Åbo Akademi

Fakulteten för
naturvetenskaper och teknik

Avhandling pro gradu i matematik

Interpolation och olikheter

Skribent:
Mathias Wickholm, 40400

Handledare:
Mikael Lindström

2022

Abstrakt

I den här pro gradu-avhandlingen presenterar jag två klassiska interpolationssatser: Riesz-Thorin och Marcinkiewicz. Riesz-Thorins interpolationssats hör till den komplexa interpolationen, medan Marcinkiewicz interpolationssats bara gäller i det reella fallet. De här två satserna gör det möjligt att hitta begränsningar för normen av operatorer på L^p-rum. Därmed kan satserna bland annat användas för att bevisa olikheter, och då gärna olikheter som är besvärliga att bevisa på andra sätt. Jag presenterar några exempel på hur interpolationsteori bevisar olikheter, och jämför de olika satserna med varandra. Interpolationen har också nackdelar när det kommer till att bevisa olikheter, de tas upp i slutet av avhandlingen.

Innehåll

Kapitel 1

Inledning

Jag vill inleda med att (fritt ur minnet) citera Mikael Lindström: ”Visst är det roligt med med likheter, men det är med olikheter som man faktiskt kan göra saker”. I den här pro gradu-avhandlingen kommer jag bevisa några olikheter med hjälp av interpolationsteori, ett mycket kraftfullt verktyg. Genom att använda de interpolationsmetoder jag kommer presentera kommer det räcka med att undersöka om vissa krav är uppfyllda i ändpunkterna på det intressanta intervallet. Om kraven är uppfyllda går det därefter att interpolera, och konstatera att det som gäller i ändpunkterna också kommer att gälla mellan dem. Därmed fås giltighet på ett helt intervall ur endast två värden.

I kapitel 2 introduceras ett antal grundläggande begrepp som ger en bra grund att stå på, för att sedan gå vidare till interpolationsteorin i kapitel 3. Där kommer först att definieras vad som avses med interpolationsrum, vektorrummen där interpolationen utförs. Utan dem går det inte att interpolera; de är därmed mycket viktiga. Därefter är det dags för interpolationsmetoderna, både reella och komplexa. De interpolationssatser som behandlas är de av Riesz och Thorin (komplex) och Marcinkiewicz (reell).

I kapitel 4 följer några tillämpningar av interpolationsteorin på olikheter. Interpolationsteorin kan göra det enklare att bevisa vissa olikheter, och även om det visserligen krävs en del för att bevisa interpolationsteorin kan resultaten utnyttjas i många olika sammanhang. Avhandlingen avslutas med en sammanfattning av det som kommit fram och kommentarer om interpolationsteorin och dess tillämpningar.

Kapitel 2

Grundläggande definitioner och satser

I detta kapitel tas grundläggande definitioner och satser som behövs i senare kapitel upp. Det finns också flertalet definitioner i de kommande kapitlen, men de hör i huvudsak ihop med det som följer direkt efter dem.

2.1 Konvexa funktioner och Fubinis sats

Definition 2.1. En funktion f är konvex i sin definitionsmängd om det för $0 \leq t \leq 1$ och för alla x, y i definitionsmängden gäller att

$$f\left((1-t)x + ty\right) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Om olikheten gäller åt andra hållet är f konkav. Ett exempel på en konvex funktion är $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$.

Beviset nedan är hämtat ur [14].

Sats 2.2. *(Fubinis sats). Låt f vara en integrerbar funktion på rektangeln* $R = [a,b] \times [c,d]$. *Anta att integralen* $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ *existerar för varje* $y \in [c,d]$ *och är integrerbar på detta* *intervall. Då är*

$$\iint_R f \mathrm{d}A = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Bevis. Låt $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_k = b$ och $y_0 = c < y_1 < \cdots < y_n = d$ vara godtyckliga partitioner av intervallen $[a,b]$ respektive $[c,d]$. Låt P vara en partition av R i de $k \cdot n$ rektanglarna $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ och sätt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $m_{ij} = \inf\limits_{R_{ij}} f$ och $M_{ij} = \sup\limits_{R_{ij}} f$. Eftersom

$$m_{ij} \leq f(x,y) \leq M_{ij}, \quad (x,y) \in R_{ij}$$

får vi

$$m_{ij}\Delta x_i \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)\mathrm{d}x \leq M_{ij}\Delta x_i$$

om $y \in [y_{j-1}, y_j]$ i och med att integralens värde ligger mellan arean av den minsta och den största rektangeln eller är lika med någon av dem. Vi summerar över alla i och får

$$\sum_{i=1}^{k} m_{ij}\Delta x_i \leq \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{k} M_{ij}\Delta x_i$$

om $y \in [y_{j-1}, y_j]$. Genom att använda över- och undersummor en gång till får vi in också den andra dimensionen. Först får vi

$$\left(\sum_{i=1}^{k} m_{ij}\Delta x_i \right) \Delta y_j \leq \int_{y_{i-1}}^{y_i} \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) dy \leq \left(\sum_{i=1}^{k} M_{ij}\Delta x_i \right) \Delta y_j$$

och genom att summera över alla j

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \leq \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) dy \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j.$$

För partitionen P är $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$ en undre gräns som vi kan kalla $U(f,P)$. På samma sätt är $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$ en övre gräns, som vi kan kalla $\ddot{O}(f,P)$. I och med att P valdes godtyckligt gäller

$$U(f,P) \leq \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) dy \leq \ddot{O}(f,P)$$

för alla partitioner P. I och med att f är integrerbar på R vet vi att det endast är $\iint_R f\mathrm{d}A$ som satisfierar

$$U(f,P) \leq \iint_R f\mathrm{d}A \leq \ddot{O}(f,P)$$

för alla partitioner P i och med att gränsvärdet för både den undre och övre gränsen då antalet rektanglar partitionen P består av går mot oändligheten är integralens värde. Eftersom $\iint_R f\mathrm{d}A$ är unikt är

$$\iint_R f\mathrm{d}A = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) dy.$$

□

Vi kan byta plats på x och y i formuleringen av satsen, det vill säga låta antagandet vara "anta att integralen $\int_c^d f(x,y)dy$ existerar för varje $x \in [a,b]$ och är integrerbar på detta intervall" och på samma sätt bevisa att $\iint_R f\mathrm{d}A = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) dx$. Det gäller alltså att

$$\iint_R f\mathrm{d}A = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) dx.$$

2.2 Normer

Definition 2.3. Låt V vara ett vektorrum och $\|\cdot\|$ en avbildning från V till $\mathbb{R}$ som uppfyller följande krav:

1. $\|x\| \geq 0$ för alla $x \in V$.
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ för alla x, $y \in V$.
4. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ för alla $x \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ eller $\alpha \in \mathbb{C}$.

Då är $\|\cdot\|$ en norm och $(V, \|\cdot\|)$ ett normerat vektorrum.

Definition 2.4. Låt $(V, \|\cdot\|)$ vara ett normerat vektorrum, som dessutom är fullständigt, det vill säga alla Cauchyföljder i V konvergerar i V. Då kallas $(V, \|\cdot\|)$ ett Banachrum.

2.3 Sigma-algebror och mått

Definitionerna nedan är hämtade ur [11].

Definition 2.5. Låt X vara en mängd och $\mathcal{A}$ en familj delmängder av X. $\mathcal{A}$ sägs vara en σ-algebra (sigma-algebra) i X om den uppfyller följande krav:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$.
3. Om A_i, $i \in \mathbb{N}$, är en uppräknelig familj mängder i $\mathcal{A}$, så är $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Definition 2.6. Låt X vara en mängd och $\mathcal{A}$ en σ-algebra i X. Då är $(X, \mathcal{A})$ ett mätbart rum och elementen i $\mathcal{A}$ mätbara mängder.

Definition 2.7. Låt X vara en mängd och $\mathcal{A}$ en σ-algebra i X. En avbildning $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ är ett mått om följande krav är uppfyllda:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. Om A_i, $i \in \mathbb{N}$, är en uppräknelig familj parvis disjunkta mängder i $\mathcal{A}$, så är

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i\right).$$

Definition 2.8. Låt X vara en mängd, $\mathcal{A}$ en σ-algebra i X och $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ ett mått. Då kallas trippeln $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ett måttrum.

Definition 2.9. Ett Hilbertrum är ett vektorrum med en inre produkt.

Definition 2.10. Låt V och W vara vektorrum i $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$). En operator $T : V \to W$ kallas linjär om det för alla $u, v \in V$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) gäller att

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T(u) + T(v) \\ T(\alpha v) &= \alpha T(v). \end{aligned}$$

Definition 2.11. Låt $1 \leq p < \infty$ och $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vara ett måttrum med $\mu(X) < \infty$. Då utgör alla mätbara funktioner f på X för vilka

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p \coloneqq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

ett vektorrum som kallas ett L^p-rum. Om $f \in L^p(X)$ så är $\|\cdot\|_{L^p}$ en norm som också är fullständig.

Definition 2.12. Låt $p = \infty$ och $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vara ett måttrum. Då utgör alla mätbara funktioner f på X för vilka det väsentliga supremumet är ändligt, det vill säga

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \text{ess sup}\,|f| \coloneqq \inf\left\{a \geq 0 : \mu\left(\{x : |f(x)| > a\}\right) = 0\right\} < \infty,$$

L^∞-rummet. Rummet $L^\infty(X)$ försett med normen $\|\cdot\|_{L^\infty}$ är ett Banachrum.

Definition 2.13. För varje $E \subset \mathbb{R}$ definieras dess yttre Lebesguemått, som betecknas $m^*(E)$, som

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : \{I_k\} \text{ är en följd av öppna intervall med } E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

Definition 2.14. En mängd $E \subset \mathbb{R}$ sägs vara Lebesguemätbar om det för varje delmängd A av $\mathbb{R}$gäller att

$$m^*(A) = m^*(A \bigcap E) + m^*(A \bigcap E^C),$$

där E^C är E:s komplement.

Definition 2.15. Om E är en Lebesguemätbar mängd defineras dess Lebesguemått vara dess yttre Lebesguemått $m^*(E)$ och betecknas $m(E)$.

Definition 2.16. Låt $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ vara mätbara funktioner på ett måttrum $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Följden f_n sägs konvergera i mått till f om det för varje $\epsilon > 0$ gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \mu \left(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\}\right) = 0.$$

Definition 2.17. Låt $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vara ett måttrum. Om en viss egenskap gäller i hela X, förutom i delmängder med måttet noll, sägs egenskapen gälla nästan överallt.

Sats 2.18. *Låt f_n och f vara som i definition* 2.15 *och låt f_n konvergera i mått mot f. Då existerar en delföljd f_{n_k}sådan att f_{n_k} konvergerar punktvis mot f nästan överallt.*

Beviset hittas exempelvis på s. 1 i [4].

Sats 2.19. *(Fatous lemma.) Låt $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vara ett måttrum och L^+ rummet av alla mätbara funktioner från X till* $[0, \infty]$. *Låt (f_n) vara en följd i L^+ och sätt $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ då är*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Beviset hittas exempelvis på s. 50 i [2].

Sats 2.20. *(Dominerade konvergenssatsen.) Låt* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *vara ett måttrum och* (f_n) *vara en följd i* L^1 *sådan att a.* $f_n \to f$ *nästan överallt och b. det existerar en ickenegativ funktion* $g \in L^1$ *sådan att* $|f_n \leq g|$ *för alla* n. *Då är* $f \in L^1$ *och* $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$.

Beviset hittas exempelvis på s. 53 i [2].

2.4 Olikheter

De olikheter som tas upp här kommer användas som hjälpmedel senare. Bevisen till de tre första är hämtade ur [10], medan resten har uppgifter om källan enskilt.

