text{Sin } v = \frac{\text{Sin } Y \cdot \text{Sin } w}{\text{Sin } C},$

ja (3, 4)

$$\cos u = \frac{\cos X}{\sin B}, \quad \cos v = \frac{\cos Y}{\sin C}.$$

Nämät antavat

$$\cos u \cdot \cos v = \frac{\cos X \cdot \cos Y}{\sin B \cdot \sin C},$$

$$\sin u \cdot \sin v = \frac{\sin X \cdot \sin Y \cdot \sin^2 w}{\sin B \cdot \sin C};$$

ja niin muodoin (Tas. Kolm. 14, 15)

$\cos(u \pm v)$

$$= \frac{\cos X \cdot \cos Y \mp \sin X \cdot \sin Y \cdot \sin^2 w}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$= \frac{\cos X \cdot \cos Y \mp \sin X \cdot \sin Y (1 - \cos^2 w)}{\sin B \cdot \sin C} \quad (\text{Tas. Kolm. 1.})$$

$$= \frac{\cos X \cdot \cos Y \mp \sin X \cdot \sin Y \pm \sin X \cdot \sin Y \cdot \cos^2 w}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$= \frac{\cos(X \pm Y) \pm \sin X \cdot \sin Y \cdot \cos^2 w}{\sin B \cdot \sin C},$$

seuraavasti myös

$$\cos a = \frac{\cos(X \pm Y) \pm \sin X \cdot \cos w \cdot \sin Y \cdot \cos w}{\sin B \cdot \sin C};$$

jossa ylimäinen merkki (+) kuuluu edelliseen tapaukseen piirroksamme, ja alimainen (−) jälkimmäiseen. Mutta (3, 4)

$$\cos B = \sin X \cdot \cos w, \quad \pm \cos C = \sin Y \cdot \cos w,$$

jonka tähden saadaan

$$13) \quad \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}; \text{ samoin myös}$$

$$14) \quad \cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}, \text{ ja}$$

$$15) \quad \cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}.$$

§ 7. Seurans.

Saadaksemme yht'isoudet 10), 11) ja 12) soveliampaan muotoon, luottakaamme 1 kummallekin puolelle. Tästä seuraa

$$\begin{aligned} 1 + \cos A &= 1 + \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \\ &= \frac{\cos a + \sin b \cdot \sin c - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \\ &= \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \cdot \sin c}, \end{aligned}$$

josta (Tas. Kolm. 23.)

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \cdot \sin c}}.$$

Pannaanko $a + b + c = 2s$, jonka vuoksi $b + c - a = 2(s - a)$, niin saadaan

$$16) \quad \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-a)}{\sin b \cdot \sin c}}, \text{ ja samalla tavalla}$$

$$17) \quad \cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-b)}{\sin a \cdot \sin c}},$$

$$18) \quad \cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-c)}{\sin a \cdot \sin b}}$$

Jos taas 1:stä eroitamme saman yht'-isouden momentit puolet, saamme yhtäläisellä tavalla

$$19) \quad \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}{\sin b \cdot \sin c}},$$

$$20) \quad \sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-c)}{\sin a \cdot \sin c}},$$

$$21) \quad \sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-b)}{\sin a \cdot \sin b}}.$$

Jos 19) jaetaan 16), 20) jaetaan 17), ja 21) jaetaan 18), niin saadaan

$$22) \quad \operatorname{Tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}{\sin s \cdot \sin(s-a)}},$$

$$23) \quad \operatorname{Tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-c)}{\sin s \cdot \sin(s-b)}},$$

$$24) \quad \operatorname{Tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-b)}{\sin s \cdot \sin(s-c)}}.$$

