Åbo Akademi

FAKULTETSOMRÅDET FÖR
NATURVETENSKAPER OCH TEKNIK

AVHANDLING PRO GRADU

Optimal stopping av Markovkedjor i diskret tid

Skribent:
Aleksi FALER, 37892

Handledare:
Paavo SALMINEN

2022

Innehåll

Kapitel 1

Introduktion

Observera en Markovkedja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Vid varje tidpunkt $n \in \mathbb{N}_0$ finns en möjlighet att stanna eller fortsätta till följande observation. Beslutet att stanna fattas utifrån utförda observationer. Om man stannar vid tidpunkten n efter att ha observerat $X_0 = x_0$, $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$, får man vinsten $g(x_n)$. Vinstfunktionen g antas vara icke-negativ. I allmänhet är tidpunkten var man stannar slumpmässig eftersom Markovkedjan är slumpmässig. Således betecknas denna tidpunkt med en stokastisk variabel τ kallad stopptid. Då är vinsten

$$g(X_\tau) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} g(X_n) I_{\{\tau=n\}} + g(X_\infty) I_{\{\tau=\infty\}}$$

en stokastisk variabel. Händelsen $\{\tau = \infty\}$ betyder att man aldrig stannar och

$$g(X_\infty) \coloneqq \limsup_{n\to\infty} g(X_n)$$

är vinsten om man aldrig stannar.

Beteckna mängden av alla stopptider med $\overline{\mathcal{M}}$. Givet att Markovkedjan startar från tillståndet $X_0 = x$, kan man förvänta sig att vinna $\mathbb{E}[g(X_\tau)|X_0 = x]$ vid en stopptid $\tau \in \overline{\mathcal{M}}$. Värdefunktionen

$$\overline{V}(x) \coloneqq \sup_{\tau\in\overline{\mathcal{M}}} \mathbb{E}[g(X_\tau)|X_0 = x]$$

ger den största förväntade vinsten. En stopptid $\tau^* \in \overline{\mathcal{M}}$ för vilken gäller

$$\mathbb{E}[g(X_{\tau^*})|X_0 = x] = \overline{V}(x),$$

kallas för en optimal stopptid. Vid ett optimal stopping-problem vill man hitta en beskrivning för värdefunktionen och för den optimala stopptiden.

Stopptider och Markovkedjor definieras i det andra kapitlet tillsammans med några exempel. Andra nödvändiga definitioner och satser beskrivs också. Material från olika källor har använts i detta kapitel.

I det tredje kapitlet betraktas optimal stopping-problem där det är tillåtet att endast göra ett begränsat antal observationer. Sådana problem kan lösas med rekursion och två olika lösningsmetoder presenteras. Presentationen följer kapitel 2 i Shiryaev [7].

I det fjärde kapitlet studeras excessiva funktioner och det visas att värdefunktionen är den minsta excessiva majoranten av vinstfunktionen g. Utöver den hittills betraktade modellen med vinsten $g(X_\tau)$, presenteras också en modell där varje observation är förknippad med en kostnad. Då är

$$\beta^\tau g(X_\tau) - \sum_{k=0}^{\tau-1} \beta^k c(X_k)$$

vinsten vid en stopptid τ. Konstanten $0 < \beta \leq 1$ gör att framtida värden är mindre värdefulla och funktionen c ger kostnaden för att göra en ny observation. Här följer presentationen också kapitel 2 i Shiryaev [7].

Det femte kapitlet presenterar ett problem av Darling, Liggett och Taylor [2]. Problemet handlar om optimal stopping av en partialsumma.

Kapitel 2

Grundläggande teori

2.1 Stokastiska variabler

I ett slumpförsök betecknar Ω mängden av alla elementära utfall och kallas för utfallsrummet. Inför också beteckningarna $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ och $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$.

Definition 2.1. *Samlingen av alla delmängder av Ω kallas för en potensmängd och betecknas 2^Ω* ([4], s.7).

Definition 2.2. *Låt Ω vara en icke-tom mängd. En samling $\mathcal{F}$ av delmängder av Ω för vilken gäller*

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$,

(iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$,

kallas för en σ-algebra. Paret $(\Omega, \mathcal{F})$ kallas för ett mätbart rum. ([8], s.7).

En delmängd av Ω som hör till $\mathcal{F}$ kallas för en händelse. Varje samling av delmängder av Ω ger upphov till en σ-algebra.

Definition 2.3. *Låt Ω vara en icke-tom mängd och $\mathcal{A}$ en samling av delmängder av Ω. Den minsta σ-algebran som $\mathcal{A}$ är en delmängd av är*

$$\sigma(\mathcal{A}) := \bigcap_{\mathcal{G} \in \mathfrak{G}} \mathcal{G}$$

där $\mathfrak{G}$ är mängden av alla σ-algebror $\mathcal{G}$ som $\mathcal{A}$ är en delmängd av. Denna minsta σ-algebra kallas för en σ-algebra genererad av $\mathcal{A}$. ([8], s.8).

Anmärkning 2.4. *Mängden* $\mathfrak{G}$ *innehåller åtminstone* 2^{Ω} *och snittet av* σ*-algebror är en* σ*-algebra så den minsta* σ*-algebran* $\sigma(\mathcal{A})$ *är alltid definierad* ([4], s.7)*. Om* $\mathcal{A}$ *är en* σ*-algebra, är* $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$*.*

Definition 2.5. *Betrakta* $\Omega = \mathbb{R}$ *och låt* $\mathcal{A}$ *vara samlingen av alla öppna intervaller av* $\mathbb{R}$*. Då kallas* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{A})$ *för Borel* σ*-algebra av* $\mathbb{R}$*. Borel* σ*-algebra av* $\mathbb{R}^n$ *för* $n \in \mathbb{N}$ *är* σ*-algebran genererad av samlingen av alla öppna delmängder av* $\mathbb{R}^n$ *och betecknas* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*. Elementen i* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *kallas för Borelmängder och* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *utgör ett mätbart rum.* ([8], s.8)*.*

Definition 2.6. *Låt* $(\Omega, \mathcal{F})$ *vara ett mätbart rum. En följd* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *av* σ*-algebror för vilka gäller*

(i) $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$

(ii) $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$

kallas för en filtration. ([8], s.31)*. Sätt* $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n)$ ([4], s.233)*.*

En filtration är alltså en icke-avtagande följd av σ-algebror. Oftast kan man tänka att $\mathcal{F}_n$ innehåller informationen upp till tidpunkten n och att informationen ökar med tiden.

Definition 2.7. *Låt* $(\Omega, \mathcal{F})$ *vara ett mätbart rum. En funktion* $\mathbb{P} \colon \mathcal{F} \to [0, 1]$ *för vilken gäller*

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1,$

(ii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j, \implies \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i),$

kallas för ett sannolikhetsmått. Ett mätbart rum $(\Omega, \mathcal{F})$ *försett med ett sannolikhetsmått* $\mathbb{P}$ *kallas för ett sannolikhetsrum och betecknas* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*.* ([8], s.7–8)*. Ett sannolikhetsrum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *försett med en filtration* $\mathbb{F}$ *betecknas* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$*.*

Definition 2.8. *Låt* $(V, \mathcal{V})$ *och* $(U, \mathcal{U})$ *vara mätbara rum. En funktion* $f \colon V \to U$ *för vilken gäller*

$$\{v \in V : f(v) \in B\} \in \mathcal{V}, \quad \forall B \in \mathcal{U},$$

kallas $\mathcal{V}$*-mätbar. Låt* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vara ett sannolikhetsrum. En* $\mathcal{F}$*-mätbar funktion* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *kallas för en stokastisk variabel då* $n = 1$ *och för en stokastisk vektor då* $n \geq 2$*.* ([4], s.47)*.*

Mängden $\{v \in V : f(v) \in B\}$ kan skrivas kortare som $\{f \in B\}$ eller $f^{-1}(B)$. Om X är en stokastisk variabel eller vektor, kallas $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{X \in B\}$ för en händelse.

Definition 2.9. *Låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och $X_1, X_2, \ldots, X_n$ stokastiska variabler där $n \in \mathbb{N}$. Då kallas*

$$\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) := \big\{\{(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\big\}$$

för en σ-algebra genererad av $X_1, X_2, \ldots, X_n$. ([8], s.8).

Anmärkning 2.10. *En stokastisk variabel X_1 är $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$-mätbar och den minsta σ-algebran som gör X_1 en mätbar funktion är $\sigma(X_1)$* ([8], s.8).

Man kan tolka $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ som information om de stokastiska variablerna $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Ofta definieras $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ så att $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tillsammans med $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ utgör en filtration.

Definition 2.11. *Låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och I en godtycklig indexmängd.*

(i) Två händelser A_1 och A_2 för vilka gäller $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$, kallas oberoende. En samling $(A_i)_{i\in I}$ av händelser för vilken gäller

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)$$

för varje ändlig $J \subseteq I$, kallas oberoende.

(ii) Två samlingar $\mathcal{A}_1$ och $\mathcal{A}_2$ av händelser sådana att $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$ gäller för varje $A_1 \in \mathcal{A}_1$ och $A_2 \in \mathcal{A}_2$, kallas oberoende. Samlingarna $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ för vilka gäller

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)$$

för varje ändlig $J \subseteq I$ och för varje $A_i \in \mathcal{A}_i$, kallas oberoende.

(iii) De stokastiska variablerna $(X_i)_{i\in I}$ sägs vara oberoende om σ-algebrorna $\big(\sigma(X_i)\big)_{i\in I}$ är oberoende.

([4], s.15 & s.65).

Definition 2.12. *Låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum. En följd $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ där X_n är en stokastisk variabel för varje $n \in \mathbb{N}_0$, kallas för en stokastisk process.* ([8], s.9).

Låt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ vara en stokastisk process. Oftast anses indexet n ange tid så att processens tillstånd vid tidpunkten n ges av X_n. Vanligtvis är de stokastiska variablerna i processen inte oberoende. Markovkedjor och martingaler, som definieras och studeras senare i kapitlet, är speciella typer av stokastiska processer.

Definition 2.13. *Låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum.*

(i) Väntevärdet av en icke-negativ stokastisk variabel X är

$$\mathbb{E}(X) := \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

där integralen är en Lebesgue integral med avseende på sannolikhetsmåttet $\mathbb{P}$.

(ii) Väntevärdet av en godtycklig stokastisk variabel X är

$$\mathbb{E}(X) := \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-)$$

där $X^+ = \max\{X, 0\}$ och $X^- = \max\{-X, 0\}$ är icke-negativa stokastiska variabler. Väntevärdet $\mathbb{E}(X)$ är odefinierat om $\mathbb{E}(X^+) = \mathbb{E}(X^-) = \infty$ gäller. Annars sägs väntevärdet $\mathbb{E}(X)$ vara definierat. En stokastisk variabel X sägs ha ett ändligt väntevärde om $\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(X^+)+\mathbb{E}(X^-) < \infty$ gäller.

([7], s.2).

Sats 2.14 (Jensens olikhet)**.** *Låt X vara en stokastisk variabel med ett ändligt väntevärde. Om $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en konvex funktion, är*

$$\mathbb{E}[\phi(X)] \geq \phi(\mathbb{E}[X]). \tag{2.1}$$

([6], s.58).

Definition 2.15. *Låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och X en stokastisk variabel med ett ändligt väntevärde. Det betingade väntevärdet av X givet en σ-algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ är en stokastisk variabel $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ för vilken gäller*

(i) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ är $\mathcal{G}$-mätbar,

(ii) $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})I_G] = \mathbb{E}[XI_G], \quad \forall G \in \mathcal{G}.$

Det betingade väntevärdet är nästan säkert entydigt. ([8], s.299).

Följande proposition beskriver några egenskaper hos betingat väntevärde.

Proposition 2.16. *Låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum, X och Y stokastiska variabler med ändliga väntevärden och $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ en σ-algebra.*

(i) *Om $X \geq 0$ gäller, är $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$.*

(ii) *För $a, b \in \mathbb{R}$ är $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$.*

(iii) *Om $X \geq Y$ gäller, är $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$.*

(iv) *Om X är oberoende av $\mathcal{G}$, är $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.*

(v) *Om X är $\mathcal{G}$-mätbar, är $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$.*

(vi) *Om X är $\mathcal{G}$-mätbar, är $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$.*

(vii) $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] = \mathbb{E}(X)$.

(viii) *Om $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ är en σ-algebra, är $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}] = \mathbb{E}(X|\mathcal{H})$.*

([5], s.239 & [8], s.299–300).

2.2 Stopptider

Låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum försett med en filtration. Följande resultat är från Jacod och Protter [4] s.212–214 och s.217.

Definition 2.17. *En stokastisk variabel $\tau\colon \Omega \to \overline{\mathbb{N}}_0 = \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ för vilken gäller*

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \overline{\mathbb{N}}_0,$$

kallas för en stopptid. En stopptid τ för vilken gäller

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1,$$

kallas för en ändlig stopptid. En stopptid τ för vilken gäller

$$\mathbb{P}(\tau \leq N) = 1$$

för någon konstant $N \in \mathbb{N}_0$, kallas för en begränsad stopptid.

Kravet $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ betyder att beslutet att stanna vid tidpunkten n fattas utifrån informationen tillgänglig vid tidpunkten n.

Anmärkning 2.18. *Stopptiden τ kunde också definieras med kravet*

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \overline{\mathbb{N}}_0.$$

De två kraven är ekvivalenta för å ena sidan är $\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\tau = k\}$ och $\{\tau \leq \infty\} = \Omega$, å andra sidan är $\{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \setminus \{\tau \leq n-1\}$ och $\{\tau = \infty\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{\tau > n\} = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{\tau \leq n\}\right)^{\mathsf{c}}$.

Sats 2.19. *Låt τ vara en stopptid. Då är*

$$\mathcal{F}_\tau \coloneqq \left\{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, \, \forall n \in \overline{\mathbb{N}}_0\right\}$$

en σ-algebra.

Bevis. Utfallsrummet Ω hör till $\mathcal{F}_\tau$ för $\Omega \cap \{\tau = n\} = \{\tau = n\}$ hör till $\mathcal{F}_n$ för varje $n \in \overline{\mathbb{N}}_0$. Om A hör till $\mathcal{F}_\tau$, är

$$A^{\mathsf{c}} \cap \{\tau = n\} = \{\tau = n\} \cap \left(A \cap \{\tau = n\}\right)^{\mathsf{c}} = \Big(\{\tau = n\}^{\mathsf{c}} \cup \left(A \cap \{\tau = n\}\right)\Big)^{\mathsf{c}}$$

ett element av $\mathcal{F}_n$ för varje $n \in \overline{\mathbb{N}}_0$. Därmed hör A^{c} till $\mathcal{F}_\tau$. Om $A_1, A_2, \ldots$ hör till $\mathcal{F}_\tau$ så är $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap \{\tau = n\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(A_i \cap \{\tau = n\}\right)$ ett element av $\mathcal{F}_n$ för varje $n \in \overline{\mathbb{N}}_0$. Därmed hör $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ till $\mathcal{F}_\tau$. □

Om $\mathcal{F}_n$ innehåller informationen upp till den givna tidpunkten n, innehåller $\mathcal{F}_\tau$ informationen upp till den slumpmässiga tidpunkten τ.

Låt $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ vara en stokastisk process. Processens tillstånd vid en stopptid τ ges av

$$X_\tau \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} X_n I_{\{\tau = n\}} + X_\infty I_{\{\tau = \infty\}}. \tag{2.2}$$

([1], s.42 & s.78). Termen X_∞ kan definieras på olika sätt för olika processer. Om gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} X_n$ är definierat, är det en naturlig definition för X_∞. Annars kan X_∞ definieras vara $\limsup_{n\to\infty} X_n$ eller en godtycklig konstant. Om stopptiden τ är ändlig eller begränsad, behöver man inte definiera X_∞.