Sats 2.21. *(Youngs olikhet.) Låt* $a, b > 0$, $p > 1$ *och* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Då gäller*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Bevis. Vi börjar med att skriva om produkten ab:

$$ab = e^{\ln ab} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln(a^p)^{\frac{1}{p}} + \ln(b^q)^{\frac{1}{q}}} = e^{\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)}.$$

Eftersom e^x är konvex är

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)} &\leq \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q} \\ &= \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \end{aligned}$$

så $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. □

Sats 2.22. *(Hölders olikhet.) Låt* $p > 1$ *och* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Då gäller*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Bevis. Vi sätter $\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} = a$ och $\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} = b$ i Youngs olikhet:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\,\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\,\|g\|_q^q}.$$

Vi integrerar båda leden och får

$$\begin{aligned}\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\,\|g\|_q} &\leq \frac{\|f\|_p^p}{p\,\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_q^q}{q\,\|g\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1,\end{aligned}$$

och vi får det önskade resultatet genom att multiplicera de yttersta leden med $\|f\|_p\,\|g\|_q$. □

Sats 2.23. *(Minkowskis integralolikhet.) Låt* $|F(x,y)|$ *vara mätbar på* $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu \times \nu)$. *Om* $p \geq 1$ *så är*

$$\left(\int\limits_{\Omega_1}\left(\int\limits_{\Omega_2}|F(x,y)|\,d\nu\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int\limits_{\Omega_2}\left(\int\limits_{\Omega_1}|F(x,y)|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} d\nu.$$

I och med att beviset består av ganska många steg och olikheten har en väldigt liten roll i denna avhandling bevisas olikheten inte här. Beviset kan exempelvis hittas på s. 148 − 149 i [5].

Sats 2.24. *(Tjebysjovs olikhet.) Låt* $(X,\, \mathcal{A},\, \mu)$ *vara ett måttrum och* f *en reellvärd mätbar funktion definierad på* X. μ *är Lebesguemåttet. Låt* g *vara en reellvärd mätbar funktion som är ickenegativ och ickeavtagande i* f*:s värdemängd. Då gäller för* $t > 0$

$$\mu\left(x \in X \mid f(x) \geq t\right) \leq \frac{1}{g(t)}\int\limits_X g(f(x))d\mu.$$

Beviset hittas exempelvis på s. 16 i [12].

Kapitel 3

Interpolation

Genom att extrapolera, det vill säga att anta att exempelvis ett påstående är sant utanför ett intervall där det bevisats vara sant, kan man lätt dra felaktiga slutsatser. Följande olikhet tas som exempel: $2^n \leq n^{10} + 3$, $n \in \mathbb{N}$. Vi ska undersöka för vilka n olikheten gäller, så vi prövar ett antal värden början från $n = 0$:

n	2^n	$n^{10} + 3$
0	1	3
1	2	4
2	4	1 027
3	8	59 052
4	16	1 048 579
5	32	9 765 628
6	64	60 466 179

Vi ser att det högerledet snabbt blir mycket större än vänsterledet, så det verkar som att olikheten skulle kunna gälla för alla $n \in \mathbb{N}$. Om vi däremot studerar förhållandet mellan två på varandra följande element i talföljderna $a_n = 2^n$ och $b_n = n^{10} + 3$ ser vi att $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$, så den fördubblas hela tiden, medan $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{10}+3}{n^{10}+3} \to 1$ då $n \to \infty$. Vi ser också att tillväxten avtar väldigt snabbt: $\frac{1\,027}{4} = 276,75$, men $\frac{60\,466\,179}{9\,765\,628} \approx 6,19$. Det är därmed väldigt sannolikt att olikheten kommer att sluta gälla när n blir tillräckligt stort.

Mycket riktigt: olikheten gäller ända upp till $n = 58$, men för $n = 59$ är $2^n \approx 5,8 \cdot 10^{17}$ och $n^{10} + 3 \approx 5,1 \cdot 10^{17}$.

Att interpolera, det vill säga att anta att något är sant också mellan de punkter man har information om, kan också ge upphov till felaktigheter. Exempelvis kan en temperaturkurva få ett väldigt felaktigt utseende om vi har gjort för få mätningar och bara interpolerar mellan våra mätvärden. I det här kapitlet ska vi titta på metoder där interpolation däremot fungerar ytterst väl. På detta sätt kommer det räcka för oss att bevisa att någonting gäller för några värden för att tack vare interpolationen kunna säga att det gäller för alla värden däremellan.

3.1 Topologier och Hausdorffrum

Bevis och definitioner i kapitel 3.1 och 3.2 är hämtade ur [15] och [7].

Definition 3.1. En topologi τ på en mängd X består av delmängder av X som uppfyller följande kriterier:

1. Den tomma mängden $\emptyset$ och X tillhör τ.
2. Unionen av ett ändligt eller oändligt antal mängder i τ tillhör τ.
3. Snittet av ett ändligt antal mängder i τ tillhör τ.

Definition 3.2. Ett topologiskt rum är ett par (X, τ) där X är en mängd och τ är en topologi. Ett topologiskt vektorrum är ett vektorrum med en topologi som gör vektoraddition och skalärmultiplikation till kontinuerliga funktioner.

Definition 3.3. Låt (X, τ) vara ett topologiskt rum och f en reell- eller komplexvärd funktion med X som definitionsmängd. Då kallas det slutna höljet av mängden av icke-nollställen till f, det vill säga $\overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$, funktionens stöd vilket betecknas $\mathrm{supp}(f)$ efter engelskans ”support”.

Definition 3.4. Om $\mathrm{supp}(f)$ är en kompakt delmängd till X sägs f ha kompakt stöd.

Definition 3.5. Låt (X, τ) vara ett topologiskt vektorrum och $x, y \in X$, $x \neq y$. Om det existerar öppna mängder $U, V \in \tau : x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$, så är (X, τ) ett Hausdorffvektorrum.

Definition 3.6. Låt A och B vara mängder sådana att $A \subseteq B$. Då kallas $\iota : A \to B$, $\iota_A(x) = x$ för alla $x \in A$ en inklusionsavbildning.

Definition 3.7. Låt X och Y vara Banachrum. Om det existerar ett Hausdorffvektorrum Z sådant att $X \subseteq Z$ och $Y \subseteq Z$, och inklusionsavbildningarna $\iota_X : X \to Z$, $\iota_X(x) = x$ för alla $x \in A$ och $\iota_Y : X \to Z$, $\iota_Y(y) = y$ för alla $y \in Y$ är kontinuerliga, så sägs X och Y vara kompatibla (addition och multiplikation med skalär är kontinuerliga avbildningar).

Vi kan nu bilda två underrum av $Z : X \cap Y$ och $X + Y$. Vi ska nu titta närmare på de här två rummen.

3.2 Interpolationsrum

Sats 3.8. *Låt X och Y vara kompatibla Banachrum och $\|\cdot\|_X$ samt $\|\cdot\|_Y$ vara normen i respektive rum. Då är vektorrummet $X \cap Y$ ett Banachrum med normen*

$$\|z\|_{X\cap Y} = \max\{\|z\|_X, \|z\|_Y\}$$

och vektorrummet $X + Y$ ett Banachrum med normen

$$\|z\|_{X+Y} = \inf\{\|x\|_X + \|y\|_Y : z = x + y, x \in X, y \in Y\}.$$

Bevis. Vi ska bevisa att normerna faktiskt är normer, det vill säga att de uppfyller kraven i definition 2.4, samt att $X \cap Y$ och $X + Y$ är fullständiga. Att

$$\|z\|_{X\cap Y} = \max\{\|z\|_X, \|z\|_Y\}$$

är en norm är klart, eftersom $\|\cdot\|_X$ och $\|\cdot\|_Y$ är normer och $\|z\|_{X\cap Y}$ för varje vektor är lika med den större av de här två i just den vektorn.

Att $\|z\|_{X+Y} \geq 0$ för alla $z \in X+Y$ är klart, eftersom

$$\|x\|_X + \|y\|_Y \geq 0 + 0 = 0$$

och därmed

$$\|z\|_{X+Y} = \inf\{\|x\|_X + \|y\|_Y\} \geq 0.$$

Vi ser också att

$$\begin{aligned}\|\alpha z\|_{X+Y} &= \|\alpha(x+y)\|_{X+Y} = \inf\{\|\alpha x\|_X + \|\alpha y\|_Y\} = \inf\{|\alpha|\|x\|_X + |\alpha|\|y\|_Y\} \\ &= |\alpha| \inf\{\|x\|_X + \|y\|_Y\} = |\alpha|\|z\|_{X+Y}\end{aligned}$$

för alla $\alpha \in \mathbb{C}$ och $z \in X+Y$.

Om $\|z\|_{X+Y} = 0$ så finns det en följd $\{x_n\}$ i X och en följd $\{y_n\}$ i Y sådana att $z = x_n + y_n$ för alla n och $\lim\limits_{n\to\infty} (\|x_n\|_X + \|y_n\|_Y) = 0$. Ur detta följer att $x_n \to 0$ i X och $y_n \to 0$ i Y då $n \to \infty$. Eftersom $X \subseteq Z$ och $Y \subseteq Z$, och inklusionsavbildningarna $\iota_X : X \to Z$, $\iota_X(x) = x$ för alla $x \in X$ och $\iota_Y : X \to Z$, $\iota_Y(y) = y$ för alla $y \in Y$ är kontinuerliga gäller det också att $x_n \to 0$ i Z och $y_n \to 0$ i Z då $n \to \infty$. Därmed är det klart att $\|z\|_{X+Y} = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

För triangelolikheten skriver vi z som en linjärkombination av vektorerna u, $v \in X+Y$: $z = x + y$. Vi kan göra det här eftersom ett vektorrum är slutet under addition. Vi kan också skriva varje vektor i $X+Y$ som en summa av en vektor i X och en vektor i Y, så vi kan skriva

$$u = u_1 + u_2,\ u_1 \in X,\ u_2 \in Y$$

och

$$v = v_1 + v_2,\ v_1 \in X,\ v_2 \in Y$$

vilket för z innebär att

$$z = z_1 + z_2,\ z_1 = u_1 + v_1 \in X,\ z_2 = u_2 + v_2 \in Y.$$

Därmed är

$$\|z\|_{X+Y} = \|\,(u_1+v_1)+(u_2+v_2)\,\|_{X+Y} = \inf\{\|u_1+v_1\|_X + \|u_2+v_2\|_Y\}.$$

Eftersom $\|\cdot\|_X$ och $\|\cdot\|_Y$ är normer så gäller triangelolikheten för dem, så

$$\begin{aligned}
\|z\|_{X+Y} &= \|u+v\|_{X+Y} \\
&\leq \inf\{\|u_1\|_X + \|v_1\|_X + \|u_2\|_Y + \|v_2\|_Y\} \\
&= \inf\{(\|u_1\|_X + \|u_2\|_Y) + (\|v_1\|_X + \|v_2\|_Y)\} \\
&= \inf\{(\|u_1\|_X + \|u_2\|_Y)\} + \inf\{(\|v_1\|_X + \|v_2\|_Y)\} \\
&= \|u\|_{X+Y} + \|v\|_{X+Y}.
\end{aligned}$$

Triangelolikheten gäller alltså, så alla krav för normen är uppfyllda.

Nu återstår det att visa att $X \cap Y$ och $X+Y$ är fullständiga. För $X \cap Y$ vet vi baserat på dess konstruktion att om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd i $X \cap Y$ är den det också i X och Y. Eftersom X och Y är fullständiga finns det element $a_X \in X$ och $a_Y \in Y$ sådana att $\|a_n - a_X\|_X \to 0$ och $\|a_n - a_Y\|_Y \to 0$. Eftersom X och Y:s inklusionsavbildningar till Z är kontinuerliga gäller det att $a_n \to a_X$ i Z och att $a_n \to a_Y$ i Z, och eftersom Z är ett Hausdorffrum är $a_X = a_Y$. Elementet $a = a_X = a_Y$ ligger i $X \cap Y$ och $a_n \to a$ i $X \cap Y$ så $X \cap Y$ är fullständigt.

Ett normerat rum $(W, \|\cdot\|)$ är fullständigt om och endast om villkoret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|w_n\| < \infty$ implicerar existensen av ett $w \in W$ sådant att $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} w_k - w \right\| = 0$.

