Algebra redan i lågstadiet?

En kvalitativ innehållsanalys av den algebraiska progressionen i två finska matematikläroboksserier för årskurs ett till sex

Ellen Mattsson och Fanny Forsgård

Avhandling för magisterexamen
Fakulteten för pedagogik och välfärdsstudier
Åbo Akademi
Vasa, 2020

Abstrakt

Författare (Tillnamn, förnamn) Ellen Mattsson och Fanny Forsgård	Årtal 2020
Arbetes titel Algebra redan i lågstadiet? En kvalitativ innehållsanalys av den algebraiska progressionen i två finska matematiklärobokserier för årskurs ett till sex	
Opublicerad avhandling för magistersexamen i pedagogik Vasa: Åbo Akademi. Fakulteten för pedagogik och välfärdsstudier	Sidantal (tot.) 79

Referat

Syftet med denna avhandling är att undersöka den algebraiska progressionen i två olika matematiklärobokserier tillverkade i Finland med svenska som undervisningsspråk för årskurs ett till och med årskurs sex. Följande forskningsfrågor ligger som grund för denna avhandling:

1. Finns det en algebraisk progression i de båda lärobokserierna och hur ser den i sådana fall ut?
2. På vilket sätt skiljer sig den algebraiska progressionen i de två olika lärobokserierna?

För att få svar på forskningsfrågorna gjordes en kvalitativ innehållsanalys med kvantitativa inslag av lärobokserierna Lyckotal/Supertal och Karlavagnen. Innehållsanalysen gjordes med hjälp av kategorisering av algebraiskt innehåll som kan förekomma i uppgifter. Huvudkategorierna var: matematiska uttryck, funktionellt tänkande, proportionellt tänkande och okända kvantiteter som alla innehöll egna underkategorier.

I resultatet framkommer det att det existerar en algebraisk progression i de båda lärobokserierna och att den algebraiska progressionen antar nästan samma form i Lyckotal/Supertal och i Karlavagnen. Det är i huvudsak endast små detaljer som skiljer dem åt, exempelvis när olika algebraiska fenomen lyfts fram första gången. Den algebraiska progressionen tar sig uttryck i uppgifternas svårighetgrad och den procentuella andelen uppgifter genom årskurserna. Inom vissa kategorier blir alltså uppgifterna mera utmanande högre upp i årskurserna och de blir fler till antalet. Vad gäller det algebraiska innehållet så förekommer det uppgifter som är kopplade till alla algebraiska kategorier i Lyckotal/Supertal. I Karlavagnen däremot så saknas uppgifter inom underkategorin formell ekvationslösning som hör till huvudkategorin okända kvantiteter och uppgifter inom underkategorin bråk och promille som hör till huvudkategorin proportionellt tänkande men för övrigt förekommer uppgifter inom alla kategorier. Den största skillnaden mellan lärobokserierna förekommer i kategorin okända kvantiteter, där det i Karlavagnen finns betydligt fler uppgifter inom kategorin okända kvantiteter än i Lyckotal/Supertal. Dessutom inom underkategorin flera obekanta så förekommer det upp till sex obekanta i en och samma uppgift i Karlavagnen och endast upp till tre obekanta i Lyckotal/Supertal. Kategorin flera obekanta förekommer redan i årskurs ett i Karlavagnen medan i Lyckotal förekommer den i årskurs två.

Det existerar alltså en algebraisk progression i båda lärobokserierna. Det är få skillnader i den algebraiska progressionen mellan båda lärobokserierna. Det skulle eventuellt kunna förekomma uppgifter i Karlavagnen inom kategorin formell

ekvationslösning och flera uppgifter i Lyckotal/Supertal som har flera obekanta tal att lista ut värdet på.
Sökord Algebra, algebraisk progression, lärobok, matematik, algebraic progression, early algebra, mathematics

Innehållsförteckning

Bilagor

Tabeller

Bilder

1 Inledning

Detta kapitel innehåller en bakgrundsbeskrivning av avhandlingens tema samt en problemdiskussion. Dessutom beskrivs avhandlingens syfte samt tillhörande forskningsfrågor. Avhandlingens disposition beskrivs till allra sist i kapitlet.

1.1 Bakgrund och problemdiskussion

Algebra är inkörsporten till den mer avancerade matematiken, speciellt eftersom algebran förser individen med det språk som används inom den avancerade matematiken. Av detta följer att algebran är inkörsporten till många högre utbildningar där matematik ingår och därmed även inkörsporten till många olika yrkesområden. Det moderna samhället och dess teknologi är beroende utav dess invånares matematikkunskaper. Därför är det viktigt att alla elever i skolan ges en genuin möjlighet att lära sig algebra, annars kommer de att gå miste om många framtida möjligheter. Trots detta är det ofta algebran som hindrar många från att studera vidare inom högre utbildningar som kräver avancerade matematikkunskaper. (Stancy, Chick & Kendal, 2004.) Ursini (2002) menar att en tänkbar förklaring till de svårigheter som många stöter på då deras studier inom algebran inleds är att deras tidigare upplevelser inom matematiken ofta är begränsade till att endast innefatta aritmetiska algoritmer, geometriska formler och problemlösning med endast numeriska resultat. Studier visar att denna begränsade bakgrund inom aritmetiken ofta leder till att elever upplever svårigheter då de börjar studera grundläggande algebra (Ursini, 2002).

I *grunderna för den grundläggande utbildningen 2014* (hädanefter Glgu 2014) är hoppet stort mellan den algebra som eleverna förväntas kunna då de går ut årskurs sex och vad de förväntas kunna då de går ut årskurs nio. I det centrala innehållet för årskurs ett till två finns algebran inte ens med utan den kommer in som centralt innehåll först i årskurs tre till sex och där väldigt bristfälligt. I årskurs tre till sex förväntas eleverna bland annat kunna följa mönster, begreppet obekant introduceras och eleven ska kunna lösa ekvationer med hjälp av prövning (Glgu, 2014). I högstadiet däremot ska eleven bland annat kunna bilda och räkna med förstagradsfunktioner och ofullständiga andragradsekvationer samt beskriva samband både algebraiskt och grafiskt (Glgu, 2014). Detta stora hopp mellan lågstadiet och högstadiet i avseende på de kunskaper som eleverna förväntas behärska tillsammans med det faktum att de finska elevernas prestationer har försämrats inom matematiken i PISA undersökningen (Programme for International Student Assessment) från den mätning som gjordes 2015 till den senaste mätningen som genomfördes 2018 (Skolverket, 2019) leder till frågan om de fin eleverna verkligen får en tillräcklig grund inom algebran för att klara av den algebra som de förväntas kunna i högstadiet.

Som tidigare nämnt är det elevers bristfälliga erfarenheter inom algebra som gör att de upplever problem inom området då algebran blir en del av matematiken på allvar. Skulle eleverna få erfarenheter av detta innan de börjar studera formell algebra så skulle det hjälpa dem att utveckla några av de grundläggande idéerna inom algebran, såsom generalisering (Ursini, 2002). Denna erfarenhet borde ges till eleverna redan i lågstadiet i form av tidig algebra. Tidig algebra kan ha flera olika förståelser. I denna avhandling syftar tidig algebra till att eleverna introduceras till algebraiska resonemang redan i en tidig ålder, ibland redan vid sju års ålder (Lins & Kaput, 2004).

Forskare har visat att lärare som är förberedda med material och pedagogiskt kunnande kan engagera elever i det tidiga algebra innehållet på ett sätt som resulterar i positiva prestationer även i framtiden. Men för att kunna etablera tidig algebra i lågstadiet i en större skala krävs det att det finns läromedel med ett algebraiskt innehåll. (Kieran, Pang, Schifter & Ng, 2016.) Många forskare (bl.a. Röj-Lindberg, 1999; Dahlström, Stenmark & Lahtinen, 2003; Wikman, 2004) har konstaterat att läroböcker har en stor betydelse för elevers inlärning och attitydutveckling inom olika ämnen, inklusive inom matematiken. Stein, Reimillard och Smith (2007) skriver till och med att läroböcker är så viktiga artefakter för undervisningen och inlärning av matematik att de ofta utgör den primära källan då lärare planerar sin undervisning. Detta innebär att genom att studera matematikböcker så upptäcks vilka typer av inlärningsmöjligheter elever har till att utveckla sitt algebraiska tänkande. Trots detta har ingen heltäckande forskning gjorts gällande vilket algebraiskt material som finns i matematiklärobokserierna för lågstadiet som är tillverkade i Finland men med svenska som undervisningsspråk. Eftersom läroböckerna har en så stor betydelse för elevens inlärning kan olika läromedel ge olika kunskaper åt eleverna och därmed skapa en ojämlik kunskapsbas hos eleverna. Enligt Glgu (2014) är jämlikhet ett centralt mål för den grundläggande utbildningen. Är det så att det finns stora skillnader mellan de läroböcker som används i Svenskfinland så främjas inte denna jämlikhet. En jämförelse mellan de matematiklärobokserier för årskurs ett till sex som är tillverkade i Finland med svenska som undervisningsspråk har inte genomförts tidigare. Här anser vi att det finns en lucka i forskningen och därför har forskningen som genomförs i denna avhandling relevans både för forskningsfältet och skolpraktiken.

Slutligen har vi, skribenterna, som blivande klasslärare i lågstadiet samt blivande matematiklärare i högstadiet ett stort intresse för detta ämne. Som lärare vill vi ge våra elever en god grund att stå på så att de klarar sig bra i sitt fortsatta liv och inte begränsas av bristfälliga algebrakunskaper då de väljer sitt framtida yrke. För att göra övergången från den aritmetik som eleverna till huvudsak arbetar med i lågstadiet till algebran som de förväntas behärska i högstadiet smidig så är det viktigt att elevernas utveckling av det algebraiska tänkandet stöds redan i lågstadiet (Cai et al., 2005). Utgående från den forskning som presenterats tidigare är det självklart att matematikläroböcker med ett algebraiskt innehåll i är en viktig byggsten i matematikundervisningen för att som lärare kunna stöda elevernas algebraiska tänkande.