Edellä mainitulla tavalla saadaan myös 13), 14) ja 15) mukavampaan muotoon. Jos pannaan $A + B + C = S$, niin saadaan

$$25) \quad \cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos(S-B) \cdot \cos(S-C)}{\sin B \cdot \sin C}},$$

$$26) \quad \cos \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\cos(S-A) \cdot \cos(S-C)}{\sin A \cdot \sin C}},$$

$$27) \quad \cos \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\cos(S-A) \cdot \cos(S-B)}{\sin A \cdot \sin B}};$$

$$28) \quad \sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S \cdot \cos(S-A)}{\sin B \cdot \sin C}},$$

$$29) \quad \sin \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{-\cos S \cdot \cos(S-B)}{\sin A \cdot \sin C}},$$

$$30) \quad \sin \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{-\cos S \cdot \cos(S-C)}{\sin A \cdot \sin B}},$$

$$31) \quad \operatorname{Tg} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S \cdot \cos(S-A)}{\cos(S-B) \cdot \cos(S-C)}},$$

$$32) \quad \operatorname{Tg} \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{-\cos S \cdot \cos(S-B)}{\cos(S-A) \cdot \cos(S-C)}},$$

$$33) \quad \operatorname{Tg} \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{-\cos S \cdot \cos(S-C)}{\cos(S-A) \cdot \cos(S-B)}}.$$

§ 8. Seuraus.

Koska (Tas. Kolm. 14, 15) $\cos \frac{1}{2}(A \pm B) = \cos \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} B \mp \sin \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} B$, niin saadaan, jos arvot otetaan 16), 17), 19) ja 20):stä,

$$\cos \frac{1}{2}(A \pm B)$$

$$= \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-a)}{\sin b \cdot \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-b)}{\sin a \cdot \sin c}} \mp \sqrt{\frac{\sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}{\sin b \cdot \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-c)}{\sin a \cdot \sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2 s \cdot \sin(s-a) \cdot \sin(s-b)}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin^2 c}} \mp \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-b) \cdot \sin^2(s-c)}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin^2 c}}$$

$$= \frac{\sin s}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-b)}{\sin a \cdot \sin b}} \mp \frac{\sin(s-c)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-b)}{\sin a \cdot \sin b}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin s \mp \sin(s-c)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-b)}{\sin a \cdot \sin b}} \\
&= \frac{\sin s \mp \sin(s-c)}{\sin c} \cdot \sin \frac{1}{2} C. \quad (21)
\end{aligned}$$

Tästä saadaan (Tas. Kolm. 32, 33, 22)

$$\cos \frac{1}{2}(A \pm B)$$

$$= \left\{ \frac{2 \sin \frac{1}{2}(s-s+c) \cdot \cos \frac{1}{2}(s+s-c)}{\sin c} \cdot \sin \frac{1}{2} C \right.$$

$$= \left. \frac{2 \sin \frac{1}{2}(s+s-c) \cdot \cos \frac{1}{2}(s-s+c)}{\sin c} \cdot \sin \frac{1}{2} C \right.$$

$$= \left\{ \frac{2 \sin \frac{1}{2} c \cdot \cos(s-\frac{1}{2}c)}{2 \sin \frac{1}{2} c \cdot \cos \frac{1}{2} c} \cdot \sin \frac{1}{2} C \right.$$

$$= \left. \frac{2 \sin(s-\frac{1}{2}c) \cdot \cos \frac{1}{2} c}{2 \sin \frac{1}{2} c \cdot \cos \frac{1}{2} c} \cdot \sin \frac{1}{2} C \right.$$

$$= \left\{ \frac{\cos(s-\frac{1}{2}c)}{\cos \frac{1}{2} c} \cdot \sin \frac{1}{2} C \right.$$

$$= \left. \frac{\sin(s-\frac{1}{2}c)}{\sin \frac{1}{2} c} \cdot \sin \frac{1}{2} C, \text{ eli} \right.$$

$$34) \quad \cos \frac{1}{2}(A \mp B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2} c} \cdot \sin \frac{1}{2} C, \text{ ja}$$

$$35) \quad \cos \frac{1}{2}(A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2} c} \cdot \sin \frac{1}{2} C.$$