Anta att $\{z_n\}$ är en följd i $X+Y$ sådan att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|_{X+Y} < \infty.$$

För varje n kan vi hitta $z_n = x_n + y_n$, där $x_n \in X$ och $y_n \in Y$, så att

$$\|x_n\|_X + \|y_n\|_Y < \|z_n\|_{X+Y} + \frac{1}{n^2}.$$

Då är $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x\|_X < \infty$ och $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|y\|_Y < \infty$. Eftersom X och Y är fullständiga existerar vektorer $x \in X$ och $y \in Y$ sådana att

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k - x \right\|_X = 0$$

och

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} y_k - y \right\|_Y = 0.$$

Eftersom

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{n} z_k - z \right\|_{X+Y} &= \left\| \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) - (x+y) \right\|_{X+Y} \\
&= \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} x_k - x \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k - y \right) \right\|_{X+Y} \\
&\leq \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} x_k - x \right) \right\|_{X+Y} + \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} y_k - y \right) \right\|_{X+Y} \\
&= \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} x_k - x \right) \right\|_{X} + \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} y_k - y \right) \right\|_{Y}
\end{aligned}$$

är

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} z_k - z \right\|_{X+Y} = 0$$

så $X + Y$ är fullständigt och satsen är bevisad. □

Definition 3.9. Låt X och Y vara kompatibla Banachrum och W vara ett Banachrum. Om

$$X \cap Y \subset W \subset X + Y$$

med kontinuerliga inklusioner kallas W ett mellanliggande rum mellan X och Y.

Definition 3.10. Ett mellanliggande rum W mellan X och Y kallas för ett interpolationsrum om varje linjär avbildning på $X + Y$ som är begränsad från X till X och från Y till Y också är begränsad från W till W.

3.3 Komplex interpolation

Interpolationsteorin delas upp i två huvudsakliga delar: reell och komplex interpolation. Bevisen är hämtade ur [6], [3] och [16].

Definition 3.11. (Analytisk funktion.) En komplexvärd funktion f är analytisk i punkten z_0 om derivatan

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existerar i någon omgivning av punkten z_0.

Vi ska nu visa Phragmén–Lindelöf-principen, som vi kommer att behöva lite senare, genom ett exempel. Edvard Phragmén (1863 – 1937) var svensk, medan Ernst Lindelöf (1870 – 1946) var finlandssvensk och verksam vid Helsingfors universitet. Enligt principen är en funktion som är analytisk i någon vågrät eller lodrät remsa och är begränsad av någon konstant K på remsans randpunkter också begränsad av K i remsans inre punkter.

Sats 3.12. *Låt f vara en funktion som är analytisk i den vågräta remsan*

$$\left\{ z : -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Im} z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Om

$$|f(z)| \lesssim e^{\cosh C \operatorname{Re} z},$$

där $\lesssim$ betyder "mindre än eller ungefär lika med", för något $C \in [0, 1)$ och $|f(z)| \leq 1$ i remsans randpunkter, så är $|f(z)| \leq 1$ också i remsans inre punkter.

Bevis. Fixera D så att $C < D < 1$ och fixera $\epsilon > 0$. Funktionen

$$f_\epsilon(z) = \frac{f(z)}{e^{\epsilon \cosh Dz}}$$

är begränsad av 1 på remsans rand, eftersom $e^{\epsilon \cosh D \operatorname{Re} z} \geq 1$. Därmed är f_ϵ begränsad av 1 på randen av rektangeln

$$R_{K_\epsilon} = \left\{ z : -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Im} z \leq \frac{\pi}{2},\ -K_\epsilon \leq \operatorname{Re} z \leq K_\epsilon \right\}.$$

Enligt maximumprincipen (som säger att om den slutna mängden $\overline{S} = S \cup \partial S$, där ∂S är S:s rand, är begränsad och $f(z)$ är kontinuerlig i $\overline{S}$ så antas $\max_{z \in \overline{S}} |f(z)|$ på ∂S) är f_ϵ begränsad av 1 i hela rektangeln. Vi har alltså

$$\left| \frac{f(z)}{e^{\epsilon \cosh D z}} \right| = |f_\epsilon(z)| \leq 1$$

det vill säga

$$|f(z)| \leq |e^{\epsilon \cosh D z}| = e^{\epsilon \cosh D \operatorname{Re} z}$$

för alla z i remsan och om vi låter ϵ gå mot 0 får vi

$$|f(z)| \leq \lim_{\epsilon \to 0^+} e^{\epsilon \cosh D \operatorname{Re} z} = e^0 = 1$$

så $|f(z)| \leq 1$ gäller i remsans inre punkter. □

Sats 3.13. *(Hadamards trelinjesats.) Låt $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < Re\, z < 1\}$, $\overline{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Re\, z \leq 1\}$ och $f : \overline{S} \to \mathbb{C}$ vara en funktion som är begränsad och kontinuerlig i $\overline{S}$ och analytisk i S.*
Om

$$|f(yi)| \leq M_0$$

och

$$|f(1 + yi)| \leq M_1$$

för alla $y \in \mathbb{R}$, så är

$$|f(\theta + yi)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

för alla $\theta \in (0, 1)$ och $y \in \mathbb{R}$.

Bevis. Låt $\epsilon > 0$ och $\lambda \in \mathbb{R}$. Sätt

$$f_\epsilon(z) = e^{\epsilon z^2 + \lambda z} f(z).$$

Vi skriver $z = x + yi$, då är

$$\begin{aligned} f_\epsilon(z) = f_\epsilon(x+yi) &= e^{\epsilon(x+yi)^2 + \lambda(x+yi)} f(x+yi) \\ &= e^{(\epsilon x^2 - \epsilon y^2 + \lambda x) + (2\epsilon xy + \lambda y)i} f(x+yi) \\ &= e^{-\epsilon y^2} e^{\epsilon x^2} e^{\lambda x} e^{2\epsilon xyi} e^{\lambda yi} f(x+yi) \\ &= e^{-\epsilon y^2} e^{\epsilon x^2} e^{\lambda x} \left(\cos(2\epsilon xy) + i\sin(2\epsilon xy)\right) \left(\cos(\lambda y) + i\sin(\lambda y)\right) f(x+yi). \end{aligned}$$

Vi vet att $f(x+yi)$, sinus- och cosinustermerna och $e^{\epsilon x^2} e^{\lambda x}$ är begränsade i $\overline{S}$, samt att $\lim\limits_{y \to \pm\infty} e^{-\epsilon y^2} = 0$, så

$$\lim_{y \to \pm\infty} f_\epsilon(z) = \lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} f_\epsilon(z) = 0.$$

Vi betraktar nu absolutbeloppet av f_ϵ med de argument vi har i antagandet: yi och $1+yi$. Vi får att

$$\begin{aligned} |f_\epsilon(yi)| &= |e^{\epsilon(yi)^2 + \lambda yi} f(yi)| \\ &= |e^{-\epsilon y^2}||e^{\lambda yi}||f(yi)| \\ &\leq |f(yi)| \\ &\leq M_0 \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} |f_\epsilon(1+yi)| &= |e^{\epsilon(1+yi)^2 + \lambda(1+yi)} f(1+yi)| \\ &= |e^{\epsilon(1-y^2) + \lambda + (2\epsilon y + \lambda y)i} f(1+yi)| \\ &= |e^{\epsilon(1-y^2)}||e^{\lambda}||e^{(2\epsilon y + \lambda y)i}||f(1+yi)| \\ &\leq |e^{\epsilon}||e^{\lambda}||f(1+yi)| \\ &= e^{\epsilon + \lambda}|f(1+yi)| \end{aligned}$$

$$\le e^{\epsilon+\lambda}M_1.$$

Enligt Phragmén–Lindelöf-principen är f_ϵ begränsad i hela S av samma tal som dess randpunkter är begränsade av, det vill säga

$$|f_\epsilon(z)| \le \max\left(M_0,\, e^{\epsilon+\lambda}M_1\right).$$

Därmed får vi

$$|e^{\epsilon z^2+\lambda z}f(z)| = |f_\epsilon(z)| \le \max\left(M_0,\, e^{\epsilon+\lambda}M_1\right)$$

så

$$|f(z)| \le |e^{-\epsilon z^2-\lambda z}| \max\left(M_0,\, e^{\epsilon+\lambda}M_1\right)$$

eller, med $z = \theta + yi$,

$$\begin{aligned}
|f(\theta+yi)| &\le |e^{-\epsilon(\theta+yi)^2-\lambda(\theta+yi)}| \max\left(M_0,\, e^{\epsilon+\lambda}M_1\right)\\
&= |e^{-\epsilon(\theta^2-y^2)-\lambda\theta-(y+2\epsilon\theta y)i}| \max\left(M_0,\, e^{\epsilon+\lambda}M_1\right)\\
&= |e^{-\epsilon(\theta^2-y^2)}||e^{-\lambda\theta}||e^{-(y+2\epsilon\theta y)i}| \max\left(M_0,\, e^{\epsilon+\lambda}M_1\right)\\
&= e^{-\epsilon(\theta^2-y^2)}e^{-\lambda\theta} \max\left(M_0,\, e^{\epsilon+\lambda}M_1\right)\\
&= e^{-\epsilon(\theta^2-y^2)} \max\left(e^{-\lambda\theta}M_0,\, e^{\epsilon+(1-\theta)\lambda}M_1\right).
\end{aligned}$$

Det här gäller för alla θ och y. Låter vi ϵ gå mot 0 får vi

$$|f(\theta+yi)| \le \max\left(e^{-\lambda\theta}M_0,\, e^{(1-\theta)\lambda}M_1\right).$$

Maximet är som minst då

$$e^{-\lambda\theta}M_0 = e^{(1-\theta)\lambda}M_1.$$

Vi vill lösa ut e^λ ur ekvationen, så vi dividerar båda leden med $e^{-\lambda\theta}M_1$ och får

$$\frac{M_0}{M_1} = \frac{e^{(1-\theta)\lambda}}{e^{-\lambda\theta}} = e^{\lambda-\lambda\theta+\lambda\theta} = e^\lambda,$$

så vi sätter $e^{\lambda} = \frac{M_0}{M_1}$ och får

$$\begin{aligned}
|f(\theta + yi)| &\leq \max\left(\left(\frac{M_0}{M_1}\right)^{-\theta} M_0, \left(\frac{M_0}{M_1}\right)\left(\frac{M_0}{M_1}\right)^{-\theta} M_1\right) \\
&= \left(\frac{M_0}{M_1}\right)^{-\theta} M_0 \\
&= M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}
\end{aligned}$$

för alla $\theta \in (0, 1)$ och $y \in \mathbb{R}$. $\square$

Lemma 3.14. *Om $f \in L^p$ och $1 \leq p < \infty$ är*

$$\|f\|_p = \sup_{\|h\|_{p'}=1} |\langle f, h\rangle|$$

där $\langle f, h\rangle = \int\limits_U f h d\mu$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ och h är en enkel funktion (en funktion som endast antar ett ändligt antal värden) med kompakt stöd.

