# Klasslärarstuderandes matematiska misstag och generella matematikprestationer

Sanna Ahlö

Magisteravhandling i pedagogik

Handledare: Ann-Sofi Röj-Lindberg

Fakulteten för pedagogik och välfärdsstudier

Åbo Akademi

Vasa, 2023

# Abstrakt

| Författare:<br><br>Ahlö, Sanna Maria | Årtal:<br>2023 |
|---|---|
| Arbetets titel:<br><br>Klasslärarstuderandes matematiska misstag och generella matematikprestationer | |
| Avhandling för magisterexamen i pedagogik<br><br>Åbo Akademi. Fakulteten för pedagogik och välfärdsstudier | Sidantal<br>91(108) |


Referat

Jag upplever att intresset för och kunskaperna i matematik har sjunkit de senaste åren och upplevelsen återfinns även hos andra. Beror försämrade matematikkunskaper på läraren? Forskning visar att lärarens kunskaper och attityder påverkar elevernas attityder och prestationer. Därför skulle det vara viktigt att lärare har goda matematikkunskaper. Jag ville ta reda på hur blivande klasslärare presterar i grundläggande matematik och om deras uppgiftslösningar innehåller misstag.

Syftet med denna avhandling var således att ta reda på vilka matematikkunskaper klasslärarstuderande besitter samt att kartlägga vilka matematiska misstag som förekommer i studerandes uppgiftslösningar från matematiktest som ingår i klasslärarutbildningen. Utgående från syftet formulerades följande forskningsfrågor:

1. a) Hur presterar klasslärarstuderande i grundskolans matematik?
   b) Skiljer sig prestationerna mellan rutinuppgifter och problemlösningsuppgifter?

2. Hurudana matematiska misstag förekommer i klasslärarstuderandes lösningar till problembaserade textuppgifter?

För att få svar på forskningsfrågorna analyserades matematiktest som 98 lärarstuderande vid Åbo Akademi genomfört i början av sina studier. Den huvudsakliga databearbetningsmetoden var kvalitativ analys och kategorisering men även kvantitativa inslag förekom. Prestationerna för hela testet studerades kvantitativt medan lösningar från fem problemliknande uppgifter analyserades kvalitativt för att kartlägga misstag.

Resultaten visar på svaga prestationer och en hel del misstag och bristande matematiska kunskaper hos klasslärarstuderande. Endast 39 av 98 studerande uppnådde nivån för godkänt resultat i testet. Rutinuppgifter var enklare än problemuppgifter. Misstagen kategoriseras som slarvfel, räknefel, otillräckliga räknefärdigheter samt feluppfattning. Många misstag är återkommande i flera uppgifter medan det också finns misstag som är specifika för en uppgift. Feluppfattningar är den mest omfattande kategorin. Exempel på mycket förekommande feluppfattningar är fel användning av förhållande samt fel tolkning av uppgiftstexterna.

Eftersom testet baseras på grundskolans matematikinnehåll kunde man av klasslärare förvänta sig en mycket högre andel godkända. Klasslärare undervisar trots allt omkring två tredjedelar av hela grundskolans matematiklektioner. Klasslärare bör även ha kunskaper som sträcker sig lite längre än de kunskaper eleverna ska uppnå i lågstadiet eftersom klasslärarna ska förbereda eleverna för högstadiet och även kunna stöda elever med särskilda kunskaper.

Utifrån resultatet i min studie kan man se att dessa klasslärarstuderande inte har tillräckliga kunskaper för den matematikundervisning som de i framtiden ska ansvara för. Kunskaperna räcker heller inte till för att studerande ska kunna diskutera skolmatematikens didaktiska perspektiv under matematikkurserna. Något måste därför förändras. Jag anser att lärarutbildningarna har ett stort ansvar i att få bort feluppfattningar och stärka studerandes matematikkunskaper. En början mot detta kan vara flera obligatoriska matematikkurser i utbildningen till klasslärare. På så sätt kan man säkra god matematikundervisning och skapa förutsättning för djupare matematikuppfattning hos elever i framtiden.

Sökord

(se) Matematik, problemlösning, klasslärarstuderande, matematiska misstag

(fi) Matematiikka, ongelmanratkaisu, luokanopettajaopiskelija, matemaattisia virheitä

(eng) Mathematics, problem solving, teacher candidate, mathematical mistakes

# Innehållsförteckning

**Tabellförteckning**

**Figurförteckning**

# 1 Inledning

*I detta kapitel diskuteras först bakgrunden till avhandlingen. Därefter fastställs syftet och forskningsfrågorna och slutligen presenteras avhandlingens disposition.*

## 1.1 Bakgrund

Jag upplever att intresset för och kunskaperna i matematik har sjunkit de senaste åren och upplevelsen återfinns även hos andra (Sandström, 2023; Söderman, 2023). Sandström diskuterar även risken med att försämrade kunskaper blir en ond cirkel ifall inte klasslärarnas matematikkunskaper höjs. Elevers matematikprestationer sjunker och de som i framtiden söker in till klasslärarutbildningarna tar med sig dåliga matematikkunskaper som riskerar gå vidare till nästa generation. Också forskning bekräftar sjunkande matematikkunskaper, exempelvis kan man i PISA-undersökningen från år 2012 se en markant försämring jämfört med undersökningen från år 2003 (Kupari et al., 2013; Röj-Lindberg, 2022). Kan de dalande matematikkunskaperna bero på läraren? Har klasslärare de kunskaper som krävs för att undervisa i matematik? Enligt timfördelningen i grundläggande utbildning för läropliktiga (Justitieministeriet, 2018) sker omkring två tredjedelar av grundskolans matematikundervisning i lågstadiet där den oftast sköts av klasslärare. Lärarens kunskaper i matematik påverkar hur de undervisar (Hannula et al., 2005) och undervisningen påverkar elevernas prestationer (Osborne, 2021). För att den negativa trenden med sjunkande matematikresultat ska avta är det viktigt att framtidens lärare har goda matematikkunskaper.

Under studietidens vikariat främst i högstadiet har jag reflekterat över de stora brister i matematikkunskaper många elever har. Också bland medstuderande har jag noterat att många tyckt att matematikkurserna varit svåra även om de kurserna endast behandlar grundskolans matematik som alla universitetsstuderande redan borde behärska. Från detta noterande har intresset att undersöka hur det förhåller sig med finlandssvenska klasslärarstuderandes matematikkunskaper vuxit fram. Mera specifikt är jag intresserad av att undersöka klasslärarstuderandes matematikprestationer i rutin- och problemuppgifter. Därtill vill jag ta reda på om det förekommer misstag i deras lösningar av problemuppgifter.

I gruppen med studerande som önskade skriva magisteravhandlingen om ett tema inom matematik presenterades en möjlighet att studera matematiktest som första årets klasslärarstuderande genomför varje år. Eftersom jag är intresserad av vilka matematikkunskaper klasslärarstuderande besitter ansåg jag att testet passade bra för min studie. Jag har dessutom själv gjort testet i början av mina studier och vet ungefär hur det är upplagt. Testet innehåller rent mekaniska uppgifter men även textuppgifter av olika slag. Just textuppgifterna tror jag kan ge intressanta lösningar för analys.

Testen har redan samlats in under 30 år och en del avhandlingar har baserats på dem. 2022 skrevs exempelvis tre kandidatavhandlingar med testen som grund. Lai (2022) undersökte prestationer men endast i uppgifter med rationella tal. Även Ohtonen och Mårtensson (2022) undersökte klasslärarstuderandes matematikkunskaper men fokuserade mera på hur de förändras mellan åren 2008 och 2020. Veppling och Wikström (2022) har ett syfte som påminner mera om mitt eftersom de studerar misstag och missuppfattningar, vilket jag också ämnar göra. Deras synvinkel är dock smalare eftersom de endast fokuserar på uppgifter kring rationella tal. Också Ohtonens (2023) magisteravhandling baseras på testen men fokuset är enbart på prestationer och förändring i prestationer över 30 år. Mitt syfte skiljer sig alltså från syftet i dessa avhandlingar genom att jag riktar in mig på problemlösning. Jag jämför prestationer mellan rutin- och problemuppgifter och går djupare in i problemuppgifterna för att hitta misstag. Efter en första anblick i testen är min hypotes att det kan finnas en del matematiska misstag hos lärarstuderande och att de presterar bättre i rutinuppgifter än i problemuppgifter.

Utöver de avhandlingar jag nyss presenterade har finländska klasslärarstuderandes allmänna matematikkunnande mest studerats vid finskspråkiga universitet. Vad gäller kombinationen misstag, problemlösning och lärarstuderande hittar jag inga studier från Finland. Eftersom lärarens kunskaper påverkar hur de undervisar och vilka förutsättningar till lärande eleverna har är det därför väldigt relevant att studera vilka matematikkunskaper blivande lärare har. Feluppfattningar påverkar hur man presterar och dessutom förs de ofta över från läraren till eleven (Karlsson & Kilborn, 2020). Därför behövs också kartläggning av vilka feluppfattningar som förekommer så att man kan undvika att fler får dem eller få bort hos dem som redan har dem. Utöver feluppfattningar vill jag kartlägga även andra typer av misstag.

Min tanke med avhandlingen är att många inom utbildning ska ha nytta av den. Först och främst tänker jag mig att de som planerar för och undervisar inom lärarutbildningarna får en uppdaterad bild av studerandes matematikkunskaper som eventuellt leder till omprioriteringar och förändringar i utbildningen. Både didaktiska och fördjupande kurser har liten nytta ifall studerande har brister i grundläggande matematik (Karlsson, 2015). Också lärare i grundskolan kan få en ögonöppnare gällande elevers kunnande och djupa respektive ytliga förståelse. Lärare kan även ha nytta av avhandlingen genom mitt teorikapitel där jag bland annat presenterar hur undervisning genom problemlösning kan byggas upp. Också lärarstuderande kan använda avhandlingen för att få tips och lära sig om hur matematikundervisningen kan eller bör se ut och kanske upptäcka egna feluppfattningar utifrån resultatet där lärarstuderandes feluppfattningar presenteras.

## 1.2 Syfte och forskningsfrågor

Syftet med denna avhandling är att ta reda på vilka matematikkunskaper klasslärarstuderande besitter samt att kartlägga vilka matematiska misstag som förekommer i studerandes uppgiftslösningar från matematiktest som ingår i en matematikdidaktisk kurs inom klasslärarutbildningen. Utgående från syftet har följande forskningsfrågor formulerats:

1. a) Hur presterar klasslärarstuderande i grundskolans matematik?
   b) Skiljer sig prestationerna mellan rutinuppgifter och problemlösningsuppgifter?
2. Hurudana matematiska misstag förekommer i klasslärarstuderandes lösningar till problembaserade textuppgifter?

## 1.3 Disposition

Avhandlingen byggs upp av fem huvudsakliga kapitel: inledning, teoretisk referensram, metodologi, resultat och diskussion. I inledningen presenteras bakgrunden till avhandlingen och syfte och forskningsfrågor samt avhandlingens upplägg beskrivs.

Den teoretiska referensramen har delats in i fyra avsnitt. Under centrala begrepp beskrivs fyra begrepp som är väsentliga för avhandlingen. I det andra avsnittet presenteras problemlösningsinnehållet i de tre senaste läroplanerna. I avsnittet problemlösning i skolan kommer det fram vilken nytta man kan ha av att lösa problem. Tre olika synsätt på problemlösning samt hur man kan bygga upp undervisning genom problemlösning och vilken roll läraren har i sådan undervisning behandlas också. Till sist läggs studier på lärarstuderandes matematiska kunnande fram.

I metodkapitlet presenteras syftet och forskningsfrågorna än en gång och datainsamlingen samt urvalet av informanterna beskrivs. Därefter diskuteras kvantitativ och kvalitativ forskning varefter det redogörs för analysen av data och de kategorier som använts. Till sist diskuteras trovärdighet och etiska aspekter i avhandlingen

I resultatkapitlet presenteras resultatet av analysen. Det inleds med klasslärarstuderandes allmänna prestationer och fortsätter med misstag i enskilda problembaserade uppgifter. Till sist presenteras även en sammanfattning av resultaten.

I det sista kapitlet framförs en diskussion kring avhandlingens metod och resultat innan en avslutande diskussion görs. Också förslag på vidare forskning kring temat ges som avslutning.

# 2 Teoretisk referensram

*I detta kapitel definieras och diskuteras inledningsvis avhandlingens centrala begrepp. Därefter presenteras hur problemlösning syns i läroplanen och sedan diskuteras olika aspekter kring problemlösning i undervisningen. Slutligen tas studier om lärarstuderandes matematiska kunskaper upp.*

## 2.1 Centrala begrepp

### 2.1.1 Problem och rutinuppgift

”Definitionen av ett matematiskt problem är en uppgift där en person inte på förhand har en given lösningsstrategi, utan det krävs en ansträngning för att lösa problemet.” (Häggblom, 2013, s. 162). Problem ska därmed vara okända för lösaren (Taflin, 2007). Uppgifter kan delas in i problem, textuppgifter och rutinuppgifter (Taflin, Figur 1, s.30). Textuppgifter innebär att uppgiften innehåll text och inte enbart matematiska symboler, dessa uppgifter kan vara både problem och rutinuppgifter. Rutinuppgifter beskrivs som ”uppgifter som inte leder till några svårigheter och kan då inte betecknas som problem. Det är uppgifter vars lösningssätt eleven är bekant med och där lösandet av uppgiften är färdighetsträning.” (Taflin, s.31).

Taflin (2007, s. 22) förklarar vidare sju kriterier för att ett problem ska vara rikt:

1. Problemet ska introducera viktiga matematiska idéer eller vissa lösningsstrategier.
2. Problemet ska vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det.
3. Problemet ska upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid.
4. Problemet ska kunna lösas på flera olika sätt, med olika strategier och representationer.
5. Problemet ska kunna initiera en matematisk diskussion utifrån elevernas skilda lösningar, en diskussion som visar på olika strategier, representationer och matematiska idéer.
6. Problemet ska kunna fungera som brobyggare.
7. Problemet ska kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem.

Häggblom (2013) diskuterar indelningen av problem som öppna respektive slutna problem. Ett problem som har ett givet svar är ett slutet problem. I motsats till detta har öppna problem flera möjliga svar och ofta inget korrekt eller fel. Öppna problem återfinns ofta i vardagen och öppnar upp för diskussion.

De presenterade definitionerna av problem stöds av nationalencyklopedins (NE) definition av problem som ”svårighet som det krävs ansträngning att komma till rätta med” och ”uppgift som kräver tankearbete och analytisk förmåga” (NE, u.å.c). Definitionen i Svenska Akademiens ordbok (SAOB) är däremot mera allmän: ”uppgift som föreläggs ngn till lösning” (Svenska Akademien, 1954a). Problem kan i enlighet med SAOB användas för allmän matematikuppgift både vardagligt och i forskning. Också i avhandlingen används begreppet problem utan att alltid syfta till ett rikt problem som uppfyller alla kriterier. Eftersom jag inte känner till omständigheterna och personernas matematikbakgrund i de beskrivningar jag har med i avhandlingen kan jag aldrig veta om en uppgift är ett problem eller en rutinuppgift. Jag använder mig därför av benämningen problem för textuppgifter jag anser ha förutsättning att vara rika problem för någon av de informanter som löst det.

Rutin är enligt Svensk ordbok (SO) en ”fastlagd procedur som utförs mer eller mindre automatiskt i viss typ av situation” (Svenska Akademien, 2021b). Rutinuppgift beskrivs i SAOB som en uppgift som ”kan utföras rutinmässigt” (Svenska Akademien, 1960) och samtidigt dyker begreppen mekanisk och vanemässig upp. I denna avhandling används rutinuppgift för uppgifter som inte passar in i problemdefinitioner och som de avsedda lösarna antas vara vana att lösa. Rutinuppgifter i testet har därtill liten textmängd som inte borde innehålla språkliga hinder för informanterna.

### 2.1.2 Problemlösning

Matematik är ”en abstrakt och generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling” (NE, u.å.b). Problemlösning är med andra ord en del av matematiken. En enkel definition av problemlösning fås från SAOB: ”lösning av (ett) problem” (Svenska Akademien, 1954b). Problemlösning kan även vara ett inlärningssätt enligt

Lester (1983 refererad i Taflin, 2007). Taflin presenterar många forskares definitioner av problemlösning. Ett annat av dem är Wyndhamns (1993 refererad i Taflin) breda perspektiv på problemlösning som en process som pågår hela tiden i skolan men också i elevernas vardag. Utifrån definitionerna av problem kan man dra slutsatserna att problemlösning innebär lösning av en okänd uppgift, alltså processen där man genom ansträngning försöker finna lösningar på en uppgift som inte liknar uppgifter man tidigare löst.

### 2.1.3 Matematiskt kunnande

Enligt NE (u.å.a) är kunnande en ”samling kunskaper som kan omsättas i faktiskt handlande”. ”Matematiskt kunnande är förmågan att utveckla och tillämpa matematiskt tänkande för att lösa en rad problem i vardagssituationer. Tonvikten är lagd både vid processer och praktisk tillämpning och vid teoretiska kunskaper, med goda räknekunskaper som grund.” (Europaparlamentet, 2006). Matematiskt kunnande innebär således förmågan att i praktiken kunna använda den matematikkunskap man besitter, vilket är en förutsättning för problemlösning.

Häggblom (2013, s. 233) använder ett citat av Kilpatrick et al. (2005, s. 371–382) för beskrivning av matematiskt kunnande: ”Mathematical knowledge – includes knowledge about mathematical facts, concepts, procedures and the relationships about them. The term includes also consideration of the goals of mathematics instruction and provides a basis for discriminating and prioritizing those goals. Teachers need to be able to understand concepts correctly and perform procedures accurately.”. Lärarens matematiska kunnande innefattar alltså kännedom om matematiska fakta, begrepp och procedurer samt sambanden dem emellan. Läraren behöver förstå begrepp samt kunna utföra procedurer korrekt. Därtill innefattas även beaktande och prioritering av läroplanens mål.

### 2.1.4 Misstag

Misstag definieras i SO som ”oavsiktligt fel i handlande, tänkande och dylikt” (Svenska Akademien, 2021a). I SAOB:s definition av misstag dyker följande synonymer upp: ”felaktig uppfattning; missuppfattning, missförstånd; tankefel; felbedömning; felberäkning; missgrepp” (Svenska Akademien, 1944).

I avhandlingen används misstag som ett generellt begrepp på sådant som blivit fel i uppgiftslösningar även om definitionen inte alltid passar in. Misstag i avhandlingen inkluderar slarvfel, räknefel, feluppfattningar och otillräckliga räknefärdigheter. Slarvfel och räknefel passar in på definitionen av misstag då de är små fel som problemlösaren inte lagt märke till och därför inte är medveten om. Också feluppfattning passar in i det avseendet då det är ett oavsiktligt fel men med en djupare betydelse där problemlösaren tror att hen har korrekt uppfattning som leder till större fel. Otillräckliga räknefärdigheter passar däremot inte helt in under definitionen för misstag eftersom det innebär att problemlösaren insett att kunskaperna inte räcker till och avsiktligt valt att avsluta lösningen. För mera ingående beskrivning av de olika kategorierna som i avhandlingen används under begreppet misstag se kapitel 3.5.

## 2.2 Läroplanerna om problemlösning

Att presentera de olika läroplanerna uppfyller flera syften. Det främsta syftet är att visa vad skolan och lärare ska grunda matematikundervisningen på. Min uppfattning är att läroplanen är väldigt problemcentrerad och genom att bekräfta detta kommer vikten av problemlösningskunnande bland lärare och lärarstuderande fram. Jag har valt att undersöka och presentera de tre senaste läroplanerna av följande anledningar.

Den nyaste läroplanen (Utbildningsstyrelsen, 2014) är den plan som dagens lärare ska grunda sin undervisning på och kan därför visa vad lärarna bör behärska för att lyckas med undervisningen. Mina informanter bekantar sig med denna under klasslärarutbildningen och många hinner troligen använda sig av den i arbetslivet medan andra börjar undervisa utgående från en ny läroplan. Eftersom klasslärare undervisar i årskurserna 1–6 är de avsnitten mest intressant ur läroplanen från 2014. Dock bör lärare också ha matematikkunskaper som är djupare än den egna undervisningen för att kunna förbereda sina elever för högstadiet och kunna stöda elever med djupa kunskaper i ämnet. (Tossavainen & Leppäaho, 2018)

Den tidigare läroplanen (Utbildningsstyrelsen, 2004) är den plan som de flesta av mina informanter har undervisats enligt. Denna visar alltså vad informanterna borde ha lärt sig i grundskolan. Vi kan förstås inte försäkra oss varken om att undervisningen har följt läroplanen eller att informanterna har uppnått målen med undervisningen men det ideala är att informanterna har uppnått de mål som finns uppsatta inom matematikämnet. Målen samt kraven för gott vitsord i årskurserna 7–9 är det som senast varit aktuellt för informanterna och dessutom innefattar tidigare mål. Därför är avsnittet om högstadiet av störst intresse från läroplanen från 2004.

Även den äldsta läroplanen (Utbildningsstyrelsen, 1994) som jag valt att ta med kan ha varit grunden för den undervisning av vilka en del av informanterna deltagit i. Av samma anledning som ovan är också här högstadiets avsnitt mest intressant. Läroplanen från 1994 finns även med för att jag vill se om problemlösningens förekomst och karaktär i läroplanerna har ändrat avsevärt under en längre tid.

Även om en del av läroplanernas avsnitt är mera intressanta än andra har jag studerat alla matematikavsnitt för att se hur problemlösning utvecklas från lägre till högre årskurser. Jag presenterar alla observationer och låter läsaren bedöma intressegraden. Därtill har jag gjort en mindre omfattande observation av problemlösningens förekomst utanför matematikavsnitten. Syftet med detta är att visa hur stort problemlösning är också utanför matematiken och allmänt i vardagen. Detta syfte speglar inte direkt avhandlingens syfte men att problemlösning är en stor del av övriga läroplanen och skolan gör också arbetet med problemlösning i matematikundervisningen viktigare. Arbete med problemlösning utanför matematik kan tänkas stöda problemlösningsförmågan också i matematik och vice versa.

### 2.2.1 Grunderna för grundskolans läroplan 1994

Även om *Grunderna för grundskolans läroplan 1994* (hädanefter LP94) är kortfattad kommer lösning av problem fram ganska mycket redan i denna läroplan i olika ämnen. Inledningsvis kan man i LP94 läsa att problemlösningsförmåga är en förutsättning för framgångsrika studier (Utbildningsstyrelsen, 1994, s. 12), vilket återspeglas i de flesta ämnen. Modersmålen och de naturvetenskapliga ämnena lyfter upp att undervisningen ska vara problemorienterad, problemcentrerad och eleverna ska diskutera och söka lösningar till olika problem, exempelvis miljöproblem eller livsproblem. I teckning ska skapande av bilder stöda elevernas problemlösning.

Matematik är det ämne där problemlösningen syns mest. De knappa fyra sidorna som finns för hela grundskolans matematik inleds med: ”Matematiken erbjuder medel att ... lösa många praktiska och vetenskapliga problem. /.../ Eleverna inser matematikens betydelse då de upptäcker att de kan använda matematiken för att lösa vardagliga problem.” (Utbildningsstyrelsen, 1994, s.76). Det hävdas även att ”Problemlösning utgör vid sidan av matematisk-logiska krav den **viktigaste principen** i matematikundervisningen.” (s.78).

Även om det inte direkt uttrycks tycks det finnas en bild av att matematikundervisningen ska ske genom problemlösning (se avsnitt 2.3.2). Denna uppfattning får jag bland annat då jag läser att man skall ”...**förhålla sig kritiskt till det traditionella lärostoffet**.” (Utbildningsstyrelsen, 1994, s.76) och att ”Talsymbolerna och de grundläggande räkneoperationerna tas stegvis i bruk via praktiska problem som eleverna får tolka och utföra mätningar i. /.../ Problemlösningsprocessernas betydelse framhävs framför allt vid inhämtandet, men även vid tillämpningen av kunskap.” (s. 78). Man ska alltså inte endast använda boken utan eleverna ska lära sig matematikinnehållet då de löser problem och inhämtning av kunskap sker genom problemlösningsprocesser. Att undervisningen ska byggas upp av diskussion, experiment och problemlösning tyder också på en syn på undervisning genom problemlösning.

I stället för mål som finns i dagens läroplan lyfter LP94 upp viktiga punkter skilt för lågstadiet och högstadiet. Bland dessa punkter hittas inom problemlösningstemat att elever i lågstadiet ska kunna känna igen problemlösningssituationer och använda kunskaper i matematik för att lösa vardagsproblem. Elever i högstadiet ska därtill kunna skapa matematiska modeller av vardagsproblem och i problemlösning använda sig av bokstavsuttryck. Över lag kommer det i matematikavsnittet fram att läraren ska koppla problem och hela undervisningen till elevernas vardag.

### 2.2.2 Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen 2004

Liksom i LP94 dyker problem och problemlösning upp i många olika ämnen i *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen 2004* (hädanefter LP04) men även här är det matematikämnet som innehåller mest problemlösning. I läroplanens syn på kunskap och lärande kommer det fram att ”eleven lär sig arbeta och lösa problem både självständigt och tillsammans med andra.” (Utbildningsstyrelsen, 2004, s.16). En av arbetsmetodernas uppgift är att stärka elevernas tänkande och problemlösning. Även i den pedagogiska miljön kommer problemlösning fram: ”Målet är att stödja elevens inlärningsmotivation och nyfikenhet ... genom att bjuda på intressanta utmaningar och problem.” (s.16).

I ungefär två tredjedelar av ämnena i LP04 nämns problem på ett eller annat sätt. För det mesta handlar det om ämnets mål och krav för vitsord åtta. Det handlar om att känna till olika problem, att själv upptäcka problem i olika situationer samt att lösa problemen. Kreativ problemlösning samt att lösa problem på egen hand och tillsammans med andra är centrala färdigheter som eleverna förväntas utveckla. Utanför matematikavsnittet handlar problemen om till exempel etiska och moraliska problem, samhällsproblem, näringsmässiga problem, miljöproblem samt andra problem som uppstår som konsekvenser av människans handlingar. LP04 lyfter fram skolan och undervisningen som undersökande och problemcentrerad.

Matematikavsnittet i LP04 är inte lika problemcentrerat som resten av läroplanen. I matematik verkar problem och problemlösning mera vara ett tema bland andra teman i ämnet. Det syns ändå tydligt att problemlösningen kommer in mera i högre årskurser, speciellt då det kommer till kraven för goda kunskaper eller vitsord 8. För goda kunskaper i slutet av årskurserna 2 och 5 ska eleverna i problemlösning använda matematiska begrepp för att visa förståelsen av dem. I årskurs 2 ska begreppen kunna förklaras muntligt medan de i årskurs fem ska kunna presenteras mångsidigt. I årskurserna 1–2 används enkla problem och eleverna ska kunna plocka ut det väsentliga ur problemen samt lösa dem, de ska också söka alternativa lösningar. I årskurs 5 tillkommer kravet att kunna presentera problem i en ny form, tolka enkel text, enkla bilder och händelser samt göra en plan för lösning av ett problem. För vitsord 8 i slutet av årskurs 9 ska eleverna kunna matematisera ett enkelt textproblem, göra upp en plan, lösa problemet enligt planen och granska lösningens riktighet. Dessutom tillkommer olika områden som ska kunna tillämpas i problemlösning. Eleven ska i problemlösning använda klassificering, proportionalitet, procenträkning och ekvationssystem. De ska även kunna bilda ekvationer utifrån problem och lösa ekvationerna algebraiskt eller genom slutledning. I matematiken är det också i LP04 ofta tal om problem ur vardagen och läraren ska dra nytta av sådana i undervisningen.

### 2.2.3 Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen 2014

*Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen 2014* (hädanefter LP14) är den läroplan som är i kraft just nu och som dagens lärare grundar undervisningen på. Förändringarna från LP04 till LP14 är inte speciellt stora, de berör placeringen av innehållet mera än innehållet i sig självt. Ett tillägg i innehållet är dock differentieringsanvisningar som också speglar resten av läroplanen där alla har rätt att få stöd och fördjupning enligt egna behov. I matematikens differentiering står det att utmaningar och fördjupning utanför den vanliga undervisningen kan bestå av till exempel problemlösning. Något annat som tillkommit i varje ämne är mål för lärmiljöer och arbetssätt. I matematiken innefattar det bland annat att undervisningen ska utgå ifrån problem som intresserar eleverna, eleverna löser problem både självständigt och tillsammans, pedagogiska spel och lekar används för att motivera samt att konkretisering, hjälpmedel och variation är viktigt i undervisningen.

Också i denna läroplan är problemlösning central även utanför matematikämnet. Liksom i LP04 syns det både i synen på lärande och i arbetssätt. I LP14 finns dock en liten uppdatering i form av de sju mångsidiga kompetenserna. Den första av dem *Förmåga att tänka och lära sig* innefattar bland annat att ” Eleverna ska få lära sig att använda kunskap på egen hand och tillsammans med andra för att lösa problem...” (Utbildningsstyrelsen, 2014, s.20). I undervisningsämnena syns problemlösning i lika stor grad som i LP04. Förekomsten ökar med årskurserna, i åk 1–2 finns problemlösning endast i omgivningslära och matematik, i åk 3–6 finns det dessutom i modersmål medan det i åk 7–9 syns i hela 12 av 19 ämnen. Därtill ska alltså de mångsidiga kompetenserna, inklusive den första kompetensen innefattande lösning av problem, utvecklas i alla ämnen.

Jämfört med LP04 har LP14 flera mål för matematiken men inte lika många av dem behandlar problemlösning, målen för problemlösning är heller inte lika specifika. Men som i LP04 syns det också här att problemlösning blir viktigare i högre årskurser. Problemlösningsrelaterade mål och underlag för bedömning i LP14 presenteras i Tabell 1 nedan. Ett helt nytt inslag för matematiken i LP14 är programmering vilket även ska användas inom problemlösning i högstadiet.

**Tabell 1**: *Problem och problemlösning i målen enligt årskurs i LP14*

| Årskurser | Mål | Underlag för bedömning |
|---|---|---|
| 1–2 | M4 handleda eleven att utveckla förmågan att dra slutsatser och lösa problem | Framsteg i förmågan att använda matematik vid problemlösning |
| 3–6 | M5 handleda och stödja eleven i utvecklingen av förmågan att lösa problem | Eleven kan använda olika strategier vid problemlösning |
| 7–9 | M5 stödja eleven då hen löser uppgifter som kräver logiskt och kreativt tänkande och utvecklar de färdigheter som behövs för detta<br><br>M9 vägleda eleven att tillämpa informations- och kommunikationsteknik i matematikstudierna och för att lösa matematiska problem<br><br>M20 handleda eleven att utveckla sitt algoritmiska tänkande och sina färdigheter att tillämpa matematik och programmering för att lösa problem | Eleven kan strukturera problem och lösa dem matematiskt<br><br>Eleven kan tillämpa principerna för algoritmiskt tänkande och kan producera enkla program |

Även om det till en början inte verkar som att matematiken i LP14 är speciellt problemcentrerad kan man då man läser mål för lärmiljöer och arbetssätt skönja att problem ändå ska vara relativt centralt i undervisningen: ”Undervisningen ska utgå från ämnen, fenomen och problem som intresserar eleverna. ... Eleverna matematiserar och löser problem individuellt och i grupp. Vid grupparbete arbetar var och en både för sitt eget och för gruppens bästa.” (Utbildningsstyrelsen, 2014, s. 377). Det femte målet för årskurserna 7–9 innefattar ”uppgifter som kräver logiskt och kreativt tänkande” (s. 378), vilket tyder på att uppgifterna är problem. Läraren har en viktig roll att stöda i denna process. Också i de övriga målen för matematik märks det att undervisningen och alltså läraren är viktig för att målen ska kunna uppnås.

### 2.2.4 Sammanfattning och diskussion

Problemlösning förekommer i hög grad i de allmänna delarna och i cirka två tredjedelar av läroämnena i alla tre läroplaner. Matematiken i alla tre läroplaner beskriver problem ur vardagen som centralt vilket även stöds av problemlösningen i andra ämnen. Förekomsten av problemlösning i de olika läroplanerna har inte ändrat speciellt mycket men i stället har karaktären förändrats. I LP94 är ämnesinnehållet fritt och beskrivande till sin karaktär, det saknar krav och underlag för bedömning. Både LP04 och LP14 har listade mål samt krav för vitsord 8 som används vid läsårsbetyg. LP04 och LP14 är därtill väldigt detaljerade och har många olika sektioner som LP94 inte har. Även om de två senare är mera omfattande och specifika är innehållet i alla tre ganska lika och det märks i alla att problemlösning är en viktig del av matematiken.

I LP94 verkar det finnas en syn på undervisning genom problemlösning i matematiken som sedan inte kommer fram på samma sätt i LP04 och LP14. Men i LP04 och LP14 kommer den problemlösande naturen fram desto mera utanför matematikämnet och med åren syns en utveckling till en över lag mera problembaserad undervisning där elevernas problemlösningsförmåga är viktig. I LP14 tillkommer de mångsidiga kompetenserna, där den första inkluderar problemlösning, som ska återspeglas i hela skolans verksamhet. Att det inte kommer fram någon syn på att undervisningen ska ske genom problemlösning i de två senare läroplanerna tror jag beror på att läroplanernas olika uppbyggnad, samtidigt som läroplanerna blir mera omfattande blir avsikten med en undervisning genom problemlösning mindre tydlig.