Vielä on (Tas. Kolm. 12, 13) $\sin \frac{1}{2}(A \pm B) = \sin \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} B \pm \cos \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} B$; sen vuoksi, jos arvot 16), 17), 19) ja 20):stä sisälle pannaan,

$$\text{Sin } \frac{1}{2} (A \pm B)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{\sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}{\sin b \cdot \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-b)}{\sin a \cdot \sin c}} \pm \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-a)}{\sin b \cdot \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-c)}{\sin a \cdot \sin c}} \\
 &= \sqrt{\frac{\sin^2(s-b) \cdot \sin s \cdot \sin(s-c)}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin^2 c}} \pm \sqrt{\frac{\sin^2(s-a) \cdot \sin s \cdot \sin(s-c)}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin^2 c}} \\
 &= \frac{\sin(s-b)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-c)}{\sin a \cdot \sin b}} \pm \frac{\sin(s-a)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-c)}{\sin a \cdot \sin b}} \\
 &= \frac{\sin(s-b) \pm \sin(s-a)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-c)}{\sin a \cdot \sin b}} \\
 &= \frac{\sin(s-b) \pm \sin(s-a)}{\sin c} \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} C. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Tästä saadan (Tas. Kolm. 32, 33, 22)

$$\text{Sin } \frac{1}{2} (A \pm B)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \frac{2 \text{Sin } \frac{1}{2} (s-b+s-a) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} (s-b-s+a)}{\text{Sin } c} \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} C \right. \\
 &= \left. \frac{2 \text{Sin } \frac{1}{2} (s-b-s+a) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} (s-b+s-a)}{\text{Sin } c} \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} C \right. \\
 &= \left\{ \frac{2 \text{Sin} (s-\frac{1}{2}(a+b)) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} (a-b)}{2 \text{Sin } \frac{1}{2} c \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} c} \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} C \right. \\
 &= \left. \frac{2 \text{Sin } \frac{1}{2} (a-b) \cdot \text{Cos} (s-\frac{1}{2}(a+b))}{2 \text{Sin } \frac{1}{2} c \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} c} \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} C \right. \\
 &= \left\{ \frac{2 \text{Sin } \frac{1}{2} c \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} (a-b)}{2 \text{Sin } \frac{1}{2} c \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} c} \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} C \right. \\
 &= \left. \frac{2 \text{Sin } \frac{1}{2} (a-b) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} c}{2 \text{Sin } \frac{1}{2} c \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} c} \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} C \right.
 \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c} \cdot \cos \frac{1}{2}C \right.$$

$$= \left. \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}c} \cdot \cos \frac{1}{2}C, \text{ eli} \right.$$

$$36) \sin \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c} \cdot \cos \frac{1}{2}C, \text{ ja}$$

$$37) \sin \frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}c} \cdot \cos \frac{1}{2}C.$$

Samalla muotoa saadaan myös

$$38) \cos \frac{1}{2}(B+C) = \frac{\cos \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}a} \cdot \sin \frac{1}{2}A,$$

$$39) \cos \frac{1}{2}(B-C) = \frac{\sin \frac{1}{2}(b+c)}{\sin \frac{1}{2}a} \cdot \sin \frac{1}{2}A,$$

$$40) \sin \frac{1}{2}(B+C) = \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}a} \cdot \cos \frac{1}{2}A,$$

$$41) \sin \frac{1}{2}(B-C) = \frac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}a} \cdot \cos \frac{1}{2}A; \text{ ja}$$

$$42) \cos \frac{1}{2}(A+C) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+c)}{\cos \frac{1}{2}b} \cdot \sin \frac{1}{2}B,$$

$$43) \cos \frac{1}{2}(A-C) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+c)}{\sin \frac{1}{2}b} \cdot \sin \frac{1}{2}B,$$

$$44) \sin \frac{1}{2}(A+C) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-c)}{\cos \frac{1}{2}b} \cdot \cos \frac{1}{2}B,$$

$$45) \sin \frac{1}{2}(A-C) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-c)}{\sin \frac{1}{2}b} \cdot \cos \frac{1}{2}B.$$