Bevis. Låt $g \in L^{p'}$ och $\|g\|_{p'} = 1$. Då är

$$\begin{aligned}
|\langle f, g\rangle| &= \left|\int\limits_U f g d\mu\right| \\
&\leq \int\limits_U |fg|\, d\mu \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int\limits_U |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_U |g|^{p'} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|f\|_p \|g\|_{p'} \\
&= \|f\|_p .
\end{aligned}$$

Därmed är $\sup\limits_{\|g\|_{p'}=1} |\langle f,\, g\rangle| \le \|f\|_p$. Låt

$$h(x) = \frac{e^{-i\arg f(x)} \, |f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}},$$

då är

$$\begin{aligned}
\|h\|_{p'}^{p'} &= \int\limits_U \left| \frac{e^{-i\arg f(x)} \, |f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}} \right|^{p'} d\mu \\
&= \int\limits_U \frac{\left|e^{-i\arg f(x)}\right|^{p'} \left||f(x)|^{p-1}\right|^{p'}}{\left|\|f\|_p^{p-1}\right|^{p'}} d\mu \\
&= \frac{1}{\|f\|_p^{p'(p-1)}} \int\limits_U |f(x)|^{p'(p-1)} \, d\mu \\
&= \frac{1}{\|f\|_p^{p}} \int\limits_U |f(x)|^{p} \, d\mu \\
&= \frac{1}{\|f\|_p^{p}} \, \|f\|_p^p \\
&= 1
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
\langle f,\, h\rangle &= \int\limits_U f(x) \frac{e^{-i\arg f(x)} \, |f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}} d\mu \\
&= \int\limits_U \frac{|f(x)| \, |f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}} d\mu \\
&= \frac{1}{\|f\|_p^{p-1}} \int\limits_U |f(x)|^{p} \, d\mu \\
&= \frac{1}{\|f\|_p^{p-1}} \, \|f\|_p^p \\
&= \|f\|_p .
\end{aligned}$$

Eftersom $h \in L^{p'}$ och $\|h\|_{p'} = 1$ är $\|f\|_p = \langle f, h \rangle \leq \sup_{\|g\|_{p'}=1} |\langle f, g \rangle|$, så $\sup_{\|g\|_{p'}=1} |\langle f, g \rangle| = \|f\|_p$. Vi vill nu visa att $\sup_{\|h\|_{p'}=1} |\langle f, h \rangle| = \sup_{\|g\|_{p'}=1} |\langle f, g \rangle|$ då h är en enkel funktion med kompakt stöd. Eftersom $h \in L^{p'}$ för alla sådana h är $\sup_{\|h\|_{p'}=1} |\langle f, h \rangle| \leq \sup_{\|g\|_{p'}=1} |\langle f, g \rangle|$. För att visa olikheten i den andra riktningen, låt $\epsilon > 0$. Då existerar en funktion $g_0 \in L^{p'}$ sådan att $\|g_0\|_{p'} = 1$ och

$$\sup_{\|g\|_{p'}=1} |\langle f, g \rangle| \leq |\langle f, g_0 \rangle| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Eftersom $g_0 \in L^{p'}$ existerar en enkel funktion h_0 med kompakt stöd sådan att

$$\|g_0 - h_0\|_{p'} < \frac{\epsilon}{2\|f\|_p + 1}.$$

Därmed är

$$\begin{aligned}
\sup_{\|g\|_{p'}=1} |\langle f, g \rangle| &\leq |\langle f, g_0 \rangle| + \frac{\epsilon}{2} \\
&= |\langle f, g_0 + h_0 - h_0 \rangle| + \frac{\epsilon}{2} \\
&= |\langle f, g_0 - h_0 \rangle + \langle f, h_0 \rangle| + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq |\langle f, g_0 - h_0 \rangle| + |\langle f, h_0 \rangle| + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \left| \int_U f\,(g_0 - h_0)\, d\mu \right| + |\langle f, h_0 \rangle| + \frac{\epsilon}{2} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \|g_0 - h_0\|_{p'} + |\langle f, h_0 \rangle| + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \|f\|_p \|g_0 - h_0\|_{p'} + \sup_{\|h\|_{p'}=1} |\langle f, h \rangle| + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \|f\|_p \frac{\epsilon}{2\|f\|_p + 1} + \sup_{\|h\|_{p'}=1} |\langle f, h \rangle| + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \sup_{\|h\|_{p'}=1} |\langle f, h \rangle| + \frac{\epsilon}{2 + \frac{1}{\|f\|_p}} + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \sup_{\|h\|_{p'}=1} |\langle f, h \rangle| + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

$$= \sup_{\|h\|_{p'}=1} |\langle f,\, h\rangle| + \epsilon$$

så $\sup_{\|g\|_{p'}=1} |\langle f,\, g\rangle| \leq \sup_{\|h\|_{p'}=1} |\langle f,\, h\rangle|$ och eftersom olikheten gäller i båda riktningarna har vi fått $\sup_{\|h\|_{p'}=1} |\langle f,\, h\rangle| = \sup_{\|g\|_{p'}=1} |\langle f,\, g\rangle|$ och $\|f\|_p = \sup_{\|h\|_{p'}=1} |\langle f,\, h\rangle|$. □

Definition 3.15. Vi betecknar indikatorfunktionen χ_E, det vill säga

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}.$$

3.3.1 Riesz–Thorins interpolationssats

Vi ska nu bevisa en klassisk komplex interpolationsmetod, Riesz–Thorins interpolationssats. Marcel Riesz (1886 – 1969) var ungrare, men verksam i Sverige, och Olof Thorin (1912 – 2004) var hans student.

Sats 3.16. *Låt* $1 \leq p_0,\, p_1,\, q_0,\, q_1 \leq \infty$, $p_0 \neq p_1$ *och anta att*

$$T : L_{p_0}(U, d\mu) \overset{M_0}{\to} L_{q_0}(V, d\nu) \text{ d.v.s. } \|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}$$

och

$$T : L_{p_1}(U, d\mu) \overset{M_1}{\to} L_{q_1}(V, d\nu) \text{ d.v.s. } \|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}.$$

Då gäller

$$T : L_p(U, d\mu) \overset{M}{\to} L_q(V, d\nu) \text{ d.v.s. } \|Tf\|_q \leq M \|f\|_p,$$

där $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ *och* $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Bevis. Vi delar upp beviset i två fall.

Fall 1. $1 \leq p_0,\, p_1,\, q_0,\, q_1 < \infty$

Låt $f \in L^p$ med $\|f\|_p = 1$. Vi ska visa att $\|Tf\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$. Enligt lemma

3.14 räcker det att visa att $\int\limits_V (Tf)\, g d\nu \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$ för någon enkel funktion g med ändligt stöd och $\|g\|_{q'} = 1$. Vi delar upp detta fall i två delfall:

Fall i. f är en enkel funktion med kompakt stöd.
Låt $f = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \mathbf{1}_{A_j}$ och $g = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k \mathbf{1}_{B_k}$ där $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $\mathbf{1}_{X_i}$ är indikatorfunktionen samt (A_i) och (B_i) är familjer av disjunkta delmängder av U (de är inte nödvändigtvis disjunkta från varandra) där $\mu(A_j) < \infty$ och $\nu(B_k) < \infty$ för alla j, k. Låt

$$\alpha(z) = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$$

och

$$\beta(z) = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1}.$$

Vi sätter, för $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$

$$f_z(t) = |f(t)|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} e^{i \arg f(t)}$$

och

$$g_z(t) = |g(t)|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} e^{i \arg g(t)}$$

samt

$$F(z) = \int\limits_V (Tf_z)\, g_z d\nu.$$

Vi ska nu visa att $F(z)$ är analytisk på $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

$$\begin{aligned}
F(z) &= \int\limits_V (Tf_z)\, g_z d\nu \\
&= \int\limits_V T\left(|f(t)|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} e^{i \arg f(t)}\right) |g(t)|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} e^{i \arg g(t)} d\nu \\
&= \int\limits_V \left(T\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} e^{i \arg a_j} \mathbf{1}_{A_j}\right)\right) \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} e^{i \arg b_k} \mathbf{1}_{B_k}\right) d\nu
\end{aligned}$$

$$= \int_V \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} e^{i \arg a_j} T\left(\mathbf{1}_{A_j}\right) \right) \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} e^{i \arg b_k} \mathbf{1}_{B_k} \right) d\nu$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} |b_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} e^{i(\arg a_j + \arg b_k)} \int_V T\left(\mathbf{1}_{A_j}\right) \mathbf{1}_{B_k} d\nu.$$

Därmed är $F(z)$ en linjärkombination av exponentialfunktioner och är därmed analytisk överallt. Eftersom $\left| e^{i(\arg a_j + \arg b_k)} \right| = 1$ är den också begränsad på $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$.
Vi ska nu visa att $|F(is)| \leq M_0$ och $|F(1+is)| \leq M_1$ för alla $s \in \mathbb{R}$. Vi börjar med den första olikheten, där vi använder beteckningen q' för det tal för vilket det gäller att $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$:

$$\begin{aligned}
|F(is)| &= \left| \int_V (T f_{is})\, g_{is} d\nu \right| \\
&\leq \int_V |(T f_{is})\, g_{is}|\, d\nu \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_V |T f_{is}|^{q_0}\, d\nu \right)^{\frac{1}{q_0}} \left(\int_V |g_{is}|^{q_0'}\, d\nu \right)^{\frac{1}{q_0'}} \\
&= \|T f_{is}\|_{q_0} \|g_{is}\|_{q_0'} \\
&\leq M_0 \|f_{is}\|_{p_0} \|g_{is}\|_{q_0'}.
\end{aligned}$$

Vi kan beräkna $\|f_{is}\|_{p_0}$ och $\|g_{is}\|_{q_0'}$:

$$\begin{aligned}
\|f_{is}\|_{p_0}^{p_0} &= \int_U \left| |f(t)|^{\frac{\alpha(is)}{\alpha(\theta)}} e^{i \arg f(t)} \right|^{p_0} d\mu \\
&= \int_U \left| |f(t)|^{\frac{\alpha(is)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_0} \left| e^{i \arg f(t)} \right|^{p_0} d\mu \\
&= \int_U \left| |f(t)|^{\frac{\alpha(is)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_0} d\mu.
\end{aligned}$$

Vi förenklar integranden:

$$\left| |f(t)|^{\frac{\alpha(is)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_0} = \left| |f(t)|^{\mathrm{Re}\,\frac{\alpha(is)}{\alpha(\theta)}} \, |f(t)|^{i\mathrm{Im}\,\frac{\alpha(is)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_0}$$

$$= |f(t)|^{p_0 \mathrm{Re}\,\frac{\alpha(is)}{\alpha(\theta)}}$$

och

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\frac{\alpha(is)}{\alpha(\theta)} &= \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{1-is}{p_0} + \frac{is}{p_1}}{\frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{p_1+(p_0-p_1)is}{p_0p_1}}{\frac{1}{p}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(p\frac{p_1+(p_0-p_1)is}{p_0p_1}\right) \\
&= p\frac{p_1}{p_0p_1} \\
&= \frac{p}{p_0}
\end{aligned}$$

så $p_0 \mathrm{Re}\,\frac{\alpha(is)}{\alpha(\theta)} = p_0\frac{p}{p_0} = p$ vilket ger $\left| |f(t)|^{\frac{\alpha(is)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_0} = |f(t)|^{p_0 \mathrm{Re}\,\frac{\alpha(is)}{\alpha(\theta)}} = |f(t)|^p$och därmed

$$\begin{aligned}
\|f_{is}\|_{p_0}^{p_0} &= \int_U \left| |f(t)|^{\frac{\alpha(is)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_0} d\mu \\
&= \int_U |f(t)|^p \, d\mu \\
&= \|f\|_p^p
\end{aligned}$$

$$= 1$$

där den sista likheten följer ur antagandet $\|f\|_p = 1$. För $\|g_{is}\|_{q_0'}$ får vi

$$\|g_{is}\|_{q_0'}^{q_0'} = \int_V \left| |g(t)|^{\frac{1-\beta(is)}{1-\beta(\theta)}} e^{i \arg g(t)} \right|^{q_0'} d\nu$$

$$= \int\limits_V \left| |g(t)|^{\frac{1-\beta(is)}{1-\beta(\theta)}} \right|^{q_0'} \left| e^{i \arg g(t)} \right|^{q_0'} d\nu$$
$$= \int\limits_V \left| |g(t)|^{\frac{1-\beta(is)}{1-\beta(\theta)}} \right|^{q_0'} d\nu.$$

Vi förenklar igen integranden och får

$$\begin{aligned}\left| |g(t)|^{\frac{1-\beta(is)}{1-\beta(\theta)}} \right|^{q_0'} &= \left| |g(t)|^{\mathrm{Re}\,\frac{1-\beta(is)}{1-\beta(\theta)}} \, |g(t)|^{i\mathrm{Im}\,\frac{1-\beta(is)}{1-\beta(\theta)}} \right|^{q_0'} \\ &= |g(t)|^{q_0' \mathrm{Re}\,\frac{1-\beta(is)}{1-\beta(\theta)}}\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\frac{1-\beta(is)}{1-\beta(\theta)} &= \mathrm{Re}\left(\frac{1 - \frac{1-is}{q_0} - \frac{is}{q_1}}{1 - \frac{1-\theta}{q_0} - \frac{\theta}{q_1}} \right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{q_0q_1 - q_1 + (q_1-q_0)is}{q_0q_1}}{1 - \frac{1}{q}} \right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{q_0q_1 - q_1 + (q_1-q_0)is}{q_0q_1}}{q'} \right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{q'\left(q_0q_1 - q_1 + (q_1-q_0)is\right)}{q_0q_1} \right) \\ &= \frac{q'\left(q_0q_1 - q_1\right)}{q_0q_1} \\ &= \frac{q'\left(q_0 - 1\right)}{q_0} \\ &= \frac{q'}{q_0'}\end{aligned}$$

eftersom $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ och motsvarande för q_0 och q_0'. Därmed är

$$q_0' \mathrm{Re}\,\frac{1-\beta(is)}{1-\beta(\theta)} = q_0' \frac{q'}{q_0'} = q'$$

och

$$\left| |g(t)|^{\frac{1-\beta(is)}{1-\beta(\theta)}} \right|^{q_0'} = |g(t)|^{q_0' \mathrm{Re}\,\frac{1-\beta(is)}{1-\beta(\theta)}} = |g(t)|^{q'}$$

så

$$\begin{aligned}\|g_{is}\|_{q_0'}^{q_0'} &= \int\limits_V \left| |g(t)|^{\frac{1-\beta(is)}{1-\beta(\theta)}} \right|^{q_0'} d\nu \\ &= \int\limits_V |g(t)|^{q'} \, d\nu \\ &= \|g\|_{q'}^{q'} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Därmed är

$$\begin{aligned}|F(is)| &\leq M_0 \, \|f_{is}\|_{p_0} \, \|g_{is}\|_{q_0'} \\ &= M_0 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= M_0.\end{aligned}$$