Vi som skriver denna avhandling har ett sociokulturellt synsätt på lärande och därav är avhandlingen skriven med utgångspunkt i den sociokulturella synen på lärande. Detta gör det naturlig att undersöka just läroböcker eftersom man inom den sociokulturella synen på lärande menar att människan utmärks av att hon använder sig av två olika typer av medierande redskap, dels språkliga och dels materiella, så kallade artefakter, för att lära (Säljö, 2014). Matematikläroböcker är en typ av materiell artefakt.

1.2 Syfte och forskningsfrågor

Syftet med avhandlingen är att undersöka den algebraiska progressionen i två olika matematikläroboksserier tillverkade i Finland med svenska som undervisningsspråk för årskurs ett till och med årskurs sex. De läromedel som kommer att undersökas är Lyckotal/Supertal och Karlavagnen, båda utarbetade utgående från Glgu 2014. I avhandlingen undersöks det hur den algebraiska progressionen framkommer i de olika läromedlen och om det finns någon skillnad mellan de olika läromedlen gällande den algebraiska progressionen.

Forskningsfrågor:

1. Finns det en algebraisk progression i de båda läroboksserierna och hur ser den i sådana fall ut?
2. På vilket sätt skiljer sig den algebraiska progressionen i de två olika läroboksserierna?

1.3 Avhandlingens disposition

Avhandlingen är uppdelad i fem stycken huvudrubriker med tillhörande underrubriker. I det första kapitlet, kapitel ett (1), så presenteras avhandlingens bakgrund och en problemdiskussion förs. Bakgrunden består bland annat av argument för varför algebran är så viktig inom lågstadiematematiken. Kapitlet innehåller även en presentation av avhandlingens syfte samt tillhörande forskningsfrågor.

I kapitel två (2) presenteras avhandlingens teoretiska bakgrund. Kapitlet inleds med att det synsätt på lärande som avhandlingen vilar på beskrivs, det vill säga det sociokulturella synsättet på lärande. Därefter beskrivs teori, såsom läromedelsteori, algebra och tidig algebra ur ett teoretiskt perspektiv.

Kapitel tre (3) handlar om den metod som använts i den undersökning som avhandlingen presenterar och om genomförande av undersökningen. Här presenteras hur datainsamlingen genomförts, vilka urval och begränsningar som gjorts, hur data har kategoriserats samt hur analysen av data har gått till. Slutligen diskuteras även tillförlitlighet, trovärdighet och etik i relation till den metod som använts i avhandlingen.

Kapitel fyra (4) består av resultatredovisningen. Här redogörs för den algebraiska progressionen som syns i de båda läroboksserierna både med avseende på procentandelen uppgifter inom varje kategori och med avseende svårighetsgraden hos uppgifterna.

I det femte kapitlet (5), diskussionen, diskuteras avhandlingens resultat samt valet av metod och genomförande. I detta kapitel presenteras även förslag till vidare forskning inom området. Till sist tillkommer ett kapitel med litteraturförteckningen, kapitel sex (6).

2 Teoretisk referensram

Denna avhandling är uppbyggd kring den algebraiska progressionen i två olika läromedelsserier. I detta kapitel kommer det synsätt på lärande som avhandlingen utgår ifrån att beskrivas: det sociokulturella synsättet på lärande. Vidare så kommer läromedel, algebra och tidig algebra beskrivas ur ett teoretiskt perspektiv. Avslutningsvis kommer tidigare forskning gjord inom samma område att presenteras.

2.1 Sociokulturella perspektiv

Den sociokulturella traditionen har sitt ursprung i Lev Semenovich Vygotskijs arbeten om utveckling, lärande och språk (Säljö, 2014). Senare har den sociokulturella traditionen vidareutvecklats av bland annat Roger Säljö. Ett sociokulturellt perspektiv är inte förenat med någon speciell pedagogik eller skola utan kan förverkligas inom ramen för den vanliga skolan med dess normala förutsättningar. De pedagogiska konsekvenserna ligger i hur samspelet organiseras mellan elever och lärare och mellan elev och elev samt hur eleverna ges möjlighet att ta till sig och delta i olika typer av kunskaper (Säljö, 2014).

Vygotskij menade att alla mänskliga aktiviteter äger rum i kulturella sammanhang och att de heller inte kan förstås utanför dessa sammanhang (Woolfolk & Karlberg, 2015). Människan tolkar och förstår omvärlden genom mänskliga och kollektiva aktiviteter, vilket innebär att människan utvecklas inom ramen för samspel med andra människor. Hon lär sig vara uppmärksam, beskriva och handla i verkligheten på det sätt som hennes omgivning tillåter och uppmuntrar. Människans alla kunskaper och färdigheter kommer från de insikter och handlingsmönster som historiskt har byggts upp i samhället och som hon har fått ta del av genom interaktion med andra människor. Att människan är läraktig är ett av hennes mest utmärkande drag. (Säljö, 2000.) En av de mest centrala utgångspunkterna i Vygotskijs perspektiv är att alla de högre mentala processerna hos människan, till exempel förmågan att fundera igenom ett problem, utvecklas genom social interaktion (Säljö, 2011). Ett barn konstruerar först dessa processer tillsammans med en vuxen i olika aktiviteter innan processen har internaliserats i barnet och barnet kan utföra processen självständigt (Woolfolk et al., 2015).

Det sociokulturella perspektivet på lärande och utveckling handlar mycket om hur människan utvecklar förmågor som är kulturella till sin karaktär, till exempel att läsa, skriva, räkna, resonera abstrakt och att lösa problem. Dessa förmågor är alla exempel på medierande redskap. Vygotskij menade att människan utmärks av att hon använder sig at två olika typer av medierande redskap, dels språkliga och dels materiella, så kallade artefakter. (Säljö, 2014.) Människans samspel med dessa språkliga och materiella redskap är centralt i ett sociokulturellt perspektiv på lärande och utveckling. Utgående från ett sociokulturellt perspektiv och dess betoning på samhörigheten mellan den sociala interaktionen och de medierande redskapen är det naturligt att förstå lärande som något som är inbyggt i samhällets sätt att fungera, människan kan helt enkelt inte undvika att lära. (Säljö, 2000.)

Språket är det allra viktigaste medierande redskapet (Säljö, 2011). Detta eftersom det är genom kommunikation som sociokulturella resurser skapas och förs vidare. Det är genom kommunikation som människan blir delaktig i och tillägnar sig kunskaper och färdigheter. Det mänskliga språket är unikt och är en oändligt rik komponent för att skapa och kommunicera kunskap. Speciellt i vår kulturkrets är skriftspråket ett centralt och viktigt medierande redskap som har haft stort inflytande på hela vårt samhälle och på de sätt vi lär, utvecklar kunskap och kommunicerar. (Säljö, 2000.)

De fysiska artefakterna är språkligt genererade distinktioner som byggts in i apparater och instrument. Att kunna använda sig av dessa artefakter är avgörande för människans förmåga att tänka och lära sig. Tack vare artefakterna kan människan komma till stånd med mycket mer än hon skulle göra utan dessa hjälpmedel, till exempel miniräknaren gör det möjligt att räkna med mycket större tal än vad människans egen tankekapacitet tillåter. Människans vardag är fylld av artefakter så som olika verktyg, kommunikations- och informationsteknologier. (Säljö, 2000.) Inom många yrken sitter till och med kunskapen i att kunna använda sig av olika artefakter. Många forskare menar dock att det inte går att skilja mellan de språkliga och fysiska redskapen, till exempel en bok bygger på både språkliga och fysiska redskap. Boken är ett fysiskt material men i den finns språkliga redskap så som siffror eller bokstäver. (Säljö, 2011.)

2.2 Läromedel

Ett läromedel är ett pedagogiskt hjälpmedel som har formats av människan och som används i undervisningen för att underlätta lärandet (Korsell, 2007; Långström & Viklund, 2011). Nationalencyklopedin (u.å.) definierar läromedel som: ” en resurs för lärande och undervisning; traditionellt främst läroböcker, läseböcker, övningsböcker och ordböcker, men även t.ex. kulramar och anatomiska dockor.”

Läromedel kan delas in i primärt- och sekundärt pedagogiskt material. Med primärt pedagogiskt material avses läromedel som ursprungligen är framtaget för att användas i undervisningssammanhang, till exempel läroböcker. Ett sekundärt pedagogiskt material är ett material som inte ursprungligen är framtaget för att användas inom undervisningen men som kan användas där ändå, till exempel dagstidningar. (Korsell, 2007.)

2.2.1 Läroböcker

Det vanligaste läromedlet är någon form av lärobok. Läroboken har sedan långt tillbaka en viktig funktion inom olika utbildningssammanhang och är även den mest lästa och spridda litteraturgenren i vårt land. (Långström et al., 2011.) Läroböcker utgör även den enda litteratur som mer eller mindre alla måste bekanta sig med i något skede (Wikman, 2004). Den moderna läroboken uppstod redan i slutet av 1800-talet då skolan blev ett instrument för nationsbyggande och ett hjälpmedel i moderniseringsprocessen (Nationalencyklopedin, u.å.). Begreppet lärobok kan definieras som ”en bok som ger (grundläggande) kunskaper i något ämne och vanligtvis används vid undervisning” (Nationalencyklopedin, u.å.). Utöver att läroböcker står för förmedling av kunskaper så förmedlar de även ett förhållningssätt till vad som räknas som kunskap (Wikman, 2004).

Varje lärobok representerar för varje generation en officiell auktoriserad version av den information som under en viss tidsperiod finns till läromedelsförfattarens förfogande (Wikman, 2004). Läroboken som textgenre bygger på institutionaliserade antaganden om vad lärande utmärks av och som har skapats för att användas i en sådan miljö där lärande är det primära målet. Läroboken i sig är en produkt av denna miljö och den är också med och skapar villkoren för lärande i denna miljö. (Säljö, 2000.) Valet av vilken information som presenteras för eleverna i läroboken ligger alltid i läromedelsförfattarnas händer. Dock tvingas läromedelsförfattarna att använda sig av begrepp som är relevanta för eleverna i det samhälle de lever i. Läroboken påverkas alltså av det samhälle där den skrivs. (Wikman, 2004.)