Exempel 2.20. *Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende stokastiska variabler med fördelningen $\mathbb{P}(X_j = 2^j) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_j = -2^j)$. Definiera $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ och $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ för varje $n \in \mathbb{N}$ samt $S_0 = 0$ och $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.*

För $k \in \mathbb{N}$ definiera stopptiden $\tau_k = \inf\{n \geq k : X_n = 2^n\}$ där infimum av den tomma mängden är $+\infty$. Stopptiden τ_k är tidpunkten för det första positiva värdet från och med tidpunkten k. Den är ändlig för varje val av k ty

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_k < \infty) &= \mathbb{P}(\{\tau_k = k\} \cup \{\tau_k = k+1\} \cup \{\tau_k = k+2\} \cup \cdots) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_k = n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(X_k = -2^k, X_{k+1} = -2^{k+1}, \ldots, X_{n-1} = -2^{n-1}, X_n = 2^n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} = 1.
\end{aligned}$$

Vid stopptiden τ_k har summan formen

$$\begin{aligned}
S_{\tau_k} = \sum_{n=k}^{\infty} S_n I_{\{\tau_k = n\}} &= \sum_{n=k}^{\infty} \left[X_1 + \cdots + X_{k-1} - \sum_{j=k}^{n-1} 2^j + 2^n \right] I_{\{\tau_k = n\}} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} [S_{k-1} + 2^k] I_{\{\tau_k = n\}} = S_{k-1} + 2^k.
\end{aligned}$$

Exempel 2.21. *Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende stokastiska variabler med diskret likformig fördelning på mängden $\{1,2,3,4,5,6\}$. Definiera $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ för varje $n \in \mathbb{N}$ och $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. Betrakta stopptiden $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = 6\}$ där infimum av den tomma mängden är $+\infty$. Stopptiden τ är tidpunkten för det första tärningskastet som ger en sexa. Den är ändlig ty*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau < \infty) &= \mathbb{P}(\{\tau = 1\} \cup \{\tau = 2\} \cup \{\tau = 3\} \cup \cdots) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 < 6, X_2 < 6, \ldots, X_{n-1} < 6, X_n = 6) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} = 1.
\end{aligned}$$

Från ovanstående kommer också fram att τ är i detta fall geometriskt fördelat. Därmed är $\mathbb{E}(\tau) = 6$. Härnäst visas $\mathbb{E}(\tau | X_1 \in \{2,4\}, \ldots, X_{\tau-1} \in \{2,4\}) = 3/2$. Betrakta först

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\tau = n | X_1 \in \{2,4\}, \ldots, X_{\tau-1} \in \{2,4\}) \\
&\qquad = \frac{\mathbb{P}(X_1 \in \{2,4\}, \ldots, X_{n-1} \in \{2,4\},\ X_n = 6)}{\mathbb{P}(X_1 \in \{2,4\}, \ldots, X_{\tau-1} \in \{2,4\})}.
\end{aligned}$$

Nämnaren kan räknas med hjälp av satsen om total sannolikhet. Då fås

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_1 \in \{2,4\},\, X_2 \in \{2,4\}, \dots, X_{\tau-1} \in \{2,4\}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 \in \{2,4\},\, X_2 \in \{2,4\}, \dots, X_{\tau-1} \in \{2,4\},\, \tau = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 \in \{2,4\},\, X_2 \in \{2,4\}, \dots, X_{k-1} \in \{2,4\},\, X_k = 6) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Då är

$$\mathbb{P}(\tau = n | X_1 \in \{2,4\}, \dots, X_{\tau-1} \in \{2,4\}) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{6}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{2}{3}$$

vilket betyder att $\tau | X_1 \in \{2,4\}, \dots, X_{\tau-1} \in \{2,4\}$ är också geometriskt fördelat. Därmed är $\mathbb{E}(\tau | X_1 \in \{2,4\}, \dots, X_{\tau-1} \in \{2,4\}) = 3/2$.

Exempel 2.22. *Låt $X_1, X_2, \dots$ vara oberoende och likafördelade stokastiska variabler med fördelningen $\mathbb{P}(X_1 = +1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1)$. Definiera $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ och $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ för varje $n \in \mathbb{N}$ samt $S_0 = 0$ och $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. För $k \in \mathbb{N}$ definiera $\tau_k = \inf\{n \geq k : S_n = k\}$ där infimum av den tomma mängden är $+\infty$. Stopptiden τ_k är tidpunkten då summan får värdet k för första gången. För att nå k, måste summan först nå $k-1$. För $k \geq 2$ och $n \geq k-1$ är*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\tau_k < \infty | \tau_{k-1} = n) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} \tau_k = j \middle| \tau_{k-1} = n \right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} S_k < k,\, S_{k+1} < k, \dots, S_{j-1} < k,\, S_j = k \middle| \tau_{k-1} = n \right).
\end{aligned}$$

Inför beteckningen $A_{k,n} = \{S_k < k,\, S_{k+1} < k, \dots, S_n < k\}$. Då är

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} S_k < k,\, S_{k+1} < k, \dots, S_{j-1} < k,\, S_j = k \middle| \tau_{k-1} = n \right) \\
&= \mathbb{P}\big(\{A_{k,n},\, S_{n+1} = k\} \cup \{A_{k,n},\, S_{n+1} < k,\, S_{n+2} = k\} \cup \cdots | \tau_{k-1} = n\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{A_{k,n},\, X_{n+1} = 1\} \cup \{A_{k,n},\, X_{n+1} < 1,\, X_{n+1} + X_{n+2} = 1\} \cup \cdots | \tau_{k-1} = n\big).
\end{aligned}$$

Eftersom händelsen $\{\tau_{k-1} = n\} \in \mathcal{F}_n$ *är en delmängd av händelsen* $A_{k,n}$ *och* $X_1, X_2, \ldots$ *är oberoende och likafördelade, är*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\{A_{k,n},\, X_{n+1} = 1\} \cup \{A_{k,n},\, X_{n+1} < 1,\, X_{n+1} + X_{n+2} = 1\} \cup \cdots | \tau_{k-1} = n\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = 1\} \cup \{X_{n+1} < 1,\, X_{n+1} + X_{n+2} = 1\} \cup \cdots\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{S_1 = 1\} \cup \{S_1 < 1,\, S_2 = 1\} \cup \{S_1 < 1,\, S_2 < 1,\, S_3 = 1\} \cup \cdots\big) \\
&= \mathbb{P}(\tau_1 < \infty).
\end{aligned}$$

Med hjälp av satsen om total sannolikhet fås

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_k < \infty) = &\sum_{n=k-1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_k < \infty | \tau_{k-1} = n)\mathbb{P}(\tau_{k-1} = n) + \\
&\qquad \mathbb{P}(\tau_k < \infty | \tau_{k-1} = \infty)\mathbb{P}(\tau_{k-1} = \infty) \\
= &\sum_{n=k-1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)\mathbb{P}(\tau_{k-1} = n) = \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)\mathbb{P}(\tau_{k-1} < \infty).
\end{aligned}$$

Detta medför $\mathbb{P}(\tau_k < \infty) = [\mathbb{P}(\tau_1 < \infty)]^k$ *för varje* $k \in \mathbb{N}$. *Det alltså räcker att beskriva* $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty)$. *Givet att* X_1 *får värdet* $+1$, *är* $\tau_1 < \infty$. *Annars är*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\tau_1 < \infty | X_1 = -1) \\
&= \mathbb{P}\big(\{S_1 = 1\} \cup \{S_1 < 1,\, S_2 = 1\} \cup \{S_1 < 1,\, S_2 < 1,\, S_3 = 1\} \cup \cdots | X_1 = -1\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{-1 = 1\} \cup \{-1 < 1,\, X_2 = 2\} \cup \{-1 < 1,\, X_2 < 2,\, X_2 + X_3 = 2\} \cup \cdots\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{X_2 + X_3 = 2\} \cup \{X_2 + X_3 < 2,\, X_2 + X_3 + X_4 = 2\} \cup \cdots\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{S_2 = 2\} \cup \{S_2 < 2,\, S_3 = 2\} \cup \{S_2 < 2,\, S_3 < 2,\, S_4 = 2\} \cup \cdots\big) \\
&= \mathbb{P}(\tau_2 < \infty).
\end{aligned}$$

Därmed är

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) &= \mathbb{P}(\tau_1 < \infty | X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(\tau_1 < \infty | X_1 = -1)\mathbb{P}(X_1 = -1) \\
&= p + [\mathbb{P}(\tau_1 < \infty)]^2(1-p) \\
\iff\ & \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)[1 - \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)] = p\big(1 - [\mathbb{P}(\tau_1 < \infty)]^2\big) \\
\iff\ & \mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = p\big(1 + \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)\big) \quad \vee \quad \mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1 \\
\iff\ & \mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = \frac{p}{1-p} \quad \vee \quad \mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1.
\end{aligned}$$

Slutligen fås

$$\mathbb{P}(\tau_k < \infty) = \begin{cases} 1, & p \geq \dfrac{1}{2} \\ \left(\dfrac{p}{1-p}\right)^k, & p < \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

2.3 Markovkedjor

Låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum försett med en filtration.

Definition 2.23. *Låt $(E, \mathcal{E})$ vara ett mätbart rum där E är en delmängd av $\mathbb{R}$. En följd $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ av stokastiska variabler $X_n\colon \Omega \to E$ för vilka gäller*

(i) X_n *är* $\mathcal{F}_n$*-mätbar för varje* $n \in \mathbb{N}_0$*,*

(ii) $\mathbb{P}(X_{n+1} \in B|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in B|X_n)$ *för varje* $B \in \mathcal{E}$ *och* $n \in \mathbb{N}_0$*,*

kallas för en Markovkedja. En Markovkedja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ för vilken gäller

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in B|X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 \in B|X_0 = x)$$

för varje $B \in \mathcal{E}$, $x \in E$ och $n \in \mathbb{N}_0$, kallas tidshomogen. ([1], s.102 & [7], s.18).

Mängden E är mängden av alla möjliga värden eller tillstånd för en Markovkedja. Med informationen tillgänglig vid tidpunkten n vet man vilket tillstånd Markovkedjan är i vid tidpunkten n, men framtida tillstånd är oberoende av föregående tillstånd givet det nuvarande tillståndet. För tidshomogena Markovkedjor hålls sannolikheten att övergå från ett tillstånd till ett annat konstant med tiden.

Exempel 2.24. *Låt $X_0, X_1, \ldots$ vara oberoende stokastiska variabler och definiera $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ för varje $n \in \mathbb{N}_0$.*

a) *Följden $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ är en Markovkedja ty*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in B|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in B) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in B|X_n).$$

b) *Definiera summan $S_n = X_0 + X_1 + \cdots + X_n$ för varje $n \in \mathbb{N}_0$. Följden $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ är en Markovkedja ty*

$$\mathbb{P}(S_{n+1} \in B|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(S_n + X_{n+1} \in B|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(S_{n+1} \in B|S_n).$$

c) *Definiera $Y_n = \max\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ för varje $n \in \mathbb{N}_0$. Följden $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ är en Markovkedja ty*

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} \in B|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(\max\{Y_n, X_{n+1}\} \in B|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(Y_{n+1} \in B|Y_n).$$

På ett liknande sätt visas att $Z_n = \min\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ också skapar en Markovkedja.

Följande beteckningar och resultat är från Shiryaev [7] s.18–19 och s.21.

Inför beteckningen $\mathbb{P}_x(X_{n+1} \in B) := \mathbb{P}(X_{n+1} \in B|X_0 = x)$ och för väntevärdet beteckningen $\mathbb{E}_x(X_{n+1}) := \mathbb{E}(X_{n+1}|X_0 = x)$. Med tidshomogena Markovkedjor används beteckningen $\mathbb{P}_{X_n}(X_1 \in B) := \mathbb{P}(X_{n+1} \in B|X_n)$ och för väntevärdet beteckningen $\mathbb{E}_{X_n}(X_1) := \mathbb{E}(X_{n+1}|X_n)$.

Egenskap *(ii)* i definition 2.23 kallas för Markovegenskapen. Om den givna tidpunkten n ersätts med en ändlig stopptid τ, fås den starka Markovegenskapen

$$\mathbb{P}_x(X_{\tau+1} \in B|\mathcal{F}_\tau) = \mathbb{P}_x(X_{\tau+1} \in B|X_\tau) \quad \text{för varje } B \in \mathcal{E} \text{ och } x \in E. \tag{2.3}$$

Varje Markovkedja i diskret tid har den starka Markovegenskapen.

Låt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ vara en tidshomogen Markovkedja. För $m \in \mathbb{N}_0$ definiera operatorn θ_m som $X_n(\theta_m\omega) := X_{n+m}(\omega)$. Om Y är en stokastisk variabel, definieras $\theta_m Y(\omega) := Y(\theta_m\omega)$. På ett liknande sätt definieras θ_τ där τ är en ändlig stopptid.

Om τ är en ändlig stopptid och Y en $\sigma\big((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\big)$-mätbar stokastisk variabel med ett ändligt väntevärde, är

$$\mathbb{E}_x(\theta_\tau Y|\mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}_x(Y|X_\tau), \quad \forall x \in E, \tag{2.4}$$

en ekvivalent formulering av den starka Markovegenskapen (2.3). Om Z är en $\mathcal{F}_\tau$-mätbar stokastisk variabel med ett ändligt väntevärde och $\mathbb{E}_x(|Z\theta_\tau Y|) < \infty$ gäller för varje $x \in E$, följer från likheten (2.4)

$$\mathbb{E}_x(Z\theta_\tau Y) = \mathbb{E}_x[Z\mathbb{E}_x(Y|X_\tau)]. \tag{2.5}$$

2.4 Martingaler

Låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum försett med en filtration. Följande resultat är från Rosenthal [6] s.161–165 och s.105.

Definition 2.25. *En följd $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ av stokastiska variabler för vilka gäller*

(i) X_n *är* $\mathcal{F}_n$*-mätbar för varje* $n \in \mathbb{N}_0$,

(ii) $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$,

(iii) $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$,

kallas för en martingal. Om (ii) ersätts med

$$\mathbb{E}\big(X_n^+\big) < \infty \quad \textit{eller} \quad \mathbb{E}\big(X_n^-\big) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

kallas $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *för en generaliserad martingal* ([7], s.16). *Om (iii) ersätts med*

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

kallas $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *för en supermartingal. Om (iii) ersätts med*

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

kallas $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *för en submartingal.*

Exempel 2.26. *Låt* $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ *vara oberoende och likafördelade stokastiska variabler med fördelningen* $\mathbb{P}(Y_0 = +1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_0 = -1)$. *Definiera* $S_n = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$ *och* $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ *för varje* $n \in \mathbb{N}_0$. *Då är*

$$\mathbb{E}(|S_n|) \leq \mathbb{E}(|Y_0| + |Y_1| + \cdots + |Y_n|) = n + 1$$

och enligt egenskaperna (ii), (v) och (iv) i proposition 2.16 *är*

$$\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n + \mathbb{E}(Y_{n+1}) = S_n + 2(p - 1/2).$$

Följden $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *är en martingal för* $p = 1/2$, *en supermartingal för* $p < 1/2$ *och en submartingal för* $p > 1/2$.

Om följden $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ är en martingal, är $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ både en supermartingal och en submartingal. Om $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ är en submartingal, är $(-X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ en supermartingal. Det alltså räcker att betrakta bara supermartingaler för att undersöka egenskaper hos supermartingaler och submartingaler.

Om $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ är en supermartingal, är $\mathbb{E}(X_{n+1}) \leq \mathbb{E}(X_n) \leq \cdots \leq \mathbb{E}(X_0)$. Följande sats visar att olikheten gäller också för begränsade stopptider.

Sats 2.27. *Låt* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *vara en supermartingal och* $\tau_1 \leq \tau_2$ *begränsade stopptider. Då är*

$$\mathbb{E}(X_{\tau_2}) \leq \mathbb{E}(X_{\tau_1}). \tag{2.6}$$

Bevis. Anta att stopptiderna τ_1 och τ_2 är begränsade av $N \in \mathbb{N}_0$. Då är

$$\mathbb{E}(|X_{\tau_2}|) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{N} |X_n| I_{\{\tau_2 = n\}}\right) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}(|X_n| I_{\{\tau_2 = n\}}) \leq \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$$

vilket betyder att väntevärdena $\mathbb{E}(X_{\tau_1})$, $\mathbb{E}(X_{\tau_2})$ och $\mathbb{E}(X_{\tau_2} - X_{\tau_1})$ är ändliga. Händelsen $\{\tau_1 < n+1 \leq \tau_2\} = \{\tau_1 \leq n\} \cap \{\tau_2 \leq n\}^{\mathsf{C}}$ hör till $\mathcal{F}_n$. Därmed är

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{\tau_2} - X_{\tau_1}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{n=\tau_1}^{\tau_2-1} X_{n+1} - X_n\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{N-1} (X_{n+1} - X_n) I_{\{\tau_1 < n+1 \leq \tau_2\}}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}\big[(X_{n+1} - X_n) I_{\{\tau_1 < n+1 \leq \tau_2\}}\big] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}\Big(\big(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - X_n\big) I_{\{\tau_1 < n+1 \leq \tau_2\}}\Big) \leq 0
\end{aligned}$$

vilket bevisar satsen. □

Korollarium 2.28. *Låt $\tau_1 \leq \tau_2$ vara begränsade stopptider. Om $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ är en submartingal så är $\mathbb{E}(X_{\tau_2}) \geq \mathbb{E}(X_{\tau_1})$. Om $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ är en martingal så är $\mathbb{E}(X_{\tau_2}) = \mathbb{E}(X_{\tau_1})$.*

Definition 2.29. *En följd $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ av stokastiska variabler för vilken gäller*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}\big(|X_n| I_{\{|X_n|\geq\alpha\}}\big) = 0,$$

kallas likformigt integrerbar.