Vi går nu över till att visa att $|F(1+is)| \leq M_1$:

$$\begin{aligned}|F(1+is)| &= \left| \int\limits_V (Tf_{1+is}) \, g_{1+is} d\nu \right| \\ &\leq \int\limits_V |(Tf_{1+is}) \, g_{1+is}| \, d\nu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int\limits_V |Tf_{1+is}|^{q_1} \, d\nu \right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int\limits_V |g_{1+is}|^{q_1'} \, d\nu \right)^{\frac{1}{q_1'}} \\ &= \|Tf_{1+is}\|_{q_1} \, \|g_{1+is}\|_{q_1'} \\ &\leq M_1 \, \|f_{1+is}\|_{p_1} \, \|g_{1+is}\|_{q_1'} \, .\end{aligned}$$

Vi beräknar igen de två normerna:

$$\|f_{1+is}\|_{p_1}^{p_1} = \int\limits_U \left| |f(t)|^{\frac{\alpha(1+is)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_1} d\mu$$

där vi gjort samma steg som tidigare. Vi förenklar integranden:

$$\left| |f(t)|^{\frac{\alpha(1+is)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_1} = \left| |f(t)|^{\mathrm{Re}\,\frac{\alpha(1+is)}{\alpha(\theta)}} \, |f(t)|^{i\mathrm{Im}\,\frac{\alpha(1+is)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_1}$$

$$= |f(t)|^{p_1 \mathrm{Re}\,\frac{\alpha(1+is)}{\alpha(\theta)}}$$

och

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\frac{\alpha(1+is)}{\alpha(\theta)} &= \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{1-1-is}{p_0} + \frac{1+is}{p_1}}{\frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{p_0+(p_0-p_1)is}{p_0 p_1}}{\frac{1}{p}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(p\frac{p_0+(p_0-p_1)is}{p_0 p_1}\right) \\
&= p\frac{p_0}{p_0 p_1} \\
&= \frac{p}{p_1}
\end{aligned}$$

så

$$\|f_{1+is}\|_{p_1}^{p_1} = \int\limits_U \left| |f(t)|^{\frac{\alpha(1+is)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_1} d\mu$$

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_U |f(t)|^{p_1 \mathrm{Re}\,\frac{\alpha(1+is)}{\alpha(\theta)}} \, d\mu \\
&= \int\limits_U |f(t)|^{p_1 \frac{p}{p_1}} \, d\mu \\
&= \int\limits_U |f(t)|^{p} \, d\mu \\
&= \|f\|_p^p \\
&= 1.
\end{aligned}$$

För $\|g_{1+is}\|_{q_1'}$ får vi

$$\|g_{1+is}\|_{q_1'}^{q_1'} = \int_V \left| |g(t)|^{\frac{1-\beta(1+is)}{1-\beta(\theta)}} \right|^{q_1'} d\nu$$

och vi förenklar integranden:

$$\begin{aligned}
\left| |g(t)|^{\frac{1-\beta(1+is)}{1-\beta(\theta)}} \right|^{q_0'} &= \left| |g(t)|^{\mathrm{Re}\,\frac{1-\beta(1+is)}{1-\beta(\theta)}} \, |g(t)|^{i\mathrm{Im}\,\frac{1-\beta(1+is)}{1-\beta(\theta)}} \right|^{q_1'} \\
&= |g(t)|^{q_1'\mathrm{Re}\,\frac{1-\beta(1+is)}{1-\beta(\theta)}}
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\frac{1-\beta(1+is)}{1-\beta(\theta)} &= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\frac{1-1-is}{q_0}-\frac{1+is}{q_1}}{1-\frac{1-\theta}{q_0}-\frac{\theta}{q_1}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\frac{1-1-is}{q_0}-\frac{1+is}{q_1}}{1-\frac{1}{q}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{q_0(q_1-1)+(q_1-q_0)is}{q_0q_1}}{\frac{1}{q'}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(q'\frac{q_0(q_1-1)+(q_1-q_0)is}{q_0q_1}\right) \\
&= q'\frac{q_0(q_1-1)}{q_0q_1} \\
&= q'\frac{q_1-1}{q_1} \\
&= \frac{q'}{q_1'}
\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}
\|g_{1+is}\|_{q_1'}^{q_1'} &= \int_V \left| |g(t)|^{\frac{1-\beta(1+is)}{1-\beta(\theta)}} \right|^{q_1'} d\nu \\
&= \int_V |g(t)|^{q_1'\mathrm{Re}\,\frac{1-\beta(1+is)}{1-\beta(\theta)}} d\nu
\end{aligned}$$

$$= \int\limits_V |g(t)|^{q_1' \frac{q'}{q_1'}} \, d\nu$$
$$= \int\limits_V |g(t)|^{q'} \, d\nu$$
$$= \|g\|_{q'}^{q'}$$
$$= 1.$$

Därmed är

$$\begin{aligned} |F(1+is)| &\leq M_1 \left\|f_{1+is}\right\|_{p_1} \left\|g_{1+is}\right\|_{q_1'} \\ &= M_1 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= M_1. \end{aligned}$$

Det gäller alltså att $|F(is)| \leq M_0$ och $|F(1+is)| \leq M_1$ för alla $s \in \mathbb{R}$. Enligt Hadamards trelinjesats är därmed $\sup\limits_{s\in\mathbb{R}} |F(\theta+is)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$. Vi sätter $M \coloneqq \sup\limits_{s\in\mathbb{R}} |F(\theta+is)|$. Eftersom

$$f_\theta(t) = |f(t)|^{\frac{\alpha(\theta)}{\alpha(\theta)}} \, e^{i \arg f(t)}$$

$$= |f(t)| \, e^{i \arg f(t)}$$
$$= f(t)$$

och

$$g_\theta(t) = |g(t)|^{\frac{1-\beta(\theta)}{1-\beta(\theta)}} \, e^{i \arg g(t)}$$

$$= |g(t)| \, e^{i \arg g(t)}$$
$$= g(t)$$

är

$$F(\theta) = \int\limits_V (Tf_\theta) \, g_\theta d\nu$$

$$= \int_V (Tf)\, g d\nu,$$

så

$$\begin{aligned}\left|\int_V (Tf)\, g d\nu\right| &= |F(\theta)| \\ &\leq \sup_{s\in\mathbb{R}} |F(\theta + is)| \\ &\leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.\end{aligned}$$

I kombination med lemma 3.14 får vi alltså att

$$\begin{aligned}\|Tf\|_q &= \sup_{\|g\|_{q'}=1} |\langle Tf,\, g\rangle| \\ &= \sup_{\|g\|_{q'}=1} \left|\int_V (Tf)\, g d\nu\right| \\ &\leq \sup_{s\in\mathbb{R}} |F(\theta + is)| \\ &\leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}\end{aligned}$$

vilket var det vi ville visa.

Fall ii. $f \in L^p$ för alla p som uppfyller $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.
Låt (f_n) vara en följd av enkla funktioner sådana att $|f_n| \leq |f|$ för alla n och $f_n \to f$ punktvis. Låt $E = \{x \mid |f(x)| > 1\}$, $g = f\chi_E$, $g_n = f_n\chi_E$, $h = f - g$ och $h_n = f_n - g_n$ där χ_E är indikatorfunktionen. Vi kan anta att $p_0 < p_1$. Vi får

$$\begin{aligned}\|g\|_{p_0}^{p_0} &= \int_U |g|^{p_0}\, d\mu \\ &= \int_U |f|^{p_0}\, \chi_E d\mu \\ &\leq \int_U |f|^{p}\, \chi_E d\mu\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_U |f|^p \, d\mu \\
&= \|f\|_p^p \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

och

$$
\begin{aligned}
\|h\|_{p_1}^{p_1} &= \int_U |f - f\chi_E|^{p_1} \, d\mu \\
&= \int_U |f(1-\chi_E)|^{p_1} \, d\mu \\
&= \int_U |f\chi_{E^C}|^{p_1} \, d\mu \\
&= \int_U |f|^{p_1} \, \chi_{E^C} \, d\mu \\
&\leq \int_U |f|^{p} \, \chi_{E^C} \, d\mu \\
&\leq \int_U |f|^p \, d\mu \\
&= \|f\|_p^p \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

där E^C är E:s komplement, så $g \in L^{p_0}$ och $h \in L^{p_1}$. Enligt dominerade konvergenssatsen gäller $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ och, eftersom $|g_n| \leq |g|$ och $|h_n| \leq |h|$, $\|g_n\|_{p_0} \to \|g\|_{p_0}$ samt $\|h_n\|_{p_1} \to \|h\|_{p_1}$. Eftersom

$$
\begin{aligned}
\|Tg_n - Tg\|_{q_0} &= \|T(g_n - g)\|_{q_0} \\
&\leq M_0 \, \|g_n - g\|_{p_0}
\end{aligned}
$$

och

$$
\|Th_n - Th\|_{q_1} = \|T(h_n - h)\|_{q_1}
$$

$$\leq M_1 \|h_n - h\|_{p_1}$$

gäller $\|Tg_n - Tg\|_{q_0} \to 0$ och $\|Th_n - Th\|_{q_1} \to 0$. Eftersom Tjebysjovs olikhet ger

$$\mu(x \mid |Tg_n - Tg| > \epsilon) \leq \frac{\|Tg_n - Tg\|_{q_0}^{q_0}}{\epsilon^{q_0}} \to 0$$

och

$$\mu(x \mid |Th_n - Th| > \epsilon) \leq \frac{\|Tg_n - Tg\|_{q_1}^{q_1}}{\epsilon^{q_1}} \to 0$$

för alla $\epsilon > 0$ gäller det att $Tg_n \to Tg$ och $Th_n \to Th$ i mått. Därmed existerar, enligt sats 2.18, delföljder Tg_{n_k} och Th_{n_k} till Tg_n respektive Th_n sådana att $Tg_{n_k} \to Tg$ nästan överallt och $Th_{n_k} \to Th$ nästan överallt. Därmed gäller det att

$$Tf_n = Tg_n + Th_n \to Tg + Th = Tf \text{ nästan överallt}$$

och därmed, enligt Fatous lemma och det vi tidigare visat för enkla funktioner

$$\begin{aligned}\|Tf\|_q &\leq \liminf_{n\to\infty} \|Tf_n\|_q \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f_n\|_p \\ &\leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_p .\end{aligned}$$

Fall 2. Något/några av p_0, p_1, q_0, q_1 är ∞.
Eftersom vi kräver att $p_0 \neq p_1$ kan vi anta att $p_0 < p_1$. Därmed kan inte $p_0 = \infty$. Vi vill använda samma bevis som i fall 1, med byte av norm på vissa ställen. Vi betraktar först delfall 1 då $q_0 = \infty$. Med Hölders olikhet får vi

$$|F(is)| \leq \|Tf_{is}\|_\infty \|g_{is}\|_1$$

eftersom $q_0 = \infty$ medför $q_0' = 1$. Som tidigare (nu med 1 istället för q_0') får vi att

$$\|Tf_{is}\|_\infty \|g_{is}\|_1 \leq M_0 \|f_{is}\|_{p_0} \|g_{is}\|_1$$

och i och med att vi fortfarande har det godtyckliga p_0 och att beräkningarna vi gjort för $\|g_{is}\|_{q_0'}$ också gäller för $q_0' = 1$ har vi $\|f_{is}\|_{p_0} = \|g_{is}\|_1 = 1$ och därmed

$$|F(is)| \leq M_0$$

som tidigare. Vi kan konstatera att fallet $q_1 = \infty$ är analogt, vi får $q_1' = 1$ och $p_1 = p_1$, så allt blir som tidigare. Vi går därmed över till fallet $p_1 = \infty$. Då får vi

$$|F(1 + is)| \leq M_1 \|f_{1+is}\|_\infty \|g_{1+is}\|_{q_1'}$$

som tidigare, och vi vet att $\|g_{1+is}\|_{q_1'} = 1$. Därmed återstår det att undersöka värdet av $\|f_{1+is}\|_\infty$:

$$\begin{aligned}
\|f_{1+is}\|_\infty &= \text{ess sup}\,|f_{1+is}| \\
&\leq \sup |f_{1+is}| \\
&= \sup \left| |f(t)|^{\frac{\alpha(1+is)}{\alpha(\theta)}} e^{i \arg f(t)} \right| \\
&= \sup \left| |f(t)|^{\frac{\alpha(1+is)}{\alpha(\theta)}} \right|.
\end{aligned}$$

I fall 1 kom vi fram till att $\left| |f(t)|^{\frac{\alpha(1+is)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_1} = |f(t)|^p$, det vill säga $\left| |f(t)|^{\frac{\alpha(1+is)}{\alpha(\theta)}} \right| = |f(t)|^{\frac{p}{p_1}}$ och med $p_1 = \infty$ är $|f(t)|^{\frac{p}{p_1}} = |f(t)|^0 = 1$, så $\|f_{1+is}\|_\infty \leq 1$ och därmed $|F(1 + is)| \leq M_1$. Delfall 1 i fall 1 är alltså sant också om något/några av p_0, p_1, q_0, q_1 är ∞.