Forskare är generellt överens om att läroböcker fungerar som ett band mellan läroplanen och klassrumspraksisen och har därmed en stor roll i dagens undervisning inom olika ämnen (Fan, Zhu & Miao, 2013). För en del lärare fungerar läroböcker rent av som färdiga kurser som står för allt från förklaringar, klassrumsdiskussioner och reflektioner kring elevers tänkande till specifika exempel på elevers fel och feluppfattningar (Elsaleh, 2010). Flera studier visar att läroboken är det hjälpmedel som påverkar och strukturerar undervisningen mest och därmed också visar vad som ska tas upp under lektionerna (Långström et al., 2011). Med andra ord formar läroböcker lärarens attityd till undervisning och har en central roll i lärarens val av undervisningsmetoder (Röj-Lindberg, 1999). Lärare beskriver att ju mer osäkra de är på ett ämne, desto mer litar de på och följer en lärobok till punkt och pricka (Korsell, 2007). Lärare som saknar behörighet är också mer bundna till läroböcker (Wikman, 2004). Dock vill lärare inte bli styrda av ett läromedel som inte stämmer överens med hens egen pedagogiska grundsyn (Korsell, 2007).

En förklaring till varför läroboken är så viktig i undervisningen kan eventuellt vara traditionen, det sätt vi lärt oss att uppfatta institutionen skola (Wikman, 2004). När en elev börjar skolan får hen tidigt en eller flera läroböcker som hen stolt tar hem och visar. Läroboken blir till en början det som mest handfast visar vad barnet ska lära sig i skolan. (Långström et al., 2011.) Läroböcker underlättar för arbetet i skolan eftersom tack vare dem behöver inte varje lärare vara en läromedelsproducent. Läroboken har dessutom en gemensamhetsskapande och sammanhållande roll, läroboken är den kärnberättelse som läraren alltid återkommer till efter diverse utsvävningar och ger på så sätt ett sammanhang till eleverna. Är en elev sjuk eller frånvarade från skolan ger läroboken eleven möjlighet att ändå hänga med i studierna. Trots att läroboken på många sätt hjälper eleverna att strukturera sina studier så fungerar den även som en begränsande faktor. Läroboken erbjuder sällan möjligheter att anpassa stoffet till olika behov och anlag hos eleverna. (Wikman, 2004.)

Eftersom läroplanen endast skissar upp ramarna för det matematiska innehållet så tillåts varje lokal lärare göra många egna tolkningar och val, speciellt i årskurs ett till sex. Ett av dessa val som skolorna och lärarna själva gör är valet av läroböcker. (Hemmi, Krzywacki & Partanen, 2018.) Läraren har stor påverkan på val och användning av skolans befintliga läroböcker i sin egen undervisning och har även möjlighet att påverka inköp av läroböcker inom den givna läromedelsbudgeten. Ofta påverkar och begränsar ekonomin användningen av läroböcker. (Korsell, 2007.) Annat som påverkar vilka läromedel som inhandlas är lärarens tid, hen har ofta många olika saker som kräver hens tid och därför kan den tid som ägnas åt att granska en ny lärobok vara ganska begränsad (Långström et al., 2011).

Precis som läroböcker inom andra ämnen så har läroböcker inom matematiken i form av stödmaterial för att undervisa och lära matematik funnits sedan urminnes tider (Fan et al., 2013). För många lärare inom matematiken är läroboken så viktig att det skulle vara otänkbart att byta ut eller helt lämna bort matematikläroboken eftersom lärarens tid inte räcker till för att själva utarbeta ersättande material (Röj-Lindberg, 1999).

2.3 Algebra

Ordet algebra kommer från ett verk från 830 e.Kr. skrivet av en vetenskapsman från Bagdad med namnet al-Khwarizmt. Verket heter Al-Jabr w'Al-Muqabala och Al-jabr står för algebra. Vissa anser al-Khwarizimi vara algebrans fader tack vare detta. Andra anser att det är Diofantos som är algebrans fader tack vare hans verk Arithmetica skrivet 200 e.Kr. Det var tack vare Arithmetica som dåtidens ordbaserade matematik omvandlades till dagens symbolbaserade matematik. (Willers, 2015.)

Algebra är mycket mer än att endast kunna lösa ut okända x:n och y:n, algebra är ett sätt att tänka (Cai et al., 2005). Kärnan i algebraisk kunskap är förståelse för matematiska strukturer och förhållanden (Cai et al., 2005). Algebra är ett språk för generalisering, abstraktion och bevisföring men det är även ett verktyg för problemlösning genom ekvationslösning eller grafisk framställning och ett sätt att modellera funktioner. Det språk som används inom den högre matematiken är algebran och därför är algebran inkörsporten till högre studier inom matematik. (Stacey & Chick, 2004.) Det mest kännetecknande för olika algebraiska aktiviteter är att de är ettdera generaliserande aktiviteter, såsom situationer, egenskaper, eller mönster som representeras eller tolkas algebraiskt, eller omvandlade aktiviteter, såsom algebraisk manipulation. Andra aktiviteter som inte är direkt algebraiska men där algebran används för att lösa olika uppgifter är till exempel vid bevisföring och lösning av problem eller för att upptäcka olika strukturer. (Stacey et al., 2004.)

Stacey et al. (2004) menar att det finns två huvudsakliga kännetecken för algebraiskt tänkande. Dels involverar det algebraiska tänkandet genomtänkt manipulation och uttryck av generalitet. Dels involverar det resonemang baserat på formen av syntaktiskt baserade uppgifter. Kieran et al. (2016) menar däremot att algebraiskt tänkande karaktäriseras av okänt, beteckning och analys. Okänt eftersom det finns obekanta tal med i de giva algebraiska problemen, beteckning eftersom de obekanta talen är namngivna eller symboliserade på flera olika sätt, såsom till exempel med alfabetiska bokstäver, och analys eftersom de obekanta talen behandlas som om de vore bekanta.

Fram till för några decennier sedan var den forskning och utveckling relaterad till algebran dominerad av intresset för beteckning. Det fanns en underförstådd uppfattning om att algebraiskt tänkande endast kunde ske med hjälp av bokstäver och att aritmetiken var samma sak som tidig algebra. (Lins, Rojano, Bell & Sutherland, 2002.) Idag skiljer man den tidiga algebran och aritmetiken åt på ett helt annat sätt. Skillnaden mellan aritmetik och algebra är att man inom aritmetiken arbetar med siffror och en viktig del av det är att utföra beräkningar och få numeriska svar. I algebran däremot så arbetar man men generella storheter och den härstammar historiskt från intresset att hitta generella metoder för att kunna lösa flera olika liknande problem med hjälp av samma metod. (Ursini, 2002.)

2.4 Tidig algebra

Matematiska relationer, mönster och aritmetiska strukturer utgör kärnan i den tidiga algebran där processer som att upptäcka, gissa, generalisera, representera, bevisa och kommunicera är centrala i elevernas lärande. Målet med tidig algebra är att sträva till ett visst tankesätt hos eleverna. De ska bli vana med att söka efter regelbundenhet och att uttrycka, testa och komma på regler och antaganden för ett oändligt antal siffror. (Kieran et al., 2016.)

Det finns två olika förståelser av vad som menas med tidig algebra. Ettdera syftar det till första gången elever möter formell algebra i skolan (Lins et al., 2004.) Detta möte har i västvärlden traditionellt skett först i högstadiet eftersom man antagit att yngre elever inte är kapabla till att tänka algebraiskt (Hemmi, Bråting & Lepik, 2020). I annat fall syftar det till att elever introduceras till algebraiska resonemang i en mycket tidigare ålder, ibland redan vid sju års ålder. Detta synsätt har under de senaste åren fått ett allt större erkännande inom matematikundervisningen. (Lins et al., 2004.) Dock var redan Vygotski förespråkare för att barn skulle introduceras till algebran så tidigt som möjligt. Vygotskij menade att en elev som hade bemästrat algebran hade uppnått ”ett nytt högre tankeplan”, vilket innebar en ny nivå av abstraktion och generalisering som gav den ”lägre aritmetiken” en ny mening. Historiskt hade algebran följts av aritmetiken i matematiken men Vygotskij förespråkade att gå andra vägen, från algebran till aritmetiken. Enligt honom skulle barn ledas till den mest generella och abstrakta nivån av förståelse redan från början av sina matematikstudier. Det som karaktäriserar Vygotskijs synsätt till barns utveckling av algebraiskt tänkande är för det första att utvecklingen skulle utgå från den mest generella begreppsgrunden, för det andra skulle utvecklingen gå från abstrakt till konkret och för det tredje skulle barnen använda sig av olika typer av psykologiska artefakter under utvecklingen. (Schmittau, 2005.)

2.4.1 Kan lågstadieelever tänka algebraiskt?

Flera forskare har kommit fram till att lågstadieelever är kapabla till att både tänka algebraiskt och att lösa algebraiska problem (bl.a. Blanton et al, 2015; Powell & Fuchs, 2014). Blanton et al. (2015) har forskat i vilken effekt fortgående, omfattande tidig algebraundervisning har för tredjeklassisters förståelse av kärnan i algebraiska tillämpningar och begrepp. För att kunna genomföra denna forskning definierade Blanton et al. (2015) fem stycken stora idéer som är fundamentala för att förstå algebra på grund av att de erbjuder en omfattande kontext inom vilket algebraiskt tänkande kan uppstå och för att de representerar centrala delar av algebran som disciplin. Dessa idéer erbjuder eleverna goda möjligheter att tillägna sig den grundläggande principen bakom algebraiska tillämpningar av generalisering, representation, motivering och resonemang om matematiska förhållanden. Forskarna påpekar dock att denna indelning av algebraiska idéer inte är den enda sättet att dela in algebraiskt innehåll. Idéerna är följande:

1. *Likhet, uttryck, ekvationer och olikheter.* Denna idé inkluderar utveckling av förståelse av likhetstecknets betydelse, representation och resonemang med olika uttryck och ekvationer i symbolisk form samt att kunna beskriva förhållanden mellan och inom generaliserade kvantiteter som är eller inte är ekvivalenta.