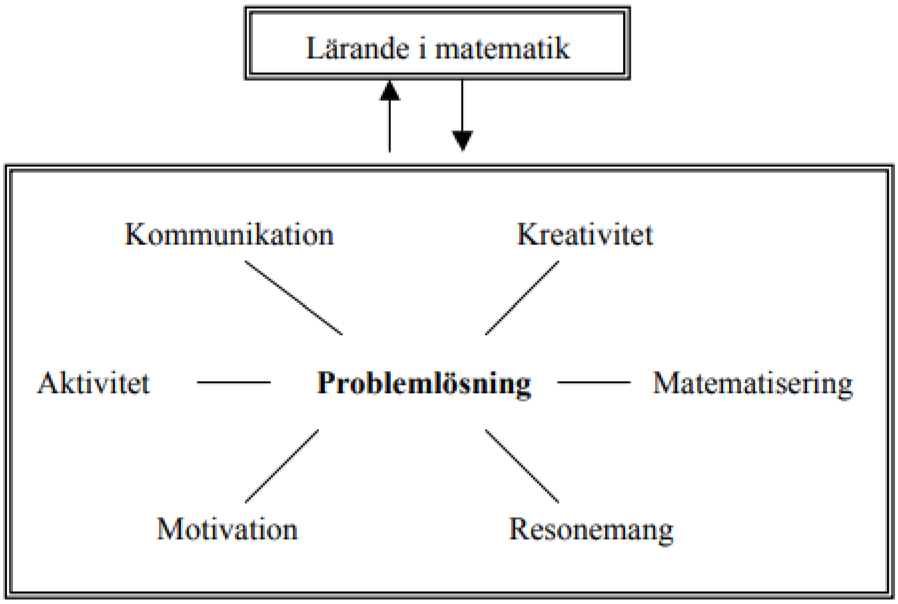
## 2.3 Problemlösning i skolan

### 2.3.1 Problemlösningens relevans

Eftersom problemlösning kommer fram så pass mycket i läroplanen (se kap. 2.2) är det en orsak i sig att det är relevant. Läroplanen är den grund som lärare ska bygga sin undervisning på. Problemlösning kommer inte fram bara i matematiken utan lösning av problem finns med som lärandemål i många läroämnen och hela grundskolans verksamhet ska vara problemorienterad där eleverna ska lära sig att lösa problem kreativt både själva och tillsammans med andra. Därför är det självklart att problemlösning på ett eller annat sätt ska finnas med i skolan och i matematiken.

Det är dock inte bara läroplanen som ger orsak att inkludera problemlösning i undervisningen. Forskning visar på många fördelar med problemlösning. Häggblom (2013, s.7) menar ”Att kunna lösa problem är viktigt inom alla skolämnen och en av vardagslivets grundfärdigheter.”. Problemlösningsundervisning ger djupare matematisk förståelse än den klassiska undervisningen som fokuserar på procedurer (Boaler & Selling, 2017; Lester & Cai, 2016; Olivares et al., 2020). Problemlösning har också visats utveckla självständighet och höja självförtroende hos elever (Boaler & Selling, 2017). Genom att söka lösningar till problem med just de kunskaper de besitter kan eleverna lära sig utveckla och fördjupa sina matematiska färdigheter (Biccard, 2020). Bergsten (2006) förklarar att problemlösning ger förutsättningar för matematisering, resonemang, motivation, aktivitet, kommunikation och kreativitet som alla gör lärande möjligt. Detta stärker han med följande figur (Figur 1)

**Figur 1**: *"Matematisk problemlösning och lärande" från Bergsten (2006, s 10.)*




Kurula (2019) presenterar i sin blogg tidigare matematikstuderande från Åbo Akademi som han intervjuat bland annat om vilken nytta de haft av studierna. Många berättar att studierna har utvecklat deras logiska tänkande och att de har nytta av förmågan att lösa problem:

*"Speciellt problemlösningsförmågan är någonting som jag har nytta av"*

*"Det handlar främst om att man behöver kunna resonera på ett logiskt och matematiskt korrekt sätt."*

*"... mitt sätt att tänka logiskt har förstärkts mycket av matematikstudierna."*

*"... överlag känner jag att jag alltid haft nytta av mina matematikstudier, antingen för att man har gjort något matematiskt i en kurs eller för att jag haft nytta av matematikerns sätt att tänka abstrakt och på så sätt lösa problem."*

Viktigt att nämna är att detta handlar om personliga berättelser som inte direkt kan generaliseras men ändå visar på mångfalden av områden där matematik och problemlösning kan användas. Boaler (2011) betonar att "...den matematik som människorna behöver är inte den som lärs ut i de flesta klassrum. Människor behöver inte kunna rabbla upp hundratals standardmetoder. De behöver kunna tänka logiskt och lösa problem för att flexibelt kunna tillämpa metoder i nya situationer." (s. 17). Att kunna lösa problem blir allt viktigare och behövs i de flesta yrken, därför bör problemlösning tränas mångsidigt i skolan.

### 2.3.2 Undervisning för, om och genom problemlösning

Det finns olika synsätt och arbetssätt kring problemlösning. Ett mycket vanligt sätt att kategorisera problemlösning i matematikundervisningen är undervisning för, om och genom problemlösning. Också benämningarna för, om och via förekommer (bl.a. Bergsten, 2006). Denna indelning beskrev och diskuterade Schroeder och Lester (1989) redan för över 30 år sedan och inte ens då var indelningen något nytt. Härnäst reder jag ut skillnaderna i dessa undervisningssätt.

Vid undervisning för problemlösning ligger lärarens fokus på att eleverna ska utveckla förmågan att använda den matematik de lär sig för att lösa problem. Vid undervisning av nytt matematikinnehåll ger detta undervisningssätt många exempel som eleverna får använda för att lösa många problem. Eleverna undervisas först i specifika räknemetoder och begrepp varefter de får textuppgifter i relation till det inlärda, de förbereds alltså för uppgifterna (Biccard, 2020). Problematiskt med detta undervisningssätt är enligt Schroeder och Lester (1989) för det första att problemlösning framstår som något man kan ägna sig åt först efter att man behärskar ett nytt innehåll. För det andra så används de nya matematikkunskaperna ofta till som liknar genomgångna exempel och kan lösas enligt samma mönster vilket innebär att uppgifterna inte kan klassas som problemuppgifter. Problemet med detta är enligt Schroeder och Lester mångfaldigt, eleverna får svårt att angripa problem som inte följer mönstren och eleverna tillämpar ofta mönstren på talen i uppgiften utan hänsyn till kontexten. Att följa mönster gör att det inte handlar om problemlösning och kräver inget matematiskt tänkande vilket i sin tur kan leda till att eleverna får uppfattningen att alla matematiska problem kan lösas snabbt och utan tankekraft.

Undervisning om problemlösning innebär i stället att eleverna lär sig om olika metoder och strategier som är användbara när man löser problem. Det kan till exempel vara att man lär sig Pòlyas (1957) fyra faser för problemlösningsprocessen: att förstå problemet, att göra upp en plan, att fullfölja planen och att blicka tillbaka på lösningen. Enligt Olivares et al. (2020) kan denna fyrastegsmodell hjälpa elever att komma i gång med problemlösning och även reflektera över det matematiska men de hittar i sin litteraturstudie även de som saknar bevis på fördelar med modellen. I undervisning om problemlösning kan man också lära sig om lösningsmetoder så som att rita bilder och tabeller, att prova sig fram eller att skapa ett enklare, liknande problem (Biccard, 2020). Risken med undervisning om problemlösning är att det ramar in problemlösningen och betraktas som ett enskilt ämne utanför matematikens innehåll. Problemlösning ska vara ett sammanhang där lärande och tillämpande av matematik sker (Schroeder & Lester, 1989).

Vid undervisning genom problemlösning blir problemlösningen ett sätt att lära sig matematik. Matematiska teman inleds med ett problem som handlar om temat i fråga. ”A goal of learning mathematics is to transform certain nonroutine problems into routine ones.” (Schroeder & Lester, 1989, s. 33). Enligt citatet är ett mål med matematikinlärning att icke-rutinuppgifter blir rutinmässiga vilket utifrån definitionen av problem innebär att uppgifter som till en början är problem skulle börja upplevas som rutinuppgifter. Enligt Schroeder och Lester är undervisning genom problemlösning ett förhållningssätt som förtjänar att beaktas och beprövas men de menar också att det ännu inte används av många lärare (notera att detta är år 1989). Över 30 år senare bekräftas detta av Olivares et al. (2020) som också menar att undervisning genom problemlösning är ovanligt.

Boaler och Sellings (2017) sätt att kategorisera matematikundervisning handlar om elevernas engagemang i undervisningen. De pratar om passivt och aktivt engagemang. Det passiva engagemanget är den klassiska undervisningen där läraren förklarar metoder och räknar uppgifter och eleverna tar efter. Detta liknar lärande för problemlösning, eventuellt kombinerat med lärande om problemlösning. Det aktiva engagemanget däremot innebär att eleverna engagerar sig i problemlösning samt diskuterar idéer och tillämpande av metoder. Detta liknar undervisning genom problemlösning. Boaler (2011) har tidigare i tre års tid följt högstadieelever som undervisats med projektbaserad matematikmetod och aktivt engagemang samt elever som undervisats med traditionell metod och passivt engagemang. Studien visade att det aktiva engagemanget gav bättre prestationer, djupare förståelse och större uppskattning av matematik.

Åtta år efter att eleverna slutat skolan med projektet kontaktar Boaler och Selling (2017) dem igen för att undersöka långsiktiga skillnader mellan de två undervisningssätten. Det projektbaserade undervisningssättet visade på bättre socioekonomisk status i form av egen nivå av anställning i förhållande till föräldrarnas nivå av anställning. Även relationen till matematik och skolmatematik var betydligt bättre hos de elever som hade deltagit i den projektbaserade undervisningen. Alla intervjuade från den projektbaserade undervisningen gillade matematik i vuxen ålder och mindes tillbaka på skolmatematiken som något positivt. De sade också att de har nytta av det de lärt sig i skolmatematiken i sitt jobb medan inga intervjuade från den traditionella undervisningen sade det samma. Undervisningssätten återspeglas i de vuxnas liv genom vilja och tron på den egna förmågan att lösa problem. Elever från den traditionella undervisningen söker hjälp om de inte direkt vet hur de ska lösa ett problem i vardagen och jobbet medan de andra försöker lösa problemet tills de lyckas. Eleverna som undervisats med aktivt engagemang vill också gärna ha ett jobb där de får ta ansvar och lösa problem i stället för att få order om vad de ska göra.

Vi blickar tillbaka till avsnittets huvudpunkt, distinktionen mellan undervisning för, undervisning om och undervisning genom problemlösning. Utifrån Boaler och Sellings (2017) undersökning kan man dra slutsatsen att det aktiva engagemanget är det mest gynnsamma för eleverna Detta kan som sagt liknas vid lärande genom problemlösning. Även om lärande genom problemlösning tycks vara effektivast av de tre undervisningssätten kommer det ofta fram att ingetdera synsätt borde exkluderas helt och att en blandning av dem alla tre är att föredra. Undervisning genom problemlösning får ändå gärna tillämpas mest eftersom det ger eleverna möjlighet att utveckla djupare matematisk förståelse i jämförelse med de andra sätten (Olivares et al., 2020; Taflin, 2007). Schroeder och Lester anser att i stället för att ha problemlösning som fokus borde man ha förståelse som fokus. ”Fundamental to the view that understanding should be a primary goal of instruction is the belief that children´s learning of mathematics is richest when self-generated rather than when it is imposed by a teacher or textbook. A primary advantage of self-generated knowledge is that it is tied to what the learner already knows.” (1989, s. 39). Undervisning för förståelse går hand i hand med undervisning genom problemlösning eftersom problemlösning ökar förståelsen och förståelsen underlättar problemlösning.

Häggblom (2013) tar upp Lester och Lambdins (2006) sex orsakar till varför förståelse är viktigt: Förståelse ger självförtroende som i sin tur ger motivation, förståelse ger möjligheter att förstå ännu mer, förståelse gör att kunskapen är lättare att minnas, förståelse gör att kunskapen är lättare att tillämpa i nya situationer, förståelse påverkar attityden och förståelse skapar självständighet. Eftersom förståelse är viktigt är undervisning för förståelse och genom problemlösning ett bra synsätt att bygga upp matematikundervisningen på. Förståelse i matematik är enligt Schoen (2003) viktigt för att man ska kunna använda matematiken flexibelt då den behövs i nya situationer.

### 2.3.3 Undervisningens uppbyggnad

Det framgår i föregående avsnitt att undervisning genom problemlösning är att föredra, inte som enda men som huvudsakliga undervisningssätt. Men även om det forskats mycket kring problemlösning och det visats att undervisning genom problemlösning ger djupast inlärning är det ”fortfarande ovanligt att komma in i ett klassrum och se engagerade elever lösa stimulerande problem” (Olivares et al., 2020, s. 13). Det är inte många som i praktiken använder sig av undervisning genom problemlösning. Eftersom undervisning för och om problemlösning är vanligt medan undervisning genom problemlösning är effektivt (Lester & Cai, 2016) och inte är lika vanligt syftar jag i detta avsnitt att beskriva den praktiska undervisningen genom problemlösning.

Några som lyckats implementera detta undervisningssätt är lärarna i Japan var undervisning genom problemlösning har blivit det vanliga. Två forskare, Engvall och Kreitz-Sandberg (2015) åkte till Japan för att studera undervisningen där. Också Shimizu (2013), professor från Japan, beskriver matematikundervisningen där. Dessa två artiklar beskriver undervisningen väldigt lika. Lektionerna är oftast uppbyggda på samma sätt med några bestämda moment. Problemlösning är i fokus och en lektion byggs upp kring ett eller två problem. Problemen presenteras noga och diskuteras så att alla elever förstår dem. Därefter får eleverna först ensam och sedan i grupp lösa problemet. Eleverna jobbar väldigt aktivt och endast i få situationer hjälper läraren till, eleverna uppmanas i stället att jobba med andra om de har svårt. Läraren går samtidigt runt och observerar elevernas lösningar för att kunna klassificera dem och välja i vilken ordning eleverna ska få berätta om sina lösningar i den avslutande diskussionen.

Det är viktigt att problemlösningen får ta tid och att eleverna kan fundera på lösningar i lugn och ro. ”Det krävs mycket tid för att lösa utmanande och matematiskt rika problem” (Olivares et al., 2020, s.9). Om någon elev redan hittat en lösning får de söka fler lösningar till samma problem. Det centrala i lektionerna är att de avslutas med en tilltänkt klassrumsdiskussion där eleverna presenterar sina lösningar som, med förstärkning av lärarens sammanfattning, bildar undervisningsinnehållet. ”Dessa lektioner syftar alltså ... inte i första hand till att lösa ett problem. Tonvikten ligger snarare på att eleverna lär sig att tänka matematiskt genom att lösa problem.” (Engvall & Kreitz-Sandberg, 2015, s. 30). Intressant med detta lektionsupplägg är att lektionerna var lugna även om klasserna som Engvall och Kreitz-Sandberg besökte oftast bestod av 28–32 elever. Användningen av tavlan är också intressant då lärarna strävar till att inte radera något under lektionens gång för en enklare helhetsöverblick och möjlighet att koppla till tidigare lösningar som lagts fram (Shimizu, 2013).

Engvall (2013) har studerat matematikundervisningen också i Sverige och den liknar inte alls den som de såg i Japan. I den svenska matematikundervisningen är det i stället procedurkunskap som står i centrum och elevernas lösningar ges sällan utrymme, vilket de gör i undervisningen genom problemlösning. Shimizu (2013) lyfter fram att också i Tyskland och USA ligger fokuset på procedurer. Däremot menar Lester och Cai (2016) att tyska lärare låter sina elever kämpa med svåra problem på samma sätt som de japanska lärarna. Läraren bör våga ge svåra problem åt eleverna och låta dem utmanas. Enligt Lester och Cai (2016) är det vanligt att lärare tror att deras uppgift är att ta bort svårigheten från matematikproblem. Men elever som får jobba med utmanande problem utvecklas mera och kan även utveckla mera tycke för matematik än de som får enkla uppgifter. Ju mera utmaning ett problem har desto större är inlärningspotentialen men det är viktigt att hitta balansen så att problemen och också tar hänsyn till elevernas kunskapsnivåer (Olivares et al., 2020).

Vägledningen är en av de viktigare aspekterna i problemlösning, eleverna behöver få rätt kommentarer och frågor för att eventuellt komma vidare men också så att de börjar reflektera över matematiken och vad de lärt sig (Olivares et al., 2020). Olivares et al. påpekar dock att det är viktigt att läraren inte lägger sig i för mycket eller ger för mycket hjälp så att eleverna inte själva har möjlighet att kämpa och komma på lösningar. Läraren ska absolut inte ge färdiga svar eller metoder utan i stället motivera eleverna att hitta lösningar samt berömma dem för deras insatser.

Klassrumssamtalen påverkar på flera sätt vad eleverna lär sig (Lester & Cai, 2016). Inte minst är samtalen elev-elev betydande. Att eleverna får uttrycka sina tankar och sätta ord på lösningar men även lyssna på hur andra elever tänker och utmana deras lösningar fördjupar elevers lärande. ”Genom att eleverna får uttrycka sig muntligt skapas förutsättningar att utveckla matematisk förståelse.” (Engvall, 2013, s.64) I helklassdiskussion och då läraren ställer frågor är det viktigt att läraren ger tanketid. Lester och Cai (2016) tar upp en, visserligen 50 år gammal, studie som visar att genomsnittliga tiden som lärare väntar på svar innan de går vidare efter en fråga var 0,9 sekunder. Den tiden ger inte rum för mycket tanke och får eleverna att inte svara och därtill tro att matematikuppgifter löses med litet tänkande.

### 2.3.4 Lärarens roll i klassrummet

Lärarens roll i klassrummet återspeglar till stor del undervisningens uppbyggnad men i detta avsnitt tillkommer ändå en del. Läraren fungerar som en förebild i alla aspekter i skolan, så också i matematiken och alla dess områden. Vilken attityd läraren har till problemlösningen och undervisningen över lag påverkar eleverna och deras förutsättningar till lärande (Häggblom, 2013). Lärarens matematiksyn och attityd påverkar också hur läraren bygger upp undervisningen, vilket i sin tur påverkar elevernas lärande. ”Eleverna lär sig mer om läraren själv tycker om problemlösning och visar detta för eleverna.” (Taflin, 2007, s.43)

Problemlösning kräver att läraren både förstår och använder olika principer för matematiska resonemang och bevis. Att ta sig bort från begränsningen med manuellt räknande kräver mer handledning och sakkunnig undervisning och således högre innehållsmässig nivå av läraren. För att klasslärarstuderande ska växa in i detta behövs mycket tid och vägledning i deras utbildning (Tossavainen & Leppäaho, 2018). Vidare menar Tossavainen och Leppäaho att klassläraren behöver matematikkunskaper som sträcker sig längre än innehållet i årskurserna 1–6 för att kunna besvara djupare matematiska frågor som inte har direkta svar som hittas i läroboken. Begränsade kunskaper leder dessutom till att undervisningen börjar handla om utantillinlärning i stället för förståelse vilket inte stämmer in på undervisning genom problemlösning. Med begränsade kunskaper i matematik blir motivering av procedurers användning också svårt (Tossavainen & Leppäaho).

”Koska heikommin matematiikkaa hallitsevat opiskelijat yleensä turvautuvat muistitietoon, he eivät pysty ohjaamaan oppilaitaan ymmärtävään matematiikan oppimiseen, kun he eivät itsekään ymmärrä edes alaluokkien matematiikan yhteyksiä.” (Pehkonen, 2011, s. 65). Alltså studerande med svagare kunskaper i matematik tenderar stöda sig på utantillinlärning och har svårt att leda undervisning som baseras på förståelse då de själva inte förstår sambanden i matematiken i de lägre årskurserna.

Fonseca (2021) menar att problemlösningsförmågan är underutvecklad hos de flesta av hennes lärarstuderande och hon undersökte därför hur de upplevde att jobba med problemlösningsuppgifter i en kurs. Upplevelserna visar på ökad förståelse och insikter som att också konceptuell förståelse utöver procedurkunskap behövs. Många studerande upptäckte också att det finns många metoder att lösa ett problem på. De själva hade endast givits en korrekt metod i skolan men insåg nu att förståelse av problemet och vägen till lösningen är viktigare än svaret. Som lärare bör man göra det möjligt för eleverna att upptäcka detta. Detta kan möjliggöras genom öppna problem som dessutom tränar elevernas kreativitet och uthållighet (Häggblom, 2013). Den sista insikten som kom fram i Fonsecas studie var att man behöver ha grundläggande matematikkunskaper för att lösa problem men att man som lärare även behöver djupare förståelse för olika koncept och deras samband så att man kan förmedla dessa och inte enbart lära ut procedurer.

Eftersom kommunikationen är en stor del av undervisningen, speciellt vid lärande genom problemlösning, har läraren en viktig roll just här. Läraren ska bland annat leda och inspirera till klassrumssamtal (Emanuelsson et al., 1996). Läraren ska bygga upp en sådan atmosfär i klassrummet att det blir naturligt för eleverna att diskutera matematik. Läraren ställer många frågor under en lektion. Vid undervisning genom problemlösning behöver hen ändra på typen av frågor. Frågorna ska inte ha ett självklart svar som tidigare utan vara ledande och öppna upp för nya tankegångar i lösningsprocesserna. Läraren ska kunna ställa frågor som gör att eleverna kommer vidare och att eleverna reflekterar över matematiken de till exempel just lärt sig. ”Opettajan tehtävänä on prosessien ohjaaminen ja tilan antaminen oppilaiden omalle työskentelylle.” (Hähkiöniemi et al., 2020, s. 231). Läraren behöver byta ut ledarrollen mot en instruerande roll.

Enligt Schoen (2003) är beslutsfattande lärarens störst roll i undervisning genom problemlösning, läraren ställs inför många beslut inför, under och efter lektionen. Inför lektionen är det viktiga att välja lämpliga problem och planera in dem att styra upp lektionen. Elevgrupper behöver också planeras utifrån de problem man valt. Under lektionen ska läraren presentera problemen så att alla elever förstår det. Under tiden som eleverna jobbar med problemen ska läraren inte enbart finnas med på sidan om utan läraren behöver vara aktiva instruktörer som fokuserar på elevers tankar och ställer frågor för att stöda elever matematiska utveckling. Lärarens val av problem, hur mycket tid som ges för problemlösning och diskussion samt hur läraren hanterar felaktiga lösningar felaktiga lösningar påverkar klassrumsklimatet som i sin tur påverkar elevers villighet att svara på frågor, dela lösningar och diskutera matematik i allmänhet (Schoen). Efter lektionen bör läraren ta del av elevers anteckningar för att hitta feluppfattningar och styrkor att bygga vidare på i kommande lektioner.

För att eleverna ska få djup matematisk förståelse är deras egen aktivitet viktig (Häggblom, 2013). Vidare menar Häggblom att eleverna behöver uppleva mening och motivation i arbetet vilket ställer krav på undervisningsplaneringen. I planeringen är tidsanvändning centralt eftersom lösning av utmanande och rika matematiska problem är tidskrävande (Olivares et al., 2020).

## 2.4 Lärarstuderandes matematiska kunnande

Som det kom fram i föregående kapitel är lärarens matematikkunskaper av stor vikt eftersom det påverkar deras undervisning och elevernas förutsättningar till lärande. Eftersom mitt huvudsakliga syfte med studien är att kartlägga klasslärarstuderandes matematikprestationer och misstag inom problemlösning är det intressant att se vad studier hittat om detta. Kombinationen problemlösning och klasslärarstuderande har emellertid visat sig vara ett relativt outforskat område då det var svårt att hitta tidigare sådana studier. Därför är fokus i detta avsnitt rent allmänt på matematikprestationer och någon enstaka studie om problemlösning finns med. De flesta studier som presenteras i här skiljer sig på något sätt från min genom annorlunda syfte, informanter eller metod, alternativt är de internationella studier. Alla studier relaterar ändock på något sätt till min.

Det test som jag analyserat har samlats in regelbundet vid Åbo Akademi sedan år 1994. Även om de samlats in en lång tid har inte mycket forskning baserats på dem. Vid Jyväskylä universitet testade man läsåret 2008–2009 studerande med samma test som vid Åbo Akademi (Hihnala, 2011). I Jyväskylä hade man också samma gräns för godkänt, det vill säga 20 av 30 möjliga poäng. Detta uppnådde 68 av totalt 103 klass- och speciallärarstuderande. Andelen godkända var således 66 %.

Under de två senaste åren har en del avhandlingar skrivits kring de test som samlats in vid Åbo Akademi. Ohtonen (2023) studerar i sin magisteravhandling prestationerna i näst intill alla test som samlats in vid Åbo Akademi. Detta innefattar hela 1760 test från åren 1994–2023. Ohtonens resultat visar att lärarstuderandes matematikkunskaper har försämrats betydligt under de senaste 30 åren. Största andelen godkända under tidsintervallet var år 1994 då 86 % godkändes. År 2022 hade lägsta andelen godkända med endast 21 %, det behöver dock påpekas att man från och med år 2020 inte behövde vara godkänd för att klara den matematikdidaktiska kursen inom vilken testet anordnas. Den lägsta andelen godkända medan testet ännu var ett tröskeltest är 29 % från år 2018. År 2018 skrev två olika grupper testet, av den andra gruppen godkändes 35 %.

Ohtonen et al. (2023) använder också dessa test från Åbo Akademi för en jämförelse av matematikkunskaper, denna gång enbart mellan åren 2008 och 2020. Även om Ohtonen et al. undersöker ett kortare tidsintervall än Ohtonen (2023) finner de liknande resultat med drastisk försämring i prestationerna. Andelen godkända sjönk från 46 % år 2008 till 24 % år 2020 men också i detta resultat behöver man ta i beaktande att godkänt test var ett krav för kursen år 2008 men inte år 2020. Artikeln av Ohtonen et al. baserar sig på Ohtonen och Mårtenssons (2022) kandidatavhandling. Också ett par andra kandidatavhandlingar (se kap. 1.1) har baserats på testen.

På finskt håll har någon form av nivåtestning i matematik, endera i samband med urvalsprov eller som inledande test i studierna, gjorts i olika delar av landet. I Helsingfors testades matematikkunskaperna hos 77 förstaårets klasslärarstuderande året 1979 (Pehkonen, 2011). Testet som användes innehöll 20 flervalsfrågor varav 10 var från lågstadiets matematikinnehåll. Lösningsfrekvenserna för uppgifterna inom lågstadiematematiken var 78 % medan den för hela testet var 71 %. För godkänt i testet krävdes en lösningsprocent på 80 % vilket 26 personer (34 %) misslyckades med år 1979. Följande år var antalet underkända betydligt färre då endast 14 personer (19 %) misslyckades. De tre följande åren var andelen underkända 27 %, 34 % och 28 %.

I Åbo började man år 2000 inkludera testning av matematiskt-naturvetenskapligt tänkande i urvalsprovet till följd av svaga matematikkunskaper hos klasslärarstuderande (Merenluoto & Merenluoto, 2011). De svaga matematikkunskaperna kom fram i tentamenssvar i en grundkurs året innan. Analys av tentamenssvaren år 1999 visade att 29 % inte behärskade divisionsberäkning med trappa, 41 % behärskade inte procentberäkning och över hälften (51 %) behärskade inte multiplikation med uppställning. Några tydliga följder av urvalsprovets tillägg kan Merenluoto och Merenluoto däremot inte ge. Uppgifterna som användes i urvalsproven har inte publicerats som helhet men lösningsfrekvenserna för fem uppgifter inom grundläggande matematik för år 2008 och 2009 får man ta del av. För de som valdes till utbildningen var lösningsfrekvenseran för dessa uppgifter 84 %, 77 %, 63 %, 53 % och 44 %. För alla som deltog i urvalsprovet var frekvenserna något lägre.

I Åbo började s vid samma tidpunkt med nivåtestning av de som redan kommit in till utbildningen (Pehkonen, 2011). I början av en matematikdidaktisk grundkurs år 2000 fick klasslärarstuderanden genomföra ett test i lågstadiematematik. Testet bestod av tio mekaniska uppgifter samt några problemuppgifter. Kraven i testet var endast bundna till de mekaniska uppgifterna medan problemuppgifterna fanns med för att ge studerande en bredare bild av matematiken än mekaniskt räknande. För att få godkänt krävdes att man lyckades lös nio uppgifter (90 %). Första året lyckades endast 36 av totalt 70 (51 %) personer med detta. Andelen underkända för åren 2000–2003 var 49 %, 21 %, 27 % och 30 %.

I Nyslott testade man (Häkkinen et al., 2011) år 2009 grundläggande matematikkunskaper hos de som sökte sig in till klasslärarutbildningen. Samma prov användes för årskurs 8 och färdigheterna jämfördes. Ingen betydlig skillnad i totalpoängerna och färdigheterna mellan de sökande och åttondeklassisterna hittades, vilket författarna beskrev som pinsamt. Man fann att kring en femtedel av de sökande svarade på mindre än 50 % av frågorna som baserades på innehållet från årskurserna 1–7. Tre av nio uppgifter hade en lösningsfrekvens under 50 % bland de sökande. Andelen felaktiga svar för de sökande i alla uppgifter var 16 %, 19 % 22 %, 26 %, 34 %, 44 %, 54 %, 59 % och 60 % vilket var aningen bättre än hos åttondeklassisterna. Endast en av uppgifterna hade alla klasslärarsökande provat lösa, resterande hade allt ifrån 2 till 46 (av 129) personer valt att inte försöka lösa. Positivt var att hela elva sökande hade lyckats med alla uppgifter och ingen hade fått fel på alla. Däremot var det två var som hade sju och åtta fel och de flesta sökande hade fyra fel.

Tossavainen et al. (2015) testade studerande på problem utvecklade från frågor i PISA-testet från år 2003. Testgruppen bestod av åttondeklassister, gymnasieelever både inom kort och lång matematik, samt universitetsstuderande, totalt 463 personer. 149 personer var universitetsstuderande, främst på andra och tredje året inom humaniora. Prestationerna i testet diskuteras i förhållande till motivation men också resultatet av testet för de olika grupperna presenteras och jämförs. Testet bestod av fyra textuppgifter värda sex poäng var, de tre första fördelade på två deluppgifter. Av totalt 24 poäng var medelpoängen för hela testgruppen så lågt som 10. Universitetsstuderande och elever med kort matematik i gymnasiet presterade på ungefär samma nivå medan elever med lång matematik presterade bäst och åttondeklassisterna placerade sig långt under medeltalet. Medeltalet för enbart universitetsstuderande var knappa 12 poäng vilket är hälften av totalpoängen. Lösningsfrekvenserna i de sju deluppgifterna var för universitetsstuderande 88 %, 70 %, 83 %, 23 %, 60 %, 13 % och 0 %. Den sista uppgiften var tydligt svår då endast två elever, med lång matematik i gymnasiet, hade löst uppgiften korrekt. Intressant var att både universitetsstuderande och övriga grupper hade löst uppgifterna 1a, 2a och 3a bäst, dessa uppgifter är i stort sett direkt taget ur PISA-provet från år 2003. Del b i alla dessa uppgifter är modifikationer av och mera öppna än del a som resulterat i lägre lösningsprocent. De låga lösningsfrekvenserna i de tre modifierade deluppgifterna samt i den sista fristående uppgiften kan tyda på att man har svårt att förstå uppgifter som man inte är vana vid.

Pentang et al. (2021) studerade 131 klasslärarstuderandes prestationer i problembaserade matematikuppgifter. Skillnaden från min studie är att Pentang et al.:s informanter var från norra Filippinerna och studerade fjärde året till klasslärare. Likheterna är antalet informanter samt att studien görs på problem inom grundläggande matematik. Resultatet i Pentang et al.:s studie visar att de flesta klasslärarstuderande har bristande problemlösningsförmåga. Testet som användes i studien var indelad i kategorierna taluppfattning, enhetsomvandling, geometri, algebra och sannolikhet. Alla uppgifter och kategorier hade totalpoängen 3 som delades jämnt in i prestationsnivåerna berömlig, mycket tillfredsställande, tillfredsställande, otillfredsställande och dålig. Medeltalet för kategorierna taluppfattning och algebra i studien var på tillfredsställande nivå medan övriga kategorier hade medeltalet inom otillfredsställande nivå. Med ett medeltal på 1,06 av 3 låg klasslärarstuderandes prestationer totalt sett inom nivån otillfredsställande.

Brandells (2013) studie påminner på flera sätt om min då han låter studerande genomföra ett matematikprov i början på den första matematikkursen i utbildningen. Största skillnaden är att hans informanter är bland andra civilingenjörsstuderande vid KTH i Stockholm. Studien är dessutom kvantitativ med hela 1888 informanter år 2013 och syftet är att se skillnader över tid samt mellan olika studieprogram. Provet testar inte enbart grundskolans matematik men uppgifterna i provet kategoriseras och resultaten presenteras enligt sex kategorier som inkluderar bland annat grundkunskaper och kreativ talkunskap som kan jämföras med mina rutin- respektive problemuppgifter. Resultatet för år 2013 är att den totala lösningsfrekvensen för alla sex kategorier är 48 % medan den för grundkunskaper är hela 80 % och för kreativ talkunskap 33 % (s. 27). Detta innebär att prestationerna i grundkunskaper var nästan 140% bättre än prestationerna i kreativ talkunskap. För att förtydliga handlar detta alltså om personer som sökt sig till ingenjörs- och inte lärarutbildningar vilket kan vara orsak till skillnader i intresse och kunskaper i matematik i jämförelse med min studie.