Vi går över till delfall 2. Igen kan inte $p_0 = \infty$, så vi undersöker fallet $p_1 = \infty$. Då får vi

$$\begin{aligned}
\|h\|_{p_1} &= \|h\|_\infty \\
&= \text{ess sup}\,|h| \\
&= \text{ess sup}\,|f - f\chi_E| \\
&= \text{ess sup}\,|f\chi_{E^C}| \\
&= \text{ess sup}\,(|f|\,\chi_{E^C}) \\
&\leq \text{ess sup}\,|f|
\end{aligned}$$

$$= \|f\|_\infty$$
$$< \infty$$

medan resten av beviset är som tidigare. Därmed återstår det att undersöka vad som händer då q_0 eller q_1 är ∞. Vi ser i beviset att det är i samband med konvergens i mått som det har en betydelse om q_0 och/eller q_1 är oändliga. Vi vet att $\|Tg_n - Tg\|_{q_0} \to 0$ och $\|Th_n - Th\|_{q_1} \to 0$, som i det här fallet är $\|Tg_n - Tg\|_\infty \to 0$ och $\|Th_n - Th\|_\infty \to 0$ eller $\operatorname{ess\,sup} |Tg_n - Tg| \to 0$ och $\operatorname{ess\,sup} |Th_n - Th| \to 0$. Därmed gäller det att om $\|Tg_n - Tg\|_\infty < \epsilon$ så är $|Tg_n - Tg| < \epsilon$ nästan överallt, så $\mu\,(x \mid |Tg_n - Tg| \geq \epsilon) = 0$ (och analogt för $\|Th_n - Th\|_\infty$). Därmed gäller det att $Tg_n \to Tg$ och $Th_n \to Th$ i mått också i detta fall och beviset kan slutföras på samma sätt som tidigare.
Därmed har vi visat att satsen gäller också då något/några av p_0, p_1, q_0, q_1 är ∞ och beviset är klart.

□

3.4 Reell interpolation

Vi går nu över till den reella interpolationen. Beviset av Marcinkiewicz interpolationssats och uppbyggnaden till det är hämtat ur [16].

Definition 3.17. Låt f vara mätbara funktioner på måttrummet $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Funktionen $\lambda_f : (0,\infty) \to [0, \infty]$,

$$\lambda_f(y) = \mu\left(\{x : |f(x)| > y\}\right)$$

kallas f:s fördelningsfunktion.

Definition 3.18. Om f är en mätbar funktion på X och $0 < p \leq \infty$ och vi sätter

$$[f]_p = \begin{cases} \left(\sup\limits_{y>0} y^p \lambda_f(y)\right)^{\frac{1}{p}} & 0 < p < \infty \\ \|f\|_\infty\,, & p = \infty \end{cases}$$

definieras det svaga L^p-rummet som mängden av alla $f \in (X, \mathcal{A}, \mu)$ för vilka det gäller att $[f]_p < \infty$.

Definition 3.19. En avbildning $T : U \to V$ där U och V är vektorrum kallas sublinjär om den uppfyller följande krav:

1. $|T(\alpha f)| = |\alpha||Tf|$ för alla $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$

Definition 3.20. Låt T vara en avbildning från vektorrummet V av mätbara funktioner på $(X, \mathcal{A}, \mu)$ till rummet av alla mätbara funktioner på $(Y, \mathcal{B}, \nu)$. En sublinjär avbildning T är av stark typ (p, q), där $p, q \in [1, \infty]$, om $L^p(\mu) \subseteq V$, T avbildar $L^p(\mu)$ på $L^q(\nu)$ och det existerar en konstant $c > 0$ sådan att

$$\|Tf\|_q \leq c\|f\|_p$$

för alla $f \in L^p(\mu)$.

Definition 3.21. En linjär avbildning T är av svag typ (p, q), där $p \in [1, \infty]$, $q \in [1, \infty)$, om $L^p(\mu) \subseteq V$, T avbildar $L^p(\mu)$ till svaga L^p och det existerar en konstant $c > 0$ sådan att

$$[Tf]_q \leq c\|f\|_p$$

för alla $f \in L^p(\mu)$.

Lemma 3.22. *Om $f \in L^p, 1 \leq p < \infty$ så är $\lambda_f(y) \leq \frac{\|f\|_p^p}{y^p}, y > 0$ och $\|f\|_p^p = p \int\limits_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)dt$.*

Bevis. Vi har

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p &= \int\limits_U |f(x)|^p \, d\mu \\ &\geq \int\limits_{\{x \in U : |f(x)| > y\}} |f(x)|^p \, d\mu\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \int\limits_{\{x\in U:|f(x)|>y\}} y^p d\mu \\
&= y^p \int\limits_{\{x\in U:|f(x)|>y\}} d\mu \\
&= y^p \mu\left(\{x \in U : |f(x)| > y\}\right) \\
&= y^p \lambda_f(y)
\end{aligned}
$$

och genom att dividera de yttersta leden med y^p får vi $\lambda_f(y) \leq \frac{\|f\|_p^p}{y^p}$. Låt nu $A = \{(x, s) : |f(x)|^p > s\}$, då är

$$
\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int\limits_U |f(x)|^p \, d\mu \\
&= \int\limits_U \int\limits_0^{|f(x)|^p} ds d\mu \\
&= \int\limits_{U\times[0,\infty)} \mathbf{1}_A(x, s) ds d\mu \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{U\times[0,\infty)} \mathbf{1}_A(x, s) d\mu ds \\
&= \int\limits_0^\infty \mu\left(\{x \in U : |f(x)|^p > s\}\right) ds.
\end{aligned}
$$

Vi substituerar $s = t^p$, vilket ger $ds = pt^{p-1}dt$ medan integrationsgränserna förblir desamma, så

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty \mu\left(\{x \in U : |f(x)|^p > s\}\right) ds &= \int\limits_0^\infty \mu\left(\{x \in U : |f(x)|^p > t^p\}\right) pt^{p-1}dt \\
&= p \int\limits_0^\infty \mu\left(\{x \in U : |f(x)| > t\}\right) t^{p-1}dt
\end{aligned}
$$

$$= p\int_0^\infty \lambda_f(t)t^{p-1}dt$$
$$= p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)dt$$

vilket var det vi ville bevisa. □

Lemma 3.23. *Om $f \in L^p, 1 \le p < \infty$ så är*

$$\int_{\{x:|f(x)|>y\}} |f|^p \, d\mu = \lambda_f(y)y^p + p\int_y^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)dt$$

och

$$\int_{\{x:|f(x)|\le y\}} |f|^p \, d\mu = -\lambda_f(y)y^p + p\int_0^y t^{p-1}\lambda_f(t)dt.$$

Bevis. Låt igen $A = \{(x,s) : |f(x)|^p > s\}$, då får vi

$$\begin{aligned}
\int_{\{x:|f(x)|>y\}} |f|^p \, d\mu &= \int_{\{x:|f(x)|>y\}} \int_0^{|f(x)|^p} ds d\mu \\
&= \int_{\{x:|f(x)|>y\}} \int_0^{y^p} ds d\mu + \int_{\{x:|f(x)|>y\}} \int_{y^p}^{|f(x)|^p} ds d\mu \\
&= y^p \int_{\{x:|f(x)|>y\}} d\mu + \int_{U\times[y^p,\infty)} \mathbf{1}_A(x,s) ds d\mu \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} y^p\mu\left(\{x : |f(x)| > y\}\right) + \int_{U\times[y^p,\infty)} \mathbf{1}_A(x,s) d\mu ds \\
&= y^p\lambda_f(y) + \int_{y^p}^\infty \mu\left(\{x : |f(x)|^p > s\}\right) ds.
\end{aligned}$$

Vi utför samma substitution som i lemma 3.22. Nu leder den också till en förändring i den nedre integreringsgränsen, eftersom $s = t^p$ innebär att $t = y$ då $s = y^p$. Därmed är

$$\begin{aligned} y^p \lambda_f(y) + \int_{y^p}^{\infty} \mu\left(\{x : |f(x)|^p > s\}\right) ds &= y^p \lambda_f(y) + \int_{y}^{\infty} \mu\left(\{x : |f(x)|^p > t^p\}\right) p t^{p-1} dt \\ &= y^p \lambda_f(y) + p \int_{y}^{\infty} t^{p-1} \lambda_f(t) dt. \end{aligned}$$

Vi går över till det andra påståendet:

$$\begin{aligned} \int_{\{x:|f(x)|\leq y\}} |f|^p \, d\mu &= \int_U |f|^p \, d\mu - \int_{\{x:|f(x)|>y\}} |f|^p \, d\mu \\ &\overset{\text{lemma 3.22 och första påståendet}}{=} p \int_0^{\infty} t^{p-1} \lambda_f(t) dt - y^p \lambda_f(y) - p \int_y^{\infty} t^{p-1} \lambda_f(t) dt \\ &= -y^p \lambda_f(y) + p \int_0^{y} t^{p-1} \lambda_f(t) dt. \end{aligned}$$

$\square$

3.4.1 Marcinkiewicz interpolationssats

Vi är nu klara med förberedelserna för att kunna bevisa Marcinkiewicz interpolationssats. Józef Marcinkiewicz (1910 – 1940) var från Polen och en av många polacker som tillfångatogs av Sovjetunionen under andra världskriget. Han var en av de tusentals polska militärer som avrättades i Katyn år 1940. Interpolationssatsen publicerades året innan Marcinkiewicz död.