2. *Generaliserad aritmetik.* Denna idé inkluderar generaliserade aritmetiska förhållanden och grundläggande egenskaper hos siffror och operationer. Utöver

detta inkluderar idéen även resonemang om strukturer hos aritmetiska uttryck och om deras värde.

3. *Funktionellt tänkande.* Denna idé inkluderar generaliseringar av förhållanden mellan kvantiteter beroende av varandra samt representation och resonemang om dessa förhållanden med hjälp av talat språk, symbolspråk, tabeller eller grafer.

4. *Variabler.* Denna idé inkluderar användning av symboler som språkligt redskap för att representera matematiska idéer på ett komprimerat sätt och vilka olika betydelser variabler har i en matematisk kontext.

5. *Proportionellt resonemang.* Denna idé inkluderar algebraiskt resonemang kring två generaliserade kvantiteter som är relaterade till varandra genom ett konstant förhållande.

I sin forskning kunde Blanton et al. (2015) konstatera att de tredjeklassister som fick undervisning inom tidig algebra förbättrade sina prestationer inom flera områden inom algebran. De blev bättre på att tänka rationellt om likhetstecknet, på att representera okända kvantiteter på ett meningsfullt sätt med variabelbeteckning, på att upptäcka den underliggande strukturen hos egenskaper hos ekvationer och att använda dessa strukturer för att rättfärdiga sitt tänkande och på att generalisera specifika exempel till att gälla ett stort antal siffror och uppgifter. Dessutom blev de både bättre på att producera och förstå variabelrepresentationer av generaliserade påståenden och på att generalisera och symboliskt representera funktionella förhållanden mellan samvarierade kvantiteter.

Elever som endast erhåller vanlig aritmetikbaserad matematikundervisning i lågstadiet förbereds inte särskilt bra för att kunna studera algebra framgångsrikt i senare årskurser (Blanton et al., 2015). Blanton et al. (2015) kan efter sin forskning konstatera att en långvarig undervisning i algebra i de tidiga årskurserna kunde ha en signifikant effekt på elevers förmåga att generalisera, representera, rättfärdiga och resonera kring matematiska strukturer, vilka alla är förmågor som är fundamentala för det algebraiska tänkandet. Detta innebär att tidig algebra kan potentiellt förbättra och förhindra några av de svårigheter som elever upplever inom algebran i de senare årskurserna (Blanton et al. 2015).

2.4.2 Den tidiga algebrans byggstenar

Det är viktigt att elever börjar arbeta med strukturer och generalisering i aritmetiken så fort som möjligt för att få en naturlig progression från aritmetik till algebra (Bråting, Madej & Hemmi, 2019). Elever kan med fördel lösa samma problem både aritmetiskt och algebraiskt. Att lösa problem på båda dessa olika sätt hjälper eleverna att få en djupare förståelse för förhållandet mellan den aritmetiska och algebraiska representationen, det guidar eleverna att upptäcka likheter och olikheter mellan aritmetiska och algebraiska förhållningsätt och det utvecklar elevernas tankeförmåga och flexibilitet i att använda sig av olika ingångar vid problemlösning För att lösa problem algebraiskt krävs fler olika tankesätt, såsom principen prövning och skapa regler för att representera funktioner. (Cai et al., 2005.) Ekvationslösning med okända värden sammankopplar aritmetik och algebra på ett naturligt sätt. Ett okänt värde kan symboliseras med vilken symbol som helst, det kan till exempel symboliseras av ett frågetecken, en tom ruta eller en bokstav. (Powell et al., 2014.)

Olika matematiska perspektiv behöver tas upp i elevers matematikinlärning för att förstärka utvecklingen av olika algebraiska tankesätt hos eleverna (Lins et al., 2004). I till exempel ett funktionellt perspektiv är samvariation och dess relaterade beteckning för förändring centralt, detta representeras med bland annat grafer, tabeller och liknande funktionsrelaterade diagram (Kieran et al., 2016). Eleven behöver även utveckla en annorlunda förståelse för de symboler som används både inom aritmetiken och algebran för att kunna arbeta med algebra. Likhetstecknet och operationssymbolerna är exempel på sådana symboler. (Ursini, 2002.)

2.4.3 Den tidiga algebrans fördelar

Den tidiga algebran både förbereder eleverna för den algebra som kommer att komma i de högre årskurserna och fördjupar deras förståelse för siffersystemets egenskaper, dessutom införlivar den tidiga algebran sådana matematikvanor hos eleverna som stöder struktur och uttrycker regelbundenhet (Kieran et al., 2016). Att ha inslag av tidig algebra i lågstadiematematiken stärker elevernas prestationer, speciellt genom att det utvecklar en högre grad av generalitet i deras tänkande och stärker deras förmåga att kommunicera detta generalitet (Stacey et al., 2004). Ett av de mest grundläggande antagandena om tidiga algebra är att den förbättrar barnens förståelse för algebraiska begrepp, vilket kommer att vara till fördel för dem under matematiklektionerna i det väldigt aritmetiskt baserade lågstadiet (Blanton et al, 2015). Om lärare och elever hade som rutin att under de sex första skolåren samtidigt utveckla både de aritmetiska och det algebraiska tänkandet skulle algebran och aritmetiken upplevas som naturligt och ofrånkomligt kopplade till varandra för eleverna (Cai et al., 2005). Detta skulle leda till att algebran i den vidare utbildningen skulle upplevas som naturlig för eleverna (Cai et al., 2005) och detta skulle höja chanserna för eleverna att lyckas inom de mer avancerade matematikstudierna i de högre årskurserna (Blanton et al., 2015).

Det är viktigt att underlätta så mycket som möjligt för eleverna inför deras möte med den formella algebran eftersom många elever upplever olika typer av svårigheter med just detta. För många elever innebär bokstäver inom matematiken svårigheter (Douhard & Teppo, 2004). Forskare har visat att det största problemet ligger i elevers oförmåga att relatera algebrans alla symboliska uttryck till deras betydelse. Grunden till många missförstånd inom algebran ligger i bristen av förståelse av sådana förhållanden, vilket leder till felaktiga utföranden och rutinmässiga manipulationer av algebraiska symboler utan förståelse för varför dessa manipulationer utförs. (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 2002.) Att lära sig att lösa problem algebraiskt är också svårt för många elever. De har svårt med att forma algebraiska ekvationer för att representera den givna informationen i textuppgifter samt har svårt med att lära sig på vilket sätt symbolerna måste manipuleras för att få ut lösningar, även då det gäller enkla ekvationer. Detta kan bero på att eleverna är fast i tron att problem löses med direkta beräkningar, vilket ofta kommer från vardagliga upplevelser och från matematiken i tidigare årskurser. Om elever tränas i att lösa och skapa ekvationer så kommer de att naturligt att använda sig av ekvationslösning då de ska lösa ett problem. (Stacey & MacGregor, 2000.)

2.5 Tidigare forskning

Här redogörs för tre artiklar där forskarna har undersökt liknande saker som undersöks i denna avhandling. Först redogörs för en undersökning Hemmi et al. (2020) har utfört där den finska, den estniska och den svenska läroplanen har jämförts med fokus på algebrainnehållet. Dessutom så beskrivs vad Hemmi, Lepik, Madej, Bråting och Smedlund (2019) har konstaterat då de jämfört algebrainnehållet i finska, finlandssvenska, estniska och svenska läroböcker för årskurs ett till tre. Slutligen nämns det kort vad Bråting et al. (2019) har kommit fram till i deras undersökning av det algebraiska innehållet i två olika svenska läroböcker.

2.5.1 Algebra i den estniska, finska och svenska läroplanen – en jämförelse

Hemmi et al. (2020) har undersökt och jämfört den finska, den svenska och den estniska läroplanen. Dessa tre grannländer har väldigt liknande skolsystem och tack vare detta tror Hemmi et al. (2020) att det är lättare att identifiera specifika aspekter av den algebraiska progressionen som eleverna förväntas uppnå i de olika länderna. Hemmi et al. (2020) har kategoriserat det algebraiska innehållet i läroplanerna utgående från Blanton et al. (2015) fem stora idéer (se kapital 2.4.1) men modifierat dem så de passar deras forskning bättre. De fem kategorier som Hemmi et al. (2020) har utgått från i deras forskning är följande:

1. *Likhet, uttryck, ekvationer och olikheter.* Denna kategori omfattar utöver samma saker som Blantons et al. (2015) motsvarande idé också förmågan att kunna uttrycka textuppgifter genom att skapa och lösa ekvationer.

2. *Generaliserad aritmetik.* Utöver det som Blantons et al. (2015) motsvarande idé innehåller så omfattar denna kategori även relationer mellan operationer såsom till exempel multiplikation uttryckt som upprepad addition.

3. *Funktionellt tänkande.* Denna kategori omfattar exakt samma saker som Blanton et al. (2015) motsvarande idé gör. Hit räknas bland annat att kunna identifiera upprepande mönster och funktionsregler.

4. *Proportionellt tänkande.* Denna kategori omfattar samma saker som Blantons et al. (2015) motsvarande idé samt skalor, likheter och kongruens.

5. *Variabel kvantitet.* Denna kategori har modifierats utgående från Blanton et al. (2015) motsvarande idé från att endast omfatta variabler till att även inkludera okända siffror.

I den finska läroplanen för årskurs ett till två nämns det ingenting om likheter och ekvationer jämfört med att det i både den estniska och den svenska läroplanen för årskurs ett till tre står att eleverna ska lära sig att hantera lätta matematiska likheter och olikheter. I den estniska läroplanen för årskurs ett till tre står det till och med att elever ska lära sig att hitta siffervärdet hos en bokstav med hjälp av formella metoder.