34)–45):stä saadaan net niin kutsutut

Gaussin Yht'-isoudet:

$$46) \quad \text{Cos } \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2}c = \text{Cos } \frac{1}{2}(a + b) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} \mathbf{C},$$

$$47) \quad \text{Sin } \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2}c = \text{Cos } \frac{1}{2}(a - b) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} \mathbf{C},$$

$$48) \quad \text{Cos } \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2}c = \text{Sin } \frac{1}{2}(a + b) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} \mathbf{C},$$

$$49) \quad \text{Sin } \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2}c = \text{Sin } \frac{1}{2}(a - b) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} \mathbf{C},$$

$$50) \quad \text{Cos } \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2}a = \text{Cos } \frac{1}{2}(b + c) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} \mathbf{A},$$

$$51) \quad \text{Sin } \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2}a = \text{Cos } \frac{1}{2}(b - c) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} \mathbf{A}.$$

§ 9. Seuraus.

$$52) \quad \text{Cos } \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{C}) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2}a = \text{Sin } \frac{1}{2}(b + c) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} \mathbf{A},$$

$$53) \quad \text{Sin } \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{C}) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2}a = \text{Sin } \frac{1}{2}(b - c) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} \mathbf{A}; \text{ ja}$$

$$54) \quad \text{Cos } \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{C}) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2}b = \text{Cos } \frac{1}{2}(a + c) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} \mathbf{B},$$

$$55) \quad \text{Sin } \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{C}) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2}b = \text{Cos } \frac{1}{2}(a - c) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} \mathbf{B},$$

$$56) \quad \text{Cos } \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{C}) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2}b = \text{Sin } \frac{1}{2}(a + c) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2} \mathbf{B},$$

$$57) \quad \text{Sin } \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{C}) \cdot \text{Sin } \frac{1}{2}b = \text{Sin } \frac{1}{2}(a - c) \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} \mathbf{B}.$$

§ 10. Seuraus.

Jos 47) jaetaan 46), 49) 48):llä, 51) 50):llä, 53) 52):llä, 55) 54):llä ja 57) 56):llä; ja myös 48) jaetaan 46), 49) 47):llä, 52) 50):llä, 53) 51):llä, 56) 54):llä ja 57) 55):llä, niin saadaan

Neeperin Yht'-isoudet:

$$58) \quad \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{\mathbf{Cos}_{\frac{1}{2}}(a-b)}{\mathbf{Cos}_{\frac{1}{2}}(a+b)} \cdot \mathbf{Cotg}_{\frac{1}{2}} \mathbf{C},$$

$$59) \quad \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \frac{\mathbf{Sin}_{\frac{1}{2}}(a-b)}{\mathbf{Sin}_{\frac{1}{2}}(a+b)} \cdot \mathbf{Cotg}_{\frac{1}{2}} \mathbf{C},$$

$$60) \quad \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \frac{\mathbf{Cos}_{\frac{1}{2}}(b-c)}{\mathbf{Cos}_{\frac{1}{2}}(b+c)} \cdot \mathbf{Cotg}_{\frac{1}{2}} \mathbf{A},$$

$$61) \quad \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{B}-\mathbf{C}) = \frac{\mathbf{Sin}_{\frac{1}{2}}(b-c)}{\mathbf{Sin}_{\frac{1}{2}}(b+c)} \cdot \mathbf{Cotg}_{\frac{1}{2}} \mathbf{A},$$

$$62) \quad \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}+\mathbf{C}) = \frac{\mathbf{Cos}_{\frac{1}{2}}(a-c)}{\mathbf{Cos}_{\frac{1}{2}}(a+c)} \cdot \mathbf{Cotg}_{\frac{1}{2}} \mathbf{B},$$

$$63) \quad \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}-\mathbf{C}) = \frac{\mathbf{Sin}_{\frac{1}{2}}(a-c)}{\mathbf{Sin}_{\frac{1}{2}}(a+c)} \cdot \mathbf{Cotg}_{\frac{1}{2}} \mathbf{B};$$