Lövf et al. (2014) påpekar att nyantagna ingenjörsstuderanden vid LTU i Skellefteå också har bristande matematikkunskaper. Syftet med deras studie är däremot att försöka skapa ett diagnosverktyg för att förbättra matematikkunskaperna hos studerande. Det verkar vara vanligare att studera matematikkunnandet hos ingenjörsstuderande än hos lärarstuderande, även finska studier på detta har gjorts (ex. Pohjolainen et al., 2006; Mehto, 2013).

Tossavainen och Leppäaho (2018) diskuterar lärares och lärarstuderandes matematikkunskaper främst utifrån tidigare forskning. Utifrån studierna de tagit del av konstaterar Tossavainen och Leppäaho att matematiska kompetenser hos blivande klasslärare varierar stort. Deras konstaterande får sammanfatta de studier som presenterats i detta kapitel.

# 3 Metodologi

*I detta kapitel läggs först studiens syfte och forskningsfrågor fram och sedan presenteras datainsamlingen och informanterna. Därefter diskuteras kvantitativ och kvalitativ forskning och analysens genomförande samt kategorier beskrivs. Till sist diskuteras trovärdighet och etiska aspekter.*

## 3.1 Syfte och forskningsfrågor

Syftet med denna avhandling är att ta reda på vilka matematikkunskaper klasslärarstuderande besitter samt att kartlägga vilka matematiska misstag som förekommer i studerandes uppgiftslösningar från matematiktest som ingår i en matematikdidaktisk kurs inom klasslärarutbildningen. Utgående från syftet har följande forskningsfrågor formulerats:

1. a) Hur presterar klasslärarstuderande i grundskolans matematik?
   b) Skiljer sig prestationerna mellan rutinuppgifter och problemlösningsuppgifter?
2. Hurudana matematiska misstag förekommer i klasslärarstuderandes lösningar till problembaserade textuppgifter?

## 3.2 Datainsamling och informanter

Mitt data utgörs av ett test som samlas in varje år under kursen Matematik som skolämne (tidigare: Matematik I) vid Åbo Akademi. Alla klasslärarstuderande samt övriga studerande[1] som får klasslärarbehörighet går kursen och deltar således i testet. Testet görs som ett inledande test och är obligatoriskt för kursdeltagare. Jag har inte själv deltagit i datainsamlingen men insamlingen har följt god vetenskaplig sed och deltagarna har godkänt att testet används för forskning. Jag har heller inte valt vilka test jag ska ha utan fick ett färdigt urval. Detta urval är från två olika år, 81 test är från våren 2019 och 17 test

---

[1] Speciallärarstuderande, klasslärarstuderande och en del ämneslärarstuderande deltar i kursen och testet. I avhandlingen används för enkelhetens skull endast klasslärarstuderande eftersom alla informanter blir behöriga klasslärare.

är från år 2020. Testen från år 2019 skrevs som tröskeltest medan de året 2020 skrevs utan tröskel. Även om ramarna för testet troligen har påverkat studeranden anser jag att det inte berör mitt fokus och jag har valt att analysera alla test som en helhet utan att skilja på årgångarna.

Deltagarna hade 90 minuter till förfogande för testet och en enkät (se ex. Ahlö, 2021) om bakgrund och matematikupplevelse. 90 minuter kan låta lite men enkäten är kort och testet består endast av grundläggande matematikuppgifter som inte tar lång tid att lösa om man kan matematiken. De tio första uppgifterna är dessutom helt mekaniska och kräver inga längre uträkningar. De fem senare är däremot textuppgifter som i vissa fall gett upphov till långa uträkningar. Men för de som kunnat matematiken och använt en lyckad lösning har uträkningarna varit begränsade. Tidsaspekten kan ändå ha varit ett problem ifall man provat lösa en uppgift på många sätt utan lyckat resultat. Tiden har senare också förlängts till 120 minuter (Ohtonen, 2023).

Testet innehåller som sagt grundläggande matematik. Det består av femton uppgifter varav de tio första kan klassas som rutinuppgifter. De fem senare är textuppgifter som jag valt att klassificera som problem även om definitionen av problem ofta innebär att den som löser problemet inte ska ha någon klar lösningsmetod. Huruvida uppgifterna varit problem för de studerande är omöjligt för mig att säga men jag antar att alla uppgifter varit problem för någon och alla uppgifter varit rutin för någon. Eftersom jag inte kan veta vilka uppgifter som upplevts som problem respektive rutinuppgift väljer jag att se på alla textuppgifter som problemuppgifter.

Under analysen lägger jag märke till lösningar samt korrekta svar utan lösningar som tyder på att uppgiften varit rutinmässiga. Uppgift 14 hade speciellt många sådana lösningar och uppgiften borde egentligen inte klassas som problem. Ett krav på rika problem är att lösaren behöver förstå uppgiften. Uppgift 15 visar på många språkhinder gällande räntesats. För de studerande som inte förstått ordet räntesats kan uppgiften inte klassas som problem. Jag väljer ändå att ha med alla textuppgifter eftersom de åtminstone för någon fungerat som problemuppgift och att sortera enligt lösarens upplevelse skulle vara omöjligt utifrån den information jag har. Dessutom var syftet att hitta misstag och i de lösningar där misstag eller åtminstone feluppfattningar finns har uppgiften potential att passa in i problemdefinitionerna.

## 3.3 Kvalitativ och kvantitativ forskning

Bryman (2018) skriver att kvantitativ forskning handlar om kvantifiering och statistik och till skillnad från detta betonar kvalitativ forskning mera beskrivningar med ord. Kvalitativa ansatser handlar om att försöka förstå människors situation och upplevelser (Nyberg & Tidström, 2012). I denna studie har förståelsen handlat om studerandes tankemönster. Jag har försökt förstå hur informanterna tänkt och hur de kommit till de angivna svaren. Detta var inte helt oproblematiskt eftersom jag inte alltid hade så mycket att utgå ifrån. Exempelvis fanns det felaktiga svar helt utan nedskrivna lösningar vilket gjorde att min tolkning baserades på andra informanter likadana svar eller enbart på egna erfarenheter. När både lösningar och svar saknats har valt att inte tolkat desto mera och helt enkelt kategoriserat som ”inget svar”. När svar och/eller uträkningar funnits till hands har jag enligt bästa förmåga och förstås utifrån min egen matematikuppfattning tolkat lösningsprocessen.

Nyberg och Tidström (2012) menar vidare att kvalitativ insamling och analys är tidskrävande och innebär därför ofta endast ett fåtal informanter. ”En kvalitativ innehållsanalys är sannolikt det vanligaste tillvägagångssättet när det gäller en kvalitativ analys av dokument. Det inbegriper ett sökande efter bakomliggande teman i det material som analyseras” (Bryman, 2018, s.677). Nyberg och Tidström beskriver innehållsanalys på ett enkelt sätt: man bildar större grupper utifrån enskilda uttalanden, endera enligt en färdig modell (deduktivt) eller fritt utifrån materialet (induktivt). Därtill analyseras grupperna vilket kan ge upphov till undergrupper. Bryman påpekar att också tematisk analys och nästan alla kvalitativa analyser innebär sökande efter teman. I kvalitativa arbeten påverkas analysen av egna erfarenheter och upplevelser (Bryman). Det väsentliga i detta är kanske inte vilken kvalitativ analys jag använt utan snarare att jag använt mig av kvalitativ analys.

Kvalitativ analys innebär ofta kodning i flera omgångar (Bryman, 2018). Min analys och kodning pågick från att jag först skummade igenom testen tills jag slutligen hade skrivit klart resultatet. Kodningen var inte styrd och heller inte särskilt organiserad, den var alltså induktiv. Vid en induktiv analys så bildar man kategorierna vartefter och helt utifrån det man hittar i materialet till skillnad från deduktiv analys där man helt och hållet följer en mall som man skapat innan analysen påbörjas (Danielson, 2017; Lundman & Hällgren-Graneheim, 2012,). Jag visste inte från början vilken strategi jag skulle ha för analysen så metoden byggdes upp under arbetets gång. Jag använde inte ett speciellt program för kodningen utan skrev ner tankar som kommentar i de powerpointfiler jag hade samlat lösningarna i. Kommentarerna var till en början många med stor variation men efterhand som jag hittade gemensamma nämnare ändrades kommentarerna till allt färre ”koder”. Vanligen kan dessa koder få underkategorier (Bryman), i mitt fall var det snarare så att koderna resulterade i gemensamma kategorier vilket innebär att jag skapade underkategorierna först, innan jag placerade dem i huvudkategorier.

Den huvudsakliga analysen i detta arbete har gjorts kvalitativt i anslutning till den andra forskningsfrågan. Den första forskningsfrågan besvarades till viss del kvantitativt med statistik och siffror. Eftersom samplet var litet hade jag här heller inget program utan utförde beräkningar och skapade tabeller enbart i Excel.

## 3.4 Analysens genomförande

Efter att ha bläddrat igenom testen ett par gånger för att få en bild av vilket data jag hade till förfogande matade jag in alla erhållna uppgifts- och totalpoänger i ett Excel-dokument. Tre svar av totalt 1470 hade bedömts med halva poänger som jag avrundade neråt för att underlätta jämförelser. I dokumentet utfördes analyserna för den första forskningsfrågan. Analyserna innebar beräkningar av summor, medelvärden samt lösningsfrekvenser. Jag beräknade det mesta men använde sedan inte allt, till exempel beräknades antal för varje uppgift som fått maxpoäng och noll poäng. Den första och mest centrala summering jag gjorde var antal godkända och underkända i testet, detta gjordes även skilt för tröskel- och icketröskeltest. Därefter gick jag vidare till summering av poänger samt beräkning av medeltal och lösningsfrekvenser för enskilda uppgifter, rutinuppgifter, problemuppgifter och hela testet. Jag skapade även listor över hur många som fått enskilda poäng i de olika delarna av testet. Dessa listor gjordes även med lösningsfrekvens i stället för poäng för att de olika delarna ska kunna jämföras. I Excel-dokumentet skapade jag till sist de figurer och tabeller som presenteras i resultatkapitlet.

Mitt data bestod av 98 insamlade test och för att besvara den andra forskningsfrågan analyserade jag lösningarna till fem uppgifter från varje informants test. Totalt analyserades därmed 490 lösningar. Av dessa saknade 79 svar vilket innebär att antal svar som analyserats ligger kring 411. Därtill fanns det några som inte angett svar men ändå provat många lösningar och många som angett korrekt svar utan antecknade lösningar vilket påverkar det faktiska antalet lösningar jag analyserat. Det data som jag fick var i fysiskt format med testpapper innehållande studerandes svar, konceptpapper med studerandes lösningar samt klottpapper som man fått använda vid behov för att till exempel testa sig fram. Till en början studerade jag testen i pappersformat för att skapa mig den första uppfattningen om vad som kunde vara intressant att utforska mer, hur studerande klarat testet och om det finns tecken på feluppfattningar. Att bläddra i fysiska test gör enligt mig det enklare att sätta sig in i studerandes situation då de skrivit testen. Praktiskt är det ändå inte att göra analyserna med papper och penna så jag skannade därför allt och fick totalt 515 A4-sidor.

De inskannade sidorna gick jag noggrant igenom och sorterade allt enligt uppgift. För varje problemuppgift skapades ett PowerPoint-dokument vari jag tilldelade varje informant en sida. Sidorna i dokumenten fylldes med urklipp från allt som berörde respektive uppgift och informant. Detta inkluderade alltid uppgiften med (eller utan) svar och beräkningar från klott- och konceptpapper då det fanns att tillgå. Namn och studienummer hade skrivits på varje papper men detta togs aldrig med i mina dokument vilket innebär att jag inte haft kännedom om personerna då jag utfört analyserna. Däremot numrerades informanterna så jag kunde jämföra en informants lösningar i olika uppgifter vid behov vilket hjälpte mig i vissa fall att tyda och förstå lösningar.

Alla analyser för de andra forskningsfrågan gjordes i PowerPoint-dokumenten men summeringar och översikter skapades i skilda Excel-filer. Systematiskt studerade jag alla svar för en uppgift några gånger innan jag gick vidare till nästa uppgift. Till en början tillades kommentarer för alla fel jag hittade. Jag kommenterade även om svaret var korrekt eller om inget svar fanns så att det skull gå snabbare i nästa genomgång. Så småningom hittade jag mönster och ändrade kommentarerna så att de blev mer och mer enhetliga. Jag gick i flera omgångar igenom en uppgift i taget och varje gång jag började med en uppgift igen hade jag fått insikter från de andra uppgifterna som påverkade hur jag tolkade felen. Detta var en mycket utdragen process eftersom samplet är så stort och det tog lång tid att studera varje lösning. Till slut avtog ändringarna som gjordes i en genomgång och då beräknade jag mekaniskt antalet av alla typer av kommentarer och förde in dem i ett Excel-dokument tillsammans med själva svaret och bedömningen av det. Kommentarerna blev alltså mina kategorier.

I detta dokument inkluderades kategorierna rätt svar, inget svar, räknefel, avrundningsfel, slarvfel, feluppfattning och otillräckliga räknefärdigheter. Svaren kunde tilldelas flera kategorier men endast en av varje. Detta kändes inte helt fullständigt och jag skapade därför ännu ett dokument där uppgifterna om det faktiska svaret och poängen uteslöts. Kategorierna rätt svar och inget svar var heller inte intressant i detta skede eftersom de alla var lika. I stället skapade jag listor för resten av kategorierna som fick den gemensamma kategorin misstag och gick igenom lösningarna igen för att formulera de olika felen. En stor del av analysen ägde rum här då jag försökte förstå och formulera misstagen jag hittat. Jag grupperade och letade likheter och olikheter för att få mera svart på vitt än en känsla av hur många som gjort olika misstag. Här kunde en lösning ge upphov till flera av samma kategori. Detta dokument var det slutgiltiga varifrån kategorierna summerades och figurer skapades. Det var även till stor nytta i formuleringen av resultaten. Det första dokumentet användes sist och slutligen inte till resultatpresentationen men var till stor hjälp för överskådlighet under analysens gång.

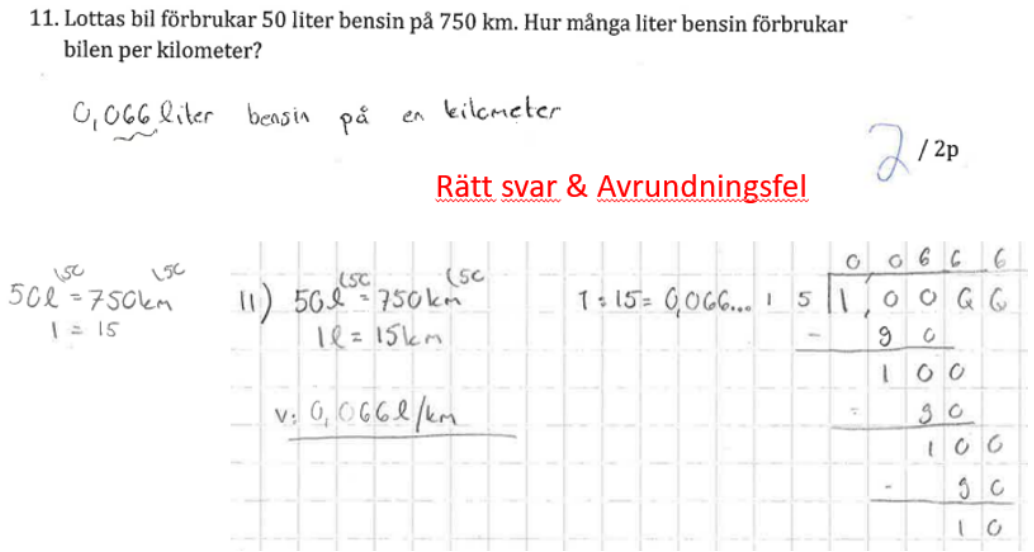
## 3.5 Kategorierna

De slutgiltiga huvudkategorierna blev rätt svar, misstag och inget svar. Fokus lades på misstag eftersom det hör till syftet och dessutom fanns inget att analysera i rätt svar och inget svar. Misstag skapades från underkategorierna avrundningsfel, slarvfel, räknefel, feluppfattning samt otillräckliga räknefärdigheter. Avrundningsfel hittades enbart i en uppgift och räknades som slarvfel i summeringar och jämförelser mellan uppgifter.

Rätt svar användes som kategori för alla korrekta svar och även de svar som enbart hade avrundningsfel. Instruktionerna i testet var att svaren skulle skrivas på testpappret men alla hade inte gjort detta och jag behandlade svar i enbart lösningarna som giltiga. Inget svar var kategorin för alla test som saknade svar om jag dessutom inte kunde hitta något tydligt svar i lösningarna på konceptpapper. Misstag var kategorin för alla möjliga fel i lösningarna. Misstag uteslöt inte att lösningen också kategoriserades som rätt svar eller inget svar. Som nämndes ovan kunde en lösning innehålla exempelvis avrundningsfel men ändå klassas som rätt svar. På samma sätt kunde lösningar innehållande misstag finnas för analys samtidigt som inget svar anges.

Kategorin avrundningsfel beskrivs bra av namnet och innebär alltså något fel i avrundningen av svar. Felen fanns som sagt endast i uppgift 11 och innebar uteslutande fel avrundning av det oavslutade decimaltalet 0,0666… Exempel på detta ges i Figur 2.

**Figur 2**: *Exempel från kategorin avrundningsfel*


11. Lottas bil förbrukar 50 liter bensin på 750 km. Hur många liter bensin förbrukar bilen per kilometer?

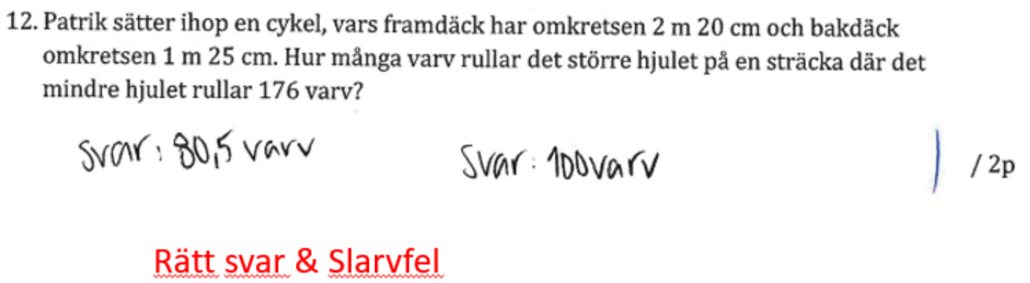
0,066 liter bensin på en kilometer

2 / 2p

Rätt svar & Avrundningsfel

Kategorierna slarvfel och räknefel liknar varandra men vissa skillnader finns ändå. Slarvfel har jag använt för små fel där jag tror att informanten inte skulle göra om felet i ett nytt lösningsförsök, och alltså behärskar den matematik som används. Det kan vara att men skrivit av fel eller tydligt slarv i uppställningar där jag tror att det beror på slarv i till exempel läsning eller skrivning av siffror. Räknefel är tudelat, först finns det uträkningar som är fel och jag inte anser att det kan bero på slarv. Dessa fel kan vara del i en uppställning. I andra fall handlar räknefel om huvudräkning där personen endast skrivit ett svar som inte är helt orimligt och där det är omöjligt att hitta slarvfel ifall det skulle handla om det. Exempel på slarvfel ges i Figur 3 och exempel på räknefel ges i Figur 4. Till synes går kategorierna mycket in i varandra och tolkning beror helt och hållet på min matematikbild. Upplevelserna av svaret och tolkning som räknefel respektive slarvfel ändrade även ibland vid olika genomgångar.

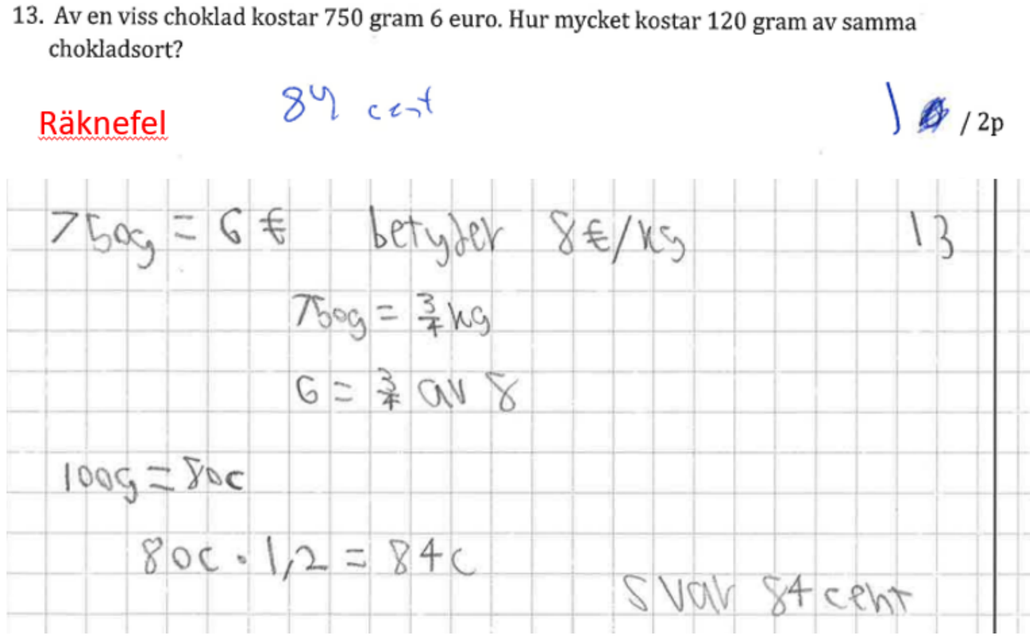
**Figur 3**: *Exempel från kategorin slarvfel*


12. Patrik sätter ihop en cykel, vars framdäck har omkretsen 2 m 20 cm och bakdäck omkretsen 1 m 25 cm. Hur många varv rullar det större hjulet på en sträcka där det mindre hjulet rullar 176 varv?

Svar: 80,5 varv    Svar: 100varv    / 2p

Rätt svar & Slarvfel

*Figur 4: Exempel från kategorin räknefel*


13. Av en viss choklad kostar 750 gram 6 euro. Hur mycket kostar 120 gram av samma chokladsort?

Räknefel

84 cent

1 / 2p

750g = 6 € betyder 8 €/kg

750g = 3/4 kg

6 = 3/4 av 8

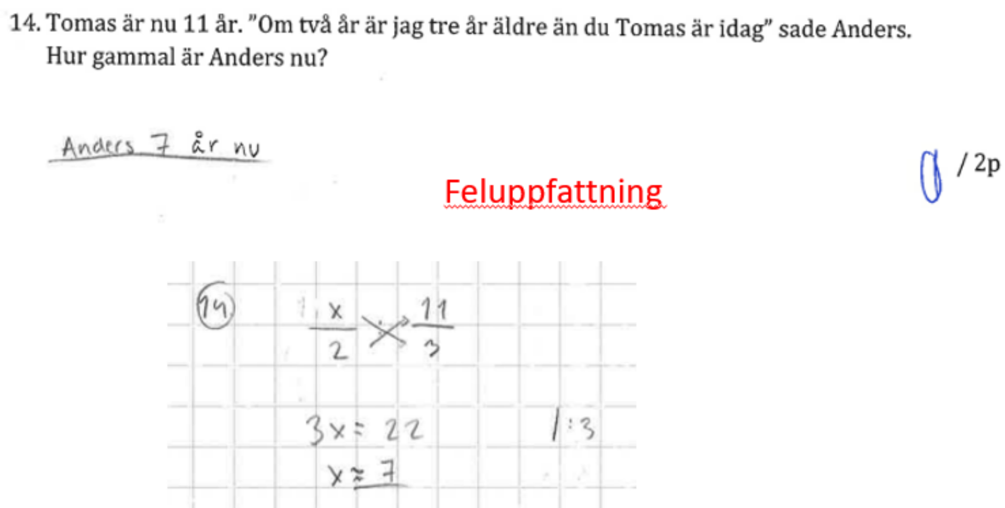
100g = 80c

80c · 1,2 = 84c

Svar 84 cent

Feluppfattning har jag använt i ett brett perspektiv för allt som uppfattats inkorrekt. Det innefattar allt ifrån ord och uppgifter till uppställningar med olika räknesätt och felaktiga användningar av förhållanden mellan tal och enheter. Det är mera omfattande misstag än både räkne- och slarvfel. Feluppfattning har jag använt för sådana lösningar eller delar av lösningar där jag upplevt att lösaren inte förstår vad hen håller på med. Exempel på feluppfattning ses i Figur 5.

*Figur 5: Exempel från kategorin feluppfattning*


14. Tomas är nu 11 år. "Om två år är jag tre år äldre än du Tomas är idag" sade Anders. Hur gammal är Anders nu?

Anders 7 år nu

Feluppfattning

0 / 2p

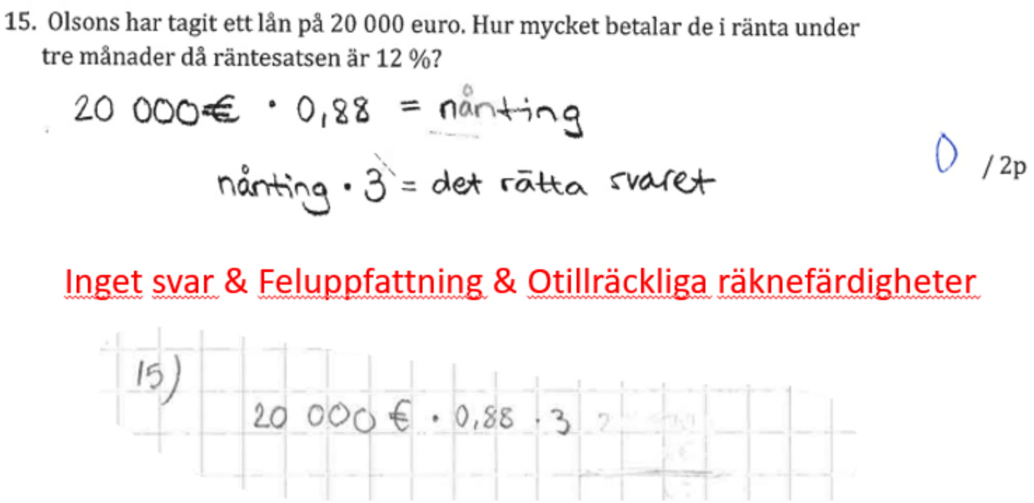
(14) $\frac{x}{2} \times \frac{11}{3}$

3x = 22 | :3

x ≈ 7

Otillräckliga räknefel är egentligen inget missta utan jag använder kategorin för uträkningar som informanterna inte klarat av att utföra. Informanten har alltså förstått att hen inte har kunskaperna att utföra det hen velat. Ofta handlar det om en procedur eller ett räknesätt som skrivits ut men inte avslutats på grund av att personen inte vetat hur hen ska göra. Exempel på otillräckliga räknefärdigheter ses i Figur 6.

**Figur 6**: *Exempel från kategorin otillräckliga räknefärdigheter*




## 3.6 Etiska aspekter samt trovärdighet

Det hör till god vetenskaplig sed att som forskare både i små och stora studier beakta etiska aspekter under hela studiens gång. Etiska aspekter finns till främst för att skydda informanternas integritet. Stukat (2011) presenterar fyra olika krav som forskare bör beakta: informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet. Informationskravet handlar om att informanterna ska informeras om forskningens syfte och om frivillighet att delta och avbryta deltagandet. Samtyckeskravet handlar om att informanterna ska ge sitt samtycke till deltagandet, ifall informanterna är underåriga kan vårdnadshavares samtycke behövas. Informanterna ska också ha möjlighet att avbryta utan att detta får konsekvenser av något slag. Konfidentialitetskravet handlar om att försäkra informanternas anonymitet och att eventuella personliga data inte sprids eller används av obehöriga. I rapporter ska det inte gå att urskilja personer. Nyttjandekravet handlar om att insamlad data inte ska användas utanför forskning.

Eftersom jag inte samlat in eget data har jag ej kunnat påverka mycket av dessa fyra krav. Men jag vet att insamlingen följt god vetenskaplig sed och studerande har godkänt att testen används i forskning. Studerande har däremot inte kunnat avstå från testet eftersom det är en obligatorisk del i en matematikdidaktisk kurs. Att inte godkänna att testet används för forskning har inte påverkat kursen eller gett andra konsekvenser. Det krav jag har kunnat påverka är konfidentialitetskravet. De fysiska test som jag fick till förfogande innehöll namn och studienummer. Under tiden som jag hade testen förvarades de på säkert ställe i hemmet och ingen annan än jag kände till dem. Inför analysen gjordes data digitalt och inga uppgifter om informanterna togs med. Jag hittade heller inget innehåll i lösningarna som kan tänkas avslöja vems lösningen är.

Olsson och Sörensson (2021) nämner plagiat som en typ av forskningsfusk och det innebär att presentera andras text som sin egen i form av att exempelvis inte korrekt ange citat, referat och författare. Jag har gjort mitt yttersta för att alltid hänvisa och ange källor på korrekt sätt. Källorna har jag läst noggrant för att förstå dem så att jag inte ska använda något utanför sin kontext så att det skulle få ny betydelse. En aspekt att beakta i detta avseende är mina något begränsade finskakunskaper. Jag har sökt studier från Finland för att de ska kunna jämföras så bra som möjligt med mina. Dessa studier är naturligt nog ofta på finska och eftersom jag inte behärskar det finska språket till 100 % kan jag ha missförstått något i artiklarna även om jag läst dem flera gånger. Språkbegränsningen kan också ha gjort att jag missat relevanta finländska studier i min litteratursökning.

När det kommer till trovärdighet i kvalitativ forskning så finns det lite olika beskrivningar. Enligt vissa författare (ex. Patel & Davidson, 2011) ska kvalitetsbegreppen validitet och reliabilitet, som också används i kvantitativa sammanhang, användas. Enligt andra (ex. Lundman & Hällgren-Graneheim, 2012) behöver kvalitativ forskning andra begrepp för trovärdighet. De använder begreppen giltighet, tillförlitlighet, överförbarhet och delaktighet.

Delaktighet handlar om hur nära forskningsobjektet forskaren befinner sig, detta syftar främst till insamling av data. I kvantitativ forskning ska man försöka distansera sig för att inte påverka på något sätt, i kvalitativa insamlingar är det ofta svårt att distansera sig (Lundman & Hällgren-Graneheim, 2012). Att jag inte var med i datainsamlingen påverkar alltså trovärdigheten. Jag har distans till forskningsobjektet och har inte haft möjlighet att påverka informanterna. Samtidigt vet jag heller inte hur mycket informanterna påverkats av de som ansvarade för insamlingen av testen åren 2019–2020. Eftersom insamlingen består av ett test har forskaren ändå inte kunnat vara speciellt delaktig och jag antar att testsituationen gjort att deltagarna mest varit fokuserade på den egna prestationen.

Överförbarheten är den punkt som enligt mig har svagheter i denna studie. Överförbarhet handlar om hur väl studiens resultat skulle kunna uppnås igen av någon annan forskare vilket kan styrkas genom att beskriva alla delar av avhandlingen så noggrant att det är möjligt för någon annan att upprepa studien (Lundman & Hällgren-Graneheim, 2012). Eftersom jag skapar metoden längs vägen och analysen innefattar hundratals små steg är det omöjligt att återge allt till hundra procent. Enligt mig är det heller inte praktiskt eller nödvändigt att göra så utförliga beskrivningar av studiens genomförande. Jag har ändå presenterat och diskuterat hela mitt genomförande och försökt få med de ställningstaganden som gjorts. För att höja överförbarheten kunde jag använt mig av program för analysen som kan återges mera exakt.

Giltighet handlar om hur väl man lyckas avspegla det som finns i analysmaterialet. Också ett brett urval av informanter och att utförligt beskriva studiens genomförande påverkar giltigheten (Lundman & Hällgren-Graneheim, 2012). Att utförligt beskriva studiens genomförande höjer även tillförlitligheten som handlar om att presentera ställningstaganden under hela processen. Informanterna har jag inte valt själv och jag fick i ingen bakgrundsinfo om dem. Dock analyserade jag i min kandidatavhandling (Ahlö, 2021) enkäten som samlades in i samband med testet. Samplet i den studien råkar vara allt från året 2019 vilket motsvarar största delen av denna studies sampel. I kandidatarbetet bestod informanterna av 53 kvinnor och 27 män. 48 studerade till klasslärare, 18 till speciallärare, 12 till språkbadsklasslärare samt 2 till någon typ av ämneslärare (Ahlö, Tabell 1). Totalt hade jag en informant mindre i kandidatarbetet än de informanter från 2019 som skrev testet vilket torde bero på att enkäten var frivillig.

Rimligtvis är dessa 80 informanter samma som 80 av mina och bredden är således relativt stor. Giltighet har jag försökt uppnå genom att studera lösningarna så många gånger att jag känt att jag förstår och kan beskriva och kategorisera dem.