I den finska läroplanen för lågstadiet nämns heller ingenting om uttryck, medan det i den estniska läroplanen nämns redan i årskurs ett till tre med fokus på räknesättens ordningsföljd och senare i årskurs fyra till sex med fokus på att lösa uttryck med en variabel. Även i den svenska läroplanen för årskurs fyra till sex står det att eleverna ska kunna lösa enkla algebraiska uttryck. I både den finska, estniska och svenska läroplanen nämns det för årskurs tre till sex i Finland respektive årskurs fyra till sex i Estland och Sverige att ekvationer ska introduceras och enkla sådana ska lösas. Lösning av textuppgifter är något som betonas i den finska, estniska och svenska läroplanen för lågstadiet, men det är endast i den finska läroplanen som detta inte är knutet till algebra. (Hemmi et al., 2020.)

Området ”relationer mellan aritmetiska operationer” är något som finns med i både den finska, estniska och svenska läroplanen genom hela lågstadiet, utom i den svenska läroplanen där området inte finns med i årskurs fyra till sex. I den finska läroplanen nämns det till och med explicit att elever ska lära sig användningen av den kommutativa och associativa lagen i årskurs ett till två. I den finska och den estniska läroplanen nämns det i årskurs tre till sex respektive i årskurs fyra till sex att eleverna ska öva sig i att använda sig av operationernas egenskaper. (Hemmi et al., 2020.)

Den finska läroplanen för lågstadiet betonar aktiviteter kopplade till regelbundenheter genom hela grundskolan, såsom till exempel siffersekvenser. I den svenska läroplanen nämns siffersekvenser och geometriska mönster generellt i årskurs ett till sex, medan mönster inte alls nämn i den estniska läroplanen för lågstadiet. Området ”funktionella relationer” finns inte mer i årskurs ett till sex i någon av de tre läroplanerna. Tabeller och diagram finns med i samband med statistiken i både den finska, estniska och svenska läroplanen genom hela lågstadiet. Även koordinatsystem nämns i alla tre läroplaner, i den finska i årskurs tre till sex och i den estniska och svenska i årskurs fyra till sex. (Hemmi et al., 2020.)

Proportionella förhållanden tas varken upp i den finska eller den estniska läroplanen för grundskolan. I den svenska läroplanen tas dock proportionella förhållanden upp redan från årskurs ett i form av till exempel förhållanden som dubbel och halv. Olika specifika appliceringar av proportionella resonemang tas däremot upp i både den finska, estniska och svenska läroplanen. Exempel på detta är skala, som i den finska läroplanen kommer in i årkurs tre till sex och i den estniska läroplanen kommer i årskurs fyra till sex. I den svenska läroplanen finns skala med redan från årskurs ett till tre. Enhetsomvandling är ett annat specifikt proportionellt förhållande som tas upp i den finska läroplanen i årskurs tre till sex och i den estniska läroplanen redan i årskurs ett till tre. I den svenska läroplanen tas enhetsomvandling däremot inte upp förrän i högstadiet. (Hemmi et al., 2020.)

I den finska och svenska läroplanen för lågstadiet finns området variabler inte alls med men området okänt tal finns med genom hela lågstadiet. I den estniska läroplanen finns både området okänt tal och området variabel med redan från årskurs ett. (Hemmi et al., 2020.)

2.5.2 Tidig algebra i estniska, finska och svenska matematikläroböcker för årskurs ett till tre – en jämförelse

Finland, Estland och Sverige har, som tidigare nämnts, väldigt liknande skolsystem. Den nationella styrningen är relativt liten i alla tre länder och länderna saknar alla en godkännande process för läromedelsmaterial som produceras kommersiellt. Hemmi et al. (2019) har genomfört en textboksanalys av vilket tidigt algebraiskt innehåll som finns i ett urval av matematikläroböcker för årskurs ett till tre i Finland, Estland och Sverige. Två stycken finska läroboksserier har analyserats: *Tuhattaituri* (Karlavagnen) och *Kymppi*. En finlandssvensk läroboksserie har analyserats, *Lyckotal*. Två stycken estniska läroboksserier har analyserats: *Matemaatika* by Koolibri och *Matemaatika* by Avita. Även två stycken svenska läroboksserier har analyserats: *Eldorado* och *Matte Safari*. Som analysverktyg har Hemmi et al. (2019) använts sig av Blanton et al. (2015) stora idéer och gjort en djupdykning i de två första idéerna: ”Likhet, uttryck, ekvationer och olikheter” och ”generaliserad aritmetik”.

I de båda finska läroboksserierna finns både olikheter (>,<) och likheter (=) med redan från början av årskurs ett och sedan genomgående fram till och med årskurs tre. Först jämförs endast siffror men senare även hela uttryck. I den finlandssvenska läroboksserien, Lyckotal, introduceras likhetstecknet redan i början av årskurs ett men olikheter introduceras endast väldigt kort. I de estniska läroboksserierna introduceras olikheter redan från början i årskurs ett, i likhet med de finska läroboksserierna. I båda de svenska läroboksserierna tas likhetstecknets betydelse upp, dock tas det upp noggrannast i Matte Safari där även inte lika med (≠) tas upp. Olikheter tas inte upp i någon av de svenska läroboksserierna. (Hemmi et al., 2019.)

Prioriteringsreglerna presenteras i årskurs två in de finska läroboksserierna och i årskurs tre förväntas eleverna kunna hantera uttryck med tre olika operationer korrekt enligt prioriteringsreglerna. I Lyckotal presenteras inte prioriteringsreglerna i sin helhet men det nämns att multiplikation ska utföras innan addition. Prioriteringsreglerna tas inte upp i någon av de svenska läroboksserierna. I de finska läroboksserierna introduceras den kommutativa egenskapen hos addition i årskurs ett och hos multiplikation i årskurs två. I båda de svenska läroboksserier redogöra för additionens kommutativitet i årskurs ett och det fastställs även att subtraktionen inte är kommutativ. Multiplikationens kommutativitet presenteras i årskurs två. (Hemmi et al., 2019.)

I den finska läroboksserien Tuhattaituri introduceras additionens och subtraktionens inversa egenskaper och eleverna lär sig att använda sig av dessa vid informell ekvationslösning från och med årskurs ett. På motsvarande sätt introduceras multiplikationens och divisionens inversa egenskaper i årskurs två. I den finlandssvenska läroboksserien Lyckotal introduceras additionens och subtraktionens inversa egenskaper endast väldigt ytligt i årskurs ett. I de estniska läroboksserierna introduceras additionen och subtraktionen parallellt i årskurs ett, subtraktionen introduceras explicit som additionens inversa operation. På liknande sätt introduceras multiplikationen och divisionen i årskurs två. I de estniska läroboksserierna får eleverna också lära sig att använda sig av inversa egenskaper för att lösa ut okända siffror. I de svenska läroboksserierna tydliggörs inte sambandet mellan addition och subtraktion. Dock presenteras den inversa relationen mellan multiplikation och division i Eldorado. Eleverna får inte heller någon inblick i kopplingen att använda sig av inversa egenskaper vid ekvationslösning. (Hemmi et al., 2019.)

I de finska läroboksserierna framskrider den informella ekvationslösningen stegvis genom att först fokusera på ekvationer där samma termer saknas. I Lyckotal förekommer det däremot redan från årskurs ett flera olika typer av ekvationer och ibland helt öppna ekvationer. Bokstäver som okända siffror eller variabler förekommer inte i varken de finska läroboksserierna eller i Lyckotal i årskurs ett till tre, istället används bilder eller tomma luckor för att symbolisera det okända värdet. I de estniska läroboksserierna används många olika typer av symboler för att symbolisera ett okänt värde, inklusive bokstäver. De svenska läroboksserierna, speciellt Matte Safari, innehåller många uppgifter där en term i ett uttryck saknas och eleven ska komma på vilken term det är, den okända termen symboliseras vanligen av en tom lucka. Det förekommer även helt öppna utsagor där eleverna ska fylla i passande värden. (Hemmi et al., 2019.)

Eleverna ska kunna skriva ett uttryck utgående från en textuppgift eller en bild i båda de finska läroboksserierna och i Lyckotal. I Lyckotal förkommer det även uppgifter där eleverna ska kunna skapa en textuppgift utgående från ett uttryck. I de estniska läroboksserierna förekommer det frekvent att eleverna ska kunna skapa egna textuppgifter utgående från ett uttryck. Eleverna behöver även kunna uttrycka interna kvantitativa relationer i textuppgifter schematiskt och skapa ekvationer av dessa förhållanden. I de svenska läroboksserierna ska eleverna kunna bilda uttryck med x utgående från en bild eller en textuppgift och även kunna skapa en textuppgift eller en bild utgående från ett uttryck. (Hemmi et al., 2019.)

Bråting, et al., (2019) har genomfört en studie där de undersökte det algebraiska innehållet i den svenska matematikläroplanen och i matematikläroböcker: *Eldorado* och *Matte Direkt*, för årskurs ett till sex. Som analysverktyg använde Bråting et al. (2019) sig av Blanton et al. (2015) stora idéer inom algebran (se kapitel 2.4.1). Bråting et al. (2019) kunde i sin undersökning konstatera att den algebraiska progressionen inom den stora idéen ”likhet, uttryck, ekvationer och olikheter” i de svenska läroboksserierna Eldorado och Matte Direkt är relativt tydlig och elevernas kunskaper inom dessa områden fördjupas progressivt. Den stora idéen ”generaliserad aritmetik” är tydligt sämst representerad i de båda läroboksserierna medan den stora idén ”funktionellt tänkande” är väl representerad i de båda läroboksserierna. Sammanfattningsvis är dock det algebraiska innehåller väldigt litet i både Eldorado och Matte Direkt. (Bråting et al., 2019.)

3 Metod och genomförande

I detta kapitel presenteras metodval, kategoriseringen av algebraiska uppgifter som vi använts i avhandlingen samt allmänt om tillförlitlighet, trovärdighet, etik och generalisering.