$$64) \quad \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}}(a+b) = \frac{\mathbf{Cos}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}-\mathbf{B})}{\mathbf{Cos}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}+\mathbf{B})} \cdot \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}} c,$$

$$65) \quad \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}}(a-b) = \frac{\mathbf{Sin}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}-\mathbf{B})}{\mathbf{Sin}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}+\mathbf{B})} \cdot \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}} c,$$

$$66) \quad \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}}(b+c) = \frac{\mathbf{Cos}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{B}-\mathbf{C})}{\mathbf{Cos}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{B}+\mathbf{C})} \cdot \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}} a,$$

$$67) \quad \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}}(b-c) = \frac{\mathbf{Sin}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{B}-\mathbf{C})}{\mathbf{Sin}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{B}+\mathbf{C})} \cdot \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}} a,$$

$$68) \quad \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}}(a+c) = \frac{\mathbf{Cos}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}-\mathbf{C})}{\mathbf{Cos}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}+\mathbf{C})} \cdot \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}} b,$$

$$69) \quad \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}}(a-c) = \frac{\mathbf{Sin}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}-\mathbf{C})}{\mathbf{Sin}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{A}+\mathbf{C})} \cdot \mathbf{Tg}_{\frac{1}{2}} b.$$

§ 11. Seuraus.

60) ja 61) antavat helposti

$$70) \quad \mathbf{Tg} \frac{1}{2} \mathbf{A} = \frac{\mathbf{Cos} \frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{c})}{\mathbf{Cos} \frac{1}{2} (\mathbf{b} + \mathbf{c})} \cdot \mathbf{Cotg} \frac{1}{2} (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$= \frac{\mathbf{Sin} \frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{c})}{\mathbf{Sin} \frac{1}{2} (\mathbf{b} + \mathbf{c})} \cdot \mathbf{Cotg} \frac{1}{2} (\mathbf{B} - \mathbf{C}).$$

Samoin löydetään 62) ja 63):sta, niimyyös 58) ja 59):stä

$$71) \quad \mathbf{Tg} \frac{1}{2} \mathbf{B} = \frac{\mathbf{Cos} \frac{1}{2} (\mathbf{a} - \mathbf{c})}{\mathbf{Cos} \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{c})} \cdot \mathbf{Cotg} \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{C})$$

$$= \frac{\mathbf{Sin} \frac{1}{2} (\mathbf{a} - \mathbf{c})}{\mathbf{Sin} \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{c})} \cdot \mathbf{Cotg} \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{C}),$$

$$72) \quad \mathbf{Tg} \frac{1}{2} \mathbf{C} = \frac{\mathbf{Cos} \frac{1}{2} (\mathbf{a} - \mathbf{b})}{\mathbf{Cos} \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{b})} \cdot \mathbf{Cotg} \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

$$= \frac{\mathbf{Sin} \frac{1}{2} (\mathbf{a} - \mathbf{b})}{\mathbf{Sin} \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{b})} \cdot \mathbf{Cotg} \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{B}).$$

§ 12. Seuraus.

Samoin saadaan 66) ja 67):stä, 68) ja 69):stä ja 64) ja 65):stä

$$73) \quad \mathbf{Tg} \frac{1}{2} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{Cos} \frac{1}{2} (\mathbf{B} + \mathbf{C})}{\mathbf{Cos} \frac{1}{2} (\mathbf{B} - \mathbf{C})} \cdot \mathbf{Tg} \frac{1}{2} (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

$$= \frac{\mathbf{Sin} \frac{1}{2} (\mathbf{B} + \mathbf{C})}{\mathbf{Sin} \frac{1}{2} (\mathbf{B} - \mathbf{C})} \cdot \mathbf{Tg} \frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{c}),$$

$$\begin{aligned}
 74) \quad \text{Tg } \frac{1}{2} b &= \frac{\text{Cos } \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{C})}{\text{Cos } \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{C})} \cdot \text{Tg } \frac{1}{2} (a + c) \\
 &= \frac{\text{Sin } \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{C})}{\text{Sin } \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{C})} \cdot \text{Tg } \frac{1}{2} (a - c),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 75) \quad \text{Tg } \frac{1}{2} c &= \frac{\text{Cos } \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B})}{\text{Cos } \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{B})} \cdot \text{Tg } \frac{1}{2} (a + b) \\
 &= \frac{\text{Sin } \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B})}{\text{Sin } \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{B})} \cdot \text{Tg } \frac{1}{2} (a - b).
 \end{aligned}$$

§ 13. Tehtämä.