I fråga om testet kan lösningarnas trovärdighet diskuteras. 81 av 98 informanter behövde få testet godkänt för att avklara den obligatoriska kursen. Dessa informanter har man skäl att anta har gjort sitt yttersta föra att lösa uppgifterna. Prestationerna hos de som inte behövde bli godkända var betydligt lägre (se Tabell 2 i kap 4.1) än övriga och orsakerna till detta kan i detta skede endast spekuleras kring. En möjlig förklaring är dock lathet, man orkade inte lösa en krävande uppgift eftersom det inte var ett måste. Lösningarna av de 17 informanter som inte behövde bli godkända är alltså kanske inte helt autentiska. Däremot kommer misstag ändå fram i de lösningar som utförts. 20 poäng som var gränsen för godkänt i testet var ett av två typvärden och uppnåddes av hela 10 informanter medan endast en person hade fått 19 poäng och tre personer fick 18 poäng. Detta får mig att ifrågasätta bedömningens trovärdighet. Kanske har bedömarna varit snällare i bedömningen och gett mera poäng i någon uppgift när de märkt att den studerande nästan uppnår 20 poäng.

# 4 Resultat

*I detta kapitel presenteras resultatet från dataanalysen. Till en början läggs klasslärarstuderandes allmänna prestationer fram som svar på den första forskningsfrågan. Därefter presenteras de enskilda observationerna från varje problemlösningsuppgift, dessa tillsammans är tänkta att svara på den andra forskningsfrågan. Till sist sammanfattas och summeras resultaten.*

## 4.1 Allmänna prestationer

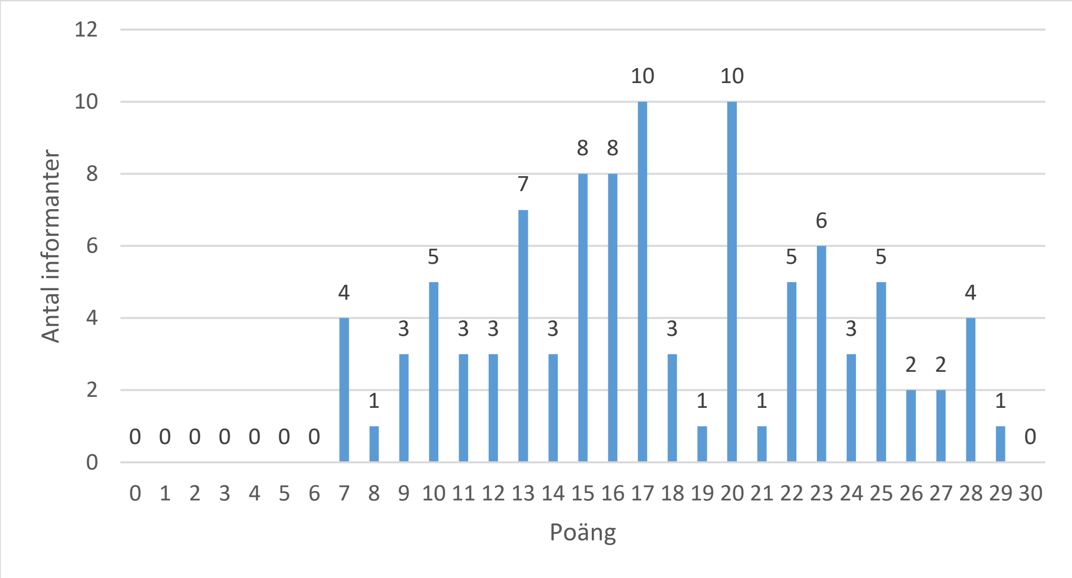
De flesta av informanterna skrev testet som tröskeltest och behövde få 20 av 30 poäng för att godkännas i testet och i kursen. 17 av informanterna hade inte denna tröskel och de har presterat sämre än andra. Även om de varken godkändes eller underkändes har jag sett på 20 poängsgränsen som godkänt. I Tabell 2 nedan syns fördelningen av godkända och underkända för tröskel- och icketröskeltest. Eftersom jag inte kan veta orsaken till prestationsskillnaderna mellan de två grupperna väljer jag att ta med dem båda i min analys av allmänna prestationer. Skillnaderna påverkar inte heller min andra del i syftet där jag vill hitta misstag i klasslärarstuderandes lösningar, därför behandlar jag alla informanter som en grupp och beaktar inte skillnaderna i fortsättningen.

**Tabell 2**: *Antal godkända och underkända (andel av totalt)*

| | *Inte tröskeltest* | *Tröskeltest* | *Alla* |
|---|---|---|---|
| *Underkända* | 15 (88 %) | 44 (54 %) | 59 (60 %) |
| *Godkända* | 2 (12 %) | 37 (46 %) | 39 (40 %) |
| *Totalt* | 17 | 81 | 98 |

Från Tabell 2 kan man se att prestationerna över lag inte är goda. Totalt sett blev endast 40 % av lärarstuderande godkända i matematiktestet som alltså mäter matematikkunskaper från grundskolan. Medeltalet för testet är 17,5 poäng vilket är under gränsen för godkänt. Medianen är 17 poäng. Fördelningen av poäng presenteras i Figur 7. Ingen har gett rätt svar på alla uppgifter och få har fått höga poäng, endast nio studerande fick mera än 25 poäng. Men i andra änden har ännu färre studerande placerats sig, ingen hade mindre än 7 poäng och endast åtta hade mindre än 10 poäng. 17 och 20 är den vanligaste totalpoängen men 15 och 16 poäng kommer tätt därefter.

**Figur 7:** *Poängfördelning för hela testet*




Uppgifterna i testet har naturligt nog varit olika svåra. I Tabell 3 har jag sammanställt medelpoängerna och maxpoängerna för varje uppgift (för information om uppgifterna se bilaga 1). Med i tabellen har jag också lösningsfrekvensen som syftar på $\frac{medelpoäng}{maxpoäng} * 100$ och alltså visar på hur informanterna som grupp presterat i uppgiften. Lösningsfrekvensen har jag med för att man enkelt ska kunna jämföra prestationerna mellan uppgifter även om maxpoängerna är olika.

**Tabell 3:** *Medelpoäng, (maxpoäng) samt lösningsfrekvensen för varje uppgift*

| *Uppgift* | *Medelpoäng* | *(Maxpoäng)* | *Lösningsfrekvens (%)* |
|---|---|---|---|
| *1* | 1,2 | (2) | 61 |
| *2** | 0,8 | (1) | 84 |
| *3** | 0,9 | (1) | 87 |
| *4* | 0,3 | (1) | 34 |
| *5** | 2,9 | (4) | 73 |
| *6** | 1,7 | (2) | 83 |
| *7** | 1,7 | (2) | 86 |
| *8* | 1,0 | (2) | 51 |
| *9* | 0,9 | (2) | 44 |
| *10* | 1,4 | (3) | 46 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *11* | 0,8 | (2) | 38 |
| *12* | 0,6 | (2) | 32 |
| *13* | 0,9 | (2) | 47 |
| *14** | 1,6 | (2) | 80 |
| *15* | 0,8 | (2) | 38 |

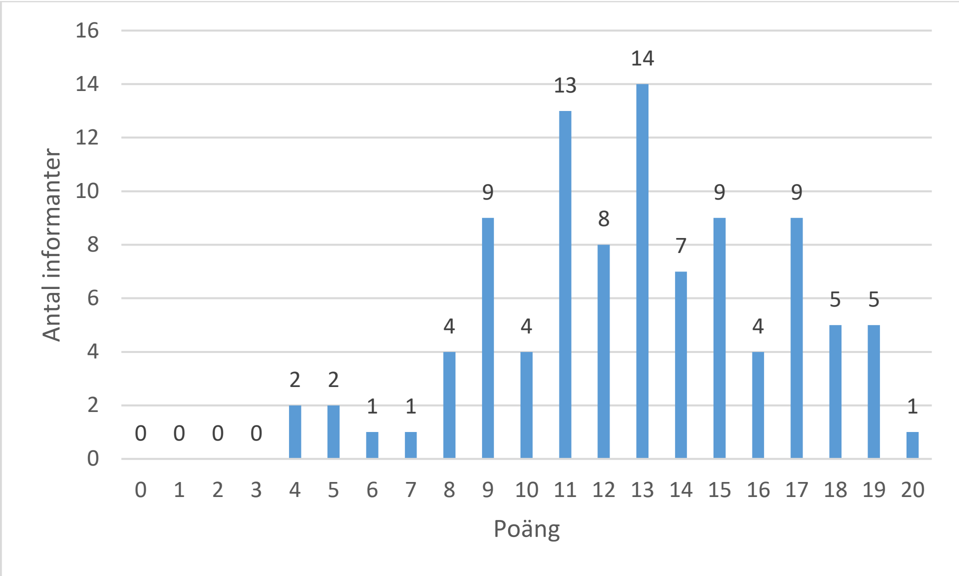
Medianfrekvensen är 51 % vilket innebär att hälften av uppgifterna klarades sämre än så och hälften bättre. Sex av uppgifterna (markerade med *) har en frekvens över $\frac{2}{3}$ som behövdes för godkänt i hela testet, endast en av dessa är en problemuppgift. Fyra uppgifter hade en lösningsfrekvens över 80 %, ingen av dessa är problemuppgifter. Hela fyra uppgifter löstes med en frekvens under 40 %, av dessa är tre problemuppgifter och endast en rutinuppgift. Här syns alltså en skillnad mellan problem- och rutinuppgifter. För en helhetsblick på skillnaderna presenteras medel- och maxpoänger samt lösningsfrekvenserna för rutin- och problemuppgifter samt för hela testet i Tabell 4 i vilken man kan se att lösningsfrekvensen för hela testet är 58 %. Rutinuppgifterna har den största lösningsfrekvensen med hela 17 procentenheter mera än problemuppgifterna.

**Tabell 4**: *Medelpoäng, (maxpoäng) samt lösningsfrekvensen för testets olika delar*

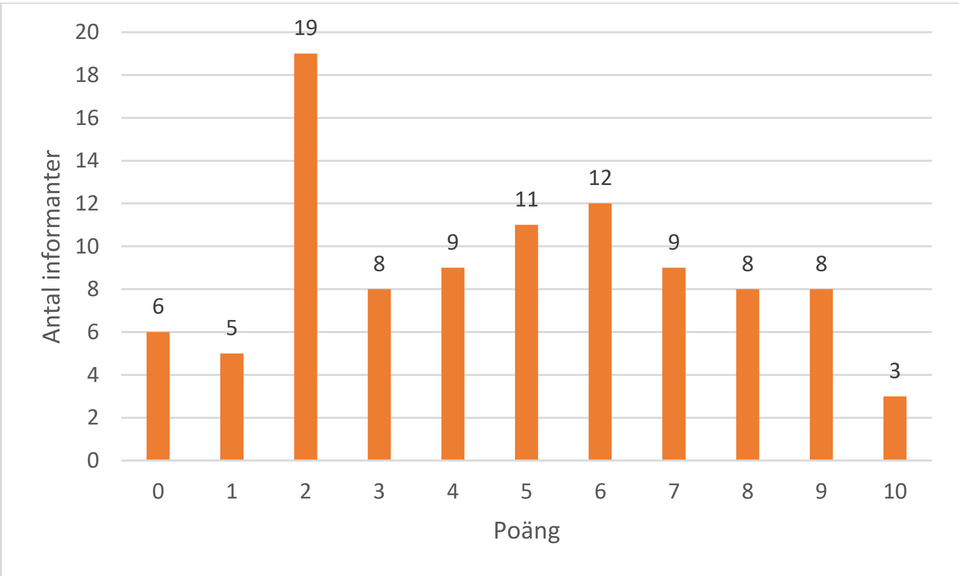
| *Testdel* | *Medelpoäng* | *(Maxpoäng)* | *Lösningsfrekvens (%)* |
|---|---|---|---|
| *Rutinuppgifter* | 12,9 | (20) | 64 |
| *Problemuppgifter* | 4,7 | (10) | 47 |
| *Hela testet* | 17,5 | (30) | 58 |

Figurerna 8 och 9 visar poängfördelningen i rutinuppgifterna respektive problemuppgifterna. Figur 8 visar att det är få som klarat sig dåligt och lite fler som klarat sig bra i rutinuppgifterna vilket liknar fördelningen för hela testet. I Figur 9 syns däremot en större spridning mycket flera dåliga poäng i problemuppgifterna. Hela elva personer fick 9 eller 10 poäng men lika många fick 0 eller 1 poäng i problemuppgifterna. Intressant är att typvärdet för problemuppgifterna är 2 poäng vilket skiljer sig betydligt från medianen på 5 poäng, för rutinuppgifterna är medianen och typvärdet densamma på 13 poäng.

**Figur 8**: *Prestationsfördelning för rutinuppgifterna*

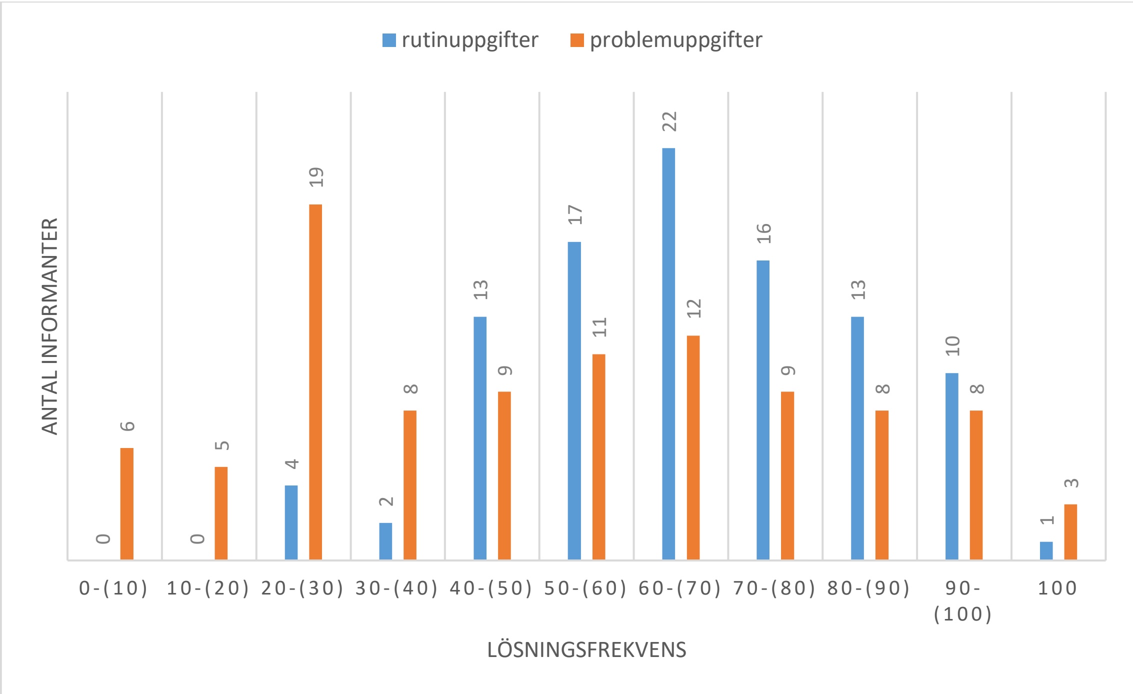



**Figur 9**: *Prestationsfördelning för problemuppgifterna*




Figur 10 visar poängfördelningarna av rutinuppgifterna jämte problemuppgifterna enligt lösningsfrekvens. Ur figuren kan man se att fördelningarna i poängen skiljer sig betydligt mellan rutin- och problemuppgifter. Endast sex informanter klarade mindre än 40 % av rutinuppgifterna medan hela 38 informanter klarade mindre än 40 % av problemuppgifterna. Vid alla värden mellan 40 och (100) % har rutinuppgifterna fler informanter än problemuppgifterna och vid övriga värden har problemuppgifterna flest informanter. Fler informanter fick alltså alla rätt i problemuppgifterna än i rutinuppgifterna. Även om problemuppgifterna resulterade i flest fulla poäng resulterade de också i flest låga poäng. Bortsett från problemuppgifternas pik med hela 19 informanter i 20-(30) % har både rutin- och problemuppgifterna en topp i 60 – (70) % vilket motsvarar 12 och 13 poäng i rutinuppgifterna samt 6 poäng i problemuppgifterna.

**Figur 10**: *Prestationsfördelning enligt lösningsfrekvens för rutin- och problemuppgifterna*

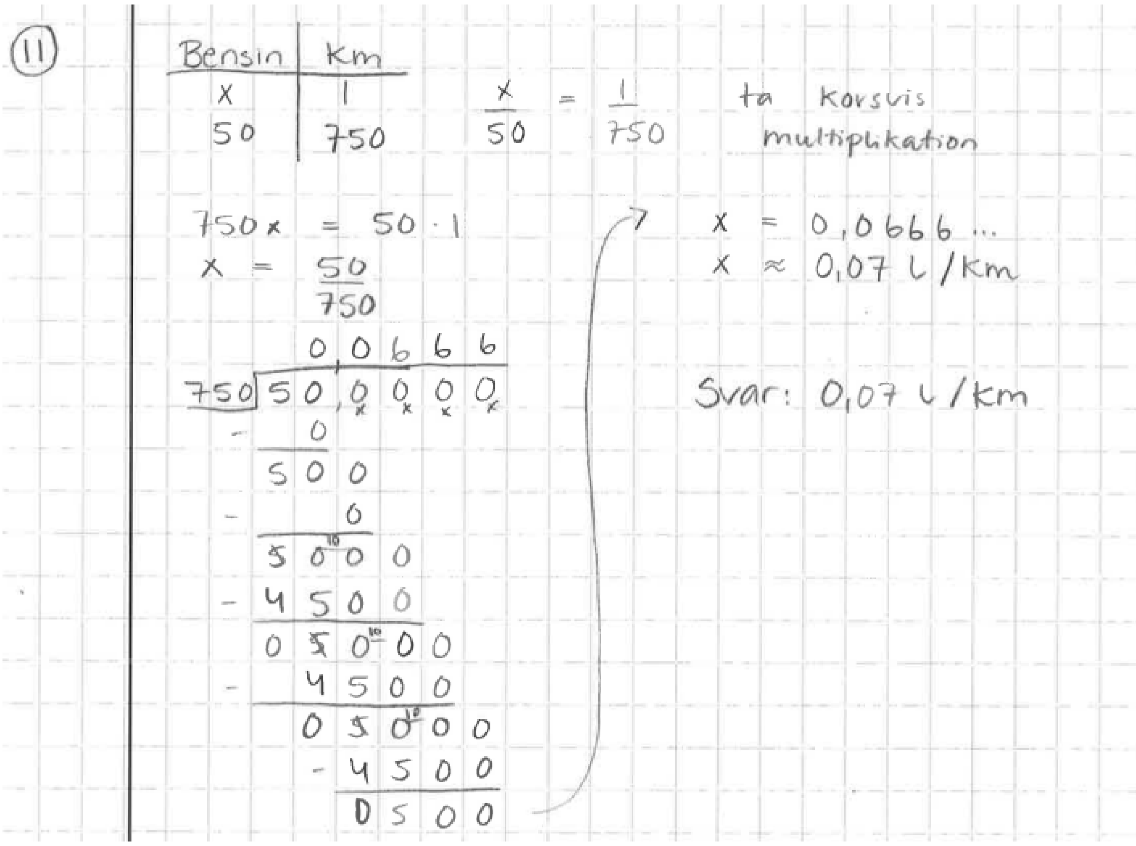



## 4.2 Uppgift 11

*Lottas bil förbrukar 50 liter bensin på 750 km. Hur många liter bensin förbrukar bilen per kilometer?*

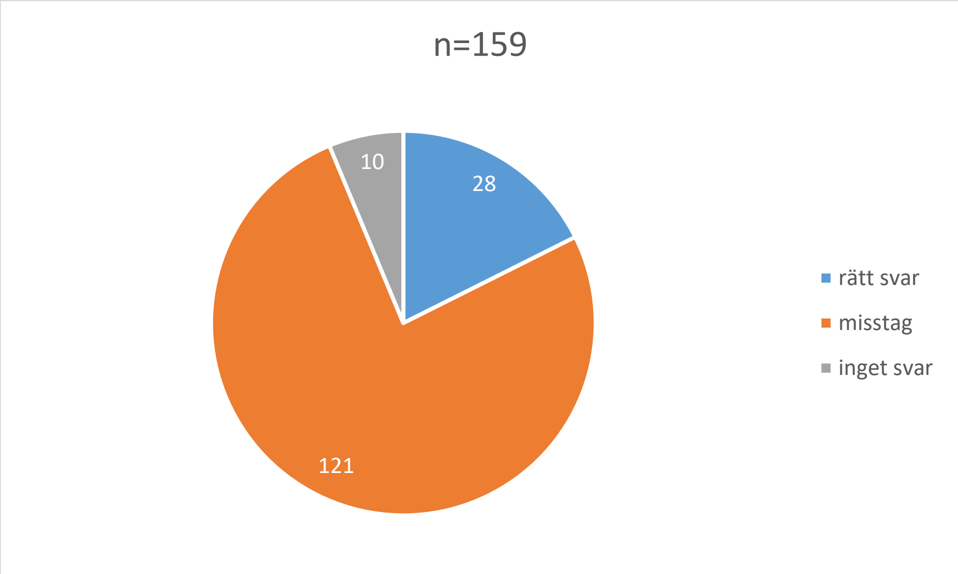
I uppgift 11 ska förhållandet $\frac{liter}{kilometer}$ hittas. Svaret fås till exempel genom att dividera $\frac{50\ l}{750\ km} = 0{,}067\,\frac{l}{km}$. Genom förenkling får man även det korrekta svaret i bråkform: $\frac{50}{750} = \frac{1}{15}\frac{l}{km}$. Exempellösning som med korrekt svar ses i Figur 11.

**Figur 11**: *Exempel på korrekt lösning till uppgift 11*

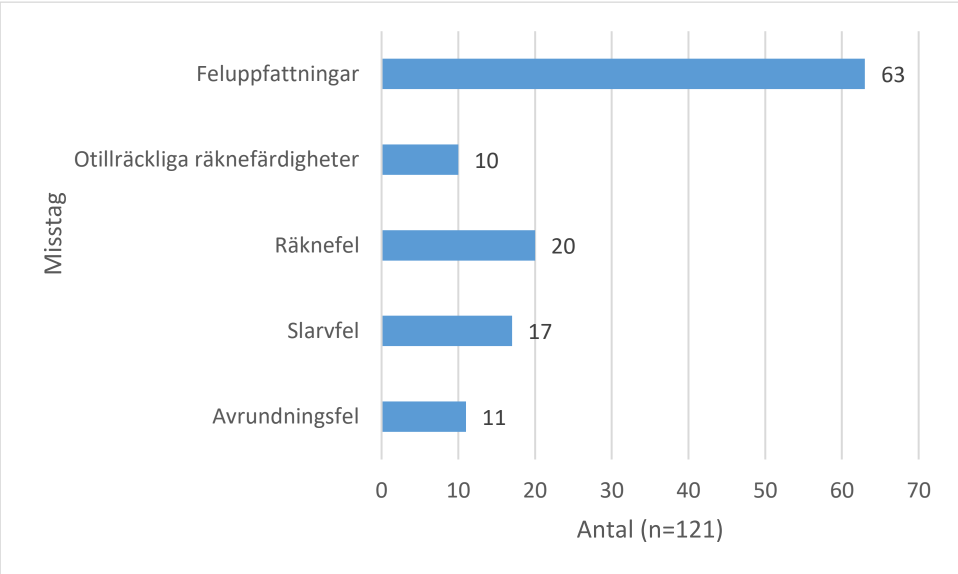


De flesta har försökt lösa uppgiften och angett ett svar men uppgiften var svår och hela 60 personer har svarat fel. Svårigheten kan bero på att man vanligtvis beräknar bränsleförbrukning per 100 km. Tio personer gav inget svar på uppgiften och 28 personer svarade korrekt vilket presenteras i Figur 12. Misstagen uppgick till 121 och fördelades enligt Figur 13. Avrundning var ett stort problem i denna uppgift och blev därför en egen kategori inom misstag som övriga uppgifter inte har. Problem med avrundning kan handla om slarvfel eller feluppfattning. Svar med endast avrundningsfel har jag även klassificerat som rätt svar. I slutet av avsnittet går jag grundligt in i feluppfattningar medan jag börjar med att presentera övriga misstag mera ytligt.

**Figur 12**: *Kategorisering för uppgift 11*




**Figur 13**: *Fördelning av misstag för uppgift 11*




Som jag nämnde var avrundning ett relativt stort problem i denna uppgift vilket antagligen beror på att svaret var ett oavslutat decimaltal 0,0666… som gärna kan avrundas till 0,067 eftersom 750 har två gällande siffror. Det kan även avrundas till 0,07 eller 0,0667. Att skriva svaret i bråkform eller i decimalform utan avrundning förekom ofta. Felen handlar om att man kanske inte tänkt på att man bör avrunda och bara kortat av svaret och skrivit lämpligt antal sexor. En person har avrundat till närmaste femtal och svarat 0,65 vilket förstås även innefattar andra felaktigheter.

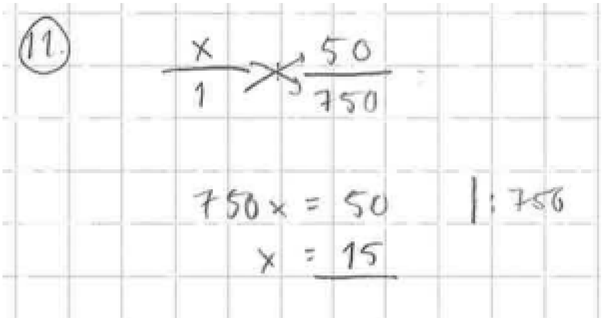
I övrigt förekommer inga typiska slarvfel och räknefel utan variationen är stor. Tre har kommit fram till rätt svar men skrivit av fel svar på testpappret, två har räknat på flera sätt men valt ett felaktigt svar. En del slarvfel handlar om förkortning av bråk eller andra beräkningar som ofta ger ett svar som är tio gånger för stort eller tio gånger för litet. Även uppställning, både med multiplikation och med division, står för slarv- och räknefel. Exempel på sådana är att man tänkt att 750 går 5 eller 7 gånger i 5000 alternativt 6 gånger men sedan multiplicerat 6 med 750 och fått till exempel 4200 och 4600. Fel som dessa försvårar ofta resten av lösningen och ger förstås fel svar. Andra exempel på räknefel är divisionen $\frac{750}{50}$ som gett kvoterna 13; 17; 16; 12,3 och 1,5.

Otillräckliga räknefärdigheter innebär i denna uppgift uteslutande svårigheter vid division. De flesta av dessa har antecknat $\frac{50}{750}$ men inte lyckats utföra beräkningen, andra har förkortat men lämnat med bråktal av olika slag som de inte vet hur de ska använda. Två som inte lyckas beräkna en division exakt estimerar svaret. En person ställer upp och beräknar $\frac{750}{50}$ på en del olika sätt men tycks inse att svaret inte är riktigt, av lösningarna tolkar jag att denne försöker komma fram till det omvända förhållandet men har svårt att handskas med en täljare som är mindre än nämnaren och lyckas därför alltid få svaret 15.

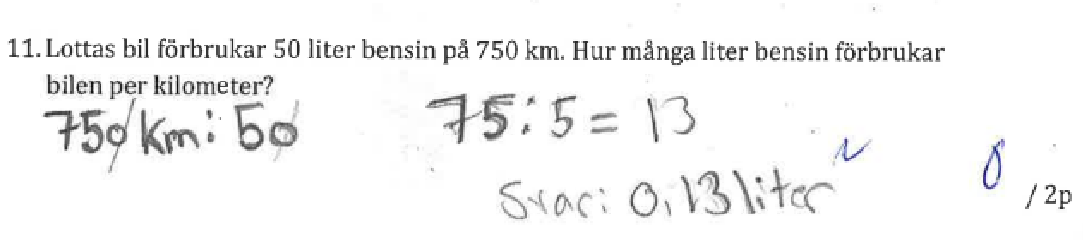
### 4.2.1 Misstag med fokus på feluppfattningar

Den mest förekommande feluppfattningen handlar om division. Så många som 26 har dividerat $\frac{750}{50}$ och alltså fått förhållandet $\frac{km}{l}$ emedan det frågades efter $\frac{l}{km}$. En del av dessa har tänkt rätt och bildat en korrekt ekvation men efter $750x = 50$ delat med 50 och ändå kommit till $x = \frac{750}{50} = 15$, se Figur 14 för exempel. Det verkar finnas en uppfattning om att det största talet alltid är täljare även om det för en del kan handla om rent slarvfel. En del har börjat beräkna $\frac{750}{50}$ och kanske förkortat men kommit till ett skede där räknefärdigheterna inte räcker till och de avslutar utan ett svar. En stor del av dem som fått svaret 15 har flyttat decimaltecknet så långt att svaret känns rimligt, svaren 15; 1,5; 0,15; 0,015 och 0,0015 förekommer, exempel på detta ses i Figurerna 14–16. En del av dessa svar saknar enhet medan andra helt enkelt har inverterat enheten så att den passar svaret, se Figur 17. Några personer verkar ha inverterat talet 15 felaktigt till 0,15. Också feluppfattningen att bråktalet $\frac{1}{15}$ i decimalform skrivs som 0,15 eller 1,5 förekommer.

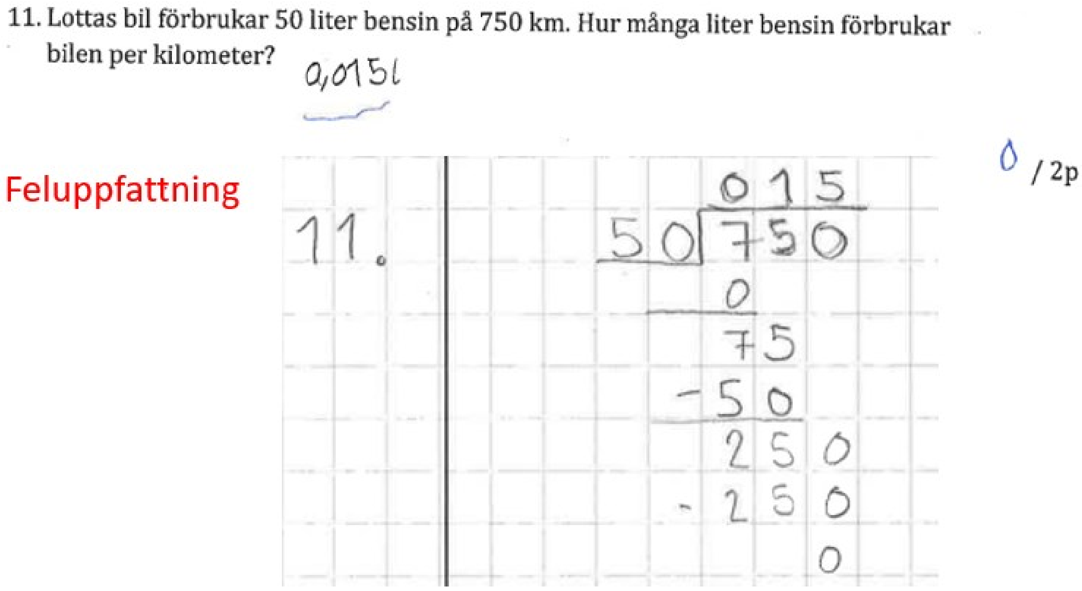
**Figur 14**: *Exempel 1 på feluppfattning i uppgift 11*



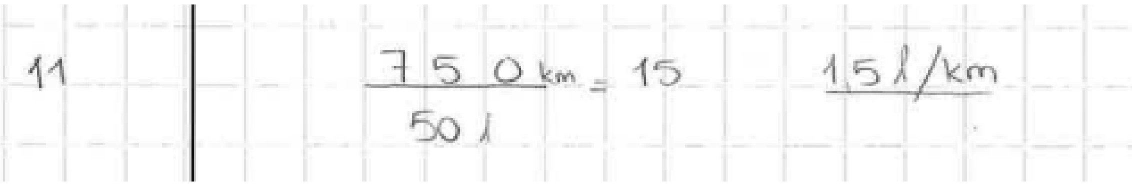

**Figur 15**: *Exempel 2 på feluppfattning i uppgift 11*




**Figur 16**: *Exempel 3 på feluppfattning i uppgift 11*

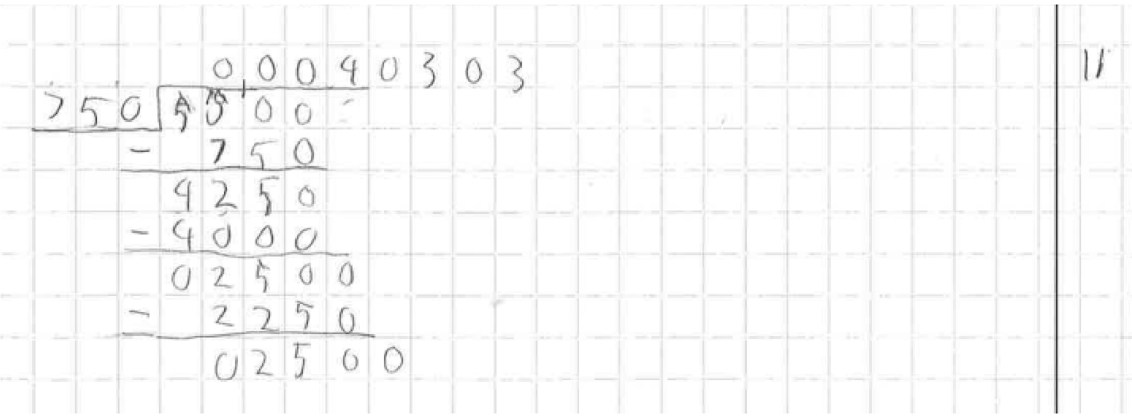


**Figur 17**: *Exempel 4 på feluppfattning i uppgift 11*




Uppställning med division, den så kallade divisionstrappan, verkar ha satt sig i minnet hos många men inte alla kommer helt ihåg hur den ska användas. Flera har till exempel efter subtraktionen i divisionstrappan delat igen innan de flyttat ner en till siffra och förstås fått 0 vilket innebär att svaret innehåller extra nollor mellan varje siffra. Exempel på denna feluppfattning ses i Figur 18 som även visar på både slarvfel och räknefel.