Följande satserna är från Shiryaev [7] s.16–17.

Sats 2.30.

(i) Låt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ vara en supermartingal som uppfyller $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}(X_n^-) < \infty$. Då är gränsvärdet $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ ändligt med sannolikheten ett. Därtill är $\mathbb{E}(X_\infty^-) < \infty$.

(ii) Låt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ vara en likformigt integrerbar supermartingal som uppfyller $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}(X_n^-) < \infty$. Då är också $(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}_0}$ en supermartingal. Alltså $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ är $\mathcal{F}_\infty$-mätbar, $\mathbb{E}(|X_\infty|) < \infty$ gäller och för varje $n \in \mathbb{N}_0$ är $\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) \leq X_n$.

(iii) Låt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ vara en generaliserad supermartingal. För nästan varje ω sådan att $\inf_{m\in\mathbb{N}_0} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}(X_n^-|\mathcal{F}_m) < \infty$ gäller, är gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} X_n$ ändligt eller lika med $+\infty$.

Sats 2.31. *Låt X vara en stokastisk variabel.*

(i) Om $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ gäller så skapar $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ en martingal som är sådan att gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ är definierat med sannolikheten ett. Därtill är $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$.

(ii) Om $\mathbb{E}(X^+) < \infty$ gäller så är gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ definierat med sannolikheten ett. Därtill är $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$.

Sats 2.32. *Låt $\tau_1 \leq \tau_2$ vara stopptider och Y en stokastisk variabel med ett ändligt väntevärde. Om $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ är en supermartingal som för varje $n \in \mathbb{N}_0$ uppfyller $X_n \geq \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)$ så har X_{τ_1} och X_{τ_2} ändliga väntevärden och därtill är $\mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) \leq X_{\tau_1}$. Ett specialfall är att om $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ är en likformigt integrerbar martingal så är $\mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) = X_{\tau_1}$.*

2.5 Gränsvärdessatser

Följande resultat är från Shiryaev [7] s.3.

Sats 2.33 (Monotona konvergenssatsen). *Låt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vara en följd av stokastiska variabler sådan att $X_n \overset{n.s.}{\to} X$ gäller. Om både $X_n \leq X_{n+1}$ för varje $n \in \mathbb{N}$ och $\mathbb{E}(X_1^-) < \infty$ gäller så är*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\Big(\lim_{n\to\infty} X_n\Big). \tag{2.7}$$

Om både $X_n \geq X_{n+1}$ för varje $n \in \mathbb{N}$ och $\mathbb{E}(X_1^+) < \infty$ gäller så gäller (2.7).

Sats 2.34 (Fatous lemma). *Låt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ och Y vara stokastiska variabler. Om både $X_n \geq Y$ för varje $n \in \mathbb{N}$ och $\mathbb{E}(Y) > -\infty$ gäller så är*

$$\mathbb{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n). \tag{2.8}$$

Om både $X_n \leq Y$ för varje $n \in \mathbb{N}$ och $\mathbb{E}(Y) < \infty$ gäller så är

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}\left(\limsup_{n\to\infty} X_n\right). \tag{2.9}$$

Sats 2.35 (Dominerade konvergenssatsen). *Låt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vara en följd av stokastiska variabler sådan att $X_n \overset{p}{\to} X$ gäller och Y en stokastisk variabel med ett ändligt väntevärde sådan att $|X_n| \leq Y$ gäller för varje $n \in \mathbb{N}$. Då är $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ och*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0. \tag{2.10}$$

Anmärkning 2.36. *I de föregående satserna kan väntevärdet ersättas med betingat väntevärde.*

Kapitel 3

Ändlig horisont

Presentationen i detta kapitel följer Shiryaev [7] s.25–35.

Låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum försett med en filtration. Betrakta en tidshomogen Markovkedja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ med värden i tillståndsrummet $(E, \mathcal{E})$ och en $\mathcal{E}$-mätbar funktion $g\colon E \to [0, \infty]$.

3.1 Beskrivning av problemet

Ett optimal stopping-problem sägs ha en ändlig horisont om det är tillåtet att högst göra ett begränsat antal $N \in \mathbb{N}_0$ observationer. Eftersom man måste stanna senast vid tidpunkten N, räcker det att betrakta begränsade stopptider.

Låt $\overline{\mathcal{M}}$ vara mängden av alla stopptider definierade i sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Definiera mängden av alla stopptider begränsade av N som

$$\mathcal{M}^N := \big\{\tau \in \overline{\mathcal{M}} : \tau(\omega) \leq N,\ \forall \omega \in \Omega\big\}. \tag{3.1}$$

Om τ hör till mängden $\mathcal{M}^N$, är

$$g(X_\tau) := \sum_{n=0}^{N} g(X_n) I_{\{\tau=n\}} \tag{3.2}$$

vinsten vid stopptiden τ. Eftersom g är en icke-negativ funktion, är väntevärdet $\mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$ definierat för varje $\tau \in \mathcal{M}^N$ och $x \in E$. Detta väntevärde kallas för en förväntad vinst vid en stopptid τ.

Definiera värdefunktionen $V^N\colon E \to [0, \infty]$ som

$$V^N(x) := \sup_{\tau\in\mathcal{M}^N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]. \tag{3.3}$$

Värdefunktionen ger den största förväntade vinsten för olika starttillstånd $x \in E$. En begränsad stopptid $\tau^N \in \mathcal{M}^N$ för vilken gäller

$$\mathbb{E}_x[g(X_{\tau^N})] = V^N(x), \quad \forall x \in E, \tag{3.4}$$

kallas för en optimal stopptid. Det optimal stopping-problemet med horisonten N är att hitta en beskrivning för $V^N(x)$ och τ^N.

3.2 Värdefunktion och optimal stopptid

Sats 3.3 nedan visar att varje problem med ändlig horisont är i princip lösbar med rekursion. För att bevisa satsen behöver ett par mellanresultat bevisas först.

Definiera operatorn Q som

$$(Qg)(x) := \max\{g(x), \mathbb{E}_x[g(X_1)]\}. \tag{3.5}$$

Från olikheten $g(x) \leq (Qg)(x)$ följer $\mathbb{E}_x[g(X_1)] \leq \mathbb{E}_x[(Qg)(X_1)]$. Upprepad användning av operatorn Q ger därmed

$$\begin{aligned}(Q^2g)(x) &= \big(Q(Qg)\big)(x)\\ &= \max\{(Qg)(x), \mathbb{E}_x[(Qg)(X_1)]\}\\ &= \max\{g(x), \mathbb{E}_x[g(X_1)], \mathbb{E}_x[(Qg)(X_1)]\}\\ &= \max\{g(x), \mathbb{E}_x[(Qg)(X_1)]\}.\end{aligned}$$

Med induktion kan man visa att för varje $n \in \mathbb{N}$ gäller

$$(Q^ng)(x) = \max\{g(x), \mathbb{E}_x[(Q^{n-1}g)(X_1)]\} \tag{3.6}$$

där $(Q^0g)(x) := g(x)$.

Lemma 3.1. *För varje $n \in \mathbb{N}_0$ den förväntade vinsten vid varje stopptid $\tau \in \mathcal{M}^n$ uppfyller*

$$\mathbb{E}_x[g(X_\tau)] \leq (Q^ng)(x), \quad \forall x \in E. \tag{3.7}$$

Bevis. För $n = 0$ är $\tau \equiv 0$ det enda elementet i $\mathcal{M}^0$ så då är

$$\mathbb{E}_x[g(X_\tau)] = g(x) = (Q^0g)(x).$$

För $n > 0$ och $\tau \in \mathcal{M}^n$ är

$$\{\tau = n\} = \{\tau \leq n-1\}^\complement \in \mathcal{F}_{n-1}$$

så då är

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[g(X_\tau)] &= \mathbb{E}_x[g(X_\tau)I_{\{\tau\le n-1\}} + g(X_\tau)I_{\{\tau=n\}}] \\
&= \mathbb{E}_x[g(X_{\tau\wedge(n-1)})I_{\{\tau\le n-1\}}] + \mathbb{E}_x[g(X_n)I_{\{\tau=n\}}] \\
&= \mathbb{E}_x[g(X_{\tau\wedge(n-1)})I_{\{\tau\le n-1\}}] + \mathbb{E}_x\Big(I_{\{\tau=n\}}\mathbb{E}_x[g(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}]\Big) \\
&= \mathbb{E}_x[g(X_{\tau\wedge(n-1)})I_{\{\tau\le n-1\}}] + \mathbb{E}_x\Big(I_{\{\tau=n\}}\mathbb{E}_{X_{n-1}}[g(X_1)]\Big) \\
&= \mathbb{E}_x\Big(g(X_{\tau\wedge(n-1)})I_{\{\tau\le n-1\}} + I_{\{\tau=n\}}\mathbb{E}_{X_{\tau\wedge(n-1)}}[g(X_1)]\Big) \\
&\le \mathbb{E}_x[\max\{g(X_{\tau\wedge(n-1)}),\, \mathbb{E}_{X_{\tau\wedge(n-1)}}[g(X_1)]\}] \\
&= \mathbb{E}_x[(Qg)(X_{\tau\wedge(n-1)})].
\end{aligned}
$$

Av detta följer

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[g(X_\tau)] &\le \mathbb{E}_x[(Qg)(X_{\tau\wedge(n-1)})] \\
&\le \mathbb{E}_x[(Q^2g)(X_{\tau\wedge(n-2)})] \le \cdots \le \mathbb{E}_x[(Q^ng)(X_{\tau\wedge 0})] = (Q^ng)(x)
\end{aligned}
$$

vilket bevisar lemmat. □

En direkt följd av lemma 3.1 är att för varje $n \in \mathbb{N}_0$ uppfyller värdefunktionen $V^n(x)$

$$
V^n(x) \le (Q^ng)(x), \quad \forall x \in E. \tag{3.8}
$$

Lemma 3.2. *För varje $n \in \mathbb{N}_0$ definiera stopptiden*

$$
\sigma^n := \min\{0 \le k \le n : g(X_k) = (Q^{n-k}g)(X_k)\}. \tag{3.9}
$$

För varje $n \in \mathbb{N}_0$ är den förväntade vinsten vid stopptiden σ^n

$$
\mathbb{E}_x[g(X_{\sigma^n})] = (Q^ng)(x), \quad \forall x \in E. \tag{3.10}
$$

Bevis. För $n = 0$ är $\sigma^0 \equiv 0$ så då är

$$
\mathbb{E}_x[g(X_{\sigma^0})] = g(x) = (Q^0g)(x).
$$

Anta att ekvationen (3.10) gäller för $n = m$ och visa att den gäller för $n = m+1$.

Fixera ett tillstånd $x \in E$. Om $\mathbb{P}_x(\sigma^{m+1} = 0) = 1$ gäller så enligt ekvationen (3.9) är

$$
1 = \mathbb{P}_x(\sigma^{m+1} = 0) = \mathbb{P}_x\Big(g(X_0) = (Q^{m+1}g)(X_0)\Big) = \mathbb{P}\Big(g(x) = (Q^{m+1}g)(x)\Big).
$$

Alltså funktionsvärdena $g(x)$ och $(Q^{m+1}g)(x)$ är lika med varandra. Därmed är

$$\mathbb{E}_x[g(X_{\sigma^{m+1}})] = g(x) = (Q^{m+1}g)(x).$$

Om $\mathbb{P}_x(\sigma^{m+1} = 0) < 1$ gäller så är

$$\mathbb{P}_x(\sigma^{m+1} = 0) = \mathbb{P}\Big(g(x) = (Q^{m+1}g)(x)\Big) = 0$$

eftersom $g(x)$ och $(Q^{m+1}g)(x)$ är deterministiska funktionsvärden. Därmed är $\mathbb{P}_x(\sigma^{m+1} \geq 1) = 1$. Härnäst visas att i detta fall kan σ^{m+1} skrivas som

$$\sigma^{m+1} = 1 + \theta_1\sigma^m.$$

Enligt definitionen av operatorn θ_1 är

$$\begin{aligned}
\theta_1\sigma^m(\omega) &= \theta_1 \min\big\{0 \leq k \leq m : g\big(X_k(\omega)\big) = \big(Q^{m-k}g\big)\big(X_k(\omega)\big)\big\} \\
&= \min\big\{0 \leq k \leq m : g\big(X_k(\theta_1\omega)\big) = \big(Q^{m-k}g\big)\big(X_k(\theta_1\omega)\big)\big\} \\
&= \min\big\{0 \leq k \leq m : g\big(X_{k+1}(\omega)\big) = \big(Q^{m-k}g\big)\big(X_{k+1}(\omega)\big)\big\} \\
&= \min\big\{0 \leq k \leq m : g\big(X_{k+1}(\omega)\big) = \big(Q^{m+1-(k+1)}g\big)\big(X_{k+1}(\omega)\big)\big\}.
\end{aligned}$$

Detta tillsammans med resultatet $\mathbb{P}_x(\sigma^{m+1} \geq 1) = 1$ ger

$$\begin{aligned}
1 + \theta_1\sigma^m(\omega) &= \min\big\{1 \leq k+1 \leq m+1 : g\big(X_{k+1}(\omega)\big) = \big(Q^{m+1-(k+1)}g\big)\big(X_{k+1}(\omega)\big)\big\} \\
&= \min\big\{1 \leq l \leq m+1 : g\big(X_l(\omega)\big) = \big(Q^{m+1-l}g\big)\big(X_l(\omega)\big)\big\} \\
&= \sigma^{m+1}(\omega).
\end{aligned}$$

Från ekvationen (3.6) följer $(Q^{m+1}g)(x) = \mathbb{E}_x[(Q^m g)(X_1)]$ vilket tillsammans med induktionsantagandet ger

$$\begin{aligned}
(Q^{m+1}g)(x) = \mathbb{E}_x\Big((Q^m g)(X_1)\Big) &= \mathbb{E}_x\Big(\mathbb{E}_{X_1}\big[g(X_{\sigma^m})\big]\Big) \\
&= \mathbb{E}_x[\theta_1 g(X_{\sigma^m})] = \mathbb{E}_x[g(X_{1+\theta_1\sigma^m})] = \mathbb{E}_x[g(X_{\sigma^{m+1}})].
\end{aligned}$$

Därmed är lemmat bevisat. □

För att lösa ett optimal stopping-problem med horisonten N, måste man först lösa det med horisonten $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Sats 3.3. *Värdefunktionen har formen*

$$V^0(x) = g(x) \tag{3.11}$$

och

$$V^n(x) = \max\{g(x),\, \mathbb{E}_x[V^{n-1}(X_1)]\}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \tag{3.12}$$

En optimal stopptid är

$$\tau^N \coloneqq \min\{0 \le n \le N : g(X_n) = V^{N-n}(X_n)\}. \tag{3.13}$$

Bevis. Stopptiden σ^n definierad i lemma 3.2 hör till mängden $\mathcal{M}^n$ för varje $n \in \mathbb{N}_0$. Enligt lemmana 3.1 och 3.2 är

$$\mathbb{E}_x[g(X_{\sigma^n})] \le V^n(x) \le (Q^n g)(x) = \mathbb{E}_x[g(X_{\sigma^n})]$$

vilket betyder att för varje $n \in \mathbb{N}_0$ och $x \in E$ är

$$\mathbb{E}_x[g(X_{\sigma^n})] = V^n(x) = (Q^n g)(x).$$

Därmed är σ^n en optimal stopptid i mängden $\mathcal{M}^n$ för varje $n \in \mathbb{N}_0$ och stopptiden $\tau^N = \sigma^N$ en optimal stopptid i mängden $\mathcal{M}^N$. Ekvationen (3.6) ger rekursionen (3.12). □

En analytisk lösning till $V^N(x)$ kan vara svårt att hitta men med den rekursiva ekvationen (3.12) kan man alltid hitta en numerisk lösning.