Pallo-kolmiossa tiedät kolme sivua a , b , c ; kuinka isot lopet A , B , C ?

A :n saat 22), B :n 23) ja C :n 24):stä.

§ 14. Tehtämä.

Pallo-kolmiossa tiedät kolme loppea A , B , C ; kuinka isot sivut a , b , c ?

a :n saat 31), b :n 32) ja c :n 33):sta.

§ 15. Tehtämä.

Pallo-kolmiossa tiedät kaksi sivua b ja c ja yhden vastalopen B ; kuinka isot lopet A ja C , niimmös kolmas sivu a ?

C :n saat 7), A :n 70) ja a :n 73):sta.

Muist. Kuin C:llä tässä taitaa olla kaksi arvoa, yksi vähempi 90° ja toinen isompi 90° , niin saavat myös muutamissa tapauksissa A ja a kaksi arvoa. Tässä on merkittävä mitä on sanottu Tas. Kolm. 32 §:ssa.

§ 16. Tehtämä.

Pallo-kolmiossa tiedät kaksi loppia B ja C ja yhden vastaanaseisovan sivun b ; kuinka isot sivut a ja c , niinmyös kolmas loppu A?

$c:n$ saat 7) $a:n$ 73) ja $A:n$ 70):stä.

Tässä on merkittävä sama muistutus kuin edellisessäkin §:ssa.

§ 17. Tehtämä.

Pallo-kolmiossa tiedät kaksi sivua a ja b ja niiden välissä makaavan lopen C; kuinka isot lopet A ja B, ja kuinka iso sivu c ?

$\frac{1}{2}(A+B)$ saat 58):sta, ja $\frac{1}{2}(A-B)$ 59):stä, joista sitten, niinkuin Tas. Kolm. 31 §:ssa on näytetty, saat A ja B. $c:n$ saat 7) eli 8):sta.

§ 18. Tehtämä.

Pallo-kolmiossa tiedät kaksi loppia A ja B ja niiden välissä makaavan sivun c ; kuinka isot sivut a ja b , ja kuinka iso loppu C?

$\frac{1}{2}(a+b)$ saat 64):stä, ja $\frac{1}{2}(a-b)$ 65):stä,
joista sitten, niinkuin äsken osotettiin, löydät a
ja b . C:n saat 7) eli 8):sta.

T a u l u, osoittava muutamain

<i>N^o</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
1	58°23' 45''	121°36' 15''	68° 3' 12''
2	155 43 50	24 15 10	153 24 42
3	54 20	36 27	43 32 31
4	67 12	50	52 55 26
5	85 36 50	50	83 10 1
6	94 23 10	50	96 49 59
7	120 55 35	50	143 5 11
8	120 55 35	120 55 35	73 49 38
9	63 15 12	63 15 12	91 7 18
10	120 55 35	67 12	90 9 43
11	123 48 4	63 15 12	104 22 31
12	59 4 25	69 25 11	93 45 40
13	120 55 35	110 34 49	93 45 40
14	54 54 42	119 44 48	107 51 24
15	59 4 25	94 23 10	59 55 10
16	50 48 20	116 44 48	129 11 40
17	129 11 40	63 15 12	129 11 40
18	59 4 25	91 47 40	55 52 43
19	129 57 59	116 44 48	47 42 1
20	50 2 1	63 15 12	47 42 1
21	112 48	69 25 11	70 13 41
22	125 5 18	56 11 56	123 21 13
23	67 12	67 12	105 50 56
24	123 48 4	123 48 4	60 17 40
25	67 12	85 36 50	136 5 29
26	112 48	94 23 10	136 5 29
27	50 12 4	123 48 4	144 41 29
28	67 12	91 47 40	39 52 4
29	129 57 59	123 48 4	32 12 13
30	50 2 1	56 11 56	32 12 13
31	110 34 49	110 34 49	113 41 42
32	54 54 42	54 54 42	53 9 54
33	110 34 49	85 36 50	69 59 8
34	50 12 4	125 5 18	31 49 38