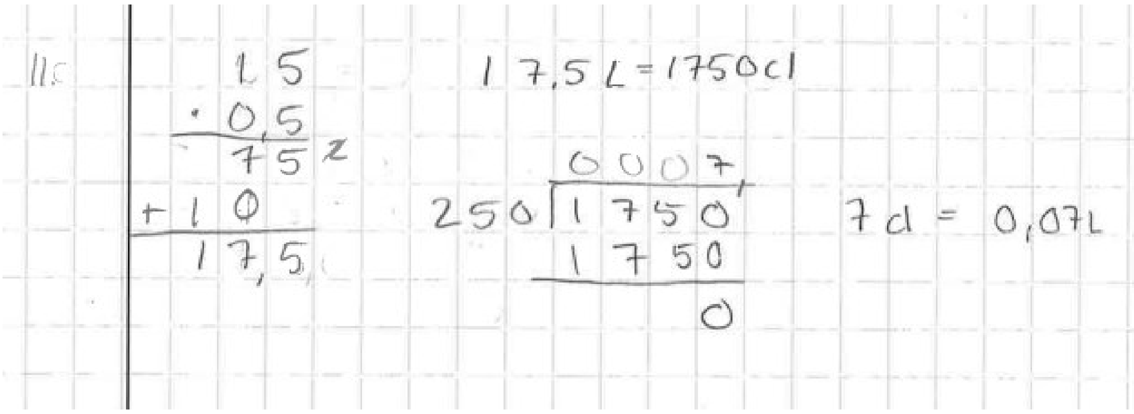
**Figur 18**: *Exempel 5 på feluppfattning i uppgift 11*



Placeringen av decimaltecknet i svaret i divisionsuppställning har också varit svårt. En person har kommit ihåg multiplikationsuppställning fel och placerat multiplikationerna med ental och tiotal under varandra så att summan sedan blir fel, personen glömde dessutom decimaltecknet och fick uträkningen $0{,}05 * 15 = 30$. Två personer skriver division fel väg och skriver alltså exempelvis 50:750 även om de både avser och beräknar 750:50. Två personer har efter utförd division $\frac{50}{750} = \frac{1}{15}$ tillsatt 50 i täljaren som om 15 skulle avsett det antal kilometer som 50 liter ska delas med, även om det redan var förkortat till 1 kilometer. Det här ger alltså divisionen $\frac{50}{15} = 3{,}33$ ...vilket den ena inte kunde gå vidare med och den andra svarade 3,3 liter. Denna feluppfattning visar igen på en uppfattning om att täljaren ska vara större än nämnaren och att divisionen i annat fall är mycket svår och kanske till och med onaturlig att beräkna.

Personen bakom lösningen i Figur 19 har trots ordentliga feluppfattningar lyckats få det korrekta svaret. Jag har lite svårt att se vad personen tänkt men ser i alla fall ett slarvfel i multiplikationsuppställningen där $0 * 1$ skrivits som 1 vilket ger 100 för mycket i svaret. Varför personen multiplicerat $15 * 0{,}5$ är dock oklart. 15 antar jag kommer från kvoten $\frac{750}{50}$. Som enhet till $15 * 0{,}5 = 17{,}5$ skrivs liter som sedan omvandlas till centiliter. Detta delas sedan med oförklarliga 250 men har ännu kvar samma enhet, vilket borde innebära att 250 saknar enhet. Svaret omvandlas tillbaka till liter och som svar skrivs 0,07 l vilket alltså är korrekt. En idé till multiplikationen kan vara att personen velat invertera eftersom 15 ju anger $\frac{km}{l}$, inversen är dock inkorrekt och ifall det varit korrekt skulle lösningen vara klar här. Övriga lösningar som jag kategoriserat som feluppfattningar är kvoten $\frac{50}{750} \approx 7$, svaret 10 som saknar uträkningar och förkortning av bråket $\frac{1}{15} = \frac{3}{5}$ där det verkar som att personen ämnat förkorta bråket med tre och delat nämnaren med tre men sedan multiplicerat täljaren med tre.

**Figur 19**: *Exempel 6 på feluppfattning i uppgift 11*

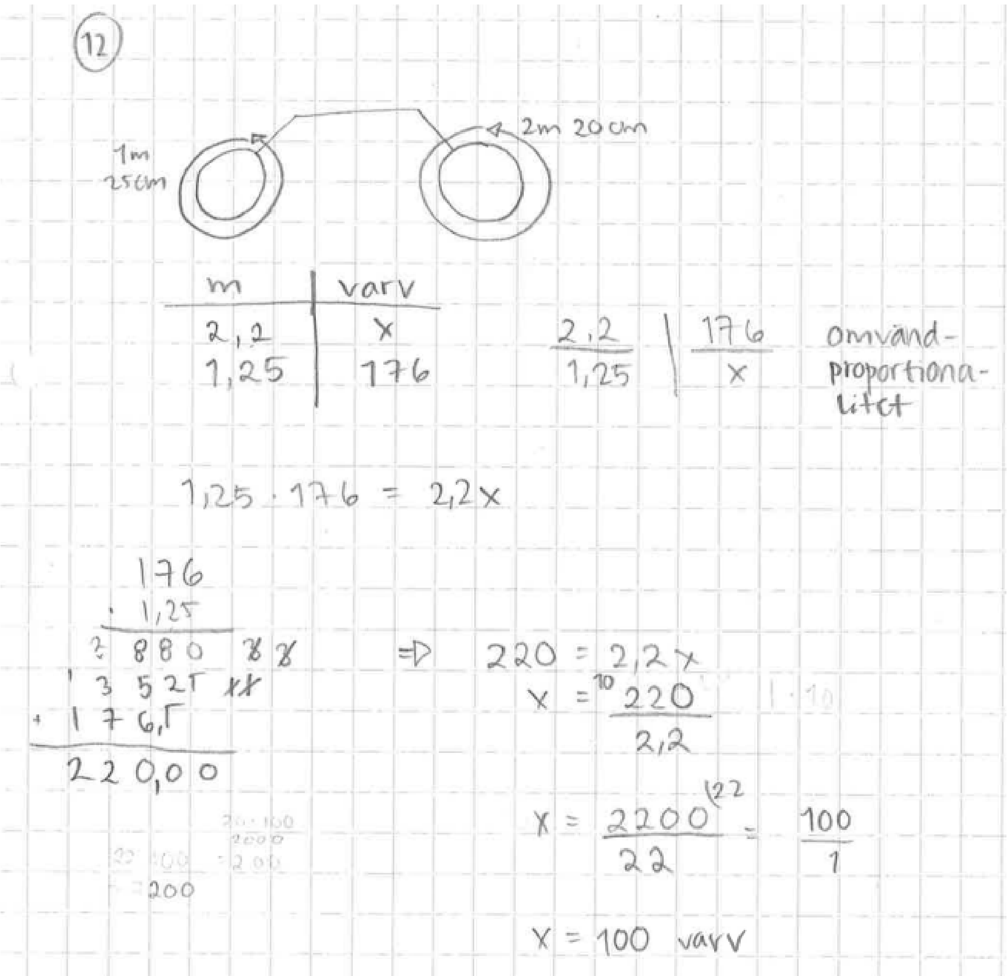



## 4.3 Uppgift 12

*Patrik sätter ihop en cykel, vars framdäck har omkretsen 2 m 20 cm och bakdäck omkretsen 1 m 25 cm. Hur många varv rullar det större hjulet på en sträcka där det mindre hjulet rullar 176 varv?*

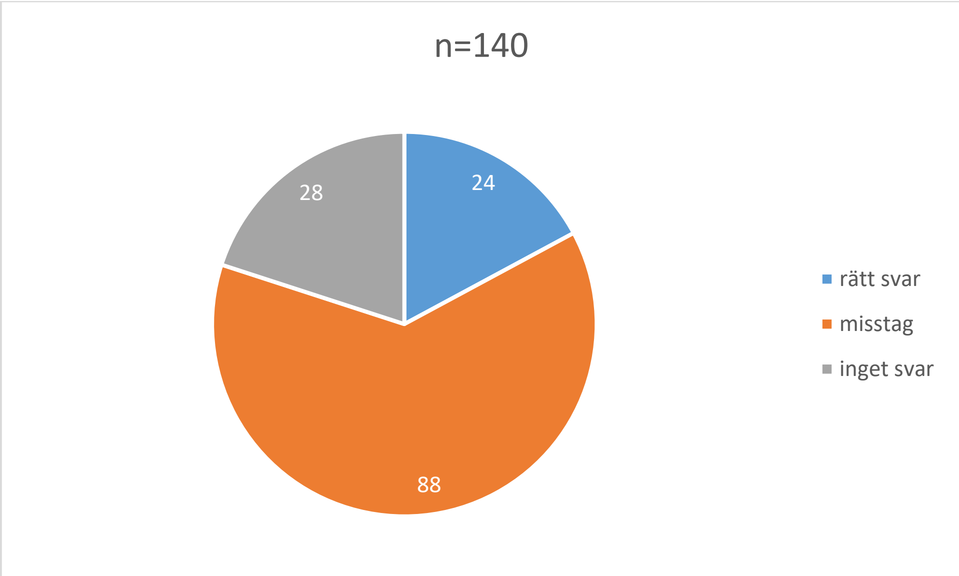
Uppgift 12 handlar om omvänd proportionalitet där man ska beräkna hur många varv ett större däck snurrar på samma sträcka som ett mindre däck. En väg till svaret är att multiplicera antalet varv och omkretsen för det mindre däcket $1{,}25m * 176 = 220m$ för att få sträckan som cykeln färdats. Därefter delas sträckan med omkretsen på det större däcket $\frac{220m}{2{,}2m}$ vilket ger det sökta svaret 100 varv. Lösningen i Figur 20 är ett exempel på korrekt svar.

**Figur 20**: *Exempel på korrekt lösning till uppgift 12*

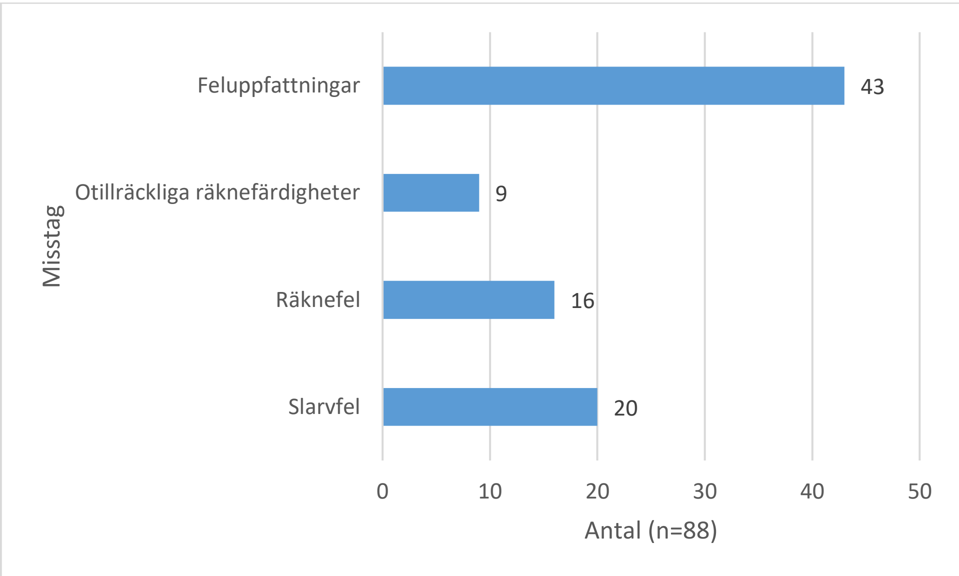



Uppgiften har varit svår med endast 24 korrekta svar och hela 28 tomma svar vilket är flest bland problemuppgifterna. I analysen hittade jag 88 misstag vilket inkluderar 20 slarvfel som också är flest bland problemuppgifterna. Fördelningen av kategorier syns i Figur 21 och fördelningen av misstag i Figur 22.

**Figur 21:** *Kategorisering för uppgift 12*




**Figur 22:** *Fördelning av misstag för uppgift 12*

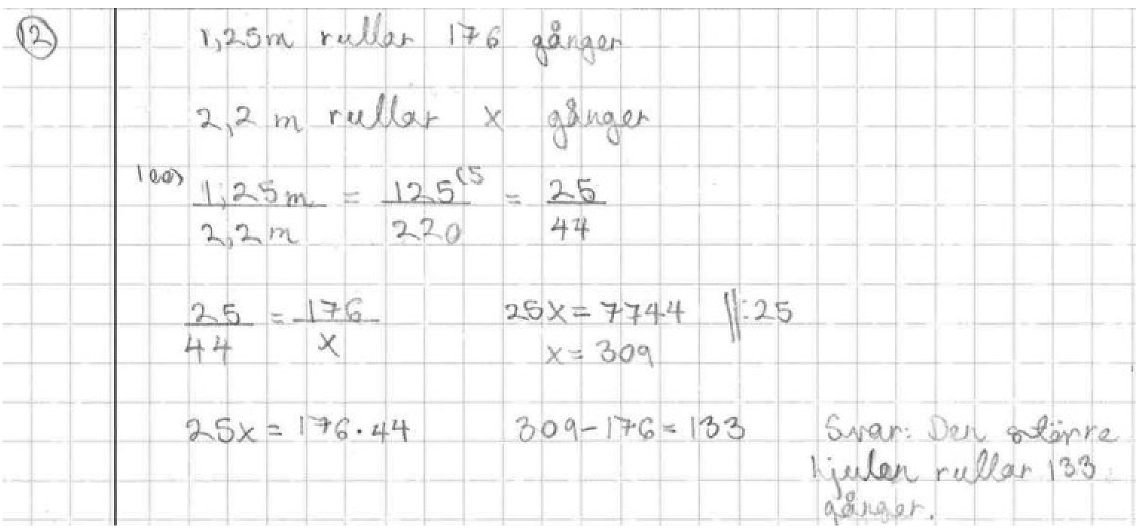



Slarvfelen handlar till största del om slarv vid uppställning av multiplikation och division och även subtraktion för en person. 85 % av slarvfelen görs vid uppställning vilket kan bero på att uppgiften har ganska stora tal. Använder man enheten meter i stället för centimeter blir talen inte så stora men i stället blir de decimaltal som också varit svåra att hantera. Utöver dessa slarvfel är det en som glömt att skriva ut svaret, en som skrivit av fel svar från uträkningarna och en som skrivit två svar varav ett var korrekt och ett felaktigt. Slarvfelen i uppställningarna ger oftast ett svar som skiljer sig minimalt från det korrekta men som i denna uppgift gör det mycket svårare att gå vidare. Detta ger upphov till en del av räknefelen och även några situationer där räknefärdigheterna inte räckt till och personen avslutar utan svar. Bland otillräckliga räknefärdigheter och speciellt räknefel finns inga typiska svar. Otillräckliga räknefärdigheter handlar i denna uppgift uteslutet om divisioner som informanten inte kunnat beräkna. En av dem som inte kunnat beräkna den kvot hen ställt upp inser att den inte leder till rätt svar väljer att estimera svaret. Exempel på räknefel är $220 * 9 = 2080$, $36 * 2{,}2 = 69.3$, $\frac{320}{2.2} = 160.2$ och $\frac{8151}{125} = 71$.

### 4.3.1 Misstag med fokus på feluppfattningar

Den tydligaste feluppfattningen i denna uppgift är att man inte observerat att ett större däck roterar färre varv än ett mindre däck på samma sträcka. Man har alltså inte tänkt på att det är frågan om omvänd proportionalitet. Många har dock använt en fungerande metod som skulle ha gett rätt svar ifall man skulle ha inverterat den ena sidan av ekvationen. Ganska många har gett ett svar som är större än 176 varv vilket tyder på att de inte resonerat logiskt angående svarets rimlighet. Hela tio personer har använt sig av korsvis multiplikation som i Figur 23 utan att beakta den omvända proportionaliteten. Denna lösning innehåller även en annan feluppfattning där personen har subtraherat varvantalet för det mindre däcket från svaret, kanske för att svaret inte kändes rimligt.

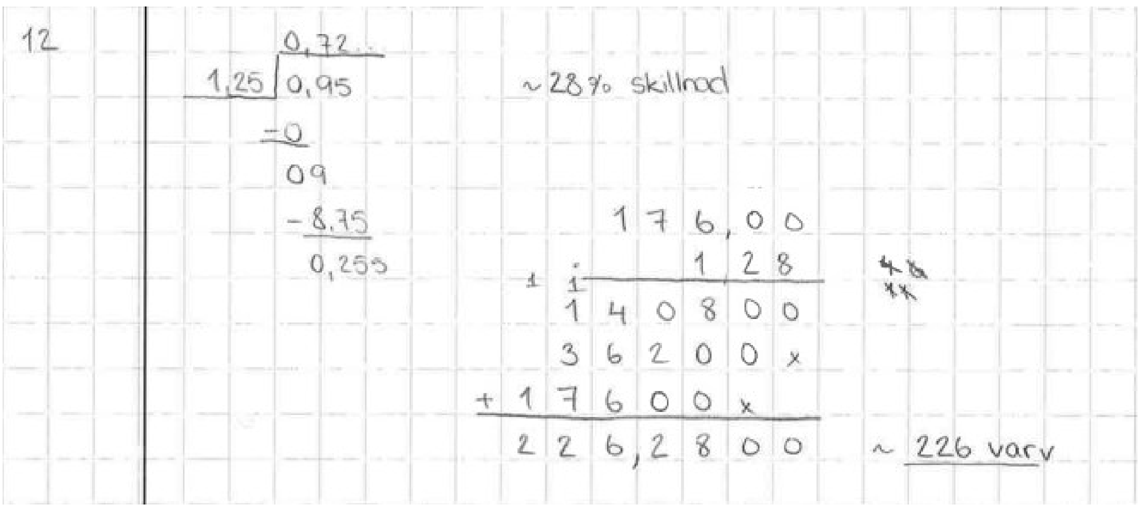
**Figur 23:** *Exempel 1 på feluppfattning i uppgift 12*



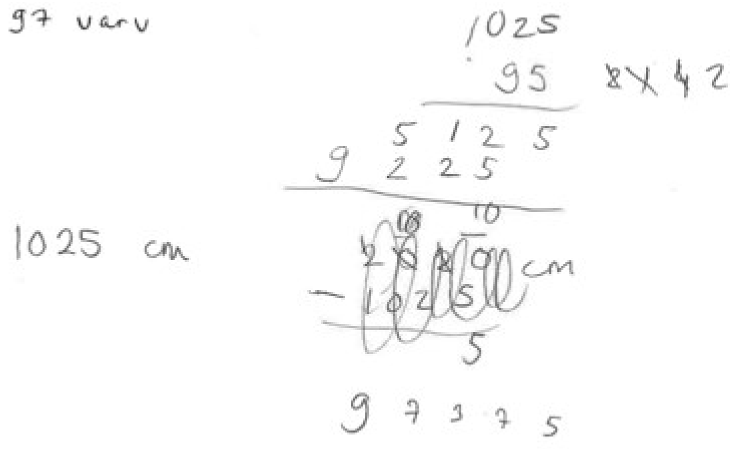
Många har beräknat differensen på däckens omkretsar och använt den på olika sätt. Sex personer multiplicerade differensen med det lilla däckets varvantal och fick då svaret $0{,}95 * 176 = 167{,}2$ vilket är tämligen orimligt då varvantalen knappt skiljer sig medan det mindre däckets omkrets är mindre än 60 % av det större däckets. En person hade lite annorlunda metod som ändå fungerar på samma sätt. Denne multiplicerade först båda omkretsarna skilt med varvantalet 176 och beräknade sedan differensen mellan dessa vilket med lite räknefel inblandade gav svaret 165,7meter. Personen skriver dock inget svar och min tolkning är att hen insett att enheten inte är vad uppgiften frågar efter och vet att svaret inte är det sökta.

En person beräknade i stället kvoten $\frac{176}{0{,}95}$ vilket resulterar i litet fler än 176 varv. Ännu en valde att ange differensen 95 som svar och skrev enheten varv i stället för centimeter. Ytterligare två personer använde differensen på ett intressant sätt. Den första (Figur 24) delar differensen med den mindre omkretsen och visar att differensen är 28 % mindre än den mindre omkretsen. Detta använder personen sedan för att beräkna 128 procent av varvantalet 176 vilket med några räknefel ger svaret 226 varv. Den andra (Figur 25) multiplicerar differensen med den mindre omkretsen. Personen har dessutom felaktigt omvandlat från meter till centimeter, med uppfattningen att en meter är tusen centimeter, vilket även två andra personer gjort, samt flyttat decimaltecknet för ett mera rimligt svar vilket också en annan gjort.

**Figur 24**: *Exempel 2 på feluppfattning i uppgift 12*

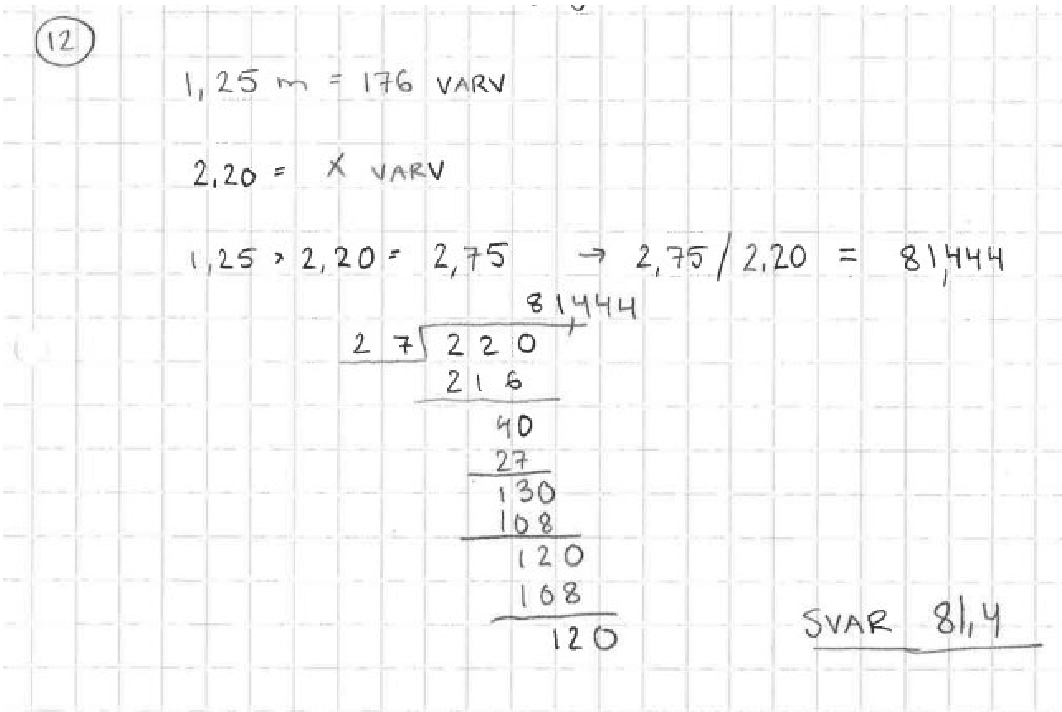


**Figur 25**: *Exempel 3 på feluppfattning i uppgift 12*




I föregående lösning används inte varvantalet för det mindre däcket på något sätt vilket ju är det som påverkar sträckan för cykelfärden och på så sätt hur många varv det stora däcket snurrar. Också andra personer har löst uppgiften utan att använda varvantalet. En multiplicerade omkretsarna och delade sedan den större omkretsen med svaret vilket i praktiken ger det inverterade talet för den mindre omkretsen, se Figur 26. I lösningen finns dessutom slarvfel och andra feluppfattningar, till exempel skriver personen divisionen fel väg vilket också en annan person gjort. Ytterligare några har haft svårt med förhållanden mellan uppgiftens olika tal. Två personer har börjat bra genom att multiplicera $176 * 1{,}25 = 220$ men sedan angett det som svar med varv som enhet. Två andra använde förhållandet $\frac{176}{1{,}25}$ och två personer multiplicerade varvantalet med två, kanske tänkte de att det större däcket är nästan dubbelt större än det mindre och att varvantalet då också är ungefär dubbelt större utan att veta hur de ska utföra en exakt beräkning.

**Figur 26**: *Exempel 4 på feluppfattning i uppgift 12*




Lösningen i Figur 27 innehåller flera olika feluppfattningar. Personen har inlett med ett logiskt och korrekt resonemang som visar att hen vet att omkretsen och varvantalet är omvänt proportionella. Men efter resonemanget kommer uträkningar som visar att personen har feluppfattningar om hur talen i uppgiften förhåller sig till varandra. Personen konstaterar nämligen att det stora däckets omkrets är 30 centimeter för litet för att snurra hälften så många varv som det mindre däcket. 30 centimeter omvandlas till procent eller kanske meter och multipliceras med varvantalet 88 som alltså gäller för omkretsen 250 centimeter. Uppfattningen är alltså att differensen kan användas som en andel. Därefter blandas varvantalet för det lilla däcket in igen då personen subtraherar produkten 26 från 176 och ger svaret 150 varv. De flesta av de senaste lösningarna har inga enheter med i uträkningarna och personerna bakom dem håller således inte reda på vilken enhet deras svar skulle ha, många tillsätter dock i svaret den enhet som uppgiften frågar efter. Andra har med enheterna i uträkningarna men får fel enhet som de sedan byter ut i svaret. Båda dessa tyder på att man inte förstår förhållandet mellan de olika talen och enheterna.

**Figur 27**: *Exempel 5 på feluppfattning i uppgift 12*

12. Patrik sätter ihop en cykel, vars framdäck har omkretsen 2 m 20 cm och bakdäck omkretsen 1 m 25 cm. Hur många varv rullar det större hjulet på en sträcka där det mindre hjulet rullar 176 varv?

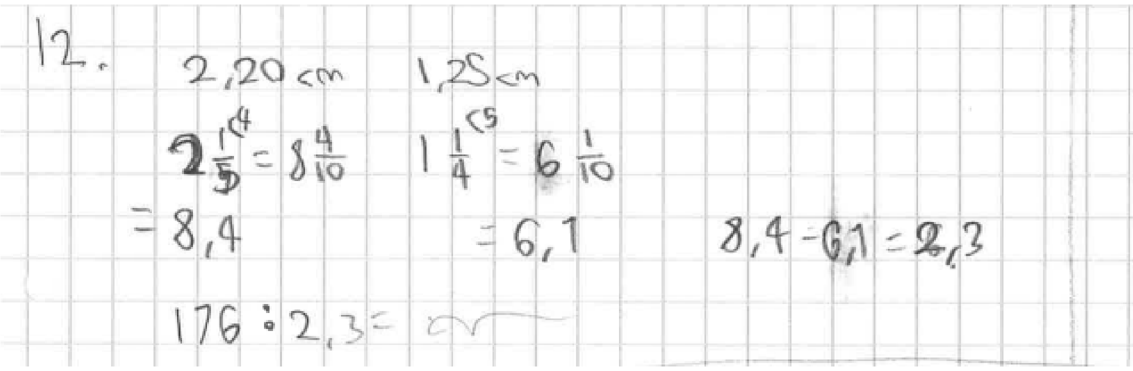
176/2 = 88 då sku stora hjulet borda va 2m 50cm. Det är 30cm mindre så jag tar 88 · 0,3. Svar 26,4. 176 - 26 = 150 0 /2p

Svar! Stora hjulet snurrar 150 varv

Som i andra uppgifter har uppställning med olika räknesätt visat på feluppfattningar också i denna uppgift. Multiplikationsuppställning var svårast i denna uppgift och bjuder på tre typer av feluppfattning. Den första är att man tror att produkterna ska placeras under varandra i additionen, vilket gör att svaret blir för litet eftersom till exempel tiotal skrivs som och adderas med ental. Det andra är att man börjat multiplicera från höger men placerar produkterna från vänster vilket gör att vid multiplikation med exempelvis tresiffrigt heltal blir hundratalen ental och vice versa. Det tredje är att man tror att alla tal i uppställningen behöver ha samma antal decimaler och att även svaret får detta antal decimaler. Divisionstrappan har skapat svårigheter då en person haft decimaltal som nämnare.

Betydande feluppfattningar om bråk hittas i lösningen i Figur 28. Personen omvandlar omkretsarna till bråkform och efter förlängning tillbaka till decimalform. Här är det förlängningen som är den stora feluppfattningen. Det verkar som att personen försökt göra bråken liknämniga och därför förlängt med varandras nämnare, dock skulle nämnaren i detta fall bli 20 och inte 10. Heltalen ska inte förändras då bråket förlängs men personen har multiplicerat det första heltalet och det andra har hen adderat till det tal hen förlänger med. Detta medför att talen förändras totalt och blir betydligt större än de ursprungliga. Täljaren i det andra talet har inte alls beaktats medan täljaren i den första är det enda som blivit korrekt i förlängningen. Efter förlängningen omvandlas talen korrekt till decimaltal och differensen beräknas vilken sedan används för att dela antalet varv med. Kvoten lyckas personen dock inte beräkna.

**Figur 28**: *Exempel 6 på feluppfattning i uppgift 12*



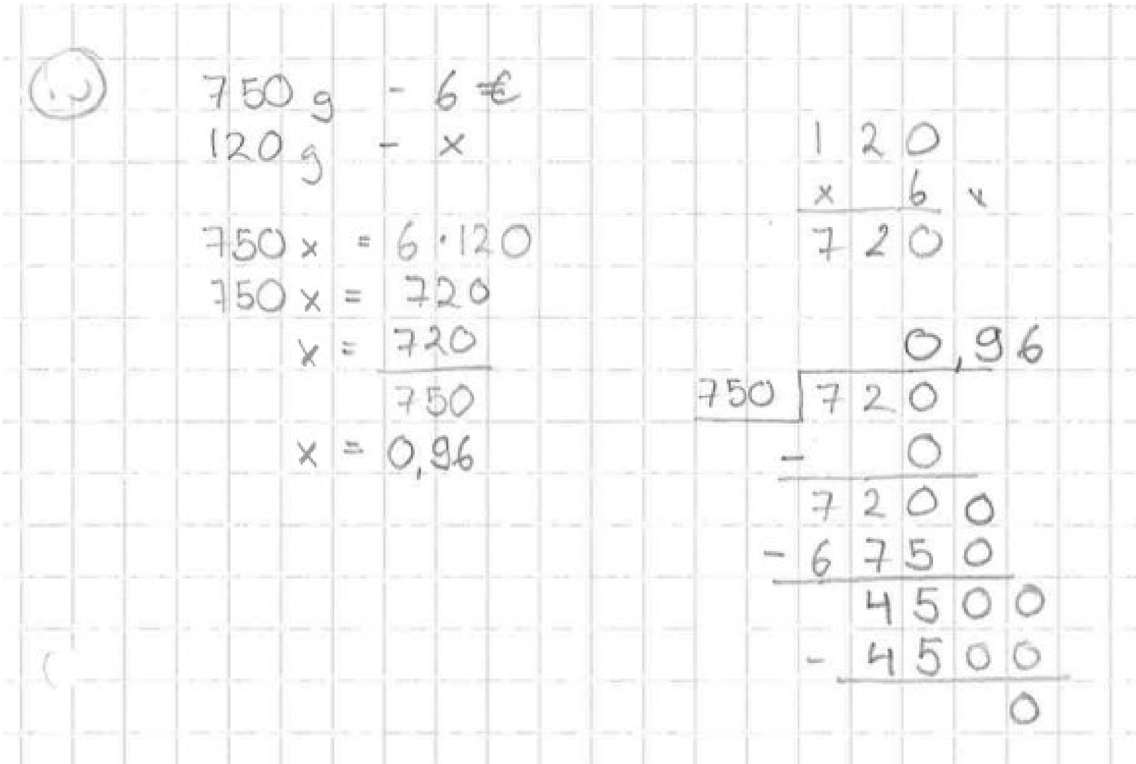

En sista feluppfattning i uppgift 12 handlar om en person som eventuellt uppfattat uppgiften fel och angett svaret 90,1 med enheten meter även om uppgiften tydligt frågar efter antalet varv. Eftersom svaret är fel och inte innehåller några uträkningar kan jag inte med säkerhet säga vad personen avsett, den felaktiga enheten kan också handla om ett slarvfel där lösningsmetoden i övrigt är lämplig men att räknefel förekommer.