Exempel 3.4. *Låt $X_0, X_1, \dots$ vara oberoende stokastiska variabler med diskret likformig fördelning på mängden $\{1,2,3,4,5,6\}$. För varje $n \in \mathbb{N}_0$ definiera $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$. Då är $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ en tidshomogen Markovkedja.*

En tärning får kastas högst tre gånger och när man slutar är vinsten lika med antalet prickar som tärningen visar. Härnäst visas den optimala spelstrategin.

Utfallet för det första tärningskastet kan tänkas vara starttillståndet för Markovkedjan. Då har man ett optimal stopping-problem med horisonten 2 och med vinstfunktionen $g(x) = x$. Värdefunktionen kan i detta fall skrivas som

$$V^n(x) = \max\{g(x),\, \mathbb{E}_x[V^{n-1}(X_1)]\} = \max\{x,\, \mathbb{E}[V^{n-1}(X_1)]\}.$$

För $n = 0, 1, 2$ har $V^n(x)$ formen

$$V^0(x) = x,$$
$$V^1(x) = \max\{x,\, \mathbb{E}(X_1)\} = \max\{x,\, 3.5\}$$

och

$$V^2(x) = \max\{x,\, \mathbb{E}[\max\{X_1,\, 3.5\}]\} = \max\{x,\, 4.25\}.$$

Om första kastet, X_0, är 5 eller 6 så slutar man. Annars kastar man på nytt. Om andra kastet är 4, 5 eller 6 så slutar man. Annars kastar man ännu en sista gång.

3.3 Bakåt induktion

För $0 \leq n \leq N$ definiera mängden av alla stopptider som stannar tidigast vid tidpunkten n och senast vid tidpunkten N som

$$\mathcal{M}_n^N := \big\{\tau \in \mathcal{M}^N : n \leq \tau(\omega) \leq N,\ \forall \omega \in \Omega\big\}. \tag{3.14}$$

Definiera värdefunktionen $V_n^N\colon E \to [0,\infty]$ som

$$V_n^N(x) := \sup_{\tau \in \mathcal{M}_n^N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]. \tag{3.15}$$

En stopptid $\tau_n^N \in \mathcal{M}_n^N$ för vilken gäller

$$\mathbb{E}_x\big[g\big(X_{\tau_n^N}\big)\big] = V_n^N(x), \quad \forall x \in E, \tag{3.16}$$

är en optimal stopptid i mängden $\mathcal{M}_n^N$.

Vid tidpunkten N måste man stanna och då får man vinsten $g(X_N)$. Eftersom stopptiden $\tau_N^N \equiv N$ är det enda elementet i mängden $\mathcal{M}_N^N$, är τ_N^N en optimal stopptid i $\mathcal{M}_N^N$.

Vid tidpunkten $N-1$ efter att ha observerat $X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}$ kan man stanna och få vinsten $g(X_{N-1})$ eller fortsätta och använda en optimal stopptid i mängden $\mathcal{M}_N^N$ och förvänta sig att få vinsten $\mathbb{E}_x\Big[g\Big(X_{\tau_N^N}\Big)\big|\mathcal{F}_{N-1}\Big]$. Om vinsten $g(X_{N-1})$ är minst lika stor som den förväntade vinsten, lönar det sig att stanna. En optimal stopptid i mängden $\mathcal{M}_{N-1}^N$ är alltså

$$\tau_{N-1}^N = \begin{cases} N-1, & g(X_{N-1}) \geq \mathbb{E}_x\Big[g\Big(X_{\tau_N^N}\Big)\big|\mathcal{F}_{N-1}\Big] \\ \tau_N^N, & g(X_{N-1}) < \mathbb{E}_x\Big[g\Big(X_{\tau_N^N}\Big)\big|\mathcal{F}_{N-1}\Big] \end{cases}.$$

Med hjälp av egenskaperna *(v)*, *(vi)* och *(ii)* i proposition 2.16 fås

$$\begin{aligned}(Qg)(X_{N-1}) &= \max\Big\{g(X_{N-1}),\, \mathbb{E}_x\Big[g\Big(X_{\tau_N^N}\Big)\big|\mathcal{F}_{N-1}\Big]\Big\} \\ &= g(X_{N-1}) I_{\{\tau_{N-1}^N = N-1\}} + \mathbb{E}_x\Big[g\Big(X_{\tau_N^N}\Big)\big|\mathcal{F}_{N-1}\Big] I_{\{\tau_{N-1}^N > N-1\}} \\ &= \mathbb{E}_x\Big[g\Big(X_{\tau_{N-1}^N}\Big)\big|\mathcal{F}_{N-1}\Big].\end{aligned}$$

Stopptiden τ_{N-1}^N kan nu skrivas i formen

$$\begin{aligned}\tau_{N-1}^N &= \begin{cases} N-1, & g(X_{N-1}) = (Qg)(X_{N-1}) \\ N, & g(X_{N-1}) < (Qg)(X_{N-1}) \end{cases} \\ &= \min\big\{N-1 \leq k \leq N : g(X_k) = (Q^{N-k}g)(X_k)\big\}.\end{aligned}$$

Liknande motiveringar visar att en optimal stopptid i mängden $\mathcal{M}_{N-2}^N$ är

$$\tau_{N-2}^N = \begin{cases} N-2, & g(X_{N-2}) \geq \mathbb{E}_x\Big[g\Big(X_{\tau_{N-1}^N}\Big)\big|\mathcal{F}_{N-2}\Big] \\ \tau_{N-1}^N, & g(X_{N-2}) < \mathbb{E}_x\Big[g\Big(X_{\tau_{N-1}^N}\Big)\big|\mathcal{F}_{N-2}\Big] \end{cases}.$$

Med hjälp av egenskaperna *(viii)*, *(v)*, *(vi)* och *(ii)* i proposition 2.16 fås

$$\begin{aligned}(Q^2g)(X_{N-2}) &= \max\{g(X_{N-2}),\, \mathbb{E}_x[(Qg)(X_{N-1})|\mathcal{F}_{N-2}]\} \\ &= \max\Big\{g(X_{N-2}),\, \mathbb{E}_x\Big[g\Big(X_{\tau_{N-1}^N}\Big)\big|\mathcal{F}_{N-2}\Big]\Big\} \\ &= g(X_{N-2})I_{\{\tau_{N-2}^N=N-2\}} + \mathbb{E}_x\Big[g\Big(X_{\tau_{N-1}^N}\Big)\big|\mathcal{F}_{N-2}\Big]I_{\{\tau_{N-2}^N>N-2\}} \\ &= \mathbb{E}_x\Big[g\Big(X_{\tau_{N-2}^N}\Big)\big|\mathcal{F}_{N-2}\Big].\end{aligned}$$

Stopptiden τ_{N-2}^N kan nu skrivas i formen

$$\begin{aligned}\tau_{N-2}^N &= \begin{cases} N-2, & g(X_{N-2}) = (Q^2g)(X_{N-2}) \\ N-1, & g(X_{N-2}) < (Q^2g)(X_{N-2}) \wedge g(X_{N-1}) = (Qg)(X_{N-1}) \\ N, & g(X_{N-2}) < (Q^2g)(X_{N-2}) \wedge g(X_{N-1}) < (Qg)(X_{N-1}) \end{cases} \\ &= \min\big\{N-2 \leq k \leq N : g(X_k) = (Q^{N-k}g)(X_k)\big\}.\end{aligned}$$

Genom att rekursivt lösa $(Q^{N-k}g)(X_k)$ för $k = N, N-1, \dots, 0$ hittar man en optimal stopptid i mängden $\mathcal{M}_0^N = \mathcal{M}^N$. Följande sats visar att bakåt induktionen faktiskt ger en optimal stopptid.

Sats 3.5. *För $0 \leq n \leq N$ är*

$$V_n^N(x) = \mathbb{E}_x[(Q^{N-n}g)(X_n)]. \tag{3.17}$$

En optimal stopptid i mängden $\mathcal{M}_n^N$ är

$$\tau_n^N := \min\big\{n \leq k \leq N : g(X_k) = (Q^{N-k}g)(X_k)\big\}. \tag{3.18}$$

Bevis. På ett liknande sätt som i beviset för lemma 3.1 kan man visa att för varje $\tau \in \mathcal{M}_n^N$ gäller

$$\mathbb{E}_x[g(X_\tau)|\mathcal{F}_n] \leq (Q^{N-n}g)(X_n).$$

Med hjälp av egenskap *(vii)* i proposition 2.16 fås

$$\mathbb{E}_x[g(X_\tau)] \leq \mathbb{E}_x[(Q^{N-n}g)(X_n)]$$

för varje $\tau \in \mathcal{M}_n^N$ och därmed är

$$\sup_{\tau \in \mathcal{M}_n^N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)] = V_n^N(x) \leq \mathbb{E}_x[(Q^{N-n}g)(X_n)].$$

För att bevisa den omvända olikheten betrakta stopptiden

$$\tau^{N-n} := \min\bigl\{0 \leq k \leq N-n : g(X_k) = V^{N-n-k}(X_k)\bigr\}.$$

Då är

$$g\bigl(X_{\tau_n^N}\bigr) = g(\theta_n X_{\tau^{N-n}}) = \theta_n g(X_{\tau^{N-n}})$$

och enligt egenskaperna hos operatorn θ_n och sats 3.3 är

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\bigl[g\bigl(X_{\tau_n^N}\bigr)|\mathcal{F}_n\bigr] &= \mathbb{E}_x[\theta_n g(X_{\tau^{N-n}})|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}_{X_n}[g(X_{\tau^{N-n}})] \\ &= V^{N-n}(X_n) = (Q^{N-n}g)(X_n). \end{aligned}$$

Med hjälp av egenskap *(vii)* i proposition 2.16 fås

$$\mathbb{E}_x\bigl[g\bigl(X_{\tau_n^N}\bigr)\bigr] = \mathbb{E}_x[(Q^{N-n}g)(X_n)]$$

och eftersom τ_n^N hör till $\mathcal{M}_n^N$ är

$$\mathbb{E}_x\bigl[g\bigl(X_{\tau_n^N}\bigr)\bigr] = \mathbb{E}_x[(Q^{N-n}g)(X_n)] \leq V_n^N(x).$$

Därmed är

$$\mathbb{E}_x\bigl[g\bigl(X_{\tau_n^N}\bigr)\bigr] = V_n^N(x) = \mathbb{E}_x[(Q^{N-n}g)(X_n)]$$

och τ_n^N är alltså en optimal stopptid i mängden $\mathcal{M}_n^N$. □

Följande exempel är från Ferguson [3] s.2.8.

Exempel 3.6. *Låt $X_0, X_1, \ldots$ vara oberoende* $\mathrm{U}(a,b)$*, $b > 0$, fördelade stokastiska variabler. Då är $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ en tidshomogen Markovkedja. För att lösa det optimal stopping-problemet med horisonten N och vinstfunktionen $g(x) = x^+$, vill man hitta en beskrivning för*

$$(Q^{N-k}g)(X_k) = \max\{X_k^+, \mathbb{E}_x[(Q^{N-k-1}g)(X_{k+1})|X_k]\}, \quad k = N-1, N-2, \ldots, 0.$$

Eftersom $X_0, X_1, \ldots$ är oberoende, är

$$\mathbb{E}_x[(Q^{N-k-1}g)(X_{k+1})|X_k] = \mathbb{E}[(Q^{N-k-1}g)(X_{k+1})]$$

en konstant. Då kan $(Q^{N-k}g)(X_k)$ *skrivas i formen*

$$(Q^{N-k}g)(X_k) = \max\{X_k^+, C_{N-k}\}, \quad k = N-1, N-2, \ldots, 0.$$

Från $X_N^+ \geq a^+$ *följer* $C_0 = a^+$ *och för* $k = N-1, N-2, \ldots, 0$ *är*

$$C_{N-k} = \mathbb{E}[(Q^{N-k-1}g)(X_{k+1})] = \mathbb{E}[\max\{X_{k+1}^+, C_{N-k-1}\}].$$

Av detta följer $C_j \geq 0$ *för* $j = 0, 1, \ldots, N$ *så för* $k = N-1, N-2, \ldots, 0$ *är*

$$\mathbb{E}[\max\{X_{k+1}^+, C_{N-k-1}\}] = \mathbb{E}[\max\{X_{k+1}, 0, C_{N-k-1}\}] = \mathbb{E}[\max\{X_{k+1}, C_{N-k-1}\}].$$

Låt $X \sim \mathrm{U}(a,b)$ *vara oberoende av* $X_0, X_1, \ldots$. *Eftersom* $X, X_0, X_1, \ldots$ *är lika fördelade, är*

$$C_{N-k} = \mathbb{E}[\max\{X_{k+1}, C_{N-k-1}\}] = \mathbb{E}[\max\{X, C_{N-k-1}\}], \quad k = N-1, N-2, \ldots, 0.$$

Om $a \leq C_{N-k-1} \leq b$ *gäller, är* $a \leq C_{N-k} \leq b$. *Eftersom* $C_0 = a^+$ *är mellan* a *och* b, *är* $a \leq C_j \leq b$ *för* $j = 0, 1, \ldots, N$. *Med hjälp av* $U \sim \mathrm{U}(0,1)$ *kan* X *skrivas i formen* $X = a + (b-a)U$ *och eftersom* C_j *är en konstant kan den också skrivas i formen* $C_j = a + (b-a)C'_j$ *för* $j = 0, 1, \ldots, N$. *För* $k = N-1, N-2, \ldots, 0$ *är*

$$C_{N-k} = \mathbb{E}[\max\{X, C_{N-k-1}\}] = a + (b-a)\mathbb{E}[\max\{U, C'_{N-k-1}\}].$$

Från $a \leq C_j \leq b$ *följer* $0 \leq C'_j \leq 1$ *för* $j = 0, 1, \ldots, N$. *För* $k = N-1, N-2, \ldots, 0$ *har* $C'_{N-k} = \mathbb{E}[\max\{U, C'_{N-k-1}\}]$ *formen*

$$\mathbb{E}[\max\{U, C'_{N-k-1}\}] = C'_{N-k-1}\mathbb{P}(U \leq C'_{N-k-1}) + \int_{C'_{N-k-1}}^{1} u\,du = \frac{1}{2}\big[1 + (C'_{N-k-1})^2\big].$$

Då fås rekursionerna

$$C'_0 = \frac{a^-}{b-a}, \quad C'_{N-k} = \frac{1}{2}\big[1 + (C'_{N-k-1})^2\big], \quad k = N-1, N-2, \ldots, 0,$$

och

$$(Q^{N-k}g)(X_k) = \max\{X_k^+,\, a + (b-a)C'_{N-k}\}, \quad k = N, N-1, \ldots, 0.$$

Kapitel 4

Oändlig horisont

Presentationen i detta kapitel följer Shiryaev [7] s.27–28, s.39–57 och s.93–100.

Låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum försett med en filtration. Betrakta en tidshomogen Markovkedja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ med värden i tillståndsrummet $(E, \mathcal{E})$ och en $\mathcal{E}$-mätbar funktion $g\colon E \to [0, \infty]$. Ett optimal stopping-problem sägs ha en oändlig horisont om det är tillåtet att göra ett obegränsat antal observationer.

Låt $\overline{\mathcal{M}}$ vara mängden av alla stopptider definierade i sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Då är

$$g(X_\tau) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} g(X_n) I_{\{\tau=n\}} + g(X_\infty) I_{\{\tau=\infty\}} \tag{4.1}$$

vinsten vid en stopptid $\tau \in \overline{\mathcal{M}}$ där händelsen $\{\tau = \infty\}$ betyder att man aldrig stannar och

$$g(X_\infty) \coloneqq \limsup_{n\to\infty} g(X_n) \tag{4.2}$$

är vinsten om man aldrig stannar. Eftersom g är en icke-negativ funktion, är den förväntade vinsten $\mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$ definierad för varje $\tau \in \overline{\mathcal{M}}$ och $x \in E$.