Sats 3.24. *Anta att $T : \mathcal{M}(U, \mu) \to \mathcal{M}(V, \nu)$, där $\mathcal{M}(U, \mu)$ är mängden av alla μ-mätbara funktioner på vektorrummet U och motsvarande för $\mathcal{M}(V, \nu)$, är en sublinjär operator av svag typ (p_0, p_0) och (p_1, p_1), där $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$. Då är T av stark typ (p, p) för alla $p \in (p_0, p_1)$.*

Bevis. Anta att $p_1 \neq \infty$. Låt $f \in L^p$ samt

$$g_y(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq y \\ 0, & |f(x)| > y \end{cases}$$

och

$$h_y(x) = \begin{cases} 0, & |f(x)| \leq y \\ f(x), & |f(x)| > y \end{cases}.$$

Eftersom

$$\begin{aligned} \|g_y\|_{p_1}^{p_1} &= \int_U |g_y|^{p_1}\, d\mu \\ &= y^{p_1} \int_U \left|\frac{g_y}{y}\right|^{p_1} d\mu \\ &\leq y^{p_1} \int_U \left|\frac{g_y}{y}\right|^{p} d\mu \\ &\leq y^{p_1-p} \int_U |f|^p\, d\mu \\ &< \infty \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \|h_y\|_{p_0}^{p_0} &= \int_U |h_y|^{p_0}\, d\mu \\ &= y^{p_0} \int_U \left|\frac{h_y}{y}\right|^{p_0} d\mu \\ &\leq y^{p_0} \int_U \left|\frac{h_y}{y}\right|^{p} d\mu \\ &\leq y^{p_0-p} \int_U |f|^p\, d\mu \end{aligned}$$

$$< \infty$$

gäller det att $g_y \in L^{p_1}$ och $h_y \in L^{p_0}$. Enligt hur g_y och h_y definierats gäller $f(x) = g_y(x) + h_y(x)$ och i och med att T är sublinjär är

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &= |T(g_y(x) + h_y(x))| \\ &\leq |Tg_y(x)| + |Th_y(x)|. \end{aligned}$$

Anta att $x \in U$ och $|Tf(x)| > y$. Då är $|Tg_y(x)| + |Th_y(x)| > y$, det vill säga $|Tg_y(x)| > \frac{y}{2}$ eller $|Th_y(x)| > \frac{y}{2}$ så $\{x : |Tf(x)| > y\} \subseteq \left\{x : |Tg_y(x)| > \frac{y}{2}\right\} \cup \left\{x : |Th_y(x)| > \frac{y}{2}\right\}$ och därmed är $\lambda_{Tf}(y) \leq \lambda_{Tg_y}\left(\frac{y}{2}\right) + \lambda_{Th_y}\left(\frac{y}{2}\right)$. Eftersom T är av svag typ (p_1, p_1) existerar en konstant $c > 0$ sådan att

$$\begin{aligned} [Tg_y]_{p_1} &\leq c \|g_y\|_{p_1} \\ \left(\sup_{z>0} z^{p_1} \lambda_{Tg_y}(z)\right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq c \left(\int_U |g|^{p_1}\, d\mu\right)^{\frac{1}{p_1}} \\ \sup_{z>0} z^{p_1} \lambda_{Tg_y}(z) &\leq c_1 \int_U |g|^{p_1}\, d\mu \end{aligned}$$

där $c_1 = c^{p_1}$. I och med att $\left(\frac{y}{2}\right)^{p_1} \lambda_{Tg_y}\left(\frac{y}{2}\right) \leq \sup_{z>0} z^{p_1} \lambda_{Ty}(z)$ gäller $\left(\frac{y}{2}\right)^{p_1} \lambda_{Tg_y}\left(\frac{y}{2}\right) \leq c_1 \int_U |g|^{p_1}\, d\mu$, det vill säga $\lambda_{Tg_y}\left(\frac{y}{2}\right) \leq c_1 \left(\frac{2}{y}\right)^{p_1} \int_U |g|^{p_1}\, d\mu = c_1 \left(\frac{2}{y}\right)^{p_1} \int_{\{x:|f(x)|\leq y\}} |f|^{p_1}\, d\mu$. Eftersom T är av svag typ (p_0, p_0) fås analogt $\lambda_{Th_y}\left(\frac{y}{2}\right) \leq c_2 \left(\frac{2}{y}\right)^{p_0} \int_{\{x:|f(x)|>y\}} |f|^{p_0}\, d\mu$. Vi får

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &\overset{\text{lemma } 3.22}{=} p \int_0^\infty y^{p-1} \lambda_{Tf}(y) dy \\ &\leq p \int_0^\infty y^{p-1} \left(\lambda_{Tg_y}\left(\frac{y}{2}\right) + \lambda_{Th_y}\left(\frac{y}{2}\right)\right) dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p\int_0^\infty y^{p-1}\lambda_{Tg_y}\left(\frac{y}{2}\right)dy + p\int_0^\infty y^{p-1}\lambda_{Th_y}\left(\frac{y}{2}\right)dy \\
&\leq p\int_0^\infty y^{p-1}c_1\left(\frac{2}{y}\right)^{p_1}\int_{\{x:|f(x)|\leq y\}}|f|^{p_1}\,d\mu dy + p\int_0^\infty y^{p-1}c_2\left(\frac{2}{y}\right)^{p_0}\int_{\{x:|f(x)|>y\}}|f|^{p_0}\,d\mu dy \\
&= 2^{p_1}c_1p\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{y^{p_1}}\int_{\{x:|f(x)|\leq y\}}|f|^{p_1}\,d\mu dy + 2^{p_0}c_2p\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{y^{p_0}}\int_{\{x:|f(x)|>y\}}|f|^{p_0}\,d\mu dy \\
&\overset{\text{lemma 3.23}}{=} 2^{p_1}c_1p\int_0^\infty y^{p-p_1-1}\left(-\lambda_f(y)y^{p_1} + p_1\int_0^y t^{p_1-1}\lambda_f(t)dt\right)dy \\
&\quad + 2^{p_0}c_2p\int_0^\infty y^{p-p_0-1}\left(\lambda_f(y)y^{p_0} + p_0\int_y^\infty t^{p_0-1}\lambda_f(t)dt\right)dy \\
&= -2^{p_1}c_1p\int_0^\infty y^{p-p_1-1}\lambda_f(y)y^{p_1}dy + 2^{p_1}c_1p\int_0^\infty y^{p-p_1-1}p_1\int_0^y t^{p_1-1}\lambda_f(t)dtdy \\
&\quad + 2^{p_0}c_2p\int_0^\infty y^{p-p_0-1}\lambda_f(y)y^{p_0}dy + 2^{p_0}c_2p\int_0^\infty y^{p-p_0-1}p_0\int_y^\infty t^{p_0-1}\lambda_f(t)dtdy \\
&\leq 2^{p_1}c_1pp_1\int_0^\infty y^{p-p_1-1}\int_0^y t^{p_1-1}\lambda_f(t)dtdy + 2^{p_0}c_2p\int_0^\infty y^{p-1}\lambda_f(y)dy \\
&\quad + 2^{p_0}c_2pp_0\int_0^\infty y^{p-p_0-1}\int_y^\infty t^{p_0-1}\lambda_f(t)dtdy \\
&= 2^{p_1}c_1pp_1\int_0^\infty\int_t^\infty y^{p-p_1-1}t^{p_1-1}\lambda_f(t)dydt + 2^{p_0}c_2\left\|f\right\|_p^p + 2^{p_0}c_2pp_0\int_0^\infty\int_0^t y^{p-p_0-1}t^{p_0-1}\lambda_f(t)dydt \\
&= 2^{p_0}c_2\left\|f\right\|_p^p + 2^{p_1}c_1pp_1\int_0^\infty t^{p_1-1}\lambda_f(t)\int_t^\infty y^{p-p_1-1}dydt + 2^{p_0}c_2pp_0\int_0^\infty t^{p_0-1}\lambda_f(t)\int_0^t y^{p-p_0-1}dydt \\
&= 2^{p_0}c_2\left\|f\right\|_p^p + 2^{p_1}c_1pp_1\int_0^\infty t^{p_1-1}\lambda_f(t)\left(-\frac{1}{p-p_1}t^{p-p_1}\right)dt \\
&\quad + 2^{p_0}c_2pp_0\int_0^\infty t^{p_0-1}\lambda_f(t)\frac{1}{p-p_0}t^{p-p_0}dt \\
&= 2^{p_0}c_2\left\|f\right\|_p^p + 2^{p_1}c_1pp_1\frac{1}{p_1-p}\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)dt + 2^{p_0}c_2pp_0\frac{1}{p-p_0}\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{p_0} c_2 \|f\|_p^p + 2^{p_1} c_1 p_1 \frac{1}{p_1 - p} \|f\|_p^p + 2^{p_0} c_2 p_0 \frac{1}{p - p_0} \|f\|_p^p \\
&= c_3 \|f\|_p^p + c_4 \|f\|_p^p + c_5 \|f\|_p^p \\
&= c_6 \|f\|_p^p .
\end{aligned}
$$

Vi kom alltså fram till att $\|Tf\|_p^p \leq c_6 \|f\|_p^p$, där c_6 är en positiv konstant. Därmed är T av stark typ (p, p) för alla $p \in (p_0, p_1)$.
Vi ska ännu undersöka fallet $p_1 = \infty$. Låt $f \in L^p$. Vi sätter

$$
g_y(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq \frac{y}{2c_1} \\ \frac{y}{2c_1} \operatorname{sgn}(f(x)) & |f(x)| > \frac{y}{2c_1} \end{cases}
$$

och

$$
h_y(x) = f(x) - g_y(x)
$$

där c_1 är en positiv konstant sådan att $\|Tf\|_\infty \leq c_1 \|f\|_\infty$ och $\operatorname{sgn}(f(x))$ är signumfunktionen,

$$
\operatorname{sgn}(f(x)) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0 \\ 0, & f(x) = 0 \\ -1, & f(x) < 0 \end{cases} .
$$

Eftersom $\|g_y\|_\infty = \|f\|_\infty < \infty$ eller $\|g_y\|_\infty = \left\| \frac{y}{2c_1} \operatorname{sgn}(f(x)) \right\|_\infty \leq \left\| \frac{y}{2c_1} \right\|_\infty = \frac{y}{2c_1} \leq \infty$ gäller det att $g_y \in L^\infty$. Eftersom $h_y(x) = 0$ eller $|h_y(x)| = \left| f(x) - \frac{y}{2c_1} \operatorname{sgn}(f(x)) \right| \leq |f(x)| + \frac{y}{2c_1}$ och $f \in L^p$ gäller det att $h_y \in L^{p_0}$. Dessutom gäller det att $|g_y| \leq \frac{y}{2c_1}$, eftersom om $|f(x)| \leq \frac{y}{2c_1}$ så är $|g_y(x)| = |f(x)|$ och om $|f(x)| > \frac{y}{2c_1}$ så är $|g_y(x)| = \left| \frac{y}{2c_1} \operatorname{sgn}(f(x)) \right| = \left| \frac{y}{2c_1} \right|$. Det här innebär att

$$
\lambda_{g_y}(t) = \begin{cases} \lambda_f(t), & t < \frac{y}{2c_1} \\ 0, & t \geq \frac{y}{2c_1} \end{cases} .
$$

Enligt hur h_y definierats gäller $f(x) = g_y(x) + h_y(x)$ och i och med att T är sublinjär är

$$\begin{aligned}|Tf(x)| &= |T(g_y(x) + h_y(x))| \\ &\leq |Tg_y(x)| + |Th_y(x)|.\end{aligned}$$

Eftersom T är av svag typ (∞, ∞) existerar en konstant $c_1 > 0$ sådan att $[Tg_y]_\infty \leq c_1 \|g_y\|_\infty$, det vill säga $\|Tg_y\|_\infty \leq c_1 \|g_y\|_\infty$. Eftersom $\|g_y\|_\infty = \text{ess sup}\,|g_y| \leq \sup|g_y| \leq \sup \frac{y}{2c_1} = \frac{y}{2c_1}$ är $\|Tg_y\|_\infty \leq c_1 \|g_y\|_\infty \leq c_1 \frac{y}{2c_1} = \frac{y}{2}$. Därmed är $\lambda_{Tg_y}\left(\frac{y}{2}\right) = 0$. Anta att $x \in U$ och $|Tf(x)| > y$. Då är $|Tg_y(x)| + |Th_y(x)| > y$, det vill säga $|Tg_y(x)| > \frac{y}{2}$ eller $|Th_y(x)| > \frac{y}{2}$ så $\{x : |Tf(x)| > y\} \subseteq \left\{x : |Tg_y(x)| > \frac{y}{2}\right\} \cup \left\{x : |Th_y(x)| > \frac{y}{2}\right\}$ och därmed är $\lambda_{Tf}(y) \leq \lambda_{Tg_y}\left(\frac{y}{2}\right) + \lambda_{Th_y}\left(\frac{y}{2}\right) = 0 + \lambda_{Th_y}\left(\frac{y}{2}\right) = \lambda_{Th_y}\left(\frac{y}{2}\right)$. Eftersom T är av svag typ (p_0, p_0) fås precis som ovan $\lambda_{Th_y}\left(\frac{y}{2}\right) \leq c_2 \left(\frac{2}{y}\right)^{p_0} \int\limits_{\{x:|f(x)|>y\}} |f|^{p_0}\, d\mu$. Med det här får vi

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p^p &\overset{\text{lemma 3.22}}{=} p \int_0^\infty y^{p-1} \lambda_{Tf}(y) dy \\ &\leq p \int_0^\infty y^{p-1} \left(\lambda_{Tg_y}\left(\frac{y}{2}\right) + \lambda_{Th_y}\left(\frac{y}{2}\right)\right) dy \\ &= p \int_0^\infty y^{p-1} \lambda_{Th_y}\left(\frac{y}{2}\right) dy \\ &\overset{\text{enligt ovan}}{\leq} 2^{p_0} c_2 \|f\|_p^p + 2^{p_0} c_2 p_0 \frac{1}{p - p_0} \|f\|_p^p \\ &= c_3 \|f\|_p^p + c_4 \|f\|_p^p \\ &= c_5 \|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Vi kom alltså fram till att $\|Tf\|_p^p \leq c_5 \|f\|_p^p$, där c_5 är en positiv konstant. Därmed är T av stark typ (p, p) för alla $p \in (p_0, \infty)$.