## 4.4 Uppgift 13

*Av en viss choklad kostar 750 gram 6 euro. Hur mycket kostar 120 gram av samma chokladsort?*

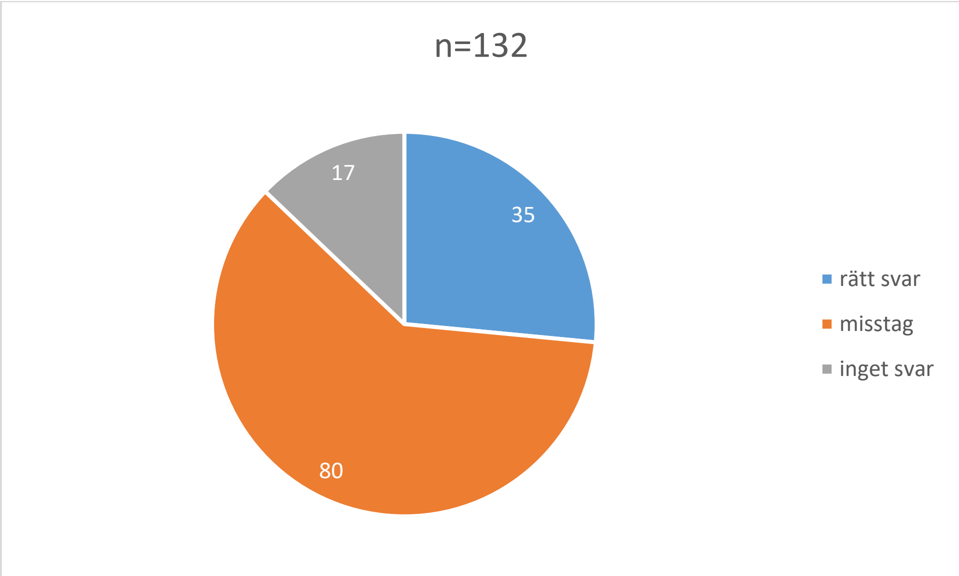
I uppgift 13 ska priset för 120 gram choklad beräknas då man känner till att 750 gram kostar 6 €. Uppgiften kan lösas på många sätt men den mest förekommande var att ställa upp en ekvation genom korsvis multiplikation. Denna metod misslyckades för väldigt många men ett exempel på en sådan lösning som resulterat i korrekt svar kan ses i Figur 29. Det korrekta svaret är alltså 0,96 € eller 96 cent.

**Figur 29**: *Exempel på korrekt lösning till uppgift 13*

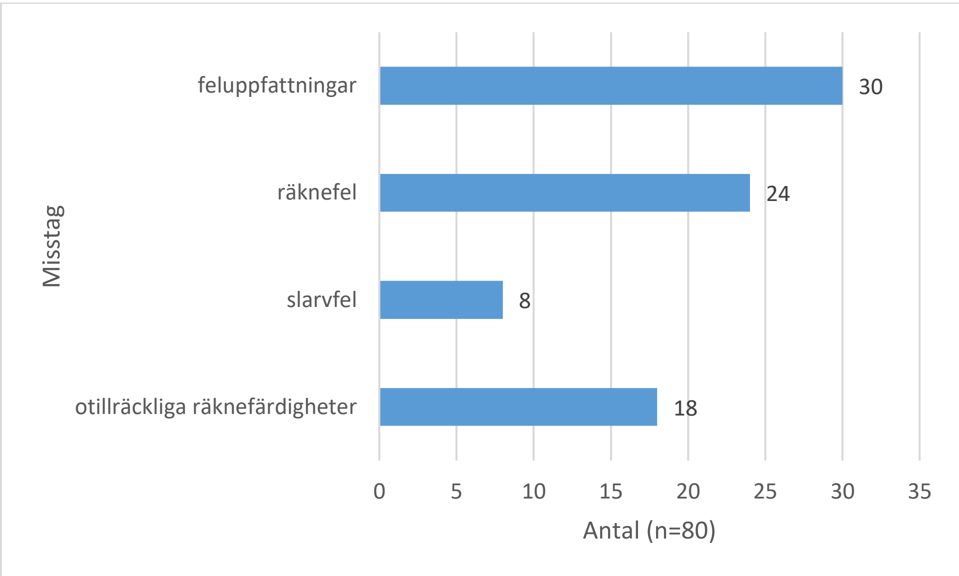



Antal rätt svar i uppgiften är 35 och antal tomma svar är 17, antal misstag uppgår till totalt 80 i enlighet med Figur 30. Antalet otillräckliga räknefärdigheter samt räknefel är det högsta bland problemuppgifterna medan feluppfattningarna är relativt få. Informanterna har i stort uppfattat uppgiften korrekt och känt till en ungefärlig lösning men inte kunnat utföra beräkningarna alternativt gjort räknefel på vägen. Misstagens fördelning syns i Figur 31.

**Figur 30**: *Kategorisering för uppgift 13*




**Figur 31**: *Fördelning av misstag för uppgift 13*




Otillräckliga räknefärdigheter och räknefel är som sagt många till antalet. De flesta bristerna i räknefärdigheter kommer fram som estimeringar då man inte kommit till ett svar med andra lösningar. Tio estimeringar kommer från en metod där man resonerat sig fram till priset genom att i omgångar dela eller multiplicera vikt och pris tills man kommer till vikten 120 gram. Många delar först med tre och sedan med två och kommer fram till att 125 gram kostar 1 €. Nästan lika många delar med två flera gånger tills de kommer till att 187,5 gram kostar 1,50 €. Det är här personerna ger upp och estimerar svaret utifrån det pris de kommit till. En person har ställt upp en ekvation och estimerat att 750/720 är 1,20. En del väljer också att inte ge ett svar utan avbryter lösningen mitt i ekvationen vid exempelvis $\frac{750}{6} = \frac{120}{x}$ eller $750x = 720$. Ett par har också stannat vid ett bråk som de inte kunnat beräkna eller omvandla till decimalform, exempel på detta är $\frac{24}{25}$ som dock är korrekt svar men personen har inte insett detta och skriver att priset är mindre än 1 €.

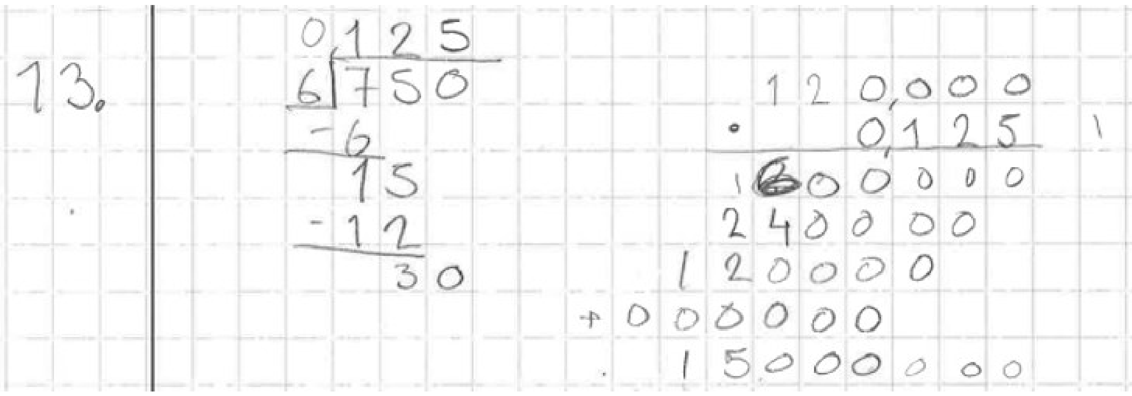
Räknefelen är alla nästan olika och det finns inte egentligen något typiskt fel. Några liknar dock varandra och de handlar om samma uträkning som fått olika svar. Exempel på detta är divisionerna $\frac{720}{750}$; $\frac{6}{750}$: $\frac{750}{6}$ och $\frac{750}{720}$. Svaren 0,90 och 0,95 utan beräkningar har jag också tolkat som räknefel. Även felaktiga halveringar av 750 och 375 förekommer samt några olika felaktigt beräknade produkter. Slarvfelen i uppgiften är ganska få till antalet och sätten som det slarvats på är ännu färre. Fyra personer har blandat på 120 och 125 gram i sina lösningar och tre personer har skrivit av fel svar från uträkningarna till testpappret. Det sista slarvfelet görs av en person som kommit fram till att 100 gram kostar 80 cent och 20 gram 16 cent men får sedan 120 gram till 116 cent vilket jag tror beror på att personen slarvigt adderat 16 cent till 100 (gram) i stället för 80 (cent).

### 4.4.1 Misstag med fokus på feluppfattningar

I denna uppgift handlar feluppfattningarna inte så mycket om misstolkning av uppgiften eller fel uppfattning om användning av olika uppställningar. I stället är division och korsvis multiplikation orsaken till många feluppfattningar. Dessa feluppfattningar innefattar förhållandet mellan 750 och 720. Många har på ett eller annat sätt kommit till divisionen $\frac{750}{720}$. En väg dit är att man har ekvationen $750x = 720$ men när man sedan ska dela med 750 skriver $x = \frac{750}{720}$. En annan väg är att man skrivit $\frac{720}{750}$ men in praktiken beräknat det omvända. Divisionen $\frac{750}{720}$ ger ett svar över 1€ som inte är rimligt med tanke på att man får 125gram för 1 € som borde vara ganska enkelt att resonera sig fram till. Ännu en väg är att man gjort fel i den korsvisa multiplikationen och fått ekvationen $720x = 750$. En annan feluppfattning i korsvis multiplikation ses i en lösning där man adderat termerna i stället för att multiplicera dem.

Andra uträkningar visar också på fel uppfattning om förhållandet mellan talen i uppgiften. Exempel på detta är beräkningarna 750/120; 750/6 och 750–120. En som använt förhållandet 750/6 visas i Figur 32. Denna person använder divisionen som om den skulle ge priset per gram och multiplicerar med 120. Personen har dock fått helt fel kvot då hen placerat ett decimaltecken i svaret. I multiplikationen syns en till feluppfattning där personen tror att faktorerna behöver ha lika många decimaler i uppställning. Detta gör att svaret får många nollor och det kan vara svårt att veta var decimaltecknet ska placeras. Placering av decimaltecknet var för övrigt också ett problem för hela sex personer som i olika uträkningar fått för många eller för få decimaler. En person har flyttat decimaltecknet för att få ett svar som är mera rimligt.

**Figur 32**: *Exempel på feluppfattning i uppgift 13*



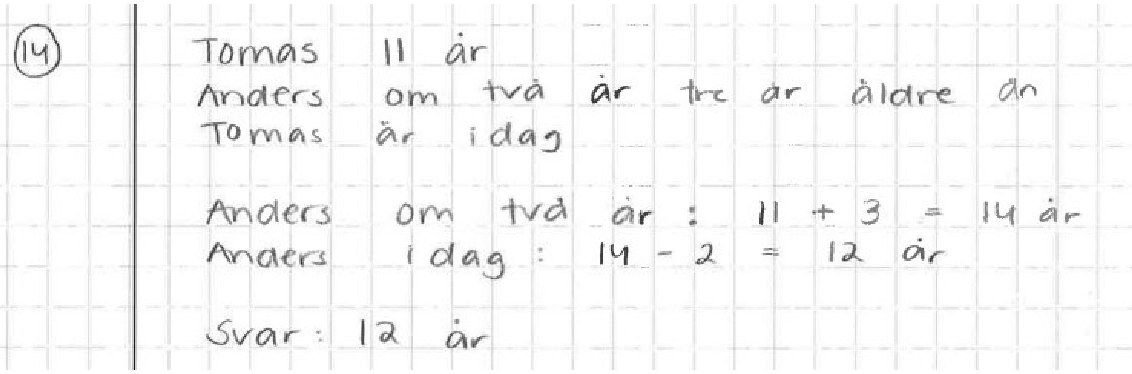

Svaren 1,25 och 1,20 utan uträkningar har jag tolkat som feluppfattningar utan att kunna säga mer om vad som uppfattats fel. En annan feluppfattning tolkar jag från att det skrivits 0,95snt vilket likväl kan handla om ett slarvfel. 0,95 cent är endast 0,0095 € och det som personen avser är 0,95 € eller 95 cent. Sista feluppfattningen finns hos en person som skrivit division fel väg: $\frac{720}{750} = 1\frac{30}{750} = 1{,}25$. Personen verkar ha tänkt något i stil med ”hur många gånger går 720 i 750?” i stället för andra vägen och kommit fram till att det går en gång och lämnar 30 kvar. Hur personen sedan kommer till svaret 1,25 är för mig oklart, eventuellt har hen noterat att 30 går 25 gånger i 750 och tänkt att ”då måste ju 25 komma efter decimaltecknet”. Personen verkar helt klart tolka en division som ”hur många gånger går täljaren i nämnaren?”.

## 4.5 Uppgift 14

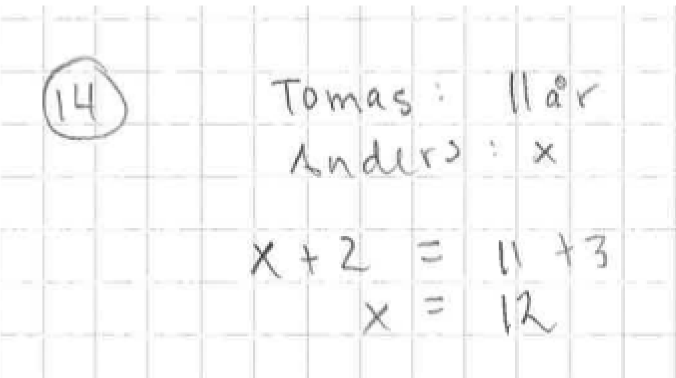
*Tomas är nu 11 år. ”Om två år är jag tre år äldre än du Tomas är idag” sade Anders. Hur gammal är Anders nu?*

Uppgift 14 har lite karaktären av en gåta och man behöver kanske läsa uppgiften flera gånger för att få orden i rätt ordning och förstå uppgiften. Det handlar om att lista ut vilken ålder Anders har nu då han om två år är tre år äldre än Tomas nuvarande ålder. 30 % av de som svarat ger svaret utan lösning. Många resonerar sig fram till svaret utan desto större beräkningar, exempel på detta finns i Figur 33. Svaret på uppgiften är 12 år och det kan även fås genom ekvationslösning vilket endast ett fåtal använt sig av, exempel på korrekt sådan ges i Figur 34. Att de flesta bara ger svaret eller beskriver med text hur de kommit till svaret tyder på att många direkt vetat hur de ska komma fram till svaret och inte upplevt uppgiften som problemuppgift.

**Figur 33**: *Exempel på korrekt svar genom resonemang på uppgift 14*

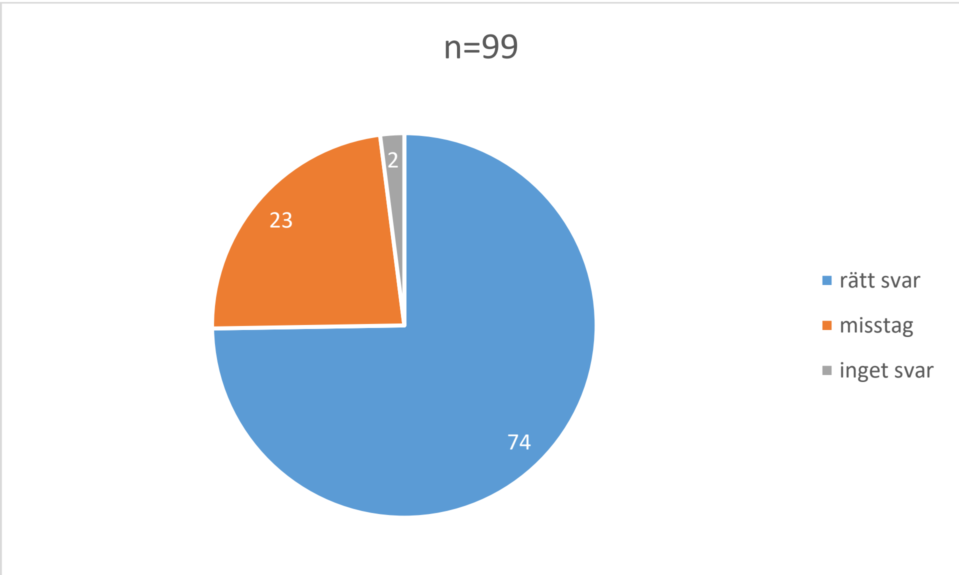



**Figur 34**: *Exempel på korrekt svar genom ekvationslösning på uppgift 14*

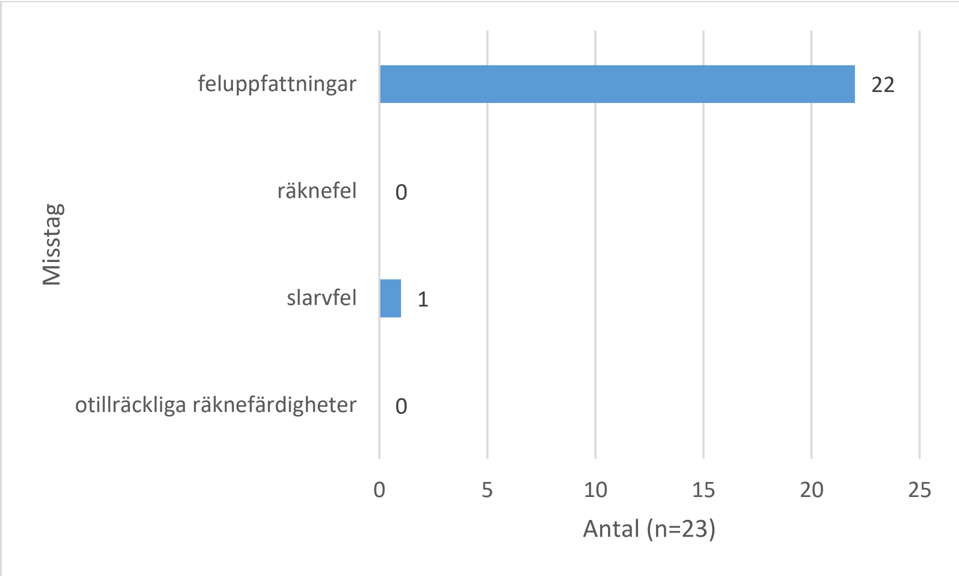


Uppgiften är den problemuppgift som har flest antal rätt svar samt minst antal räknefel, slarvfel, otillräckliga räknefärdigheter och inget svar. Hela 74 personer har svarat rätt och endast två har valt att inte svara alls, vilket är ännu ett tecken på att uppgiften varit ganska enkel och troligen inte fungerat som en problemuppgift för många. Att uppgiften inte gett upphov till räknefel eller otillräckliga räknefärdigheter kan förklaras med att inget mekaniskt räknande behövdes för att lösa uppgiften och de flesta har kunnat resonera sig fram till svaret genom att endast använda talen 10–15. Ett slarvfel hittar jag ändå vilket ger totalt 23 upphittade misstag. Fördelningen av kategorierna syns i Figur 35 och misstagen syns i Figur 36.

**Figur 35**: *Kategorisering för uppgift 14*



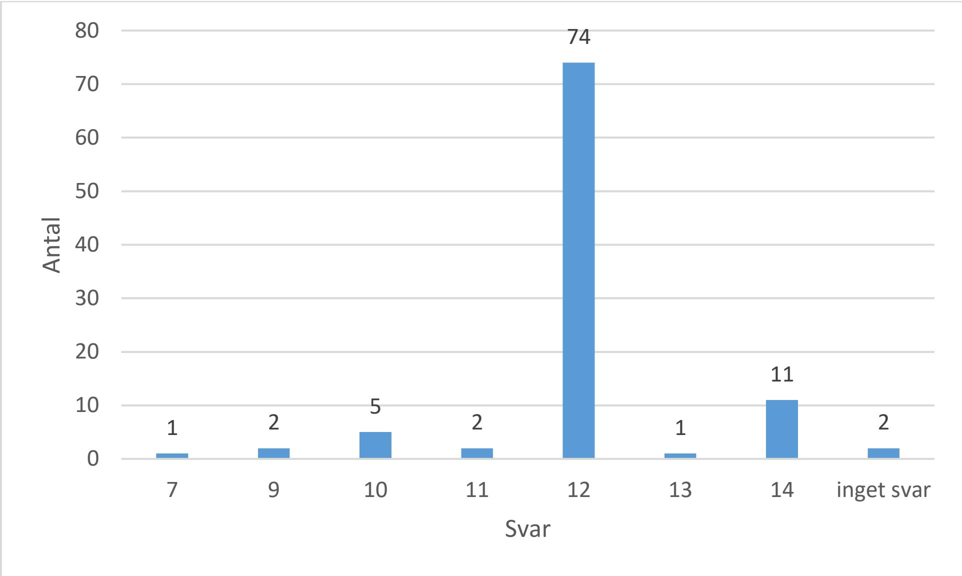
Figur 36: *Fördelning av misstag för uppgift 14*




### 4.5.1 Misstag med fokus på feluppfattningar

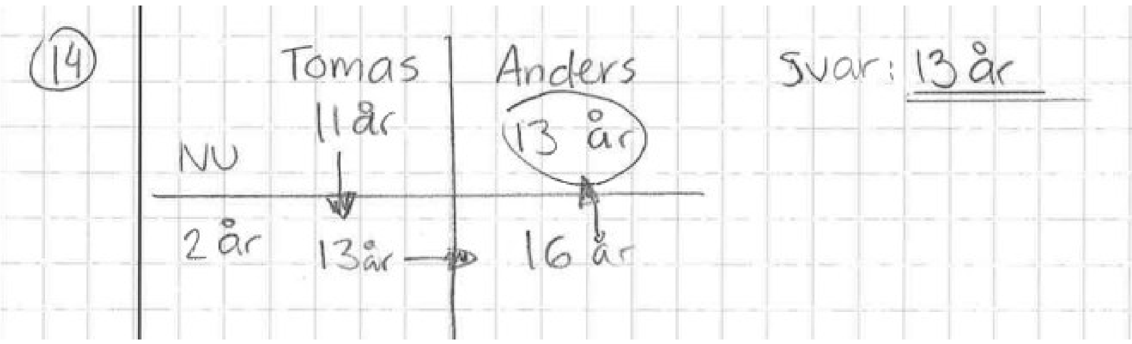
Feluppfattningarna i uppgiften handlar mestadels om att man uppfattat uppgiftstexten fel. Dessa kunde tolkas som slarvfel om man tänker sig att uppgiften lästs för snabbt och man exempelvis blandat på två och tre år. Men oavsett om det beror på slarvig läsning eller misstolkning har uppgiften uppfattats fel och jag har tolkat alla dessa som feluppfattningar. Eftersom det endast förekommer ett litet antal olika svar och likadana svar står för samma feluppfattning har jag valt att sammanställa svarsfördelningarna i Figur 37 och beskriva de olika felaktiga svaren var för sig.

**Figur 37**:*Fördelning av svar för uppgift 14*

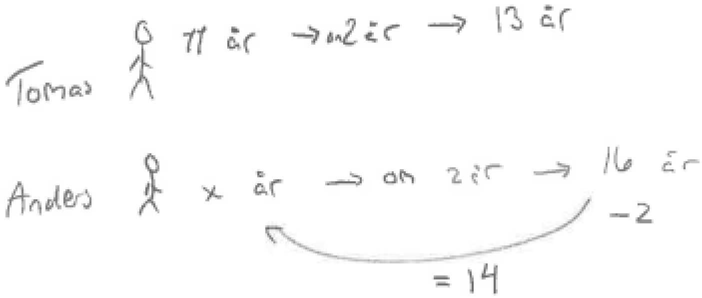



Svaret 13 är resultatet av ett slarvfel där en person subtraherat 3 år i stället för 2 år då hen gått från framtiden tills idag. Samma informant står också för en av de 22 feluppfattningarna. Det handlar om fel uppfattning av uppgiften där personen trott något i stil med: ”Om två år är Anders tre år äldre än Tomas.” vilket förstås innebär att Anders också idag skulle vara tre år äldre än Tomas. Med denna uppgiftstolkning och utan slarvfel skulle svaret ha blivit 14 år, vilket är det svar som står för de flesta feluppfattningarna. Man har helt enkelt missat att åldersskillnaden gäller mellan Anders ålder i framtiden och Tomas ålder i nuet. Figurerna 38–40 ger exempel på denna feluppfattning.

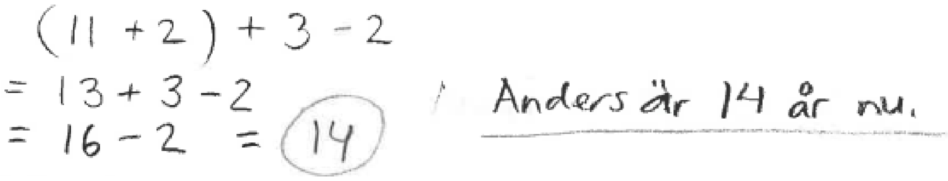
**Figur 38**: *Exempel på svaret 13 år i uppgift 14*



**Figur 39**: *Exempel 1 på svaret 14 år i uppgift 14*

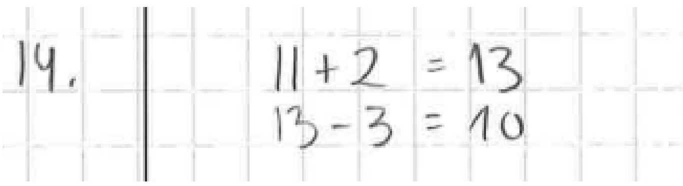



**Figur 40**: *Exempel 2 på svaret 14 år i uppgift 14*



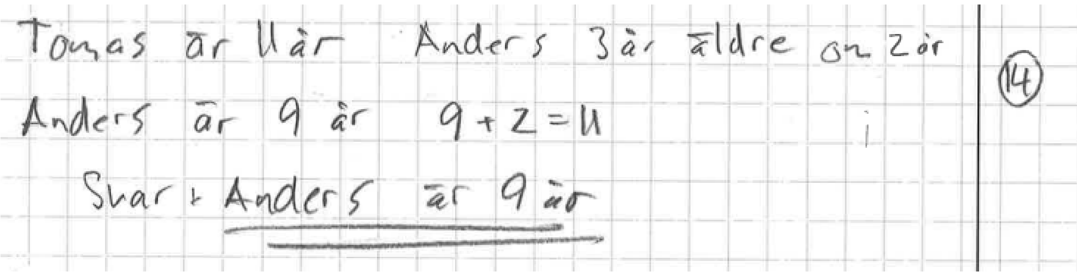

De som svarat 10 har troligen tolkat uppgiften som ”Om tre år är Anders två år äldre än Tomas är idag.”. Det vill säga de har blandat på antal år, se Figur 41 för exempel. Detta är sannolikt slarvfel men eftersom jag inte kan veta om det är slarvigt läst eller misstolkning av uppgiften tolkar jag det som feluppfattning. Möjligheten finns också att de blandat på personerna och till exempel tänkt att det är Tomas som säger åt Anders: “om två år är jag tre år äldre än du är idag”. Eftersom Tomas är 11 år nu är han 13 år om två år. Ifall det är tre år mera än Anders är idag innebär det att Anders skulle vara 10 år.

**Figur 41**: *Exempel på svaret 10 år i uppgift 14*

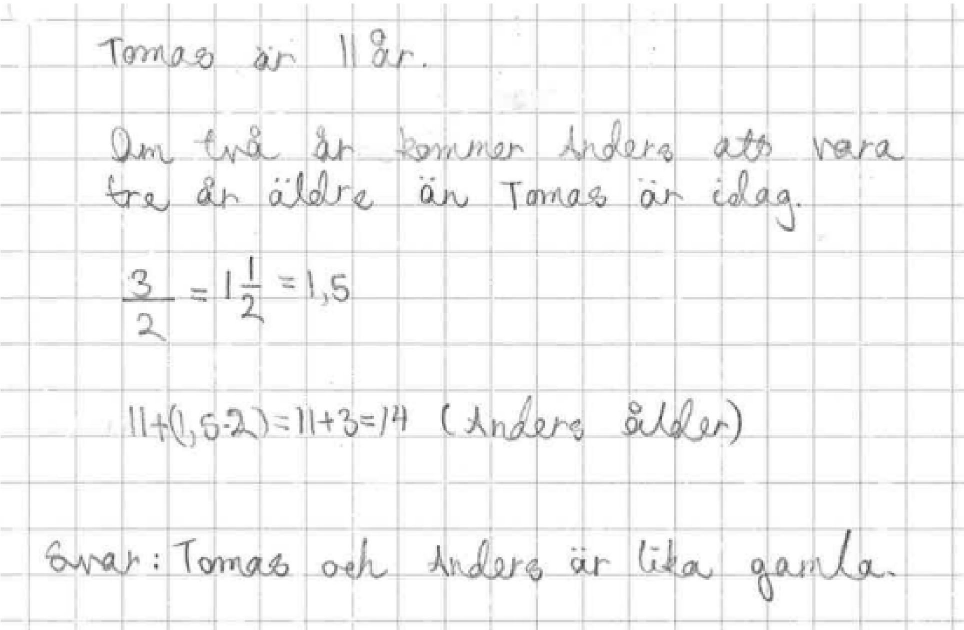



Svaren 9 och 11 förekommer två gånger var men endast ett av varje innefattar uträkningar, därför är de svårtolkade. De uträkningar som finns syns i Figur 42 respektive 43. Jag har inte hittat en helt logisk förklaring till svaret 9 men det kunde handla om att informanterna har tänkt två år tillbaka i tiden och sedan glömt bort åldersskillnaden på 3 år. Jag finner inte sannolikheten stor att så är fallet eftersom två informanter har svarat 9. Men jag hittar heller ingen annan förklaring så det lämnar åt läsaren att tolka.

**Figur 42**: *Exempel på svaret 9 år i uppgift 14*


Tomas är 11 år Anders 3 år äldre om 2 år
Anders är 9 år $9 + 2 = 11$
Svar: Anders är 9 år
14

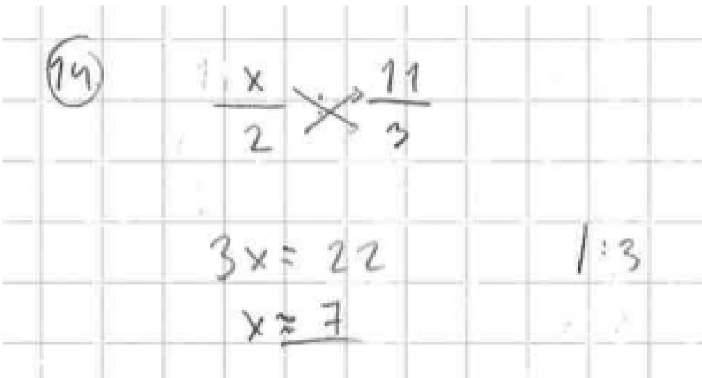
**Figur 43**: *Exempel på svaret 11 år i uppgift 14*


Tomas är 11 år.
Om två år kommer Anders att vara tre år äldre än Tomas är idag.
$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} = 1,5$
$11+(1,5\cdot 2)=11+3=14$ (Anders ålder)
Svar: Tomas och Anders är lika gamla.

Lösningen som finns till förfogande för svaret 11 är heller inte särskilt tydlig. Informanten verkar ha delat upp tre års åldersskillnaden på de två åren in i framtiden och får 1,5. Detta multipliceras igen med 2 och adderas till Tomas ålder vilket ger svaret 14. Därefter konstaterar informanten att Tomas och Anders är lika gamla. Eftersom svaret bara säger att de båda är lika gamla kan jag inte med säkerhet veta att informanten menat 11 år och inte till exempel 14 år som ju uträkningen stannar vid. Men eftersom hen konstaterat att Tomas är 11 år antar jag att svaret syftar på att båda är 11 år. Svaret kan bero på ett slarvfel där personen (genom huvudräkning) går tillbaka 3 år i stället för 2. Att den andra informanten kommit till svaret 11 genom samma lösning finner jag osannolikt men kan heller inte veta eftersom lösningar saknas.

Den person som svarat sju har inte förstått uppgiften och reflekterar inte alls över talen eller deras betydelse i uppgiften. Personen ställer upp en ekvation och utför korsvis multiplikation med de tal som finns till förfogande, se Figur 44. Uträkningar som denna tyder på att procedurkunskap varit centralt i undervisningen och att personen inte förstått bakgrunden till procedurerna. Det kan göra att man använder tal man har till förfogande i en procedur man kommer ihåg utan att förstå varför man använder proceduren eller hur man placerar talen. Ofta när sådana personer får fram ett svar litar de helt på svaret utan att kontrollera eller reflektera över om det kan stämma.