Definiera värdefunktionen $\overline{V}\colon E \to [0, \infty]$ som

$$\overline{V}(x) \coloneqq \sup_{\tau\in\overline{\mathcal{M}}} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]. \tag{4.3}$$

En optimal stopptid i mängden $\overline{\mathcal{M}}$ är $\tau^* \in \overline{\mathcal{M}}$ för vilken gäller

$$\mathbb{E}_x[g(X_{\tau^*})] = \overline{V}(x), \quad \forall x \in E. \tag{4.4}$$

Om man vill stanna inom ändlig tid, betraktar man stopptider från mängden

$$\mathcal{M} \coloneqq \big\{\tau \in \overline{\mathcal{M}} : \mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1,\, \forall x \in E\big\}. \tag{4.5}$$

Då är

$$g(X_\tau) := \sum_{n=0}^{\infty} g(X_n) I_{\{\tau=n\}} \tag{4.6}$$

vinsten vid en ändlig stopptid $\tau \in \mathcal{M}$.

Definiera värdefunktionen $V\colon E \to [0,\infty]$ som

$$V(x) := \sup_{\tau\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]. \tag{4.7}$$

Eftersom mängden $\mathcal{M}$ är en delmängd av $\overline{\mathcal{M}}$, är $V(x) \leq \overline{V}(x)$. En optimal stopptid i mängden $\mathcal{M}$ är $\tau^* \in \mathcal{M}$ för vilken gäller

$$\mathbb{E}_x[g(X_{\tau^*})] = V(x), \quad \forall x \in E. \tag{4.8}$$

4.1 Excessiva funktioner

Excessiva funktioner används för att beskriva värdefunktioner och optimala stopptider. Härnäst definieras dessa funktioner, deras egenskaper studeras och nödvändiga resultat gällande stopptider och excessiva funktioner härleds.

Definition 4.1. *En $\mathcal{E}$-mätbar funktion $f\colon E \to [0,\infty]$ för vilken gäller*

$$\mathbb{E}_x[f(X_1)] \leq f(x), \quad \forall x \in E,$$

kallas för en excessiv funktion med avseende på Markovkedjan $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Följande proposition beskriver några egenskaper hos excessiva funktioner.

Proposition 4.2.

(i) En icke-negativ konstant funktion är excessiv.

(ii) Om funktionerna f och h är excessiva och konstanterna a och b är icke-negativa så är $af + bh$ en excessiv funktion.

(iii) Låt $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ vara en icke-avtagande följd av excessiva funktioner. Då är funktionen $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ excessiv.

(iv) Om f är en excessiv funktion så är $\big(f(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ en generaliserad supermartingal.

(v) *Låt f vara en excessiv funktion. Då är funktionen $f_m(x) \coloneqq \mathbb{E}_x[f(X_m)]$ excessiv för varje $m \in \mathbb{N}$ och för $m \geq n$ är $f_m(x) \leq f_n(x)$.*

(vi) *Låt f och h vara excessiva funktioner. Då är funktionen $f \wedge h \coloneqq \min\{f, h\}$ excessiv.*

(vii) *Om f är en excessiv funktion så är gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} f(X_n)$ definierat med $\mathbb{P}_x$-sannolikheten ett.*

Bevis.

(i) Betrakta en konstant $c \geq 0$ och funktionen $f\colon E \to \{c\}$. Då är

$$\mathbb{E}_x[f(X_1)] = c = f(x).$$

(ii) Eftersom funktionerna f och h är excessiva och konstanterna a och b är icke-negativa, är

$$\mathbb{E}_x[af(X_1) + bh(X_1)] = a\mathbb{E}_x[f(X_1)] + b\mathbb{E}_x[h(X_1)] \leq af(x) + bh(x).$$

(iii) Följden $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ är icke-avtagande så gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ är definierat. Eftersom funktionerna $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ är icke-negativa, är $f(x)$ också en icke-negativ funktion. Med hjälp av monotona konvergenssatsen 2.33 fås

$$\mathbb{E}_x\Big[f(X_1)\Big] = \mathbb{E}_x\Big[\lim_{n\to\infty} f_n(X_1)\Big] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x\Big[f_n(X_1)\Big] \leq \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

(iv) Eftersom $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ är en tidshomogen Markovkedja och f en excessiv funktion, är

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n] = \mathbb{E}_{X_n}[f(X_1)] \leq f(X_n).$$

(v) Funktionen f är icke-negativ så väntevärdet $\mathbb{E}_x[f(X_m)]$ är definierat och icke-negativt för varje $m \in \mathbb{N}$ och $x \in E$. Eftersom f är en excessiv funktion och $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ en tidshomogen Markovkedja, är $f_1(x) \leq f(x)$ och

$$f_2(x) = \mathbb{E}_x[f_1(X_1)] \leq \mathbb{E}_x[f(X_1)] = f_1(x).$$

Det allmänna fallet bevisas med induktion.

(vi) Från olikheterna $(f \wedge h)(x) \leq f(x)$ och $(f \wedge h)(x) \leq h(x)$ följer

$$\mathbb{E}_x[(f \wedge h)(X_1)] \leq \min\{\mathbb{E}_x[f(X_1)], \mathbb{E}_x[h(X_1)]\}.$$

Eftersom f och h är excessiva funktioner, är

$$\min\{\mathbb{E}_x[f(X_1)], \mathbb{E}_x[h(X_1)]\} \leq \min\{f(x), h(x)\} = (f \wedge h)(x).$$

(vii) Resultatet följer från egenskap *(iv)* och sats 2.30. □

Lemma 4.3. *Låt f vara en excessiv funktion och stopptiderna τ_1 och τ_2 sådana att $\mathbb{P}_x(\tau_1 \leq \tau_2) = 1$ gäller för varje $x \in E$. Då är*

$$\mathbb{E}_x[f(X_{\tau_2})|\mathcal{F}_{\tau_1}] \leq f(X_{\tau_1}), \quad \forall x \in E. \tag{4.9}$$

En direkt följd av olikheten (4.9) *är*

$$\mathbb{E}_x[f(X_{\tau_2})] \leq \mathbb{E}_x[f(X_{\tau_1})] \leq f(x), \quad \forall x \in E. \tag{4.10}$$

Bevis. Enligt egenskap *(vii)* i proposition 4.2 är gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} f(X_n)$ definierat och enligt (4.2) är $f(X_\infty) = \lim_{n\to\infty} f(X_n)$. Om f uppfyller kravet

$$\mathbb{E}_x\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} f(X_n)\right] < \infty, \quad \forall x \in E,$$

är $\big(f(X_n)\big)_{n\in\overline{\mathbb{N}}_0}$ en supermartingal och enligt sats 2.32 gäller olikheten (4.9).

Annars kan man betrakta en konstant $c \geq 0$ och funktionen $(f \wedge c)(x)$. Följden $\big((f \wedge c)(x)\big)_{c\geq 0}$ är icke-avtagande så gränsvärdet $\lim_{c\to\infty}(f \wedge c)(x)$ är definierat. Enligt egenskaperna *(i)* och *(vi)* i proposition 4.2 är $(f \wedge c)(x)$ en excessiv funktion. Enligt egenskap *(vii)* i proposition 4.2 är gränsvärdet $\lim_{n\to\infty}(f \wedge c)(X_n)$ definierat och enligt (4.2) är $(f \wedge c)(X_\infty) = \lim_{n\to\infty}(f \wedge c)(X_n)$. Funktionen uppfyller också kravet ovan så $\big((f \wedge c)(X_n)\big)_{n\in\overline{\mathbb{N}}_0}$ är en supermartingal. Enligt sats 2.32 är

$$\mathbb{E}_x[(f \wedge c)(X_{\tau_2})|\mathcal{F}_{\tau_1}] \leq (f \wedge c)(X_{\tau_1}).$$

Genom att ta $\liminf_{c\to\infty}$ av båda sidorna av olikheten fås med hjälp av Fatous lemma 2.34

$$\mathbb{E}_x\left[\lim_{c\to\infty}(f \wedge c)(X_{\tau_2})\middle|\mathcal{F}_{\tau_1}\right] \leq \lim_{c\to\infty}(f \wedge c)(X_{\tau_1})$$

ty $\lim_{c\to\infty}(f \wedge c)(x) = \liminf_{c\to\infty}(f \wedge c)(x)$.

Slutligen är

$$\begin{aligned}\lim_{c\to\infty}(f\wedge c)(X_{\tau_1}) &= \lim_{c\to\infty}(f\wedge c)(X_{\tau_1})I_{\{\tau_1<\infty\}} + \lim_{c\to\infty}(f\wedge c)(X_\infty)I_{\{\tau_1=\infty\}}\\ &= f(X_{\tau_1})I_{\{\tau_1<\infty\}} + \lim_{c\to\infty}\lim_{n\to\infty}(f\wedge c)(X_n)I_{\{\tau_1=\infty\}}\\ &= f(X_{\tau_1})I_{\{\tau_1<\infty\}} + \lim_{n\to\infty}\lim_{c\to\infty}(f\wedge c)(X_n)I_{\{\tau_1=\infty\}}\\ &= f(X_{\tau_1})I_{\{\tau_1<\infty\}} + \lim_{n\to\infty} f(X_n)I_{\{\tau_1=\infty\}}\\ &= f(X_{\tau_1})I_{\{\tau_1<\infty\}} + f(X_\infty)I_{\{\tau_1=\infty\}} = f(X_{\tau_1})\end{aligned}$$

och på samma sätt är $\lim_{c\to\infty}(f\wedge c)(X_{\tau_2}) = f(X_{\tau_2})$. □

Det föregående lemmat används för att beskriva värdefunktioner och följande korollarium visar en tillämpning av lemmat.

Korollarium 4.4. *Anta att vinstfunktionen g är excessiv. Då är*

$$g(x) = V(x) = \overline{V}(x) \tag{4.11}$$

och $\tau^* \equiv 0$ en optimal stopptid.

Bevis. Påståendena följer direkt från lemma 4.3. Enligt olikheten (4.10) är

$$\mathbb{E}_x[g(X_\tau)] \le \mathbb{E}_x[g(X_0)] = g(x)$$

för varje stopptid $\tau \in \overline{\mathcal{M}}$. Därmed är $V(x) \le \overline{V}(x) \le g(x)$. Eftersom $\tau^* \equiv 0$ hör till mängden $\mathcal{M}$, är $g(x) \le V(x) \le \overline{V}(x)$. Därmed är $g(x) = V(x) = \overline{V}(x)$ och $\tau^* \equiv 0$ en optimal stopptid. □

Definition 4.5. *Låt $h\colon E \to [0,\infty]$ vara en $\mathcal{E}$-mätbar funktion. En excessiv funktion f för vilken gäller*

$$f(x) \ge h(x),$$

kallas för en excessiv majorant av h. En excessiv majorant som är mindre än eller lika med alla andra excessiva majoranter är den minsta excessiva majoranten.

Om f är en excessiv majorant av h, är

$$\max\{h(x), \mathbb{E}_x[f(X_1)]\} \le f(x). \tag{4.12}$$

Följande lemma visar att olikheten blir en likhet om f är den minsta excessiva majoranten av h.

Lemma 4.6. *Låt $h\colon E \to [0,\infty]$ vara en $\mathcal{E}$-mätbar funktion. Om v är den minsta excessiva majoranten av h, är*

$$v(x) = \max\{h(x),\, \mathbb{E}_x[v(X_1)]\}. \tag{4.13}$$

Bevis. Från olikheten (4.12) följer

$$\mathbb{E}_x\Big[\max\{h(X_1),\, \mathbb{E}_{X_1}[v(X_1)]\}\Big] \le \mathbb{E}_x[v(X_1)].$$

Denna olikhet tillsammans med olikheterna

$$\mathbb{E}_x[v(X_1)] \le \max\{h(x),\, \mathbb{E}_x[v(X_1)]\} \quad \text{och} \quad h(x) \le \max\{h(x),\, \mathbb{E}_x[v(X_1)]\}$$

medför att $\max\{h(x),\, \mathbb{E}_x[v(X_1)]\}$ är en excessiv majorant av $h(x)$. Eftersom $v(x)$ är den minsta excessiva majoranten av $h(x)$, är $v(x) \le \max\{h(x),\, \mathbb{E}_x[v(X_1)]\}$. Därmed är $v(x) = \max\{h(x),\, \mathbb{E}_x[v(X_1)]\}$. □

Varje funktion f som löser ekvationen

$$f(x) = \max\{h(x),\, \mathbb{E}_x[f(X_1)]\}$$

behöver inte vara den minsta excessiva majoranten av h. Till exempel om h är en begränsad funktion, $h(x) \le C < \infty$, är $f(x) \equiv K$ en lösning för varje $K \ge C$. Följande lemma visar en annan metod för att hitta den minsta excessiva majoranten.

Lemma 4.7. *Låt $h\colon E \to [0,\infty]$ vara en $\mathcal{E}$-mätbar funktion. Den minsta excessiva majoranten av $h(x)$ är*

$$v(x) = \lim_{n\to\infty} (Q^n h)(x). \tag{4.14}$$

Bevis. Från likheten

$$(Q^n h)(x) = \max\{(Q^{n-1}h)(x),\, \mathbb{E}_x[(Q^{n-1}h)(X_1)]\}$$

följer att följden $\big((Q^n h)(x)\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ är icke-avtagande så gränsvärdet $\lim_{n\to\infty}(Q^n h)(x)$ är definierat. Därmed är $v(x) \ge h(x)$.

Från likheten följer också $(Q^n h)(x) \ge \mathbb{E}_x[(Q^{n-1}h)(X_1)]$ så med hjälp av monotona konvergenssatsen 2.33 fås

$$\begin{aligned} v(x) = \lim_{n\to\infty} (Q^n h)(x) &\ge \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x\Big[(Q^{n-1}h)(X_1)\Big] \\ &= \mathbb{E}_x\Big[\lim_{n\to\infty} (Q^{n-1}h)(X_1)\Big] = \mathbb{E}_x\Big[v(X_1)\Big]. \end{aligned}$$

Därmed är v en excessiv majorant av h.

Låt f vara en godtycklig excessiv majorant av h. Då är $f(x) \geq h(x)$ vilket medför $\mathbb{E}_x[f(X_1)] \geq \mathbb{E}_x[h(X_1)]$. Denna olikhet tillsammans med olikheten $f(x) \geq \mathbb{E}_x[f(X_1)]$ medför

$$f(x) \geq (Qh)(x) = \max\{h(x), \mathbb{E}_x[h(X_1)]\}.$$

Med induktion kan man visa att för varje $n \in \mathbb{N}_0$ gäller $f(x) \geq (Q^n h)(x)$. Då är $f(x) \geq v(x)$ och därmed är v den minsta excessiva majoranten av h. $\square$

Enligt det föregående lemmat är den minsta excessiva majoranten av vinstfunktionen g definierad. Den används för att beskriva värdefunktioner.