Vi har därmed bevisat Marcinkiewicz interpolationssats för alla $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$. $\square$

Kapitel 4

Tillämpningar

Vi ska nu se på några tillämpningar av interpolationsteorin. Vi bevisar Hausdorff-Youngs olikhet och Youngs faltningsolikhet med Riesz-Thorins interpolationssats.

4.1 Hausdorff-Youngs olikhet

Beviset är hämtat ur [6], med viss bearbetning.

Sats 4.1. *Låt F vara fouriertransformen*

$$Ff(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle x,y\rangle} dy$$

där $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ och $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$. Om $1 \leq p \leq 2$ och $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ är

$$\|Ff\|_q \leq \|f\|_p \,.$$

Bevis. I och med att vi vill använda Riesz-Thorins interpolationssats behöver vi hitta $1 \leq p_0, p_1 \leq 2$, $p_0 \neq p_1$ och $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$ för vilka det gäller att $\|Ff\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}$ och $\|Ff\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}$.

Vi börjar med

$$\begin{aligned}
\|Ff\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |Ff(x)| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle x,y\rangle} dy \right| \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(y)e^{-i\langle x,y\rangle} \right| dy \right) \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left| e^{-i\langle x,y\rangle} \right| dy \right) \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy \\
&= \|f\|_1 .
\end{aligned}$$

Vi har alltså, med hjälp av triangelolikheten för integraler, visat att $\|Ff\|_\infty \leq \|f\|_1$, det vill säga $F : L_1 \to L_\infty$ är begränsad av en konstant $M_0 \leq 1$ och vi har $p_0 = 1, q_0 = \infty$.

Det andra paret är $p_1 = q_1 = 2$, och i det här fallet får vi likhet: $\|Ff\|_2 = \|f\|_2$. Vi ska nu bevisa detta påstående, som fått ett eget namn (bevis ur [8]):

Sats 4.2. *(Plancherels sats.) Låt antagandena vara desamma som i föregående sats och därtill att F^{-1} är inversen av fouriertransformationen, det vill säga $F^{-1}Ff(x) = f(x)$. Då är $\|Ff\|_2 = \|f\|_2$.*

Bevis. Vi får

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)Ff(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle x,y\rangle} dy \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,y\rangle} dx \right) dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) F f(y) dy,$$

där integreringsordningen kan bytas om enligt Fubinis sats. Om vi nu låter $\bar{z}$ beteckna det komplexa konjugatet till z får vi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{F^{-1}Ff(x)}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) F\left(\overline{Ff(x)}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} Ff(y)\overline{Ff(y)}dy, \end{aligned}$$

där det sista steget kommer ur likheten ovan. Vi vet att $z\overline{z} = |z|^2$, så vi kan skriva om den erhållna likheten:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}dx &= \int_{\mathbb{R}^n} Ff(y)\overline{Ff(y)}dy \\ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |Ff(y)|^2 dy \\ \|f\|_2^2 &= \|Ff\|_2^2 \\ \|f\|_2 &= \|Ff\|_2 . \end{aligned}$$

□

Vi har därmed visat att $\|Ff\|_\infty \leq \|f\|_1$ och $\|Ff\|_2 = \|f\|_2$, så Riesz-Thorins interpolationssats ger att $\|Ff\|_q \leq \|f\|_p$ för $\frac{1}{p} = \frac{1+\theta}{2}$ och $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2}$, det vill säga för $1 \leq p \leq 2$, $2 \leq q \leq \infty$ och $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vilket är Hausdorff-Youngs olikhet. □

4.2 Youngs faltningsolikhet

Beviset till olikheten är hämtat ur [6], [9] och [1].

Sats 4.3. *Låt T vara faltningsoperatorn*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy = k * f(x),$$

där $k \in L_q(\mathbb{R}^n), 1 \leq q \leq \infty$. Då är

$$\|k * f(x)\|_r \leq \|k\|_q \|f\|_p ,$$

där $1 \leq p \leq q', q' = \frac{q}{q-1}$ och $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

Bevis. Vi börjar med

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |k(x-y)f(y)|\, dy \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(x-y)|^q\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{q'}\, dy \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &= \|k\|_q \|f\|_{q'} . \end{aligned}$$

Eftersom x är godtyckligt i olikheten ovan och $\|Tf\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |Tf(x)|$ får vi att $\|Tf\|_\infty \leq \|k\|_q \|f\|_{q'}$, det vill säga $T : L_{q'} \to L_\infty$ är begränsad av en konstant $\|k\|_q$ där $q' = \frac{q}{q-1}$, det vill säga $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

För att få det andra paret undersöker vi $\|Tf\|_q$:

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_q &= \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy \right\|_q \\
&= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy \right|^q \right) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x-y)f(y)|\, dy \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\overset{\text{Minkowski}}{\le} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x-y)f(y)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x-y)|^q\, |f(y)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(|f(y)|^q \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x-y)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x-y)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, \|k\|_q\, dy \\
&= \|k\|_q \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy \\
&= \|k\|_q\, \|f\|_1 .
\end{aligned}$$

Därmed är $T : L_1 \to L_q$ också begränsad av konstanten $\|k\|_q$. Vi kan använda Riesz-Thorins interpolationssats: vi har $M_0 = M_1 = \|k\|_q$, så $M \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} = M_0^{1-\theta} M_0^{\theta} = M_0 = \|k\|_q$, och $p_0 = 1, p_1 = q', r_0 = q, r_1 = \infty$ (i och med att q används på ett annat sätt här ersätter r q i Riesz-Thorins interpolationssats). Därmed får vi $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{q'}$ och

$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{\infty}$, det vill säga $\frac{1}{p} = 1-\theta + \frac{\theta}{q'}$ och $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{q}$. Genom att lösa den andra ekvationen med avseende på θ och efter substitution lösa den första ekvationen med avseende på $\frac{1}{r}$ får vi $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Eftersom $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{q'}$ får vi $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q'} - 1$, det vill säga $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q'}$. Eftersom $\frac{1}{r} \geq 0$ är $\frac{1}{p} - \frac{1}{q'} \geq 0$ är $p \leq q'$ och olikheten är bevisad. $\square$

Kapitel 5

Avslutning

Vi har nu tittat på två klassiska interpolationsmetoder: interpolationssatserna av Riesz-Thorin och Marcinkiewicz. Naturligtvis är det här bara ett litet skrap på ytan av interpolationsteorin, både vad gäller metoder och tillämpningar. Syftet med denna avhandling är att få en inblick i grunderna för interpolationsprincipen. Under skrivandets gång har jag efter hand mer och mer börjat inse dels hur interpolationen går till i dessa metoder, dels har jag sett det vackra i den. Det är fascinerande hur det räcker med att kraven är uppfyllda för några värden för att med interpolationsteorin kunna vara säker på att det gäller för alla värden däremellan. Det känns logiskt att någon form av interpolation borde existera, samtidigt har vi sett att det är en hel del detaljer i bevisen till de interpolationsmetoder vi bevisat så det är långt ifrån trivialt.

Med det sagt är interpolationsteorin inte alltid den bästa när det gäller att få fram skarpa konstanter för olikheter, det vill säga att det M som interpolationsteorin ger inte nödvändigtvis är detsamma som det minsta talet K för vilket $\|Tf\|_q \leq K \|f\|_p$ gäller. Exempelvis är det här fallet både för Hausdorff-Youngs olikhet och Youngs faltningsolikhet. För Hausdorff-Youngs olikhet är den bästa konstanten, bevisad av Ivan Babenko och William Beckner, A_p^n, där $A_p = \sqrt{\frac{p^{\frac{1}{p}}}{q^{\frac{1}{q}}}}$. Beckner är också den som funnit den skarpa konstanten för Youngs faltningsolikhet. Den är $(A_p A_q A_{r'})^n \|k\|_q$, där $A_s = \sqrt{\frac{s^{\frac{1}{s}}}{s'^{\frac{1}{s'}}}}$ och $s' = \frac{s}{s-1}$ [9]. Om vi jämför de konstanter vi får ur de två olika interpolationssatserna är de som Riesz-Thorin ger bättre, medan Marcinkiewicz konstanter blir mycket stora nära ändpunkterna. Marcinkiewicz interpolationssats har ändå den fördelen att den går att tillämpa på sublinjär operatorer, medan Riesz-Thorin kräver linjära operatorer. Också i fråga om vilka rum de fungerar på är spektret större för Marcinkiewicz än Riesz-Thorin, så det finns alltså fördelar och nackdelar med båda två om de jämförs med varandra [13]. Därmed kan ingen av dem sägas vara bättre än den andra, vilken som är lämpligast att använda måste avgöras från fall till fall.

Litteraturförteckning

[1] Matthew D. Blair. *Notes on interpolation theory*, 2017. https://math.unm.edu/%7eblair/math565f17/interpolation_notes_f17.pdf.

[2] Gerald B. Folland. *Real Analysis*. John Wiley & Sons, 1984.

[3] Chengchun Hao. *Lectures on introduction to harmonic analysis*, 2017. http://www.math.ac.cn/kyry/hcc/teach/201512/P020171222316385879248.pdf.

[4] Christopher Heil. Modes of Convergence, 2007. https://heil.math.gatech.edu/6337/fall07/section2.4b.pdf.

[5] G. H. Hardy. J. E. Littlewood och G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, 1934.

[6] Jöran Bergh och Jörgen Löfström. *Interpolation Spaces An Introduction*. Springer-Verlag, 1976.

[7] Colin Bennett och Robert Sharpley. *Interpolation of Operators*. Academic Press, 1988.

[8] Okänd vid École polytechnique fédérale de Lausanne. *The Fourier transform on R^n*, 2020. https://www.epfl.ch/labs/pde/wp-content/uploads/2020/04/Lecture5.pdf.

[9] Lars-Erik Persson. *The interplay between Convexity, Interpolation and Inequalities*, 2015. https://www.college-de-france.fr/media/en-pierre-louis-lions/UPL3685291072245700610_Persson___Lecture_2.pdf.

[10] René L. Schilling. *Measures, Integrals and Martingales.* Cambridge University Press, 2005.

[11] David Stenlund. *Anteckningar till kursen Sannolikhetslära, del II*, 2020. https://stack.abo.fi/moodle/pluginfile.php/12300/mod_resource/content/8/2020-snldel2.pdf.

[12] George Stepaniants. *The Lebesgue Integral, Chebyshev's Inequality, and the Weierstrass Approximation Theorem*, 2017. https://sites.math.washington.edu/%7emorrow/336_19/papers17/george.pdf.

[13] Ian Tice. *A crash course in interpolation theory*, 2022. https://www.math.cmu.edu/%7eiantice/notes/interpolation_notes.pdf.

[14] Saeed Zakeri. *Fubini's Theorem.* http://qcpages.qc.cuny.edu/%7ezakeri/mat208/note1.pdf.

[15] Kehe Zhu. *Operator Theory in Function Spaces.* American Mathematic Society, 2007.

[16] Matt Ziemke. *Interpolation of operators: Riesz-Thorin, Marcinkiewicz*, 2011. https://www.math.drexel.edu/faculty/mjz55/wp-content/uploads/sites/8/2017/01/at-interpol.pdf.