**Figur 44**: *Exempel på svaret 7 år i uppgift 14*

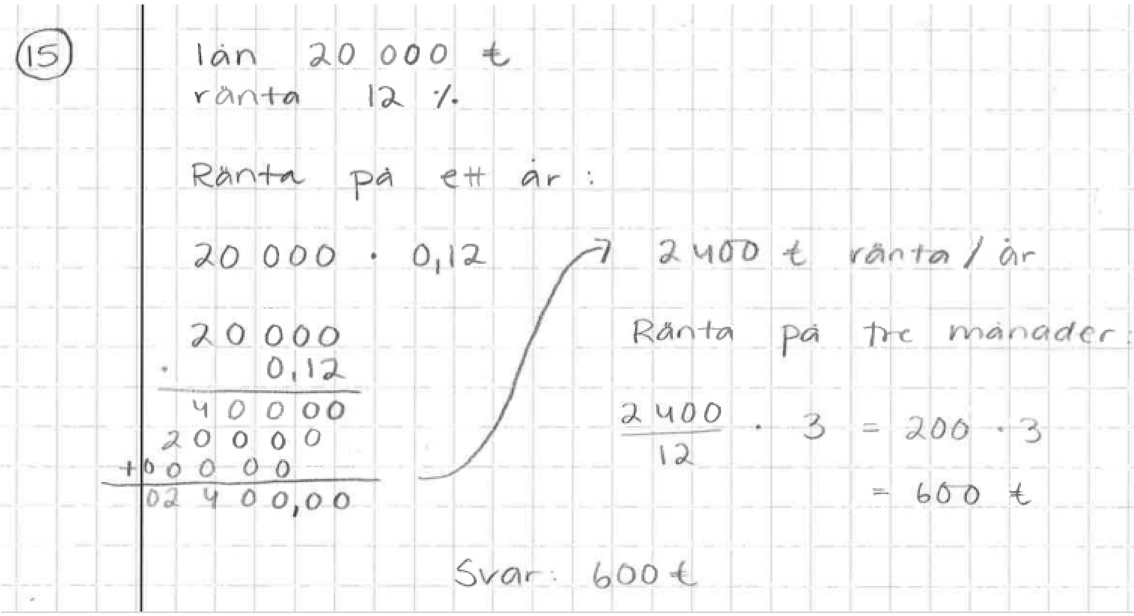



## 4.6 Uppgift 15

*Olsons har tagit ett lån på 20 000 euro. Hur mycket betalar de i ränta under tre månader då räntesatsen är 12 %?*

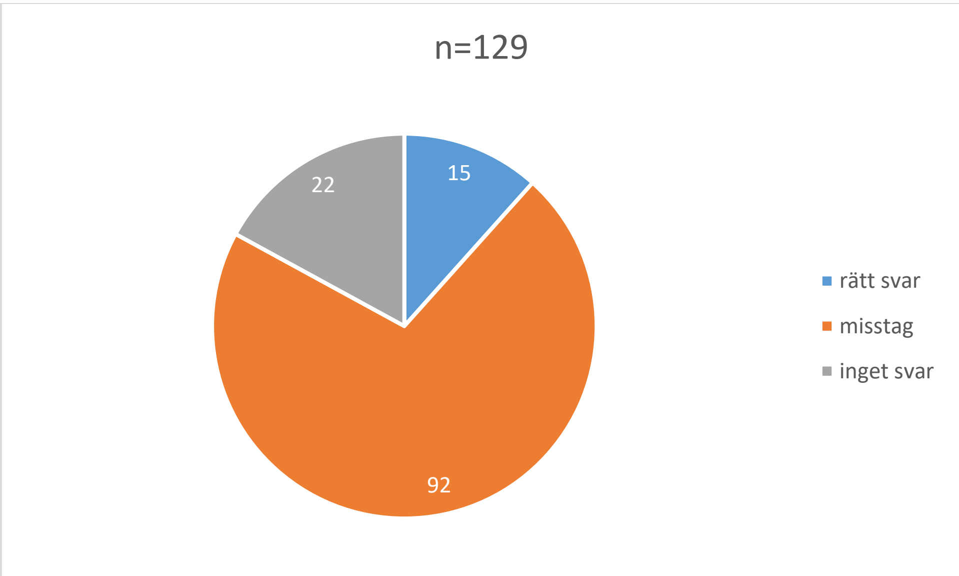
I uppgift 15 ska räntan för tre månader beräknas utifrån informationen om att lånet är 20 000 € och räntesatsen är 12 %. Det korrekta svaret är 600 € vilket kan fås genom många olika lösningsmetoder, en av dem syns i Figur 45. Det centrala för att komma till korrekt svar har varit att känna till att räntesats innebär räntan för ett år.

**Figur 45**: *Exempel på korrekt lösning till uppgift 15*

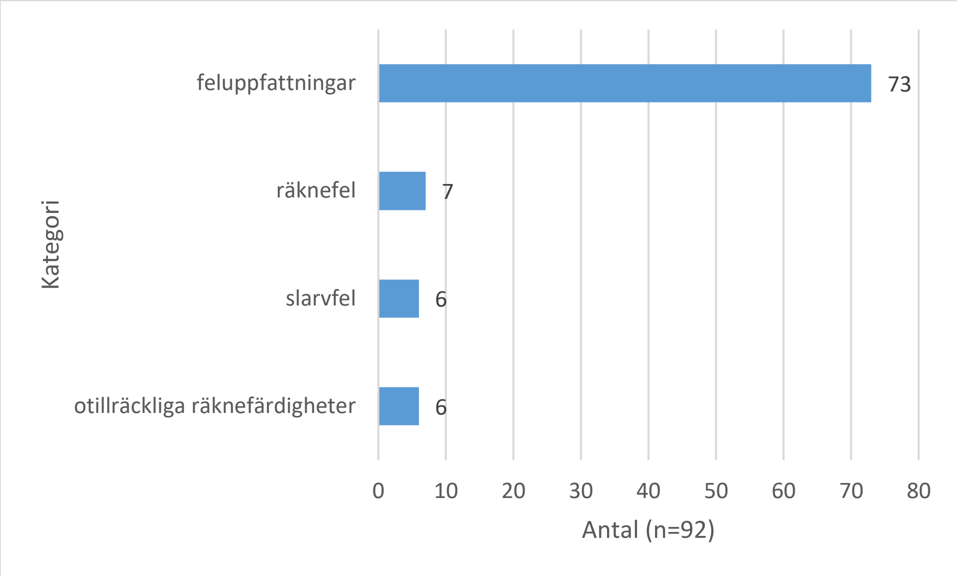



Uppgiften har varit svårast i den bemärkelsen att den har minst antal korrekta svar bland problemuppgifterna. Därtill har uppgiften flest feluppfattningar. Fördelningen av kategorier ses i Figur 46 och antalen misstag i Figur 47 nedan.

**Figur 46**: *Kategorisering för uppgift 15*



**Figur 47**: *Fördelning av misstag för uppgift 15*




Uppgiften resulterade i ett antal otillräckliga räknefärdigheter, slarvfel samt räknefel men i jämförelse med övriga problemuppgifter är antalet relativt lågt. Otillräckliga färdigheter innefattar uträkningar som informanten skrivit ut men inte kunnat utföra. I denna uppgift är alla dessa multiplikationer med 20 000 och andra faktorn 0,12; $\frac{3}{0{,}12}$; 0,88 eller 0,4. Räkne- och slarvfelen liknar varandra och kan i praktiken till och med vara helt likadana som jag tolkat olika beroende på kontexten. Exempel på dessa är där man fått det korrekta svaret 600 men skrivit 60 på testpappret eller att man utfört fler uträkningar inkluderat ett korrekt men sedan angett ett av de felaktiga svaren. Huvudräkning har ibland orsakat felaktigheter, exempel på detta är $\frac{20\,000}{100} * 12 = 1\,320$ och 12 % av 20 000 = 2 200. En hel del har fått decimaltecknet på fel plats i uträkningarna, ofta vid uppställning, vilket har gett svar som 24 000 eller 240 i stället för 2 400 och 165 i stället 16,5. En person har delat årsräntan med tre i stället för 4 för att få tremånadersränta och en person har multiplicerat 6*12=74 i uppställning med division vilket ger fel kvot.

## 4.6.1 Misstag med fokus på feluppfattningar

Den allra största andelen av feluppfattningarna i uppgiften har språklig bakgrund och handlar om att informanterna inte känt till definitionen av räntesats. Hela 35 personer har trott att räntesatsen anger räntan för en månad vilket är ganska orimligt eftersom räntan för tre månader då skulle vara $0{,}12 * 20\,000€ * 3 = 7\,200€$. En som kommit fram till svaret 7 200 skriver ”men det är ju orimligt!”, personen försöker ändå inte hitta någon annan lösning till problemet. Ännu en person som inte känt till räntesats ger två olika svar enligt olika definitioner i Figur 48. Personen har inte beaktat den korrekta definitionen där räntesatsen 12 % gäller för ett år. Att talen dessutom är felaktiga beror på felplacering av decimaltecknet vid uppställning av multiplikation.

**Figur 48**: *Exempel 1 på feluppfattning i uppgift 15*

15. Olsons har tagit ett lån på 20 000 euro. Hur mycket betalar de i ränta under tre månader då räntesatsen är 12 %?

240 € ifall 12% gäller tre månader
720 € ifall 12% gäller månatligen

/ 2p

Några som har tolkat räntesats som månadsränta har dessutom räknat med ränta på ränta-effekten där de alltså multiplicerar lånet tre gånger med räntesatsen. En annan felaktig tolkning av räntesats är att den avser räntan för de tre månader som uppgiften frågar efter. Med denna tolkning har man helt enkelt beräknat 12 % av 20 000 € (0.12*20 000) och angett svaret 2 400 €. En av dessa (se Figur 49) tycker inte att svaret är rimligt men vet inte hur hen ska gå vidare.

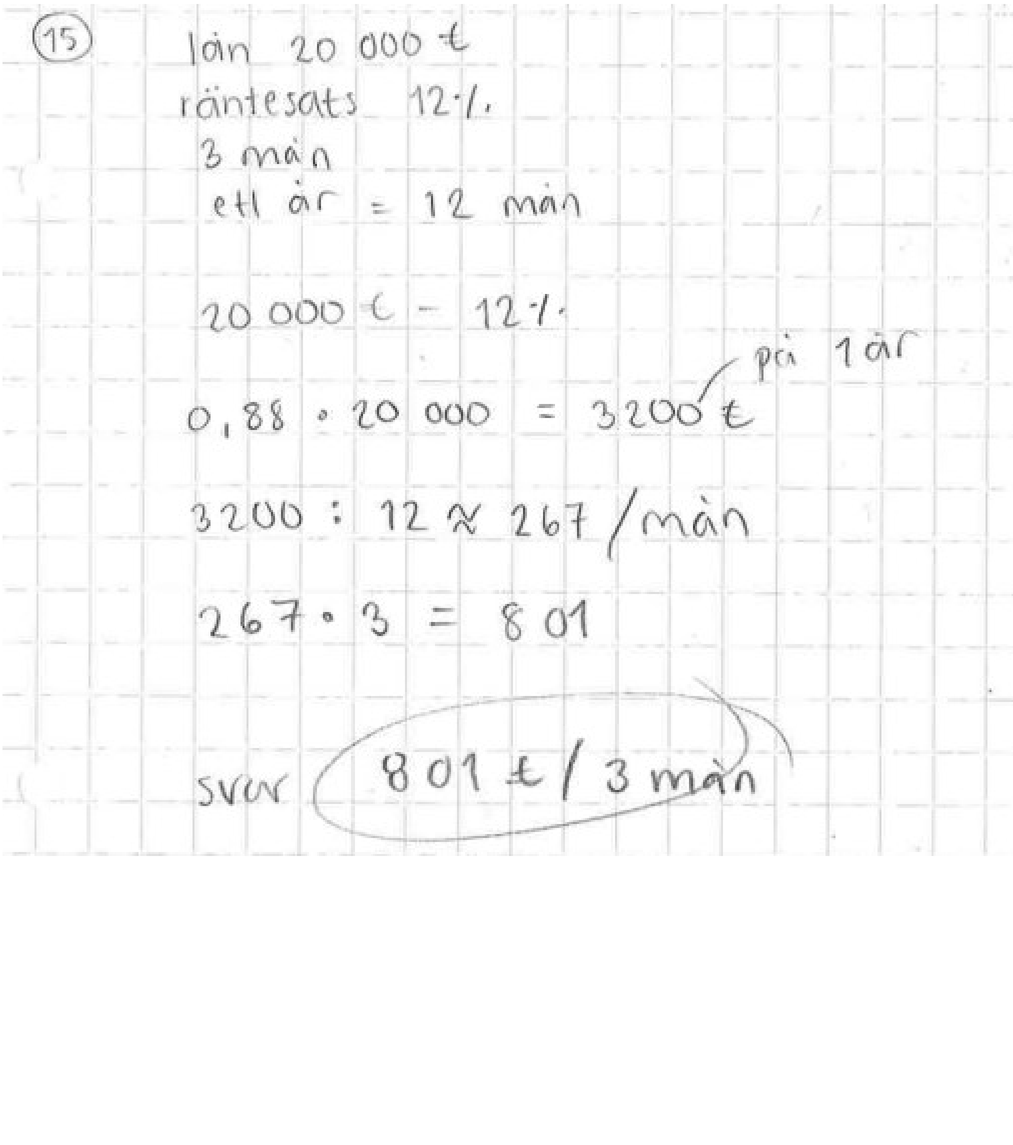
**Figur 49**: *Exempel 2 på feluppfattning i uppgift 15*

15

20 000 · 0,12 = 2400
12 % av 20000 är 2400.
Det känns som en ganska dålig deal att betala 2400 ränta i månden.. Så jag är inte säker på vad jag ska göra sen. Jag har aldrig tagit banklån

De övriga räknesätten förekommer alla ett antal gånger som feluppfattning. Man har alltså dividerat lånesumman med räntan, adderat räntan till lånesumman samt subtraherat räntan från lånesumman. Vid division med räntan har man utfört beräkningen $\frac{20\,000}{12} \approx 1\,666.7$. De som adderat räntan till lånesumman multiplicerade $1{,}12 * 20\,000 = 22\,400$ och de som subtraherade räntan multiplicerade $0{,}88 * 20\,000 = 17\,600$. Kombinationer med dessa feluppfattning förekommer, till exempel så att man subtraherat räntan och sedan multiplicerat den med tre som att räntan skulle gälla för en månad. Exempel på detta finns i Figur 50. I exemplet framkommer även ett ordentligt räknefel i multiplikationen $0{,}88 * 20\,000$, det kan handla om ett slarvfel eftersom 80 % av 20 000 är 16 000 och 8 % är 1 600 vilka slarvigt kan adderas till 3 200. En annan feluppfattning som eventuellt kunde tolkas som slarvfel är en person som delat räntan med tre för att få räntan för en månad. Det kan förklaras genom att person tror att räntesatsen avser tre månader men vill dela det med tre för att få en enklare multiplikation. Som framgår i figuren multipliceras svaret sedan med tre för att få räntan för tre månader.

**Figur 50**: *Exempel 3 på feluppfattning i uppgift 15*


15
lån 20 000 €
räntesats 12%
3 mån
ett år = 12 mån
20 000 € - 12%
0,88 · 20 000 = 3200 € på 1 år
3200 : 12 ≈ 267 /mån
267 · 3 = 801
svar 801 € / 3 mån

Resten av feluppfattningarna i uppgiften är av mer allmän karaktär. Två multiplikationer från samma lösning tolkade jag som feluppfattningar. Det är multiplikationerna $165 * 12 = 86{,}1$ och $86{,}1 * 3 = 321{,}1$ som är så pass felaktiga att jag inte kan se vad som gått fel och tror att personen har fel uppfattning om hur multiplikation beräknas. Några svar som saknar uträkningar och inte påminner om andra svar har jag också tolkat som feluppfattningar utan att kunna säga desto mer om dem. Svaren är 380, 999 och 3600, det sistnämnda har två personer gett som svar. I övrigt är det två som flyttat decimaltecknet för att få mera rimligt svar och två som uppfattat eller åtminstone skrivit procent fel, ett exempel på detta kan ses i Figur 51 nedan. Personerna skriver procenten i decimalform men har kvar procenttecknet som ju betyder hundradel. 0,04 % innebär alltså i praktiken 0,0004. Denna feluppfattning påverkar oftast inte uträkningarna och det kan hända att personerna tillägger procenttecknet av ren reflex utan att tänka på dess innebörd.

**Figur 51**: *Exempel 4 på feluppfattning i uppgift 15*

15. Olsons har tagit ett lån på 20 000 euro. Hur mycket betalar de i ränta under tre månader då räntesatsen är 12 %?

$\frac{12\%}{3} = 4\% \rightarrow 0{,}04\%$ per månad

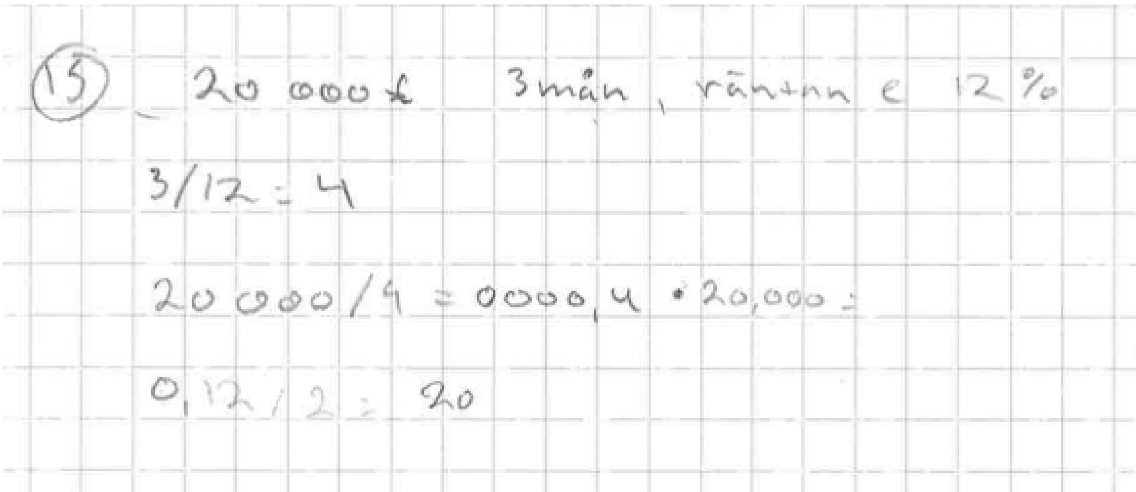
$0{,}04\% \cdot 20\,000€ = 800€ \quad | \cdot 3 = 2400€$

/ 2p

Svar: 2400€

En person som eventuellt kan ha samma feluppfattning som föregående är en som skrivit om division till multiplikation enligt Figur 52. Personen avser troligen 4 % av 20 000 då hen skriver 20 000/4. Det innebär att personen i stället haft svårt att skriva procent i decimalform och dessutom har fel uppfattning om hur man skriver ett decimaltal. Också divisionerna har personen skrivit fel, med 3/12 avser hen 12/3 och med 0,12/2 avser hen troligen 2/0,12 även om uträkningen där inte riktigt är korrekt.

**Figur 52**: *Exempel 5 på feluppfattning i uppgift 15*




# 4.7 Sammanfattning

## 4.7.1 Allmänna prestationer

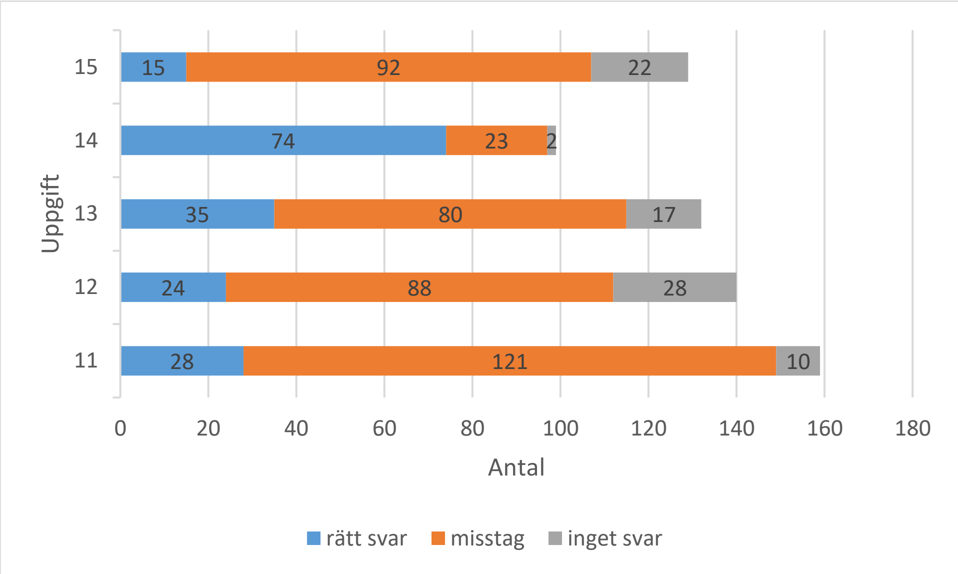
Som helhet är klasslärarstuderandes prestationer svaga och endast 40 % klarade nivån för godkänt som var 20 av 30 möjliga poäng. Ingen presterade riktigt dåligt i hela testet och den lägsta resultatet var 7 poäng, vilket fyra personer hade. Ingen lyckades heller få alla 30 poäng och endast en fick 29 poäng. Medeltalet var 17,6 poäng och de vanligaste resultaten var 17 och 20 poäng med tio personer var.

Rutinuppgifterna hade maxpoängen 20 och problemuppgifterna 10. Medeltalen var 12,9 respektive 4,7 poäng. Medeltalen ger lösningsfrekvenserna 64 % och 47 % vilket visar att rutinuppgifterna klarades betydligt bättre. Poängen i problemuppgifterna hade lite större spridning än rutinuppgifterna med hela tre personer som fått maxpoängen och många fick också väldigt låga poäng. Endast en person lyckades få maxpoängen i rutinuppgifterna men de lägsta poängerna har också undvikits helt. Fyra uppgifter uppnådde en lösningsfrekvens över 80 %, alla dessa var rutinuppgifter. Fyra uppgifter hade lösningsfrekvensen under 40 %, tre av dessa var problemuppgifter. En av problemuppgifterna hade ändock lösningsfrekvensen 80 % medan frekvensen för övriga problemuppgifter låg under 51 %, vilket var medianfrekvensen. Resultaten visar att rutinuppgifterna varit enklare än problemuppgifterna.

### 4.7.2 Misstag i problemuppgifter

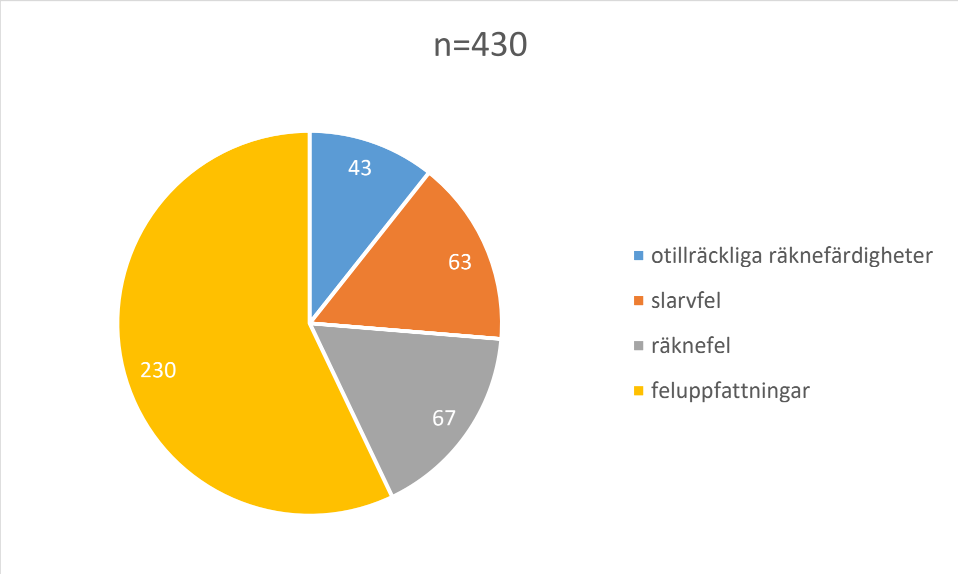
Uppgiftslösningarna kategoriserades initialt enligt rätt svar, misstag och inget svar. Fördelningen av dessa kategorier för varje problemuppgift ses i Figur 53. I figuren syns att uppgift 14 varit enkel med många korrekta svar och få misstag. Antalet misstag i uppgifterna 12, 13 och 15 är på ungefär samma nivå medan uppgift 11 har betydligt flera misstag än övriga uppgifter.

**Figur 53**: *Kategorisering av problemuppgifterna*

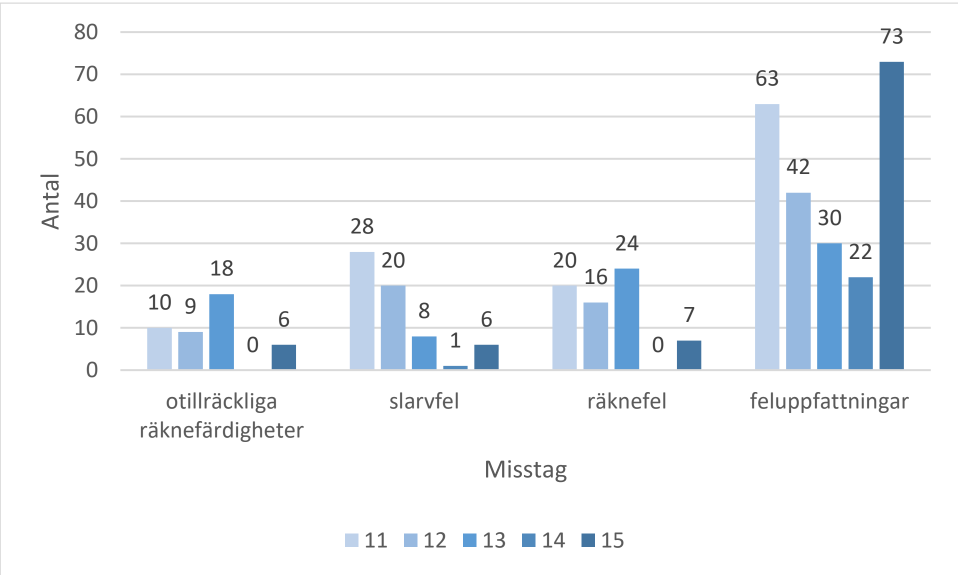



Bland 490 uppgiftslösningar hittades totalt 430 misstag varav den största delen var feluppfattningar. Slarvfelen och räknefelen var ungefär lika många och otillräckliga räknefärdigheter var lägst till antalet, den totala fördelningen syns i Figur 54. I Figur 55 jämförs misstagen enligt uppgift. I figurerna har kategorin avrundningsfel (11 till antalet) inkluderats i slarvfel för uppgift 11.

**Figur 54**: *Fördelning av misstag för alla problemuppgifter*




**Figur 55**: *Fördelning av misstag för problemuppgifterna, jämförelse*




Otillräckliga räknefärdigheter handlar om att man inte kunnat slutföra den beräkning man skrivit upp och behövt för sin lösning. Detta syns mestadels i divisioner men även i multiplikationer och övriga räknesätt, speciellt där decimaltal eller stora tal finns med. En del otillräckliga räknefärdigheter syns som estimering efter att personen försökt få fram svaret på olika sätt utan att lyckas.

Slarvfelen och räknefelen liknar varandra både till naturen och antalet. Slarvfelen kommer mest fram som att man skriver av fel eller blandar på siffror eller tal i beräkningar. Fel i avrundning som förekom ganska ofta men endast i uppgift 11 innebar ofta att man inte tänkt på att avrunda och avslutat ett oavslutat decimaltal där man själv tyckt det passar. Räknefelen är små misstag i beräkningar som jag varken tolkar som feluppfattning eller slarvfel. Variationen i räknefelen är stor men i flera uppgifter finns ändå återkommande räknefel. Ibland handlar de om att man har fel i multiplikationstabellerna som även ger fel i divisioner. Svar som är nära det korrekta svaret men saknar uträkningar tolkade jag flera gånger som räknefel. Både slarvfel och räknefel förekommer ofta i uppställningar med olika räknesätt.

De flesta feluppfattningar återkommer i många uppgifter men jag hittar även ett par som är kopplade till endast en uppgift. I uppgift 14 är nästan alla feluppfattningar specifika för uppgiften eftersom de handlar om feltolkningar av texten till just denna uppgift. Endast en av feluppfattningarna i uppgift 14 kan hittas i andra uppgifter, denna feluppfattning handlar om att man utan större eftertanke använder talen från uppgiften för att bilda en ekvation. Också en stor del av feluppfattningarna i uppgift 15 är specifika för den uppgiften. Dessa beror alla på att man inte känt till definitionen på räntesats eller vetat hur man beräknar räntan.

Olika feluppfattningar om hur talen (och enheterna) förhåller sig till varandra är omfattande. Många verkar utföra beräkningar utan större eftertanke på talens innebörd. Detta syns speciellt i lösningar där ekvation och korsvis multiplikation används med helt fel förhållanden. Den ofta förekommande feluppfattningen där man placerar det större av två tal i täljaren visar också på att man inte har koll på hur talen förhåller sig till varandra. Enheter lämnas ofta bort vid uträkningar eller beaktas inte i svaret. Detta medför att man ger svaret en enhet som inte stämmer överens med uträkningarna. Som resultat av feluppfattningar i förhållanden kommer att svar ändras för att vara rimliga, detta speciellt genom flytt av decimaltecknet.

Uppställningar med alla fyra räknesätt står också för många feluppfattningar som tyder på att man använder procedurer som man inte riktigt förstått och därför kommit ihåg fel och inte inser att det blir fel. Feluppfattning i omvandlingar av olika slag är inte omfattande men förekommer ändå i några uppgifter. De innefattar omvandling mellan bråk- och decimalform, meter och centimeter, euro och cent samt procent och decimalform. Ungefär lika ofta förekommer att man skriver division fel väg, det vill säga att man inte reflekterar över eller känner till täljarens och nämnarens innebörd och skriver divisionen omvänd i förhållande till det man tänker och beräknar. Till slut finns det i flera uppgifter olika svar utan lösningar samt misstag i uträkningar som jag inte kunnat förklara och därför tolkat som feluppfattning.

# 5 Diskussion

*I detta kapitel diskuteras avhandlingen. Inledningsvis förs diskussion kring metodik och därefter går diskussionen vidare till resultatet i förhållande till de teorier och studier som presenterats i kapitel 2. Till sist förs en avslutande diskussion och förslag till vidare forskning läggs fram.*

## 5.1 Metoddiskussion

Min metod blev något slags mellanting i fråga om kvantitativt och kvalitativt. För att besvara den första forskningsfrågan skulle ett betydligt större sampel ha varit bättre för att kunna dra slutsatser och generalisera samt uppfylla kvantitetsaspekten. Den andra forskningsfrågan krävde inte lika många informanter och skulle ha varit enklare att besvara med ett mindre sampel så att det hade funnits tid och möjlighet att analysera lösningarna djupare. Alternativet till den andra forskningsfrågan skulle vara ett smalare perspektiv med fokus på ett tema eller en till två uppgifter. På det sättet skulle kapaciteteten räckt väl till det sampel jag nu hade. Om än antalet informanter var opassande på olika sätt tycker jag mig ha besvarat forskningsfrågorna med en fungerande metod.

Själva analysen skulle ha blivit bättre med någon form av analysprogram, exempelvis NVivo. För det första skulle analysarbetet blivit mindre tidskrävande eftersom alla mekaniska grupperingar och summeringar hade skett automatiskt. Dessutom skulle beräkningarna vara mera pålitliga eftersom mekaniska beräkningar i denna omfattning lätt innefattar missar. Summeringarna var dock parentetiska och behövdes inte för att svara på vilka misstag som finns i klasslärarstuderandes lösningar. Antalen användes däremot för att få en fingervisning om misstagens förekomst.

Med antalet lösningar i åtanke kunde en deduktiv analys eventuellt lämpat sig bättre. Med en färdig mall för kategorierna skulle kategoriseringen gått betydligt snabbare eftersom många genomgångar krävdes för att skapa kategorierna. Däremot hade inte analysen varit lika kvalitativ som nu eftersom man endast skulle leta efter de färdiga kategorierna och inte kunna ta med sådant som hittas utöver dem. Med en deduktiv analysmetod finns möjligheter till större sampel och kartläggningen av misstag kunde bli kvantitativ.

För att i stället höja kvaliteten och trovärdigheten kunde man intervjua några av testpersonerna efter tolkningen av deras svar. Således kan man troligen få reda på hur de faktiskt tänkt. Eftersom intervjuer är tidskrävande har man ofta inte möjlighet att intervjua så många. Ett tillägg till testet kunde då i stället vara att informanterna svarar på en enkät kring testet där de får sätta ord på sina tankar allmänt och kring specifika uppgifter.

## 5.2 Resultatdiskussion

Avhandlingen inleds med förundran över att klasslärarstuderande kan uppleva grundläggande matematikkurser som svåra vilket leder in på intresset att undersöka deras matematikkunskaper. Intresset utvecklas till syftet att både undersöka klasslärarstuderandes matematikprestationer och kartlägga misstag i deras lösningar. Syftet har uppfyllts och resultatet är i korthet att klasslärarstuderande presterar dåligt och sämre i problem än i rutinuppgifter. Dessutom förekommer många misstag i deras lösningar. Detta motsvarar min hypotes i inledningen. Motsvarar resultatet även tidigare forskning?

I Jyväskylä (Hihnala, 2011) användes samma test som jag analyserat. Studien liknar min med lika stort sampel av klass- och speciallärarstuderande och samma gräns för godkännande medan tidpunkten var läsåret 2008–2009, ett drygt decennium innan mitt data samlades in. 66 % av studeranden i Jyväskylä blir godkända. Av mina informanter godkändes 40 % vilket är hela 26 procentenheter lägre än i Jyväskylä. Har lärarstuderandes matematikkunskaper sjunkit så mycket på tio år eller är finskspråkiga lärarstuderande bättre på matematik än svenskspråkiga? Longitudinella studier av testen vid Åbo Akademi visar på betydliga försämringar i prestationerna. Ohtonen (2023) studerar så gott som alla test från Åbo Akademi och det bästa resultatet uppnåddes det första året, år 1994, med 86 % godkända, 28 år senare hittas det sämsta resultatet med enbart 21 % godkända år 2022. Ohtonen et al. (2023) presenterar en försämring från 46 % godkända år 2008 till 24 % godkända år 2020. 46 % godkänns alltså vi Åbo Akademi samma år som 66 % godkänns vi Jyväskylä universitet. Prestationerna vid Åbo Akademi år 2008 med 46 % godkända är samma som mitt resultat från enbart år 2019.