Lemma 4.8. *Låt $h\colon E \to [0, \infty]$ vara en $\mathcal{E}$-mätbar funktion och f en excessiv majorant av h som uppfyller*

$$f(x) = \max\{h(x), \mathbb{E}_x[f(X_1)]\}. \tag{4.15}$$

För $\varepsilon \geq 0$ definiera stopptiden

$$\tau_\varepsilon = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : f(X_n) \leq h(X_n) + \varepsilon\}.$$

Om för något tillstånd $x' \in E$ gäller $f(x') < \infty$ så för varje $n \in \mathbb{N}_0$ är

$$f(x') = \mathbb{E}_{x'}[f(X_{\tau_\varepsilon \wedge n})]. \tag{4.16}$$

Bevis. Eftersom $f(x')$ är ett ändligt värde, är också alla väntevärden i ekvationen

$$\begin{aligned} f(x') = \mathbb{E}_{x'}[f(X_0)] &= \mathbb{E}_{x'}[f(X_0)I_{\{\tau_\varepsilon=0\}} + f(X_0)I_{\{\tau_\varepsilon>0\}}] \\ &= \mathbb{E}_{x'}[f(X_0)I_{\{\tau_\varepsilon=0\}}] + \mathbb{E}_{x'}[f(X_0)I_{\{\tau_\varepsilon>0\}}] \end{aligned}$$

ändliga. Händelsen $\{\tau_\varepsilon > 0\} \in \mathcal{F}_0$ betyder att $f(X_0) > h(X_0)$ gäller vilket enligt ekvationen (4.15) ger

$$f(X_0) = \mathbb{E}_{X_0}[f(X_1)] = \mathbb{E}_{x'}[f(X_1)|X_0] = \mathbb{E}_{x'}[f(X_1)|\mathcal{F}_0].$$

Egenskaperna *(vi)* och *(vii)* i proposition 2.16 ger

$$\begin{aligned} f(x') &= \mathbb{E}_{x'}[f(X_0)I_{\{\tau_\varepsilon=0\}}] + \mathbb{E}_{x'}\Big[\mathbb{E}_{x'}[f(X_1)|\mathcal{F}_0]I_{\{\tau_\varepsilon>0\}}\Big] \\ &= \mathbb{E}_{x'}[f(X_{\tau_\varepsilon})I_{\{\tau_\varepsilon=0\}}] + \mathbb{E}_{x'}[f(X_1)I_{\{\tau_\varepsilon>0\}}] \\ &= \mathbb{E}_{x'}[f(X_{\tau_\varepsilon})I_{\{\tau_\varepsilon=0\}}] + \mathbb{E}_{x'}[f(X_1)I_{\{\tau_\varepsilon=1\}}] + \mathbb{E}_{x'}[f(X_1)I_{\{\tau_\varepsilon>1\}}] \\ &= \mathbb{E}_{x'}[f(X_{\tau_\varepsilon})I_{\{\tau_\varepsilon\leq1\}}] + \mathbb{E}_{x'}[f(X_1)I_{\{\tau_\varepsilon>1\}}]. \end{aligned}$$

Händelsen $\{\tau_\varepsilon > 1\} \in \mathcal{F}_1$ medför $f(X_1) > h(X_1)$ vilket ger $f(X_1) = \mathbb{E}_{x'}[f(X_2)|\mathcal{F}_1]$. Genom att upprepa liknande räkningar fås

$$\begin{aligned}
f(x') &= \mathbb{E}_{x'}[f(X_{\tau_\varepsilon})I_{\{\tau_\varepsilon \le 1\}}] + \mathbb{E}_{x'}[f(X_1)I_{\{\tau_\varepsilon > 1\}}] \\
&= \mathbb{E}_{x'}[f(X_{\tau_\varepsilon})I_{\{\tau_\varepsilon \le 2\}}] + \mathbb{E}_{x'}[f(X_2)I_{\{\tau_\varepsilon > 2\}}] \\
&\ \ \vdots \\
&= \mathbb{E}_{x'}[f(X_{\tau_\varepsilon})I_{\{\tau_\varepsilon \le n\}}] + \mathbb{E}_{x'}[f(X_n)I_{\{\tau_\varepsilon > n\}}] \\
&= \mathbb{E}_{x'}[f(X_{\tau_\varepsilon \wedge n})]
\end{aligned}$$

vilket bevisar lemmat. □

Lemma 4.9. *Låt $h\colon E \to [0,\infty]$ vara en $\mathcal{E}$-mätbar funktion som uppfyller*

$$\mathbb{E}_x\left[\sup_{j\ge 0} h(X_j)\right] < \infty, \quad \forall x \in E.$$

Beteckna den minsta excessiva majoranten av h med v och för $\varepsilon \ge 0$ definiera stopptiden

$$\tau_\varepsilon = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : v(X_n) \le h(X_n) + \varepsilon\}.$$

Med $\mathbb{P}_x$-sannolikheten ett är

$$\limsup_{n\to\infty} v(X_n) = \limsup_{n\to\infty} h(X_n), \quad \forall x \in E, \tag{4.17}$$

och för $\varepsilon > 0$ hör τ_ε till mängden $\mathcal{M}$.

Bevis. För varje $n \in \mathbb{N}_0$ är $v(X_n) \ge h(X_n)$ så då är

$$\limsup_{n\to\infty} v(X_n) \ge \limsup_{n\to\infty} h(X_n).$$

För att bevisa den omvända olikheten, fixera ett tillstånd $x \in E$ och definiera

$$\psi_n := \sup_{j\ge n} h(X_j) \quad \text{och} \quad \varphi_n := \mathbb{E}_x(\psi_n|\mathcal{F}_n).$$

Eftersom $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ är en tidshomogen Markovkedja, är

$$\varphi_n = \mathbb{E}_x(\psi_n|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_x(\psi_n|X_n) = \mathbb{E}_{X_n}(\psi_0) = \varphi(X_n)$$

där $\varphi(x) := \mathbb{E}_x(\psi_0)$. Med $\mathbb{P}_x$-sannolikheten ett gäller $\psi_0 \ge h(X_0)$ vilket medför $\mathbb{E}_x(\psi_0) = \varphi(x) \ge h(x) = \mathbb{E}_x[h(X_0)]$ och enligt egenskap *(vii)* i proposition 2.16 är

$$\mathbb{E}_x[\varphi(X_1)] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x(\psi_1|X_1)] = \mathbb{E}_x(\psi_1) \le \mathbb{E}_x(\psi_0) = \varphi(x).$$

Därmed är φ en excessiv majorant av h. Eftersom v är den minsta excessiva majoranten av h, är $v(x) \leq \varphi(x)$.

Låt m vara ett fixt heltal och $n \geq m$ ett annat heltal. Då är

$$v(X_n) \leq \varphi(X_n) = \mathbb{E}_x(\psi_n|\mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}_x(\psi_m|\mathcal{F}_n)$$

och således är

$$\limsup_{n\to\infty} v(X_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}_x(\psi_m|\mathcal{F}_n).$$

Enligt sats 2.31 är $\big(\mathbb{E}_x(\psi_m|\mathcal{F}_n)\big)_{n\geq m}$ en martingal för varje $m \in \mathbb{N}_0$. Enligt samma satsen är gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x(\psi_m|\mathcal{F}_n)$ definierat och uppfyller

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x(\psi_m|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_x(\psi_m|\mathcal{F}_\infty).$$

Den stokastiska variabeln ψ_m är $\mathcal{F}_\infty$-mätbar så då är

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x(\psi_m|\mathcal{F}_n) = \psi_m.$$

Alltså för varje $m \in \mathbb{N}_0$ är

$$\limsup_{n\to\infty} v(X_n) \leq \psi_m$$

så då är

$$\limsup_{n\to\infty} v(X_n) \leq \inf_{m\in\mathbb{N}_0} \psi_m = \inf_{m\in\mathbb{N}_0} \sup_{j\geq m} h(X_j) = \limsup_{n\to\infty} h(X_n).$$

Därmed är $\limsup_{n\to\infty} v(X_n) = \limsup_{n\to\infty} h(X_n)$.

Härnäst bevisas att för $\varepsilon > 0$ hör τ_ε till $\mathcal{M}$. Händelsen $\{\tau_\varepsilon = \infty\}$ betyder att $v(X_n) > h(X_n) + \varepsilon$ gäller för varje $n \in \mathbb{N}_0$ vilket i sin tur medför $\limsup_{n\to\infty} v(X_n) > \limsup_{n\to\infty} h(X_n)$. Detta är en motsägelse och dessutom är $\mathbb{P}_x\big(\limsup_{n\to\infty} h(X_n) < \infty\big) = 1$ för varje $x \in E$. Därmed är $\mathbb{P}_x(\tau_\varepsilon = \infty) = 0$ för varje $x \in E$ och $\varepsilon > 0$. □

Det sista resultatet som behövs för att beskriva värdefunktioner och optimala stopptider följer från de två föregående lemmana.

Korollarium 4.10. *Låt $h\colon E \to [0,\infty]$ vara en $\mathcal{E}$-mätbar funktion som uppfyller*

$$\mathbb{E}_x\left[\sup_{j\geq 0} h(X_j)\right] < \infty, \quad \forall x \in E.$$

Beteckna den minsta excessiva majoranten av h med v och för $\varepsilon \geq 0$ definiera stopptiden

$$\tau_\varepsilon = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : v(X_n) \leq h(X_n) + \varepsilon\}.$$

För $\varepsilon > 0$ är

$$\mathbb{E}_x[v(X_{\tau_\varepsilon})] = v(x), \quad \forall x \in E. \tag{4.18}$$

Bevis. Enligt lemma 4.6 gäller $v(x) = \max\{h(x), \mathbb{E}_x[v(X_1)]\}$ och som det visades i beviset för lemma 4.9 är

$$v(x) \leq \varphi(x) = \mathbb{E}_x\left[\sup_{j\geq 0} h(X_j)\right] < \infty, \quad \forall x \in E.$$

Alltså lemma 4.8 kan användas och då för varje $n \in \mathbb{N}_0$ är

$$\mathbb{E}_x[v(X_{\tau_\varepsilon \wedge n})] = v(x), \quad \forall x \in E.$$

För att visa att $\mathbb{E}_x[v(X_{\tau_\varepsilon})] = v(x)$ gäller, betrakta termen

$$\mathbb{E}_x[v(X_{\tau_\varepsilon \wedge n})I_{\{\tau_\varepsilon > n\}}] = \mathbb{E}_x[v(X_n)I_{\{\tau_\varepsilon > n\}}].$$

Från olikheten

$$v(X_n) \leq \varphi(X_n) = \mathbb{E}_x\left[\sup_{j\geq n} h(X_j)\middle|\mathcal{F}_n\right]$$

följer, med hjälp av egenskaperna *(vi)* och *(vii)* i proposition 2.16,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left[v(X_n)I_{\{\tau_\varepsilon > n\}}\right] &\leq \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[\sup_{j\geq n} h(X_j)\middle|\mathcal{F}_n\right]I_{\{\tau_\varepsilon > n\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\sup_{j\geq n} h(X_j)I_{\{\tau_\varepsilon > n\}}\right] \leq \mathbb{E}_x\left[\sup_{j\geq 0} h(X_j)I_{\{\tau_\varepsilon > n\}}\right].\end{aligned}$$

Enligt lemma 4.9 hör τ_ε till $\mathcal{M}$ för $\varepsilon > 0$ så med hjälp av Fatous lemma 2.34 fås

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[v(X_n)I_{\{\tau_\varepsilon > n\}}] \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}_x\left[\sup_{j\geq 0} h(X_j)I_{\{\tau_\varepsilon > n\}}\right] \leq 0.$$

Eftersom väntevärdet $\mathbb{E}_x[v(X_n)I_{\{\tau_\varepsilon > n\}}]$ är icke-negativt för varje $n \in \mathbb{N}_0$, är

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[v(X_n)I_{\{\tau_\varepsilon > n\}}] \geq 0.$$

Därmed är $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[v(X_n)I_{\{\tau_\varepsilon > n\}}] = 0$. Detta tillsammans med monotona konvergenssatsen 2.33 och likheten

$$\begin{aligned}v(x) &= \mathbb{E}_x[v(X_{\tau_\varepsilon \wedge n})] \\ &= \mathbb{E}_x[v(X_{\tau_\varepsilon})I_{\{\tau_\varepsilon \leq n\}}] + \mathbb{E}_x[v(X_n)I_{\{\tau_\varepsilon > n\}}]\end{aligned}$$

bevisar korollariet. □

4.2 Värdefunktioner och optimala stopptider

Den första satsen beskriver värdefunktioner och den andra optimala stopptider.

Sats 4.11. *Beteckna den minsta excessiva majoranten av vinstfunktionen g med v. Då är*

$$v(x) = V(x) = \overline{V}(x) \tag{4.19}$$

och för $b \geq 0$ är

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{b\to\infty} \big(Q^n(g \wedge b)\big)(x) = \lim_{b\to\infty} \lim_{n\to\infty} \big(Q^n(g \wedge b)\big)(x). \tag{4.20}$$

Bevis. För varje $n \in \mathbb{N}_0$ är $v(X_n) \geq g(X_n)$ så då är

$$\limsup_{n\to\infty} v(X_n) \geq \limsup_{n\to\infty} g(X_n).$$

Detta betyder att $v(X_\tau) \geq g(X_\tau)$ gäller för varje $\tau \in \overline{\mathcal{M}}$ och i så fall är också $\mathbb{E}_x[v(X_\tau)] \geq \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$ för varje $\tau \in \overline{\mathcal{M}}$ och $x \in E$ men enligt lemma 4.3 är $v(x) \geq \mathbb{E}_x[v(X_\tau)]$ för varje $\tau \in \overline{\mathcal{M}}$ och $x \in E$. Därmed är

$$v(x) \geq \overline{V}(x) \geq V(x).$$

För att bevisa den omvända olikheten, anta att g uppfyller

$$\mathbb{E}_x\left[\sup_{j\geq 0} g(X_j)\right] < \infty, \quad \forall x \in E. \tag{4.21}$$

Enligt lemma 4.9 hör stopptiden

$$\tau_\varepsilon = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : v(X_n) \leq g(X_n) + \varepsilon\}$$

till $\mathcal{M}$ för $\varepsilon > 0$ och enligt korollarium 4.10 är $v(x) = \mathbb{E}_x[v(X_{\tau_\varepsilon})]$ för $\varepsilon > 0$. Därmed är

$$v(x) = \mathbb{E}_x[v(X_{\tau_\varepsilon})] \leq \mathbb{E}_x[g(X_{\tau_\varepsilon})] + \varepsilon \leq V(x) + \varepsilon$$

för varje $\varepsilon > 0$. Denna olikhet tillsammans med den tidigare bevisade olikheten $v(x) \geq V(x)$ medför $v(x) = V(x)$.

Om g inte uppfyller (4.21), kan man betrakta en konstant $b \geq 0$ och funktionen $g \wedge b$. Beteckna den minsta excessiva majoranten av $g \wedge b$ med v_b och definiera värdefunktionen $V_b(x) := \sup_{\tau\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_x[(g \wedge b)(X_\tau)]$. Funktionen $g \wedge b$ uppfyller (4.21) så enligt det som bevisades tidigare är $v_b(x) = V_b(x)$.

Enligt egenskap *(iii)* i proposition 4.2 är $v_*(x) := \lim_{b\to\infty} v_b(x)$ en excessiv funktion. För varje $b \geq 0$ är $v_b(x) \geq (g \wedge b)(x)$ så då är $v_*(x) \geq g(x)$. Alltså v_* är en excessiv majorant av g. Låt f vara en godtycklig excessiv majorant av g. Då är f också en excessiv majorant av $g \wedge b$ för varje $b \geq 0$. Eftersom v_b är den minsta excessiva majoranten av $g \wedge b$ för varje $b \geq 0$, är $v_*(x) \leq f(x)$. Alltså v_* är den minsta excessiva majoranten av g så då är $v_*(x) = v(x)$. För varje $b \geq 0$ är $V(x) \geq V_b(x) = v_b(x)$ så då är $V(x) \geq v_*(x) = v(x)$. Därmed är $v(x) = V(x) = \overline{V}(x)$.

Enligt det som bevisades tidigare och lemma 4.7, är

$$V(x) = v(x) = \lim_{n\to\infty} (Q^n g)(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{b\to\infty} \big(Q^n(g \wedge b)\big)(x)$$

och

$$V(x) = v(x) = \lim_{b\to\infty} v_b(x) = \lim_{b\to\infty} \lim_{n\to\infty} \big(Q^n(g \wedge b)\big)(x)$$

vilket slutför beviset. □

Korollarium 4.12. *Om stopptiden $\overline{\tau} \in \overline{\mathcal{M}}$ är sådan att den förväntade vinsten $f(x) = \mathbb{E}_x[g(X_{\overline{\tau}})]$ är en excessiv majorant av $g(x)$ så är $f(x) = \overline{V}(x)$ och $\overline{\tau}$ en optimal stopptid i mängden $\overline{\mathcal{M}}$.*

Bevis. Enligt sats 4.11 är $\overline{V}$ den minsta excessiva majoranten av g så då är $\overline{V}(x) \leq f(x)$. Detta tillsammans med $f(x) \leq \overline{V}(x)$ ger $f(x) = \overline{V}(x)$. □

Den optimala stopptiden $\overline{\tau} \in \overline{\mathcal{M}}$ från det föregående korollariet behöver inte vara en optimal stopptid i mängden $\mathcal{M}$. Följande sats beskriver optimala stopptider noggrannare men har ett ytterligare krav jämfört med sats 4.11.

En stopptid $\tau \in \mathcal{M}$ för vilken gäller

$$\mathbb{E}_x[g(X_\tau)] \geq V(x) - \varepsilon, \quad \forall x \in E, \tag{4.22}$$

för något $\varepsilon > 0$, kallas för en ε-optimal stopptid. På ett liknande sätt definieras ε-optimala stopptider i mängden $\overline{\mathcal{M}}$.