pallo-kolmioin sivut ja lopet.

N^o	A	B	C
1	24° 16' 10"	155° 3' 50"	26° 35' 18"
2	121 36 15	58 23 45	111, 57 48
3	90	46 59 42	57 59 17
4	90	56 11 56	59 56 10
5	90	50 12 4	84 45 19
6	90	50 12 4	95 14 41
7	90	63 15 12	135 33 39
8	116 44 48	116 44 48	88 52 42
9	120 55 35	120 55 35	106 10 22
10	123 48 4	63 15 12	75 37 29
11	120 55 35	67 12	89 50 17
12	54 54 42	63 15 12	107 51 24
13	125 5 18	116 44 48	107 51 24
14	59 4 25	110 34 49	86 14 20
15	50 12 4	116 44 48	50 48 20
16	120 55 35	94 23 10	59 55 10
17	59 4 25	85 36 50	59 55 10
18	50 2 1	116 44 48	47 42 1
19	120 55 35	91 47 40	55 52 43
20	59 4 25	88 12 20	55 52 43
21	125 5 48	56 11 56	56 38 47
22	112 48	69 25 11	109 46 19
23	56 11 56	56 11 56	119 42 20
24	112 48	112 48	79 9 4
25	50 12 4	56 11 56	144 41 29
26	129 47 56	123 48 4	144 41 29
27	67 12	94 23 10	136 5 29
28	50 2 1	123 48 4	32 12 13
29	112 48	91 47 40	39 52 4
30	67 12	88 12 20	39 52 4
31	125 5 18	125 5 18	126 50 6
32	69 25 11	69 25 11	66 18 18
33	129 47 56	54 54 42	31 49 38
34	69 25 11	94 23 10	110 52

St.	A.	B.	C.
1	247.10	158.3	20.32
2	151.30	58.23	141.57
3	90	48.69	91.50
4	90	58.14	10.50
5	90	50.12	84.45
6	90	50.12	99.14
7	90	63.15	108.33
8	118.44	118.44	88.32
9	130.52	130.52	100.10
10	130.48	63.15	78.37
11	150.25	63.15	89.50
12	54.54	63.15	107.51
13	128.51	118.44	107.51
14	59.42	110.21	86.14
15	80.12	110.41	50.48
16	120.52	91.23	59.52
17	59.42	82.38	59.52
18	70.51	118.44	47.45
19	130.52	61.47	89.32
20	70.42	88.13	78.32
21	132.52	98.11	98.38
22	112.48	69.52	108.46
23	59.11	59.11	119.45
24	412.48	112.48	79.51
25	50.12	59.11	114.41
26	139.17	132.48	114.41
27	67.12	99.53	110.52
28	70.51	139.48	78.12
29	112.48	61.47	89.32
30	67.12	88.13	78.32
31	132.52	132.52	130.50
32	69.52	69.52	69.52
33	139.42	64.21	45.41
34	69.52	61.21	21.10

B. i

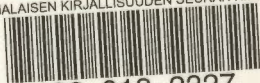
Helsinki
SKS

Toim. 12

12:2

(1856)

SUOMALAISEN KIRJALLISUUDEN SEURAN KIRJASTO



106 013 2327

A decorative border surrounds the page, featuring a repeating geometric pattern of interlocking hexagons and squares, with ornate scrollwork at the corners.

Maksaa: 15 kop. hopiassa.