Flera av de studier jag presenterade i kapitel 2.4 var nivåtestningar i matematik på olika håll i Finland. Två (Pehkonen, 2011) av dessa var test på nybörjare inom klasslärarstudier och två (Häkkinen et al., 2011; Merenluoto & Merenluoto, 2011) var test inom urvalsprov till klasslärarutbildning. Testen på nyantagna studerande ägde rum i Helsingfors åren 1979–1983 och i Åbo åren 2000–2003. Under åren var andelen godkända i Helsingfors 66 % – 81 % och i Åbo 51 % – 79 %. Även om andelarna är något lägre i Åbo når de inte så låga nivåer som vid Åbo Akademi med andelarna 21 % – 86 %. Mitt resultat på 40 % godkända ligger också under nivåerna i både Helsingfors och Åbo. Detta trots att man för godkänt test i Helsingfors behövde 80 % och i Åbo hela 90 % jämfört med Åbo Akademis 67 %. Dock är också testets innehåll annorlunda i Helsingfors och Åbo jämfört med Åbo Akademi. Varken Helsingfors eller Åbo har problemuppgifter i testet och i Helsingfors består testet dessutom av enbart flervalsfrågor. I Åbos test var alla uppgifter från lågstadiets matematik med hälften av uppgifterna i testet i Helsingfors var från lågstadiets matematik.

Från nivåtestningarna i urvalsproven fås inte lika mycket statistik att jämföra med min studie. Däremot införs urvalsprovet i Åbo (Merenluoto & Merenluoto, 2011) efter noterade svårigheter i matematiktent hos studerande. Svårigheterna gäller multiplikations- och divisionsuppställningar samt procentberäkning. Dessa områden vara centrala i mitt resultat av misstag i uppgiftslösningar. I övrigt får man bara ta del av lösningsfrekvenserna för fem uppgifter i urvalsproven åren 2008 och 2009. Lösningsfrekvenserna ligger mellan 44 % och 84 % vilket är jämförbart med uppgifterna i min studie där lösningsfrekvenserna låg mellan 32 % och 87 %.

I Nyslott testades ansökande till klasslärarutbildningen med samma test som åttondeklassister och ingen betydlig skillnad hittades mellan grupperna (Häkkinen et al., 2011). Från de ansökandes urvalsprov konstaterades att andelen saknade lösningar samt felaktiga svar var högt. Detta kan även jag bekräfta från mina analyser men vill påpeka att vissa uppgifter hade de flesta försökt lösa och antal felaktiga svar var lågt. Vidare noterar Häkkinen et al. Att 11 av 129 ansökande hade lyckats med alla uppgifter och ingen misslyckades med alla. Bland mina informanter var också de låga prestationerna få men ingen lyckades heller med precis alla uppgifter. Fyra fel av nio uppgifter var vanligast i urvalsprovet i Nyslott, det motsvarar lösningsfrekvensen 56 %. I min studie var vanligaste totalpoängerna 17 och 20 vilket motsvarar lösningsfrekvenserna 57 % och 67 %

Få studier har fokus på problemlösning. Pentang et al. (2021) är en av de studierna som testar klasslärarstuderande på problemuppgifter inom grundläggande matematik. Deras informanter studerar dock fjärde året i Filippinerna. Medelprestationen för deras informanter är 1,06 av 3 poäng vilket motsvarar lösningsfrekvensen 35 %. Mina informanter uppnådde lösningsfrekvensen 47 % i problemuppgifterna vilket är klart bättre än studien i Filippinerna. Hur studiernas kontext och uppbyggnad skiljer sig vet vi dock inte. Tossavainen et al. (2015) fokuserar också på prestationer i problemlösning. Deras informanter är dock studerande inom humaniora. Uppgifterna i deras test är baserade på ett PISA-test. Medelprestationen i deras studie var knappa 12 av 24 poäng vilket motsvarar lösningsfrekvensen 50 % som är jämförbart med mina informanters 47 %.

Tossavainen et al. (2015) noterar även att lösningsfrekvenserna i modifierade uppgifter är betydligt lägre än i de uppgifter som tagits direkt från PISA-testet. Lösningsfrekvenserna för enskilda uppgifter varierade mellan 0 % och 88 %. Detta är lite större variation än i mitt resultat där problemuppgifternas lösningsfrekvenser ligger mellan 32 % och 80 %. I Båda studierna är variationen av uppgifternas lösningsfrekvenser stor och båda innehåller uppgifter som varit enkla och uppgifter som varit svåra. Igenkänning av uppgifter och att man direkt kommer på en lösningsmetod verkar vara en tröskel för att ta itu med en textuppgift. Shroeder & Lester (1989) tar upp detta problem som en konsekvens av metoden undervisning för problemlösning. Elever får svårt att lösa uppgifter de inte är vana vid.

I Brandells (2013) studie är informanterna nyantagna ingenjörsstuderande. De genomför ett matematiktest som inte enbart innehåller grundläggande matematik. Testet är däremot indelade i kategorier och en av dem är grundkunskaper. En annan kategori är kreativ talkunskap som kan liknas vid problemlösning. Lösningsfrekvensen för kreativ talkunskap var 33 % medan mina informanter löste problemuppgifterna till 47 %. Brandells informanter klarade grundkunskaper till 80 % och mina informanter hade lösningsfrekvensen 64 % i rutinuppgifterna. I hela testet i Brandells studie uppnåddes lösningsfrekvensen 48 % och lösningsfrekvensen för hela testet i min studie var 58 %. Mitt resultat är dock inte direkt jämförbart med Brandells studie eftersom hela mitt test baseras på grundläggande matematik. Eftersom hela mitt test inklusive problemuppgifterna är grundläggande matematik kunde det eventuellt kunna jämföras med Brandells kategori grundkunskaper. Men utan att jämföra uppgifternas karaktär och svårighetgrad är det svårt att säga något om hur resultatens olikhet ska tolkas. Man kan också tänka sig att de som går ingenjörsstudier har annan matematikbakgrund och matematikintresse än de som studerar till klasslärare vilket påverka hur de presterar.

I analysen gör jag även upptäckter som inte återfinns i tidigare studier och som inte heller befinner sig helt inom syftet för avhandlingen. Upptäckterna är dock lite oroväckande med tanke på att informanterna så småningom ska undervisa och vara förebild för elever. En av dessa upptäckter är att många misslyckades med enkla instruktioner i testet såsom att skriva svaren på testpappret. Alla svar skulle skrivas på testpappret men så många hade missat detta att jag ändå godkände svar som kom fram på lösningspappret. En annan liknande upptäckt är oorganiserade lösningar. Sortering av lösningarna enligt uppgift var ibland problematiskt på grund av oorganiserade lösningar som gjorde det svårt att veta till vilken uppgift lösningen hörde. Det var även ibland svårt att se vad det stod i lösningarna. Kan det vara så att det finns samband mellan prestation och ordningen i lösningarna?

Feluppfattningar från mitt resultat som inte återfinns i tidigare studier kommenterar jag inte i detta avsnitt eftersom de presenteras utförligt i kapitel 4. En av feluppfattningarna kan jag ändå kommentera. Den största delen av feluppfattningarna i uppgift 15 berodde på att informanterna inte kände till definitionen på räntesats. Dessa feluppfattningar har alltså inte direkt matematisk koppling och kunde ha undvikits med annat ordval eller omformulering av uppgiften. Man kunde exempelvis ha använt ordet årsränta för att testa matematikkunskaper i stället för språkkunskaper. Även om uppgiften gav många feluppfattningar ser jag inte så allvarligt på dem just för att språket var orsaken.

## 5.3 Avslutande diskussion

Dåliga prestationer kommer fram i såväl mitt resultat som i den tidigare forskningen. I en Yle-artikel (Sandström, 2023) diskuteras att de bristande matematikkunskaperna riskerar gå vidare till nästa generation och bli en ond cirkel om inte klasslärarnas matematikkunskaper höjs.

Lärarstuderandes begränsade matematikkunskaper leder till ifrågasättande av skola och utbildning och ifall en förändring behövs. Ifall förändring är nödvändigt kan man fråga sig på vilken utbildningsnivå den bör göras. Är det i de lägre årskurserna som matematikundervisning behöver förändras så att alla får en stadig grund eller är det i de högre årskurserna man behöver se till att förståelsen av begrepp och samband är mera centralt än regler och procedurer? Är det gymnasiets matematikkurser som behöver förändring eller är det lärarutbildningarnas ansvar att alla studerande uppnår acceptabel nivå av matematikförståelse och -kunskap. En annan diskussion som behöver föras är vilken nivå av matematikkunskaper en lärare bör uppnå.

Tossavainen & Leppäaho (2018) tycker att någon förändring i lärarutbildningen borde ske. Eftersom problemlösning kräver högre innehållsmässig nivå av läraren än mera traditionell undervisning menar de att det behövs mycket tid och vägledning i utbildningen så att klasslärarstuderande ska växa in i detta. De anser också att mera närundervisning är nödvändigt för att studerande ska kunna bekanta sig med nya läromedel och metoder. De jämför Finlands 5–7 studiepoäng med Sveriges 30 studiepoäng matematikdidaktik i klasslärarutbildning. Även 10 studiepoäng anser de vara i underkant med tanke på studerandes nuvarande matematikkunskaper och det faktum att de ska ansvara för långt över hälften av grundskolans matematik.

Eftersom klasslärare undervisar ungefär två tredjedelar av grundskolans matematik tycker Tossavainen och Leppäaho (2018) att det är konstigt att matematikprestationer från gymnasiet inte påverkar antagningen till klasslärarutbildningen speciellt mycket. Man kan alltså börja studera till klasslärare även om man knappt klarat gymnasiets korta matematikkurser. Ett sätt att påverka klasslärarstuderandes matematikkunskaper enligt Tossavainen och Leppäaho är att ge extra poäng i urvalsprovet för goda matematikresultat i studentexamen. Detta är dock lite föråldrad information då högskolornas antagningar förändrades från år 2020 och studentbetyget och speciellt långa matematik blev av stor vikt (Gestrin et al., 2020; Lamppu, 2019). De som började i gymnasiet i höst kommer dock ha mindre fördel av matematiken eftersom antagningsvillkoren förändras igen från och med år 2026 (Dönsberg, 2023). Det kan dock diskuteras om lång eller kort matematik i gymnasiet spelar någon roll för blivande klasslärare. Jag anser att goda kunskaper inom den korta matematiken är långt tillräckligt så länge förståelsen av begrepp och koncept finns.

Ett annat sätt att påverka klasslärares matematikkunskaper är nivåtestning i likhet med de studier (Hihnala, 2011; Häkkinen et al., 2011; Merenluoto & Merenluoto, 2011; Ohtonen, 2023; Pehkonen, 2011) jag diskuterat i avsnitt 2.4. Nivåtestningen som gjordes på lärarstuderanden i Helsingfors fortsatte i sju år innan den förbjöds i slutet av 1980-talet på begäran av studeranden (Pehkonen, 2011). Enligt Pehkonen var den lösningen inte helt lyckad eftersom det möjliggör att studeranden som inte behärskar grundläggande matematik utexamineras. Han ger exempel på en studerande som år efter år misslyckades med testet vilket gjorde att hen till slut gavs ett eget test med kopior från matematikbok från lågstadiet. Även detta test misslyckades den studerande i.

Jag anser att urvalsprovet till klasslärarutbildningen kunde innehålla ett litet matematiktest för att säkerställa att de som antas har åtminstone grundläggande matematikkunskaper. Man behöver förstås fastställa vilken nivå som krävs och hur man kan mäta kunskapsnivån i matematik innan man kan inkludera matematiktest i urvalsprovet. Dessutom är det väl på plats att diskutera om andra ämneskunskaper eller färdigheter bör sättas på prov i antagningsskedet. Men matematiken är ett av dom största ämnen i lågstadiet så kunskaper i ämnet hos klasslärare är ytterst relevant.

Hurudan matematikundervisning man fått ta del av påverkar vilka förutsättningar man har att bli duktiga i matematik (Kaasila, 2000), vilket kan ses som en förklaring till mitt och andras resultat kring lärarstuderandes bristande matematikkunskaper. Det finns flera studier på klasslärarstuderandes upplevelser av skolmatematiken. Bland annat analyserade jag i min kandidatavhandling (Ahlö, 2021) matematikberättelser av studerande som nyligen börjat sina studier till klasslärare. Berättelserna är från år 2019 och informanterna är alltså delvis samma som i de test som jag analyserat i denna avhandling. Resultatet i kandidatavhandlingen visar att läraren är en av de största faktorerna till hur man upplever matematiken. I berättelserna kommer såväl glädje och nyfikenhet som frustration, ångest och hopplöshet fram i relation till matematiken i skolan. Också en bild av att allt är svart på vitt med ett korrekt svar kommer fram vilket även stöds av Röj-Lindberg (2017) som i sin doktorsavhandling mera omfattande undersökte samma ämne som jag gjorde.

Röj-Lindberg (2002) diskuterar lärarutbildnings roll, huruvida den kan förbättras så att klasslärarstuderande får en positivare attityd till matematik och samtidigt blir bättre lärare i matematik. Kaasila et al. (2006) visar att lärarstuderande matematiksyn kan förändras under utbildningen. Det långsiktiga målet borde väl ändå vara att studerande redan från början har bättre matematiksyn och matematikkunskaper med tanke på hur lite matematikstudier som ingår i lärarutbildningen (Tossavainen & Leppäaho, 2018). Lärarutbildningen bör ha möjlighet att fokusera på att lära ut den didaktiska sidan av skolmatematiken.

Pentang et al. (2021) söker samband mellan matematikprestationer och övriga faktorer såsom kön, socioekonomisk status, föräldrars utbildning, tidigare utbildning och favoritämne. Det enda samband som hittas är mellan prestationer och favoritämne för undervisning. De som föredrog matematik framom andra ämnen presterade tillfredställande medan övrigas prestationer var otillfredsställande. Detta samband oroar mig lite eftersom endast två av omkring 80 personer som inledde klasslärarstudierna samtidigt som mig valde att studera matematik som långt biämne.

## 5.4 Förslag till fortsatt forskning

Eftersom min studie endast fokuserar på de som nyligen inlett klasslärarstudierna kan man inte säga så mycket om matematikkunskaperna i slutskedet av studierna och efter examination. Det vore därför intressant att studera hur klasslärarstuderandes matematikkunskaper påverkas under utbildningen och vilka kunskaper de besitter när de inleder arbetslivet.

Även om jag inte lagt någon vikt vid skillnaderna mellan tröskeltest och icke-tröskeltest kan man se att de som inte behövt bli godkända i matematiktestet har presterat betydligt sämre än de som behövt bli godkända. Man kunde dyka djupare ner i detta och jämföra grupperna med större sampel. Därtill kan man undersöka orsakerna till prestationsskillnaderna, är det pressen som gör att man presterar bättre? Eller orkar man inte lösa alla uppgifter när man inte måste? Kanske det enbart är så att matematikkunskaperna blivit sämre med tiden och avskaffandet av tröskeln har ingen påverkan?

I Åbo Akademi insamlas en enkät i samband med matematiktestet. Inga jämförande studier mellan enkäten och testet har ännu gjorts. Här finns möjliga syften till framtida studier. En sådan jämförelse är kanske enklast att utföra kvalitativt med ett fåtal informanter som man gärna också intervjuar. Detta borde då bestämmas innan testen samlas in så att man kan koppla ihop enkäterna med samma persons testresultat.

# Litteratur


Ahlö, S. (2021). *”Blev utskälld av läraren då jag inte kunde.”: En kvalitativ innehållsanalys av klasslärarstuderandes berättelser om skolmatematiska upplevelser.* [Opublicerad kandidatavhandling, Åbo Akademi].

Bergsten, C. (2006). *En kommentar till den matematiska problemlösningens didaktik.* https://www.researchgate.net/publication/251457944_EN_KOMMENTAR_TILL_DEN_MATEMATISKA_PROBLEMLOSNINGENS_DIDAKTIK

Biccard, P. (2020). Distance-education Student Teachers' Views of Teaching Mathematics Problem Solving While on Teaching Practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 24*(2), 205-215, https://doi.org/10.1080/18117295.2020.1812837

Boaler, J. (2011). *Elefanten i klassrummet – att hjälpa elever till ett lustfyllt lärande*. (E. Trägårdh, Övers.).

Boaler, J., & Selling, S. K. (2017). Psychological Imprisonment or Intellectual Freedom? A Longitudinal Study of Contrasting School Mathematics Approaches and Their Impact on Adults' Lives. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(1), 78–105. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.48.1.0078

Brandell, L. (2013). *Matematikkunskaperna 2013 hos nybörjarna på civilingenjörsprogrammen och andra program vid KTH – bearbetning av ett förkunskapstest.* http://lilahe.com/KTH2013.pdf

Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder.* (B. Nilsson, Övers.; 3 uppl.). Liber. (Originalutgåvan publicerad 2016)

Danielson, E. (2017). Kvalitativ innehållsanalys. I M. Henricson (Red.), *Vetenskaplig teori och metod: från idé till examination inom omvårdnad* (2 uppl., s.285–299). Studentlitteratur.

Dönsberg, A. (27 mars 2023). Antagningen till universiteten görs om – nu ska lång matematik inte längre väga tyngst. *Yle*. https://svenska.yle.fi/a/7-10031301

Emanuelsson, G., Wallby, K., Johansson, B., & Ryding, R (Red.). (1996). *Matematik – ett kommunikationsämne.* Nämnaren.

Engvall, M. (2013). *Handlingar i matematikklassrummet: En studie av undervisningsverksamheter på lågstadiet då räknemetoder för addition och* *subtraktion är i fokus.* [Doktorsavhandling, Linköpings universitet]. DiVA. https://doi.org/10.3384/diss.diva-100179

Engvall, M., & Kreitz-Sandberg, S. (2015) Strukturerad problemlösning – observationer från japanska klassrum. *Nämnaren, 2015*(3), 25–31. https://urn.kb.se/resolve?urn=urn%3Anbn%3Ase%3Aliu%3Adiva-121185

Europaparlamentet (2006). *Europaparlamentets och rådets rekommendation av den 18 december 2006 om nyckelkompetenser för livslångt lärande* (2006/962/EG). http://data.europa.eu/eli/reco/2006/962/oj

Fonseca, K. (2021). 'Self-reported mathematical problem-solving skills of future mathematics teachers'. *South African Journal of Childhood Education 11*(1), a1011. https://doi.org/10.4102/sajce.v11i1.1011

Gestrin, A., Ekholm, M., West, P., & Lång, L. (20 maj 2020). Alla utbildningar värderar ett L i lång matte högst – studentbetygets betydelse växer när högskolorna väljer studerande. *Yle*. https://svenska.yle.fi/a/7-1466017

Hihnala, K. (2011). Miten opetussuunnitelmaa jäsentämällä voitaisiin parantaa matematiikan perusopetusta. I E. Pehkonen (Red.), *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkataidosta* (s. 47–64). Helsingfors universitet. http://hdl.handle.net/10138/28075

Häggblom, L. (2013). *Med matematiska förmågor som kompass.* Studentlitteratur.

Hähkiöniemi, M., Kauppinen, M., & Tarnanen, M. (2020). Kohti ilmiölähtöistä matematiikan oppimista: Matemaattista ongelmanratkaisua taiteeseen yhdistäen. I M. Tarnanen & E. Kostiainen (Red.), *Ilmiömäistä! Ilmiölähtöinen lähestymistapa uudistamassa opettajuutta ja oppimista* (s. 212–233). Jyväskylä universitet. http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-7793-1

Häkkinen, K., Tossavainen, T., & Tossavainen, A. (2011). Kokemuksia luokanopettajaksi pyrkivien matematiikan soveltuvuustestistä Savonlinnan opettajankoulutuslaitoksessa. I E. Pehkonen (Red.), *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkataidosta* (s. 47–64). Helsingfors universitet. http://hdl.handle.net/10138/28075

Justitieministeriet (2018). *6 § - Timfördelningen i grundläggande utbildning för läropliktiga* (2018:793). Statsrådets förordning om ändring av 6 § i… 793/2018 - Ursprungliga författningar - FINLEX ®

Kaasila, R. (2000). *"Eläydyin oppilaiden asemaan": Luokanopettajaksi opiskelevien kouluaikaisten muistikuvien merkitys matematiikkaa koskevien käsityksien ja opetuskäytäntöjen muotoutumisessa.* [Akademisk avhandling, Lapplands universitet]. Lauda. https://urn.fi/URN:NBN:fi:ula-20111131022

Kaasila, R., Hannula, M. S., Laine, A., & Pehkonen, E. (2006). Facilitators for change of elementary teacher student's view of matematics. I J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Red.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3.* (s. 385–392). PME. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED496933.pdf#page=393

Karlsson, N. (2015). *Matematik i lärarutbildningen: Studenternas kunskaper i och uppfattningar om matematik – En forskningsrapport från MIL- och SKUM-projekten* (Working paper 2015:4). Södertörns högskola. http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:865247/FULLTEXT01.pdf

Karlsson, N., & Kilborn, W. (2020). *Vad ska eleverna lära sig och vad lär de sig? Vanliga missförstånd i matematikundervisningen*. Studentlitteratur.

Kupari, P., Välijärvi, J., Andersson, L., Arffman, I., Nissinen, K., Puhakka, E., & Vettenranta, J. (2013). *PISA12 ensituloksia.* Undervisnings- och kulturministeriet. http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-263-241-8

Kurula, M. (21 maj 2019). *ÅA – matematiker i arbetslivet.* https://abomatematiker.wordpress.com/author/alcarola/

Lai, K. (2022). *Klasslärarstuderandes inledande bråkkunskaper och kunskapernas relation till läroplanen 2014*. [Opublicerad kandidatavhandling, Åbo Akademi].

Lamppu, E. (7 maj 2019). Måste du läsa lång matematik för att få studieplats vid universitetet? *Yle*. https://svenska.yle.fi/a/7-1384777

Lester, F. K., & Cai, J. (2016). Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research. I P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Red.), *Posing and Solving Mathematical Problems. Research in Mathematics Education* (s. 117–134). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_8

Lundman, B., & Hällgren-Graneheim, U. (2012). Kvalitativ innehållsanalys. I M. Granskär & B. Höglund-Nielsen (Red.), *Tillämpad kvalitativ forskning inom hälso- och sjukvård* (2 uppl., s. 187–201). Studentlitteratur.

Mehto, A. (2013). *Aloittavien matematiikan opiskelijoiden varmuus omasta osaamisestaan ja sen vaikutus tehtävien ratkaisuun sekä tyypillisimmät virheet.* [Magisteravhandling, Helsingfors universitet]. Helda. http://urn.fi/URN:NBN:fi-fe2017112252044

Merenluoto, K. & Merenluoto, S. (2011). Matemaattis-luonnontieteellisen ajattelun testi Turun opettajankoulutuslaitoksen valintakokeissa vuosina 2000–2009. I E. Pehkonen (Red.), *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkataidosta* (s. 29–46). Helsingfors universitet. http://hdl.handle.net/10138/28075

Nationalencyklopedin (u.å.a). Kunnande. Hämtad 19 november 2023 från https://www.ne.se/uppslagsverk/ordbok/svensk/kunnande

Nationalencyklopedin (u.å.b). Matematik. Hämtad 19 november 2023 från https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/matematik

Nationalencyklopedin (u.å.c). Problem. Hämtad 19 november 2023 från https://www.ne.se/uppslagsverk/ordbok/svensk/problem

Nyberg, R., & Tidström, A. (Red.). (2012). *Skriv vetenskapliga uppsatser, examensarbeten och avhandlingar* (5 uppl.). Studentlitteratur.

Ohtonen, A. (2023). *Klasslärarstuderandes inledande matematikkunskaper: Kartläggning och analys av klasslärarstuderandes prestationer i grundläggande matematik under tidsperioden 1994–2023*. [Magisteravhandling, Åbo Akademi]. Doria. https://urn.fi/URN:NBN:fi-fe20230825108088

Ohtonen, A., & Mårtensson, E. (2022). *En jämförelse av klasslärarstuderandes grundläggande matematikkunskaper åren 2008 och 2020.* [Opublicerad kandidatavhandling, Åbo Akademi].

Ohtonen, A., Mårtensson, E., Röj-Lindberg, A.-S., & Braskén, M. (2023). *Finnish Pre-Service Teachers' Mathematical Skills - A Comparison Between 2008 and 2020.* [Manuskript inlämnat för publikation.].

Olivares, D., Lupiáñez, J. L., & Segovia, I. (2020). Roles and characteristics of problem solving in the mathematics curriculum: a review. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(7), 1079-1096. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1738579

Olsson, H., & Sörensson, S. (2021). *Forskningsprocessen: kvalitativa och kvantitativa perspektiv* (4 uppl.). Liber.

Osborne, M. C. (2021). Teacher instructional practices and student mathematics achievement. *Journal of Educational Research and Practice, 11*(1), 345–358. https://doi.org/10.5590/JERAP.2021.11.1.25

Patel, R., & Davidsson, B. (2011). *Forskningsmetodikens grunder – Att planera, genomföra och rapportera en undersökning* (4 uppl.). Studentlitteratur.

Pehkonen, E. (2011). Luokanopettajaopiskelijoiden matemaattisen lähtötason testauksesta 30 vuoden ajalta. I E. Pehkonen (Red.), *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkataidosta* (s. 65–77). Helsingfors universitet. http://hdl.handle.net/10138/28075

Pentang, J. T., Ibañez, E. D., Subia, G. S., Domingo, J. G., Gamit, A. M., & Pascual, L. E. (2021). Problem-Solving Performance and Skills of Prospective Elementary Teachers in Northern Philippines. *Journal of Hunan University (Natural Sciences), 48*(1), 122–132. http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.25873.76648

Pohjolainen, S., Raassina, H., Silius, K., Huikkola, M., & Turunen, E. (2006). *TTY:n insinöörimatematiikan opiskelijoiden asenteet, taidot ja opetuksen kehittäminen* (Tutkimusraportti 84). Tampereen teknillinen yliopisto, Matematiikan laitos. Matematematiikan oppimisen tutkimus (MOK) (researchgate.net)

Pòlya, G. (1957). *How to solve it: a new aspect of mathematical method* (2 uppl.). Princeton University Press.

Röj-Lindberg, A.-S. (2002). Matematiksvårigheter - lärarens och utbildningens roll. I T. Dalvang, J. Formo, O. Lunde & O. B. Bekken (Red.), *"En matematikk for alle i en skole for alle" Rapport fra det 1. nordiske forskerseminar om matematikkvansker* (s. 53–56). Info Vest forlag.

Röj-Lindberg, A.-S. (2017). *Skolmatematisk praktik i förändring – en fallstudie.* [Doktorsavhandling, Åbo Akademi]. Doria. http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-12-3618-1

Röj-Lindberg, A.-S. (2022). Trends in mathematics education in Finland. I J. Morska & A. Rogerson (Red.), *Building on the Past to Prepare for the Future,* Proceedings of the 16th International Conference of The Mathematics Education for the Future Project, King's College, Cambridge, Aug 8-13, 2022 (s. 439–444). WTM-Verlag. https://doi.org/10.37626/GA9783959872188.0.083

Sandström, E. (4 mars 2023). Matematikkunskaperna bland finlandssvenska lärarstuderande har blivit sämre. *Yle*. https://svenska.yle.fi/a/7-10028385

Stukát, S. (2011). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap* (2 uppl.). Studentlitteratur.

Svenska Akademien (1944). Misstag. I *Svenska Akademiens ordbok*. Hämtad 19 november 2023 från https://www.saob.se/artikel/?seek=misstag&pz=2#U_M1037_67034

Svenska Akademien (1954a). Problem. I *Svenska Akademiens ordbok*. Hämtad 19 november 2023 från https://www.saob.se/artikel/?seek=problem&pz=1

Svenska Akademien (1954b). Problemlösning. I *Svenska Akademiens ordbok*. Hämtad 19 november 2023 från https://www.saob.se/artikel/?seek=probleml%C3%B6sning&pz=2#U_P1843_92180

Svenska Akademien (1960). Rutinuppgift. I *Svenska Akademiens ordbok*. Hämtad 19 november 2023 från https://www.saob.se/artikel/?seek=rutinuppgift&pz=2#U_R3101_72782

Svenska Akademien (2021a). Misstag. I *Svensk ordbok.* Hämtad 19 november 2023 från https://svenska.se/so/?id=151898&pz=7

Svenska Akademien (2021b). Rutin. I *Svensk ordbok.* Hämtad 19 november 2023 från https://svenska.se/so/?id=167641&pz=7

Shimizu, Y. (2013). Flera lösningar på ett problem – den japanska metoden. *Nämnaren, 2013*(4), 3–8. https://ncm.gu.se/pdf/namnaren/0308_13_4.pdf

Schoen, H. L. (Red.). (2003). *Teaching mathematics through problem solving: Grades 6-12*. National Council of Teachers of Mathematics.

Schroeder, T. M., & Lester F. K. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. I P. R. Trafton & A. P. Shulte (Red.), *New directions for elementary school mathematics* (s. 31-42). National Council of Teachers of Mathematics.

Söderman, M. (2 februari 2023). Matteläraren Anders har märkt hur elevers kunskaper försämrats: ”Det vi gjorde förr måste göras enklare i dag”. *Syd-Österbotten*. https://www.sydin.fi/Artikel/Visa/657038?shareID=WnJJU0hkNERJK1ppOXhrRHRLZE5TZz09

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan - för att skapa tillfällen till lärande.* [Doktorsavhandling, Umeå universitet]. DiVA. http://urn.kb.se/resolve?urn=urn%3Anbn%3Ase%3Aumu%3Adiva-1384

Tossavainen, T., & Leppäaho, H. (2018). Matematiikan opettajien ja opettajaksi opiskelevien matemaattisesta osaamisesta. I J. Joutsenlahti, H. Silfverberg, & P. Räsänen (Red.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 294–304). Niilo Mäki Institute. https://urn.kb.se/resolve?urn=urn%3Anbn%3Ase%3Altu%3Adiva-71661

Tossavainen, T., Väisänen, P., Merikoski, J. K., Lukin, T., & Suomalainen, H. (2015). A Survey on the Permanence of Finnish Students' Arithmetical Skills and the Role of Motivation. *Education Research International, 2015,* Artikel 213429. https://doi.org/10.1155/2015/213429

Utbildningsstyrelsen (1994). *Grunderna för grundskolans läroplan 1994* (3 uppl.). Utbildningsstyrelsen.

Utbildningsstyrelsen (2004). Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen 2004. Utbildningsstyrelsen. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lpgrundl2004_0.pdf

Utbildningsstyrelsen (2014). *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen 2014* (3 uppl.). Utbildningsstyrelsen. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/grunderna_for_laroplanen_for_den_grundlaggande_utbildningen_2014.pdf

Veppling, E., & Wikström, S. (2022). *Återkommande misstag och möjliga missuppfattningar kring rationella tal bland klasslärarstuderande* [Opublicerad kandidatavhandling, Åbo Akademi].

# Bilagor

**Bilaga 1**: Matematiktestet

**Matematik I**  Namn: ______________________

**Inledande test 1**  Grupp: ______________________

Matrikelnummer: ____________

*Skriv alla svar på detta papper. Gör vid behov uträkningar på konceptpapper. Inga hjälpmedel får användas (förutom huvud, penna, papper, fingrar). Maximalpoängen är 30 poäng, för godkänt krävs 20 poäng.* ***Lämna in alla papper! LYCKA TILL!***

1. Ordna talen i storleksordning. Börja med det minsta talet.

   $\frac{1}{5}$ 0,6 0,25 $\frac{1}{7}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{9}$

   ____ ____ ____ ____ ____ ____ / 2p

2. Hur mycket är $\frac{2}{3}$ av 75 m? ______________________ / 1p

3. Beräkna $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ ______________________ / 1p

4. Beräkna $1\frac{1}{4}/1\frac{1}{2}-\frac{2}{3}/\frac{4}{3}$ ______________________ / 1p

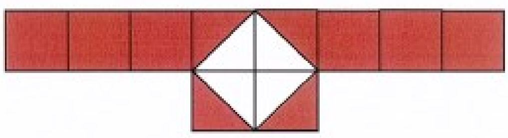
5. a) Beräkna summan av talen 4 och 1,2. ________________

   b) Beräkna produkten av talen 4 och 1,2. ________________

   c) Beräkna differensen av talen 4 och 1,2. ________________

   d) Beräkna kvoten av talen 4 och 1,2. ________________ / 4p

6. Hur många procent av figuren är färgad/svärtad?



/ 2p

7. Skriv som meter.

   a) 3215 cm = ____________ b) 0,08 km = ____________ / 2p

8. Skriv som $m^2$

   a) 2,5 ha = ____________ b) 250 $dm^2$ = ____________ / 2p

9. Skriv som $m^3$

   a) 105 $dm^3$ = ____________ b) 12 dl = ____________ / 2p

10. Beräkna

a) $1{,}3m - \frac{2}{5}m =$ ____________________

b) $\frac{3}{4}l / \frac{1}{2}l =$ ____________________

c) $\frac{16\ m}{0{,}4\ m} =$ ____________________ / 3p

11. Lottas bil förbrukar 50 liter bensin på 750 km. Hur många liter bensin förbrukar bilen per kilometer?

/ 2p

12. Patrik sätter ihop en cykel, vars framdäck har omkretsen 2 m 20 cm och bakdäck omkretsen 1 m 25 cm. Hur många varv rullar det större hjulet på en sträcka där det mindre hjulet rullar 176 varv?

/ 2p

13. Av en viss choklad kostar 750 gram 6 euro. Hur mycket kostar 120 gram av samma chokladsort?

/ 2p

14. Tomas är nu 11 år. "Om två år är jag tre år äldre än du Tomas är idag" sade Anders. Hur gammal är Anders nu?

/ 2p

15. Olsons har tagit ett lån på 20 000 euro. Hur mycket betalar de i ränta under tre månader då räntesatsen är 12 %?

/ 2p