Sats 4.13. *Anta att vinstfunktionen g uppfyller*

$$\mathbb{E}_x\left[\sup_{j\geq 0} g(X_j)\right] < \infty, \quad \forall x \in E.$$

Beteckna den minsta excessiva majoranten av g med v och för $\varepsilon \geq 0$ definiera stopptiden

$$\tau_\varepsilon = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : v(X_n) \leq g(X_n) + \varepsilon\}. \tag{4.23}$$

För $\varepsilon > 0$ är τ_ε en ε-optimal stopptid i mängden $\mathcal{M}$ och τ_0 är en optimal stopptid i mängden $\overline{\mathcal{M}}$. Om τ_0 hör till $\mathcal{M}$, är τ_0 en optimal stopptid i $\mathcal{M}$. Om mängden E är ändlig så hör τ_0 till $\mathcal{M}$.

Bevis. Enligt lemma 4.9 hör τ_ε till $\mathcal{M}$ för varje $\varepsilon > 0$ och enligt korollarium 4.10 är $v(x) = \mathbb{E}_x[v(X_{\tau_\varepsilon})]$ för varje $\varepsilon > 0$. Därmed är

$$v(x) = \mathbb{E}_x[v(X_{\tau_\varepsilon})] \leq \mathbb{E}_x[g(X_{\tau_\varepsilon})] + \varepsilon$$

för varje $\varepsilon > 0$ vilket tillsammans med resultatet $v(x) = V(x)$ från sats 4.11 medför att τ_ε är en ε-optimal stopptid i $\mathcal{M}$.

Enligt lemma 4.6 gäller $v(x) = \max\{g(x), \mathbb{E}_x[v(X_1)]\}$ och som det visades i beviset för lemma 4.9 är

$$v(x) \leq \varphi(x) = \mathbb{E}_x\left[\sup_{j\geq 0} g(X_j)\right] < \infty, \quad \forall x \in E.$$

Alltså lemma 4.8 kan användas. Med hjälp av egenskaperna *(vi)* och *(vii)* i proposition 2.16 fås då för varje $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
v(x) &= \mathbb{E}_x[v(X_{\tau_0})I_{\{\tau_0<n\}}] + \mathbb{E}_x[v(X_n)I_{\{\tau_0\geq n\}}] \\
&\leq \mathbb{E}_x[v(X_{\tau_0})I_{\{\tau_0<n\}}] + \mathbb{E}_x[\varphi(X_n)I_{\{\tau_0\geq n\}}] \\
&= \mathbb{E}_x[v(X_{\tau_0})I_{\{\tau_0<n\}}] + \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[\sup_{j\geq n} g(X_j)\middle|\mathcal{F}_n\right]I_{\{\tau_0\geq n\}}\right] \\
&= \mathbb{E}_x[v(X_{\tau_0})I_{\{\tau_0<n\}}] + \mathbb{E}_x\left[\sup_{j\geq n} g(X_j)I_{\{\tau_0\geq n\}}\right] \\
&\leq \mathbb{E}_x[v(X_{\tau_0})I_{\{\tau_0<n\}}] + \mathbb{E}_x\left[\sup_{j\geq 0} g(X_j)I_{\{n\leq\tau_0<\infty\}}\right] \\
&\qquad + \mathbb{E}_x\left[\sup_{j\geq n} g(X_j)I_{\{\tau_0=\infty\}}\right].
\end{aligned}$$

Med hjälp av Fatous lemma 2.34 fås

$$v(x) \leq \mathbb{E}_x[v(X_{\tau_0})I_{\{\tau_0<\infty\}}] + \mathbb{E}_x\left[\limsup_{n\to\infty} g(X_n)I_{\{\tau_0=\infty\}}\right].$$

Enligt (4.23) är

$$\mathbb{E}_x[v(X_{\tau_0})I_{\{\tau_0<\infty\}}] = \mathbb{E}_x[g(X_{\tau_0})I_{\{\tau_0<\infty\}}]$$

så då fås

$$v(x) \leq \mathbb{E}_x[g(X_{\tau_0})].$$

Enligt sats 4.11 är $v(x) = \overline{V}(x)$ så därmed är τ_0 en optimal stopptid i $\overline{\mathcal{M}}$.

Om τ_0 hör till $\mathcal{M}$ så är

$$\begin{aligned} v(x) &\leq \mathbb{E}_x[g(X_{\tau_0})I_{\{\tau_0<\infty\}}] + \mathbb{E}_x\left[\limsup_{n\to\infty} g(X_n)I_{\{\tau_0=\infty\}}\right] \\ &\leq \mathbb{E}_x[g(X_{\tau_0})I_{\{\tau_0<\infty\}}] + \mathbb{E}_x\left[\sup_{n\geq 0} g(X_n)I_{\{\tau_0=\infty\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_x[g(X_{\tau_0})I_{\{\tau_0<\infty\}}] = \mathbb{E}_x[g(X_{\tau_0})]. \end{aligned}$$

Enligt sats 4.11 är $v(x) = V(x)$ så därmed är τ_0 en optimal stopptid i $\mathcal{M}$.

För $\varepsilon \geq 0$ betrakta mängden $A_\varepsilon := \{x \in E : v(x) \leq g(x) + \varepsilon\}$. Då är $A_0 \subseteq A_\varepsilon$ och $\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon = A_0$. Stopptiden τ_ε kan skrivas som

$$\tau_\varepsilon = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in A_\varepsilon\}.$$

Om mängden E är ändlig så existerar det ett ε' sådant att $A_\varepsilon = A_0$ gäller för varje $\varepsilon \leq \varepsilon'$. Enligt lemma 4.9 hör τ_ε till $\mathcal{M}$ för varje $\varepsilon > 0$ och för $\varepsilon \leq \varepsilon'$ är $\tau_\varepsilon = \tau_0$. Därmed hör τ_0 till $\mathcal{M}$. □

4.3 Modell med observationskostnad

Om varje observation som man gör har en kostnad eller om vinsten $g(x)$ är mer värdefull nu än vad samma vinsten är värd senare i framtiden, vill man inte göra observationer allt för länge. Låt $0 < \beta \leq 1$ vara en konstant och $c\colon E \to [0, \infty)$ en $\mathcal{E}$-mätbar funktion. Anta nu att om man stannar vid tidpunkten $n \in \mathbb{N}$ efter att ha observerat $X_0 = x_0$, $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$, får man vinsten

$$\beta^n g(x_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k c(x_k) \tag{4.24}$$

och vid tidpunkten $n = 0$ får man vinsten $g(x_0)$. Konstanten β gör att framtida värden är mindre värdefulla och funktionen $c(x)$ ger kostnaden för att göra en ny observation vid tillståndet $x \in E$.

Anta också att vinstfunktionen g är begränsad, $g(x) \leq C < \infty$, och att c uppfyller $\mathbb{E}_x[c(X_n)] < \infty$ för varje $n \in \mathbb{N}_0$ och $x \in E$. Den förväntade vinsten

$$\mathbb{E}_x\left[\beta^\tau g(X_\tau) - \sum_{k=0}^{\tau-1} \beta^k c(X_k)\right] \tag{4.25}$$

vid en stopptid $\tau \in \mathcal{M}$ är antingen ändlig eller lika med $-\infty$ så vid stopptider från mängden

$$\mathcal{M}_{\beta,c} := \left\{ \tau \in \mathcal{M} : \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \beta^k c(X_k) \right] < \infty, \forall x \in E \right\} \tag{4.26}$$

är den förväntade vinsten ändlig. Definiera värdefunktionen $V_{\beta,c} \colon E \to [0, C]$ som

$$V_{\beta,c}(x) := \sup_{\tau \in \mathcal{M}_{\beta,c}} \mathbb{E}_x \left[\beta^\tau g(X_\tau) - \sum_{k=0}^{\tau-1} \beta^k c(X_k) \right]. \tag{4.27}$$

Fastän den förväntade vinsten (4.25) inte behöver vara icke-negativ vid varje stopptid $\tau \in \mathcal{M}_{\beta,c}$, är $V_{\beta,c}(x) \geq 0$ för stopptiden $\tau \equiv 0$ hör till $\mathcal{M}_{\beta,c}$ och då är $V_{\beta,c}(x) \geq g(x) \geq 0$.

Stopptiden $\tau^* \in \mathcal{M}_{\beta,c}$ är ε-optimal om för något $\varepsilon > 0$ gäller

$$\mathbb{E}_x \left[\beta^{\tau^*} g(X_{\tau^*}) - \sum_{k=0}^{\tau^*-1} \beta^k c(X_k) \right] \geq V_{\beta,c}(x) - \varepsilon, \quad \forall x \in E, \tag{4.28}$$

och optimal om

$$\mathbb{E}_x \left[\beta^{\tau^*} g(X_{\tau^*}) - \sum_{k=0}^{\tau^*-1} \beta^k c(X_k) \right] = V_{\beta,c}(x), \quad \forall x \in E, \tag{4.29}$$

gäller.

Resultat från tidigare kan användas för att hitta beskrivningar av värdefunktionen och optimala stopptider men de kräver lite modifiering.

Definition 4.14. *En $\mathcal{E}$-mätbar funktion $f \colon E \to [0, \infty]$ för vilken gäller*

$$\beta \mathbb{E}_x[f(X_1)] - c(x) \leq f(x), \quad \forall x \in E,$$

kallas för en (β, c)-excessiv funktion med avseende på Markovkedjan $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Låt $h \colon E \to [0, \infty]$ vara en $\mathcal{E}$-mätbar funktion. En (β, c)-excessiv funktion f för vilken gäller

$$f(x) \geq h(x),$$

kallas för en (β, c)-excessiv majorant av h. En (β, c)-excessiv majorant som är mindre än eller lika med alla andra (β, c)-excessiva majoranter är den minsta (β, c)-excessiva majoranten.

Följande lemman är motsvarigheter av lemmana 4.6 och 4.7.

Lemma 4.15. *Låt $h\colon E \to [0,\infty]$ vara en $\mathcal{E}$-mätbar funktion. Om $v_{\beta,c}$ är den minsta (β,c)-excessiva majoranten av h, är*

$$v_{\beta,c}(x) = \max\{h(x),\, \beta\mathbb{E}_x[v_{\beta,c}(X_1)] - c(x)\}. \tag{4.30}$$

Bevis. Bevisas på ett liknande sätt som lemma 4.6. □

Lemma 4.16. *Låt $h\colon E \to [0,\infty]$ vara en $\mathcal{E}$-mätbar funktion. Definiera operatorn $Q_{\beta,c}$ som*

$$(Q_{\beta,c}h)(x) \coloneqq \max\{h(x),\, \beta\mathbb{E}_x[h(X_1)] - c(x)\}. \tag{4.31}$$

Den minsta (β,c)-excessiva majoranten av $h(x)$ är

$$v_{\beta,c}(x) = \lim_{n\to\infty}(Q^n_{\beta,c}h)(x). \tag{4.32}$$

Bevis. Bevisas på ett liknande sätt som lemma 4.7. □

Enligt det föregående lemmat är den minsta (β,c)-excessiva majoranten av vinstfunktionen g definierad.

Lemmana 4.8 och 4.9 har också sina motsvarigheter.

Lemma 4.17. *Låt $h\colon E \to [0,\infty]$ vara en $\mathcal{E}$-mätbar funktion och f en (β,c)-excessiv majorant av h som uppfyller*

$$f(x) = \max\{h(x),\, \beta\mathbb{E}_x[f(X_1)] - c(x)\}.$$

För $\varepsilon \geq 0$ definiera stopptiden

$$\tau_\varepsilon = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : \beta^n f(X_n) \leq \beta^n h(X_n) + \varepsilon\}.$$

Om för något tillstånd $x' \in E$ gäller $f(x') < \infty$ så för varje $n \in \mathbb{N}_0$ är

$$f(x') = \mathbb{E}_{x'}\left[\beta^{\tau_\varepsilon\wedge n} f(X_{\tau_\varepsilon\wedge n}) - \sum_{k=0}^{(\tau_\varepsilon\wedge n)-1} \beta^k c(X_k)\right]. \tag{4.33}$$

Bevis. Bevisas på ett liknande sätt som lemma 4.8. □

Lemma 4.18. *Låt $h\colon E \to [0,\infty]$ vara en $\mathcal{E}$-mätbar funktion som uppfyller*

$$\mathbb{E}_x\left[\sup_{j\geq 0} h(X_j)\right] < \infty, \quad \forall x \in E.$$

Beteckna den minsta (β, c)-excessiva majoranten av h med $v_{\beta,c}$ och för $\varepsilon \geq 0$ definiera stopptiden

$$\tau_\varepsilon = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : \beta^n v_{\beta,c}(X_n) \leq \beta^n h(X_n) + \varepsilon\}.$$

Med $\mathbb{P}_x$-sannolikheten ett är

$$\limsup_{n\to\infty} \beta^n v_{\beta,c}(X_n) = \limsup_{n\to\infty} \beta^n h(X_n), \quad \forall x \in E, \tag{4.34}$$

och för $\varepsilon > 0$ hör τ_ε till mängden $\mathcal{M}$.

Bevis. Bevisas på ett liknande sätt som lemma 4.9 men istället definieras $\psi_n := \sup_{j\geq n}\{\beta^j h(X_j) - \sum_{k=0}^{j-1} \beta^k c(X_k)\}$. □

Följande sats beskriver värdefunktionen och optimala stopptider.

Sats 4.19. *Beteckna den minsta (β, c)-excessiva majoranten av vinstfunktionen g med $v_{\beta,c}$ och för $\varepsilon \geq 0$ definiera stopptiden*

$$\tau_\varepsilon = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : \beta^n v_{\beta,c}(X_n) \leq \beta^n g(X_n) + \varepsilon\}. \tag{4.35}$$

Då är

$$v_{\beta,c}(x) = V_{\beta,c}(x) \tag{4.36}$$

och för $\varepsilon > 0$ är τ_ε en ε-optimal stopptid. Om τ_0 hör till mängden $\mathcal{M}$, är τ_0 en optimal stopptid. Om

$$\mathbb{P}_x\left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k c(X_k) = \infty\right) = 1, \quad \forall x \in E, \tag{4.37}$$

gäller så hör τ_0 till $\mathcal{M}$.

Bevis. Eftersom g antas vara en begränsad funktion, är $v_{\beta,c}$ också en begränsad funktion för $f(x) \equiv C$ är en (β, c)-excessiv majorant av $g(x)$. Följden $\big(v_{\beta,c}(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ är en (β, c)-supermartingal. Alltså $v_{\beta,c}(X_n)$ är $\mathcal{F}_n$-mätbar för varje $n \in \mathbb{N}_0$ och olikheterna $\mathbb{E}_x[|v_{\beta,c}(X_n)|] < \infty$ och

$$\beta\mathbb{E}_x[v_{\beta,c}(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] - c(X_n) \leq v_{\beta,c}(X_n)$$

gäller för varje $n \in \mathbb{N}_0$ och $x \in E$. Olikheten

$$\mathbb{E}_x\left[\beta^{\tau\wedge n} v_{\beta,c}(X_{\tau\wedge n}) - \sum_{k=0}^{(\tau\wedge n)-1} \beta^k c(X_k)\right] \leq v_{\beta,c}(x)$$

är en (β, c)-supermartingal olikhet som gäller för varje $\tau \in \mathcal{M}$ och $n \in \mathbb{N}_0$. Eftersom β och c är icke-negativa och $\tau \wedge n$ är mindre än eller lika med τ, är

$$\mathbb{E}_x\left[\beta^{\tau\wedge n} v_{\beta,c}(X_{\tau\wedge n}) - \sum_{k=0}^{\tau-1} \beta^k c(X_k)\right] \leq v_{\beta,c}(x).$$

Med hjälp av dominerade konvergenssatsen 2.35 fås

$$\mathbb{E}_x\left[\beta^{\tau} v_{\beta,c}(X_{\tau}) - \sum_{k=0}^{\tau-1} \beta^k c(X_k)\right] \leq v_{\beta,c}(x)$$

och på grund av olikheten $g(x) \leq v_{\beta,c}(x)$ är

$$\mathbb{E}_x\left[\beta^{\tau} g(X_{\tau}) - \sum_{k=0}^{\tau-1} \beta^k c(X_k)\right] \leq v_{\beta,c}(x).$$

Därmed är $V_{\beta,c}(x) \leq v_{\beta,c}(x)$.