3.1 Val av metod

Syftet med avhandlingen var att undersöka den algebraiska progressionen i två olika matematikläroboksserier för årskurs ett till och med årskurs sex och jämföra progressionen sinsemellan läroboksserierna. I denna studie har vi valt att göra en kvalitativ innehållsanalys av den algebraiska progressionen i två finska läroboksserier och studien har även kvantitativa inslag. Den kvalitativa innehållsanalysen utfördes på två finlandssvenska läroboksserier, Lyckotal/Supertal av förlaget Schildts och Söderström och Karlavagnen av förlaget Otava (Bilaga 1 och 2). Båda läroboksserierna finns på svenska och finska samt att Karlavagnen även finns på engelska men vi har valt att analysera de svenska versionerna. Lyckotal/Supertal och Karlavagnen är alla utarbetade efter Glgu 2014 och är därför relevanta i dagsläget och lämpade för vår innehållsanalys.

Kvalitativ innehållsanalys går ut på att forskaren analyserar vilka teman eller fenomen som förekommer i ett dokument som inte är konstruerat av forskaren själv utan konstruerat av en organisation, myndighet eller privat person (Bryman, 2018). Eftersom vi har valt att analysera den algebraiska progressionen i två läroboksserier så har vi analyserat vilka algebraiska teman som förekommer i läroböckerna och läroböckerna motsvarar då det Bryman (2018) kallar dokument. Kvalitativ innehållsanalys går ofta ut på att forskaren i förväg har identifierat kategorier som tillämpas vid analysen av dokumentet för att strukturera upp analysen (Bryman, 2018). Vi har identifierat kategorier inom algebran utgående från Hemmis et al. (2020) modifierade kategorier av Blantons et al. (2015) stora idéer för att kunna utveckla det algebraiska tänkandet som vi sedan har tillämpat vid vår kvalitativa innehållsanalys för att kunna strukturera upp den. Att använda en flerfaldig forskningsstrategi lämpar sig när forskare känner ett behov av att tillämpa två eller flera forskningsstrategier flera för att belysa sitt resultat på flera sätt (Bryman, 2018). För att ge en tillräckligt utförlig bild av det algebraiska innehållet i läroböckerna kvantifierade vi antalet uppgifter inom de olika algebraiska kategorierna och angav de procentuella andelarna som antalet av uppgifter utgör inom varje kategori. Om man avser att undersöka hur frekvent förekommande något är så anser Trost (2012) att det lämpar sig att utföra en kvantitativ analys. Att använda kvantitativa metoder går ut på att beskriva och förklara det insamlade materialet på ett överskådligt sätt (Olsson & Sörensen, 2007; Trost, 2012). I resultatet beskrivs och förklaras de procentuella andelarna inom olika kategorier och tabeller används för att ge en överskådlig bild av de procentuella andelarna av uppgifter med algebraiskt innehåll.

3.2 Beskrivning av de algebraiska kategorierna

För att underlätta den kvalitativa innehållsanalysen så har vi valt att kategorisera algebraiska uppgifter utgående från Blantons et al. (2015) fem stora idéer som Blanton et al. (2015) menar att ligger som grund för att utveckla ett gediget algebraiskt tänkande men vi har även tagit inspiration av Hemmis et al. (2020) modifierade algebraiska kategorier som också är skapade utgående från Blantons et al. (2015) fem stora idéer. Vi har skapat fyra huvudkategorier: matematiska uttryck, funktionellt tänkande, proportionellt tänkande samt okända kvantiteter och alla har egna underkategorier.

Kategorin *matematiska uttryck* består av sex stycken underkategorier: skriva, gestalta och förstå; olikheter; likhetstecknets innebörd; konstruera; manipulera och prioriteringsregler. Till kategorin *skriva, gestalta och förstå* hör sådana uppgifter där eleverna ska skriva ut matematiska uttryck eller ekvationer utgående från bilder eller text, gestalta matematiska uttryck genom att rita en bild till ett uttryck, skriva en räknehändelse till ett uttryck eller skriva en textuppgift till ett uttryck. Textuppgifter som hör till denna kategori är sådana där eleverna uppmanas att skriva ut det uttryck som de ska räkna. Till kategorin *olikheter* hör alla uppgifter som innehåller olikhetstecken. Uppgifterna kan vara sådana där eleverna ska placera in rätt tecken (>,< eller =) mellan två matematiska uttryck eller där eleverna ska beakta olikhetstecknet för att kunna utföra uppgiften, exempelvis rita ut vilka tal på en tallinje som representeras av en given olikhet. Till kategorin *likhetstecknets innebörd* hör uppgifter som ger eleverna en korrekt uppfattning om likhetstecknets betydelse. Med korrekt uppfattning avses att eleverna vet att likhetstecknet inte är ett operationstecken som betyder att de ska skriva ut svaret efter ett uttryck utan att det är ett tecken som symboliserar ekvivalens mellan ett tal och ett uttryck eller mellan två uttryck. Exempel på sådana uppgifter är där det både förekommer 2+5= __ och __=2+5, där det förekommer likhetstecken flera gånger på rad (t.ex. 5+2=__+3=7+__) eller där likhetstecknet placeras på en ny rad för att räkna ut eller manipulera ett uttryck (Bild 1).

$5+8\cdot5$

=____________________

=____________________

Bild 1. Exempel på uppgift med likhetstecken

Till kategorin *konstruera* hör sådana uppgifter där eleverna ska konstruera matematiska uttryck helt fritt eller med färdiga tecken (t.ex. __+__=__+__). Till kategorin *manipulera* hör uppgifter där eleverna ska göra omskrivningar av uttryck, alltså på något sätt manipulera ett givet uttryck eller tal för att enklare kunna utföra en uträkning (t.ex. $4\cdot\frac{3}{5}=\frac{4\cdot3}{5}$) eller för att endast skriva om ett uttryck eller ett tal (t.ex. 5+5+5=3·5 eller 24=20+4). Slutligen till kategorin *prioriteringsregler* hör uppgifter där eleverna bör kunna räknesättens ordningsföljd för att utföra uppgifterna korrekt. Det kan vara frågan om uppgifter som innehåller uttryck som eleverna ska beräkna eller textuppgifter där eleverna ombeds att skriva ut fullständiga uttryck och sedan beräkna dem.

Kategorin funktionellt tänkande består också av sex stycken underkategorier: tabell, diagram, tallinje, mönster, regel och koordinatsystem. Till kategorin *tabell* hör alla uppgifter som innehåller någon form av tabell. Det är då frågan om tabeller där eleverna ska fylla i tomma rutor eller tabeller som eleverna ska läsa av. Till kategorin *diagram* hör alla uppgifter som innehåller någon form av diagram. Uppgifterna är sådana där eleverna ska fylla i diagram med hjälp av information eller läsa av diagram för att besvara frågor. Till kategorin *tallinje* hör uppgifter som innehåller en eller flera tallinjer. Tallinjerna kan enbart finnas i uppgiften som stöd eller så ska eleverna fylla i tallinjen med siffror eller rita hur en addition eller subtraktion ser ut på tallinjen.

Dessutom har vi valt att kategorisera temperaturmätare som tallinjer eftersom de förekommer flera gånger i läroböckerna och påminner om en tallinje. Till kategorin *mönster* hör uppgifter där eleverna ska se mönster och/eller fortsätta rita eller skriva mönster. Mönstren kan exempelvis bestå av symbolkombinationer eller siffersekvenser. Till kategorin *regel* hör uppgifter där eleverna ska identifiera regler som applicerats på mönster eller på enskilda tal och skriva ner reglerna med hjälp av ord eller matematiska uttryck. Slutligen till kategorin *koordinatsystem* hör uppgifter som innehåller koordinatsystem av olika slag. Det kan vara förstadier till koordinatsystem, alltså något som påminner om koordinatsystem och hur de fungerar, eller riktiga koordinatsystem som består av endast den första kvadranten eller alla fyra kvadranter.

Kategorin proportionellt tänkande består av nio stycken underkategorier: kongruens, förhållande mellan enheter, bråk- och blandad form, bråk- och decimalform, bråk- och procentform, bråkform och promille, decimal- och procentform, symmetri, skala och dubbel/halv. Till kategorin *kongruens* hör uppgifter där eleverna ska rita likformiga figurer till en given figur, rotera figurer, förminska eller förstora figurer samt förskjuta figurer i rutsystem. Figurerna kan vara tvådimensionella och tredimensionella. Till kategorin *förhållande mellan enheter* hör uppgifter där eleverna bör veta eller får information om förhållande mellan olika enheter för att kunna lösa uppgifterna. Uppgifterna är sådana att eleverna endera ska para ihop rätt enheter, omvandla från en enhet till en annan eller kunna använda sig av omvandling av enheter för att lösa matematiska uttryck eller textuppgifter. Enheterna är längd-, vikt-, area-, volym- och tidsenheter samt förhållande mellan cent och euro. Till kategorierna *bråk- och blandad form, bråk- och decimalform, bråk-och procentform, bråkform och promille* samt *decimal- och procentform* hör alla uppgifter där eleverna ska omvandla mellan de olika formerna. Uppgifterna går ut på att eleverna endast ska utföra omvandlingar eller utföra omvandlingar för att lösa exempelvis en textuppgift. Till kategorin *symmetri* hör uppgifter där eleverna ska rita spegelbilder till figurer, andra halvan av en figur, rita in symmetriaxlar i figurer eller avgöra hur många symmetriaxlar en figur har. Till kategorin *skala* hör uppgifter där eleverna ska använda givna skalor för att förstora eller förminska en bild, beräkna verkliga storleken av en figur eller beräkna verkliga längden av en sträcka. Skalorna är endera beskrivna i text eller ordentligt utskrivna skalor (t.ex. 1:50 eller 2:1). Slutligen till kategorin *dubbel/halv* hör sådana uppgifter där begreppen dubbel och halv förekommer och eleverna ska kunna tillämpa begreppen för att rita figurer, lista ut svar på frågor eller för att beräkna något utgående från en textuppgift.