Enligt lemma 4.17 gäller

$$\begin{aligned} v_{\beta,c}(x) &= \mathbb{E}_x\left[\beta^{\tau_\varepsilon\wedge n} v_{\beta,c}(X_{\tau_\varepsilon\wedge n})\right] - \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{(\tau_\varepsilon\wedge n)-1} \beta^k c(X_k)\right] \\ &\leq \mathbb{E}_x\left[\beta^{\tau_\varepsilon\wedge n} v_{\beta,c}(X_{\tau_\varepsilon\wedge n})\right] - \mathbb{E}_x\left[I_{\{\tau_\varepsilon<n\}} \sum_{k=0}^{\tau_\varepsilon-1} \beta^k c(X_k)\right] \end{aligned} \tag{4.38}$$

för varje $n \in \mathbb{N}_0$. Eftersom $v_{\beta,c}$ är en begränsad funktion, följer från ovanstående olikheten

$$\mathbb{E}_x\left[I_{\{\tau_\varepsilon<n\}} \sum_{k=0}^{\tau_\varepsilon-1} \beta^k c(X_k)\right] \leq C$$

för varje $n \in \mathbb{N}_0$. Enligt lemma 4.18 hör τ_ε till $\mathcal{M}$ för $\varepsilon > 0$ så med hjälp av monotona konvergenssatsen 2.33 fås

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau_\varepsilon-1} \beta^k c(X_k)\right] \leq C$$

vilket betyder att för $\varepsilon > 0$ hör τ_ε till mängden $\mathcal{M}_{\beta,c}$.

Från likheten (4.38) följer, med hjälp av dominerade konvergenssatsen 2.35 och (4.35),

$$\begin{aligned} v_{\beta,c}(x) &= \mathbb{E}_x\left[\beta^{\tau_\varepsilon} v_{\beta,c}(X_{\tau_\varepsilon}) - \sum_{k=0}^{\tau_\varepsilon-1} \beta^k c(X_k)\right] \\ &\leq \mathbb{E}_x\left[\beta^{\tau_\varepsilon} g(X_{\tau_\varepsilon}) - \sum_{k=0}^{\tau_\varepsilon-1} \beta^k c(X_k)\right] + \varepsilon \\ &\leq V_{\beta,c}(x) + \varepsilon \end{aligned}$$

för varje $\varepsilon > 0$. Denna olikhet tillsammans med den tidigare bevisade olikheten $v_{\beta,c}(x) \geq V_{\beta,c}(x)$ medför $v_{\beta,c}(x) = V_{\beta,c}(x)$. Därmed är τ_ε en ε-optimal stopptid.

Enligt lemma 4.17 för varje $n \in \mathbb{N}_0$ är

$$v_{\beta,c}(x) = \mathbb{E}_x\left[\beta^{\tau_0 \wedge n} v_{\beta,c}(X_{\tau_0 \wedge n}) - \sum_{k=0}^{(\tau_0 \wedge n)-1} \beta^k c(X_k)\right]$$

och enligt lemma 4.18 är $\limsup_{n\to\infty} \beta^n v_{\beta,c}(X_n) = \limsup_{n\to\infty} \beta^n g(X_n)$ så med hjälp av Fatous lemma 2.34 och (4.35) fås

$$v_{\beta,c}(x) \leq \mathbb{E}_x\left[\beta^{\tau_0} v_{\beta,c}(X_{\tau_0}) - \sum_{k=0}^{\tau_0 - 1} \beta^k c(X_k)\right] = \mathbb{E}_x\left[\beta^{\tau_0} g(X_{\tau_0}) - \sum_{k=0}^{\tau_0 - 1} \beta^k c(X_k)\right].$$

Enligt det som bevisades tidigare är $v_{\beta,c}(x) = V_{\beta,c}(x)$ så om τ_0 hör till $\mathcal{M}_{\beta,c}$, är τ_0 en optimal stopptid. Eftersom g och $v_{\beta,c}$ är begränsade funktioner, följer från ovanstående olikheten

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau_0 - 1} \beta^k c(X_k)\right] \leq C.$$

Därmed om τ_0 hör till $\mathcal{M}$ så hör τ_0 också till $\mathcal{M}_{\beta,c}$ och är en optimal stopptid.

Anta att för något $x' \in E$ gäller såväl (4.37) som $\mathbb{P}_{x'}(\tau_0 = \infty) > 0$. Då är $v_{\beta,c}(x') \leq -\infty$ vilket är en motsägelse eftersom $v_{\beta,c}$ är en icke-negativ funktion.

□

Kapitel 5

Problem av Darling, Liggett och Taylor

Presentationen i detta kapitel följer Darling, Liggett och Taylor [2] s.1363–1365.

Låt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och $X, X_1, X_2, \ldots$ oberoende och likafördelade stokastiska variabler. För varje $n \in \mathbb{N}$ definiera $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ och $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Definiera också $S_0 = 0$ och $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. Då är $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ en filtration och $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ en Markovkedja.

Låt $\overline{\mathcal{M}}$ vara mängden av alla stopptider definierade i sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, $0 < \beta \leq 1$ en konstant och g en icke-negativ funktion. Då är

$$\beta^\tau g(x + S_\tau) := \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n g(x + S_n) I_{\{\tau=n\}} + 0 \cdot I_{\{\tau=\infty\}} \tag{5.1}$$

vinsten vid en stopptid $\tau \in \overline{\mathcal{M}}$. Eftersom vinsten är en icke-negativ stokastisk variabel, är den förväntade vinsten $\mathbb{E}[\beta^\tau g(x + S_\tau)]$ definierad för varje $\tau \in \overline{\mathcal{M}}$.

Om $X_1, X_2, \ldots$ tolkas som dagliga prisändringar av en aktie, ger $x+S_n$ aktiens pris på dag n. Problemet är då att bestämma den optimala tidpunkten att sälja aktien.

Definition 5.1. *En icke-negativ funktion f för vilken gäller*

$$\beta\mathbb{E}[f(x + X)] \leq f(x)$$

för varje x, kallas för en β-excessiv funktion med avseende på Markovkedjan $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Låt h vara en icke-negativ funktion. En β-excessiv funktion f för vilken gäller

$$f(x) \geq h(x),$$

kallas för en β-excessiv majorant av h.

Lemma 5.2. *Låt h vara en icke-negativ funktion. Om f är en β-excessiv majorant av h, är*

$$f(x) \geq \mathbb{E}[\beta^\tau h(x + S_\tau)] \tag{5.2}$$

för varje x och $\tau \in \overline{\mathcal{M}}$.

Bevis. Eftersom f är en β-excessiv funktion, är

$$\beta\mathbb{E}[f(x + S_n + X)|S_n] \leq f(x + S_n)$$

för varje $n \in \mathbb{N}_0$. Av detta följer

$$\beta^{n+1}\mathbb{E}[f(x + S_{n+1})|\mathcal{F}_n] \leq \beta^n f(x + S_n)$$

för varje $n \in \mathbb{N}_0$ och med hjälp av egenskap *(vii)* i proposition 2.16 fås

$$\mathbb{E}[\beta^{n+1} f(x + S_{n+1})] \leq \mathbb{E}[\beta^n f(x + S_n)].$$

Då är $\mathbb{E}[\beta^n f(x + S_n)] \leq f(x)$ för varje $n \in \mathbb{N}_0$. Därmed är $\big(\beta^n f(x + S_n)\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ en supermartingal. Enligt sats 2.27 är

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \mathbb{E}[\beta^{\tau\wedge n} f(x + S_{\tau\wedge n})] \\ &\geq \mathbb{E}[\beta^{\tau\wedge n} h(x + S_{\tau\wedge n})] \\ &\geq \mathbb{E}[\beta^\tau h(x + S_\tau) I_{\{\tau\leq n\}}] \end{aligned}$$

för varje $n \in \mathbb{N}_0$ och $\tau \in \overline{\mathcal{M}}$. Med hjälp av monotona konvergenssatsen 2.33 fås (5.2). □

Betrakta fallet då $\beta = 1$ och $g(x) = x^+$. Anta också att $-\infty < \mathbb{E}(X) < 0$ och $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ gäller. Definiera $M := \max\{S_0, S_1, \dots\}$. Den optimala stopptiden visas vara

$$\tau^* = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : x + S_n \geq \mathbb{E}(M)\} \tag{5.3}$$

och den största förväntade vinsten visas vara

$$\mathbb{E}[(x + M - \mathbb{E}[M])^+]. \tag{5.4}$$

Följande sats från Ferguson [3] s.4.18–4.19 visar att funktionen

$$f(x) = \mathbb{E}[(x + M - \mathbb{E}[M])^+] \tag{5.5}$$

är väldefinierad.

Sats 5.3. *Beteckna* $\mathbb{E}(X) = \mu$ *och* $\operatorname{Var}(X) = \sigma^2$. *Då är*

$$\mathbb{E}(M) \leq \frac{\sigma^2}{-2\mu}. \tag{5.6}$$

Bevis. Definiera $M_n := \max\{S_0, S_1, \ldots, S_n\}$ för varje $n \in \mathbb{N}_0$. Eftersom de stokastiska variablerna $X, X_1, X_2, \ldots$ är oberoende och likafördelade, gäller det att

$$\begin{aligned}(X + M_n)^+ &= \max\{X + M_n,\, 0\} \\ &= \max\{\max\{X + S_0,\, X + S_1, \ldots, X + S_n\},\, 0\} \\ &= \max\{0,\, X + S_0,\, X + S_1, \ldots, X + S_n\}\end{aligned}$$

och M_{n+1} har samma fördelning. Från likheten

$$X + M_n = (X + M_n)^+ - (X + M_n)^-$$

följer

$$\mathbb{E}[(X + M_n)^-] = \mathbb{E}[M_{n+1}] - \mu - \mathbb{E}[M_n]$$

och

$$(X + M_n)^2 = [(X + M_n)^+]^2 + [(X + M_n)^-]^2.$$

Från den föregående likheten följer

$$\mathbb{E}\big([(X + M_n)^-]^2\big) = \mathbb{E}(X^2) + 2\mu\mathbb{E}(M_n) + \mathbb{E}(M_n^2) - \mathbb{E}(M_{n+1}^2).$$

Då är

$$\begin{aligned}0 &\leq \operatorname{Var}[(X + M_n)^-] \\ &= \mathbb{E}\big([(X + M_n)^-]^2\big) - \big(\mathbb{E}[(X + M_n)^-]\big)^2 \\ &= \sigma^2 + 2\mu\mathbb{E}(M_{n+1}) - [\mathbb{E}(M_{n+1}) - \mathbb{E}(M_n)]^2 - [\mathbb{E}(M_{n+1}^2) - \mathbb{E}(M_n^2)] \\ &\leq \sigma^2 + 2\mu\mathbb{E}(M_{n+1}).\end{aligned}$$

Därmed är $\mathbb{E}(M_{n+1}) \leq \sigma^2/(-2\mu)$ för varje $n \in \mathbb{N}_0$. Med hjälp av monotona konvergenssatsen 2.33 fås (5.6). □

Med hjälp av Jensens olikhet 2.14 fås

$$f(x) = \mathbb{E}[(x + M - \mathbb{E}[M])^+] \geq x^+ = g(x).$$

Eftersom $X, X_1, X_2, \dots$ är oberoende och likafördelade, har

$$\begin{aligned}(X+M)^+ &= \max\{X+M,\, 0\}\\ &= \max\{\max\{X+S_0,\, X+S_1,\dots\},\, 0\}\\ &= \max\{0,\, X+S_0,\, X+S_1,\dots\}\end{aligned}$$

samma fördelning som M. Med hjälp av egenskap *(vii)* i proposition 2.16 fås

$$\begin{aligned}f(x) &= \mathbb{E}[(x+(X+M)^+ - \mathbb{E}[M])^+]\\ &\geq \mathbb{E}[(x+X+M-\mathbb{E}[M])^+]\\ &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}[(x+X+M-\mathbb{E}[M])^+|X]\big)\\ &= \mathbb{E}\big(f(x+X)\big).\end{aligned}$$

Funktionen f är alltså en excessiv majorant av g. Enligt lemma 5.2 gäller olikheten $f(x) \geq \mathbb{E}[(x+S_\tau)^+]$ för varje $\tau \in \overline{\mathcal{M}}$.

Stopptiden τ^* är en optimal stopptid om $f(x) = \mathbb{E}[(x+S_{\tau^*})^+]$ gäller. För att bevisa detta, betrakta först uttrycket

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(x+M)I_{\{\tau^*<\infty\}}] &= \mathbb{E}[(x+S_{\tau^*}+M-S_{\tau^*})I_{\{\tau^*<\infty\}}]\\ &= \mathbb{E}[(x+S_{\tau^*})I_{\{\tau^*<\infty\}}] + \mathbb{E}[(M-S_{\tau^*})I_{\{\tau^*<\infty\}}].\end{aligned} \tag{5.7}$$

Den sista termen kan skrivas som

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M-S_{\tau^*})I_{\{\tau^*<\infty\}}] &= \mathbb{E}\left[(M-S_{\tau^*})\sum_{n=0}^{\infty} I_{\{\tau^*=n\}}\right]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}[(M-S_n)I_{\{\tau^*=n\}}]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}[\max\{S_0-S_n,\dots,S_n-S_n,\, X_{n+1},\dots\}I_{\{\tau^*=n\}}].\end{aligned}$$

Händelsen

$$\{\tau^*=n\} = \{x+S_0<\mathbb{E}(M),\dots,x+S_{n-1}<\mathbb{E}(M),\, \mathbb{E}(M)\leq x+S_n\} \in \mathcal{F}_n$$

medför $S_k - S_n < 0$ för $k<n$. Med hjälp av egenskaperna *(vii)*, *(vi)* och *(iv)* i

proposition 2.16 fås

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(M - S_{\tau^*})I_{\{\tau^*<\infty\}}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\max\{0,\ X_{n+1},\ X_{n+1}+X_{n+2},\dots\}I_{\{\tau^*=n\}}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}[\max\{0,\ X_{n+1},\ X_{n+1}+X_{n+2},\dots\}I_{\{\tau^*=n\}}|\mathcal{F}_n]\big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\big(I_{\{\tau^*=n\}}\mathbb{E}[M]\big) \\
&= \mathbb{E}[M]\mathbb{P}(\tau^* < \infty).
\end{aligned}$$

Händelsen $\{\tau^* < \infty\}$ medför

$$x + M \geq x + S_{\tau^*} \geq \mathbb{E}(M) \geq 0.$$

Då är $x + S_{\tau^*} \geq 0$ och $x + M - \mathbb{E}(M) \geq 0$. Händelsen $\{\tau^* = \infty\}$ betyder att för varje $n \in \mathbb{N}_0$ är $x + S_n < \mathbb{E}(M)$. Då är $x + M - \mathbb{E}(M) \leq 0$ och enligt (5.1) är $(x + S_{\tau^*})^+ I_{\{\tau^*=\infty\}} = 0$. Därmed är

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(x + S_{\tau^*})^+] &= \mathbb{E}[(x + S_{\tau^*})I_{\{\tau^*<\infty\}}] \\
&= \mathbb{E}[(x + M)I_{\{\tau^*<\infty\}}] - \mathbb{E}[M]\mathbb{P}(\tau^* < \infty) \\
&= \mathbb{E}[(x + M - \mathbb{E}[M])I_{\{\tau^*<\infty\}}] \\
&= \mathbb{E}[(x + M - \mathbb{E}[M])^+]
\end{aligned}$$

och τ^* är en optimal stopptid.

Litteraturförteckning

[1] Chow, Y.S., Robbins, H. & Siegmund, D. *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping*. Boston Houghton Mifflin, 1971.

[2] Darling, D.A., Liggett, T. & Taylor, H.M. *Optimal Stopping for Partial Sums*. The Annals of Mathematical Statistics 43 (4) 1363–1368, 1972.

[3] Ferguson, T.S. *Optimal Stopping and Applications*. https://www.math.ucla.edu/~tom/Stopping/Contents.html (27.10.2021)

[4] Jacod, J. & Protter, P. *Probability Essentials*. Springer Berlin Heidelberg, 2004.

[5] Lamberton, D. & Lapeyre, B. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall, 2008.

[6] Rosenthal, J.S. *A First Look At Rigorous Probability Theory*. World Scientific Publishing Company, 2006.

[7] Shiryaev, A.N. *Optimal Stopping Rules*. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[8] Øksendal, B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer Berlin Heidelberg, 2010.