Kategorin okända kvantiteter består av fyra stycken underkategorier: en obekant, flera obekanta, x som obekant variabel och formell ekvationslösning. Till kategorin *en obekant* hör uppgifter där eleverna ska fylla i ett saknat tal i ett matematiskt uttryck eller ett tal som beskrivs i text. Exempel på beskrivning av ett tal: Talet är större än 35 och mindre än 40. Du får talet om du multiplicerar ett tal med sig själv. Talet är _____. Till kategorin *flera obekanta* hör uppgifter där eleverna ska bestämma värdet på flera obekanta. I uppgifterna så ska eleverna utgående från flera uttryck innehållande flera obekanta tal bestämma värdet på varje obekant, kunna avgöra värdet på flera obekanta i en uppgift för att kunna lista ut värdet på ett specifikt obekant tal eller utgående från en text som beskriver flera obekanta tal lista ut de obekanta talen (liknande som för en obekant). Till kategorin *x som obekant variabel* hör uppgifter som innehåller x som ska symbolisera en obekant variabel. Uppgifterna går ut på att eleverna ska lista ut x:s värde utgående från ett matematiskt uttryck innehållande x, skriva olikheter och ekvationer innehållande x utgående från text och ange vilka värden x kan anta i en olikhet på en tallinje eller i skriven form. Till kategorin *formell ekvationslösning* hör sådana uppgifter där eleverna ska lösa ekvationer genom att utföra samma operation på båda leden i ett uttryck för att få den obekanta variabel ensam i det ena ledet och då ska skriva ut mellansteg och/eller skriva ut vilken operation som utförs på uttrycket. Till formell ekvationslösning hör inte uppgifter där eleverna enbart ombeds att lista ut värdet på en obekant.

3.3 Insamling, genomförande och analys av data

Valet av att använda specifikt läroboksserierna Lyckotal/Supertal och Karlavagnen baserade sig på att vi sökte läroböcker som var på svenska och utvecklade enligt Glgu 2014. För att få tillgång till böckerna var vi i kontakt med förlagen till läroböckerna, Schildts och Söderströms samt Otava. Båda förlagen gav tillstånd att använda deras matematikläroböcker i vår undersökning. Läroböckerna Lyckotal 1A–4B, Supertal 5A–6B och Karlavagnen 1a–2b hade vi i fysisk form medan Karlavagnen 3a–6b hade vi som onlineversioner. Till en början övervägde vi att även analysera läroböcker som används i högstadiet för att få en fullständig överblick av det algebraiska innehållet genom grundskolan, men vi valde att avgränsa studien till läroböcker som används i lågstadiet för att inte få en allt för överväldigande mängd av uppgifter att gå genom. Sammanlagt analyserade vi 24 stycken läroböcker ämnade för årskurs ett till sex.

Som tidigare nämnt så utfördes innehållsanalysen utgående från färdigt konstruerade algebraiska kategorier. Vid analysen av det algebraiska innehållet gick vi genom varje enskild lärobok från sida till sida och markerade samt skrev upp till vilka kategorier de uppgifter som innehöll algebra tillhörde för att organiserat samla in det data vi behövde. Hartman (2004) poängterar vikten av att organisera data på ett lämpligt sätt vid insamlingen och att det ska beskrivas så att det kan användas för vidare analys. Olsson et al. (2011) lyfter fram att data behöver göras överskådligt. Vilket vi gjorde genom att sammanställa tabeller över antalet uppgifter inom varje kategori. I tabellerna beaktade vi även hur många uppgifter inom varje kategori som befann sig bland de fördjupade uppgifterna i läroböckerna. Vi valde att beakta vanliga och fördjupade uppgifterna skilt eftersom alla elever inte hinner genom alla uppgifter i en lärobok och därför kan det vara nödvändigt att poängtera ifall en kategori främst förekommer bland de fördjupade uppgifterna i en lärobok. Tabellerna ändrade vi i ett senare skede till att bestå av procentuella andelar av uppgifter inom varje enskild kategori istället för antalet uppgifter inom varje kategori. Detta för att ge en bättre överblick över skillnaden mellan läroböckerna och för att göra tabellerna mer visuellt tilltalande och mera överskådliga.

Efter att vi hade kvantifierat det algebraiska innehållet i böckerna så övergick vi till att kvalitativt analysera svårighetsgraden av uppgifterna genom att gå genom läroböckerna en gång till men nu med avseende på progressionen av svårighetsgraden i varje skild underkategori. Vid andra genomgången av böckerna påträffade vi uppgifter som vi inte hade noterat att hör till någon kategori och då lade vi till dem till den kategori de tillhörde. Vi beskrev sedan det algebraiska innehållet i resultatet genom att redogöra för utvecklingen av uppgifter inom alla underkategorier och genom att poängtera i vilka årskurser vilka slags uppgifter förekommer för att kunna jämföra läroboksserierna. Olsson et al. (2011) poängterar att resultatet ska vara logiskt presenterat så att det ger svar på de ställda forskningsfrågorna. Vi har försökt att presentera resultatet logiskt genom att först presentera innehållet i Lyckotal och Supertal och sedan i Karlavagnen. I början av innehållspresentationen i respektive läroboksserie förekommer en allmän beskrivning av mängden algebraiskt innehåll och sedan en kategorivis beskrivning av innehållet. Detta för att först ge en översikt av det algebraiska innehållet och sedan en mera ingående beskrivning av innehållet.

3.4 Tillförlitlighet, trovärdighet, etik och generalisering

Med tillförlitlighet menas mätmetodens kapacitet att vid en upprepning av undersökningen få samma resultat som tidigare och med trovärdighet menas att den metod och det material som forskaren valt ska ge svar på de uppställda frågeställningarna (Bryman, 2018). Forskningen ska alltså vara stabil och inte påverkas av slumpartade faktorer för att kunna vara reproducerbar (Olsson et al., 2007; Trost, 2012). För att kunna reproducera vår studie så har vi försökt beskriva våra algebraiska kategorier så ingående som möjligt för att kategoriseringen ska kunna användas på nytt i en innehållsanalys av samma material. Ytterligare är det av stor vikt att forskningen är objektiv och värderingsfri vid presentation av resultat och teori samt vid analys av resultatet. (Olsson et al., 2011.) Forskare måste alltså behandla data från ett utifrånperspektiv så objektivt som hen kan (Olsson et al., 2007). Det är även viktigt att forskare genom hela forskningsprocessen är kritiska och noggranna vid bearbetningen och analys av data. Forskare måste kontinuerligt ställa sig frågan om eventuella systematiska eller slumpmässiga fel förekommer i forskningen för att kunna uppnå en tillfredsställande grad av tillförlitlighet och trovärdighet. (Holme & Solvang, 1991.) Vi har utfört analysen och bearbetningen av datat så objektivt och värderingsfritt som möjligt och gått genom materialet flera gånger och därför kunnat korrigera eventuella systematiska och slumpmässiga fel.

Forskare som utför innehållsanalys av ett dokument eller dylikt bör fundera över dokumentets kvalitet. För att ett dokument ska erhålla god kvalitet bör det vara autentiskt, trovärdigt och representativt för den kategori av dokument som den tillhör samt vara meningsfullt för själva forskningen. Att ett dokument är autentiskt innebär att det är äkta och otvetydigt, trovärdigt om det är utan förvrängningar och felaktigheter samt representativt om det är ett typiskt material för den typ av dokument som det är. För att dokumentet ska vara meningsfullt bör det vara tydligt och begripligt. (Bryman, 2018.) Läroböckerna som vi har använt oss av är autentiska, trovärdiga och representativa för sin kategori och erhåller därför god kvalité för att kunna analyseras.

Etiken inom forskning har en viktig uppgift eftersom forskare måste fatta etiska beslut genom hela forskningsprocessen, men främst vid själva insamlings- och analysprocessen (May, 2013). Etiken kan sägas ge riktlinjer för hur forskningsprocessen ska gå till för att vara etiskt korrekt (Holme et al., 1991). Ur ett forskningsperspektiv är konfidentialitet en viktig etisk aspekt som forskare måste beakta (Olsson et al., 2007). Före vi gick in för att utföra denna studie så kontaktades läromedelstillverkarna och vi frågade om tillåtelse att använda deras material. Eftersom forskare ska i mån om möjlighet utföra en värderingsfri forskning så bör de beakta allt material likvärdigt. Vid en jämförelse av två olika fenomen eller material krävs att forskare hanterar och reducerar båda materialen likvärdigt. Materialen ska båda återges ärligt och selektivt för att skapa en god och rättvis representation (Rennstam & Wästerfors, 2015). Vi har försökt behandla och presentera materialen likvärdigt genom att återge resultatet ärligt och selektivt.

Slutligen har vi generalisering som innebär att forskare ska fundera kring huruvida resultatet kan generaliseras utöver det material eller den population som blivit undersökt (Olsson et al., 2007). Vi avser därmed inte att generalisera vårt resultat på andra matematikläroboksserier eftersom det i tidigare forskning påvisats att matematikläroböckers algebraiska innehåll inte alls bör likna varandra.

4 Resultatredovisning

I detta kapitel presenteras det algebraiska innehållet och progressionen av uppgifternas svårighetsgrad i läroböckerna skilt för respektive larobokserie och detta görs utgående från de kategorier inom algebran som beskrevs i kapitel 3.2.

4.1 Resultat

Läroboksserierna Lyckotal/Supertal och Karlavagnen består sammanlagt av 24 läroböcker för årskurs ett till sex, tolv tillhörande Lyckotal/Supertal och tolv tillhörande Karlavagnen. Först presenteras resultatet från läroboksserien Lyckotal/ Supertal och sedan presenteras resultatet från Karlavagnen. För de skilda läroboksserierna presenteras först en sammanställning av vilka kategorier som är mest frekvent förekommande i läroboksserien och sedan presenteras varje enskild huvudkategori och deras respektive underkategorier.

4.1.1 Lyckotal och Supertal

Tabell 1.
Procentuella andelar av uppgifter inom de algebraiska kategorierna i Lyckotal och Supertal

Årskurs	Matematiska uttryck	Funktionellt tänkande	Proportionellt tänkande	Okända kvantiteter	Algebraiska uppgifter totalt	Antal uppgifter totalt
1	20,1	14,0	7,4	3,7	43,3	623
2	15,6	16,2	7,4	2,8	40,4	887
3	27,2	22,2	10,0	3,7	56,4	1211
4	28,5	25,0	14,4	4,4	63,9	1416
5	46,4	24,1	21,3	3,3	72,8	1165
6	42,3	21,2	28,4	4,2	76,7	1145
Totalt	31,3	21,4	15,7	3,8	61,2	6447

I läroboksserien Lyckotal/Supertal för årskurs ett till sex är det 61,5% av alla uppgifter som innehåller något som tränar elevens algebraiska tänkande (Tabell 1). Procentandelarna går från att vara minst i årskurs ett (43,3 %) till att vara störst i årskurs sex (76,7 %).

Totalt 31,1 % av alla uppgifter i Lyckotal och Supertal för årskurs ett till sex har något typ av innehåll som relaterar till kategorin matematiska uttryck. Det är denna kategori som innehåller den största procentandelen av alla de fem olika kategorierna. Årskurs fem är den årskurs som innehåller störst procentandel (46,4 %) uppgifter med innehåll från kategorin matematiska uttryck. Årskurs två är den årskursen som innehåller lägst procentandel (15,6 %) uppgifter med innehåll från kategorin matematiska uttryck.

I Lyckotal och Supertal från årskurs ett till sex är det totalt 21,4 % av uppgifterna som har något innehåll som relaterar till kategorin funktionellt tänkande. I årkurs ett är procentandelen lägst (14,0 %) och sedan ökar procentandelarna successivt ända fram till årkurs fyra där det är 25,0 % av uppgifterna som relaterar till kategorin funktionellt tänkande. I årkurs fem och sex minskar sedan procentandelarna något inom kategorin funktionellt tänkande.

Totalt 15,7 % av uppgifterna i Lyckotal och Supertal för årskurs ett till sex relaterar till kategorin proportionellt tänkande. Det är inom denna kategori som den näst lägsta procentandelen förekommer av alla kategorier. I både årskurs ett och två är det 7,4 % av uppgifterna som relaterar till kategorin proportionellt tänkande. Efter årskurs två ökar procentandelarna successivt till att vara 28,4 % i årskurs sex.

Kategorin okända kvantiteter är den kategori med den absolut minsta procentandelen av alla fem kategorier. Det är endast 3,8 % av alla uppgifter i Lyckotal och Supertal för årskurs ett till sex som relaterar till kategorin okända kvantiteter. Den lägsta procentandelen är i årskurs två där det är 2,8 % av uppgifterna som relaterar till kategorin okända kvantiteter. Den största procentandelen (4,4 %) finns i årskurs fyra.

4.1.1.1 Matematiska uttryck

Tabell 2.
Procentuella andelar av uppgifter inom huvudkategorin matematiska uttryck i Lyckotal och Supertal

Lärobok	Skriva, gestalta och förstå	Olikheter	Likhets-tecknets innebörd	Konstruera	Manipulera	Prioriterings-regler	Totala antalet uppgifter
1A	9,5	-	4,7	0,4	6,2	-	275
1B	11,8	1,4	2,0	2,3	4,0	-	348
2A	9,5	0,7	1,6	0,2	2,1	-	433
2B	14,5	0,7	2,0	0,4	2,2	-	454
3A	21,7	0,4	6,3	1,9	11,3	1,6	567
3B	11,5	1,6	3,0	0,3	5,9	0,2	644
4A	19,6	1,0	5,4	1,1	6,2	2,6	721
4B	17,1	2,3	1,2	1,7	2,9	0,3	695
5A	22,4	3,4	10,3	-	10,3	-	536
5B	30,5	1,4	12,6	0,6	21,5	3,7	629
6A	29,0	0,2	12,5	-	19,3	0,8	606
6B	29,3	2,0	3,3	1,1	5,0	4,3	539

Uppgifter som utvecklar elevernas förståelse för matematiska uttryck finns i varje lärobok i läroboksserien Lyckotal/Supertal. Vad gäller förhållandet mellan vanliga och fördjupade uppgifter så finns generellt den större andel av uppgifter som utvecklar förståelse för matematiska uttryck bland de vanliga uppgifterna i varje skild lärobok. Men exempelvis vad gäller kategorin *konstruera* så är mer än hälften av uppgifterna bland de fördjupande uppgifterna.

Utgående från Tabell 2 syns det att de procentuella andelarna av uppgifter ökar ju högre upp i årskurserna eleverna kommer i kategorin *skriva, gestalta och förstå.* Vad gäller progressionen i uppgifternas svårighetsgrad så kan man antyda en progression där eleverna i årskurserna ett till två ska skriva matematiska uttryck innehållande ett räknesätt (addition eller subtraktion) och två eller tre tal utgående från simpla bilder och korta textuppgifter. De ska även rita bilder och skriva räknesagor till additions- och subtraktionsuttryck. I årskurs två introduceras även räknesättet multiplikation och multiplikationsuppgifterna har samma struktur som additions- och subtraktionsuppgifterna bortsett från att eleverna inte ska skriva räknesagor till multiplikationerna. I årskurs tre förekommer uppgifter innehållande räknesättet division och även dessa uppgifter följer samma struktur som multiplikationsuppgifterna. I de högre årskurserna tre till sex ska eleverna skriva uttryck innehållande flera räknesätt utgående från längre texter som kan ha tillhörande tabeller eller diagram. Eleverna måste då lära sig att avgöra vilken information som är relevant för att kunna lösa uppgifterna i de högre årskurserna. Eleverna behöver även utvidga sitt matematiska ordförråd för att klara av att skriva ut matematiska uttryck. Exempel på ord som eleverna bör behärska i de högre årskurserna är area, omkrets, volym och rabatt. I årskurs fyra förekommer uppgifter där eleverna själva ska skriva textuppgifter som ska lösas genom att beräkna ett matematiskt uttryck. I årskurs fem förekommer uppgifter där eleverna ska skriva en räknehändelse till ett uttryck med två olika räknesätt. I årskurs sex så kommer det även in att eleverna ska skriva ekvationer utgående från bilder, frågor och texter.

Utgående från Tabell 2 så syns en progression där *olikheter* först presenteras i 1B och sedan genomgående finns med i de högre årskurserna men de procentuella andelarna varierar mellan årskurserna. Det finns även en progression när det gäller uppgifternas svårighetsgrad. Uppgifter med olikheter går från att innehålla mindre till större tal och enklare uttryck till svårare uttryck. I årskurs ett förekommer uppgifter där eleverna ska placera in rätt tecken (>, < eller =) mellan två ental, tiotal, enkla additioner och subtraktioner. I årskurs två förekommer uppgifter där eleverna ska placera ut givna tal i storleksordning mellan olikhetstecken och uppgifter där eleverna ska välja rätt tecken mellan större tal än i årskurs ett samt att multiplikation införs i olikhetsuppgifterna. Dessutom förekommer uppgifter där eleverna ska skapa egna olikheter. I årskurs tre förekommer uppgifter där eleverna ska välja rätt tecken mellan bråk och decimaltal. I årskurs fem introduceras negativa tal och eleverna ska då kunna välja rätt tecken mellan olika negativa tal och även mellan uttryck innehållande negativa tal. Eleverna kommer i årskurs fem även i kontakt med uppgifter med decimaltal med flera decimaler än i årskurs tre och med olikheter innehållande okända kvantiteter. Eleverna ska då i uppgifterna med olikheterna kunna ringa in de tal som kunde ersätta den obekanta variabeln. Slutligen i årskurs sex förekommer uppgifter där eleverna ska välja rätt tecken mellan långa uttryck innehållande tre till fyra olika räknesätt och uppgifter där eleverna ska kunna markera ut en olikhet innehållande x på en tallinje (Bild 2). Det förekommer även uppgifter där eleverna ska skriva ut några värden som är en lösning för olikheter innehållande en obekant variabel x (Bild 3).

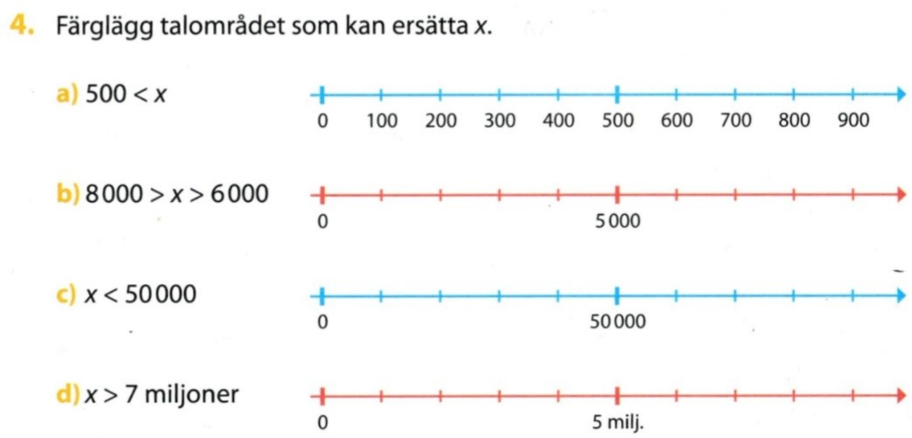


Bild 2. Exempel ur Supertal 6B

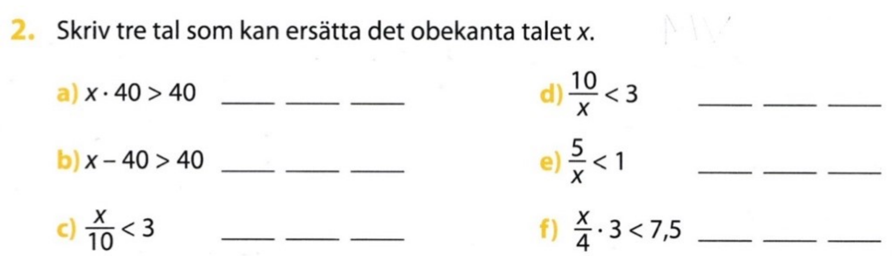
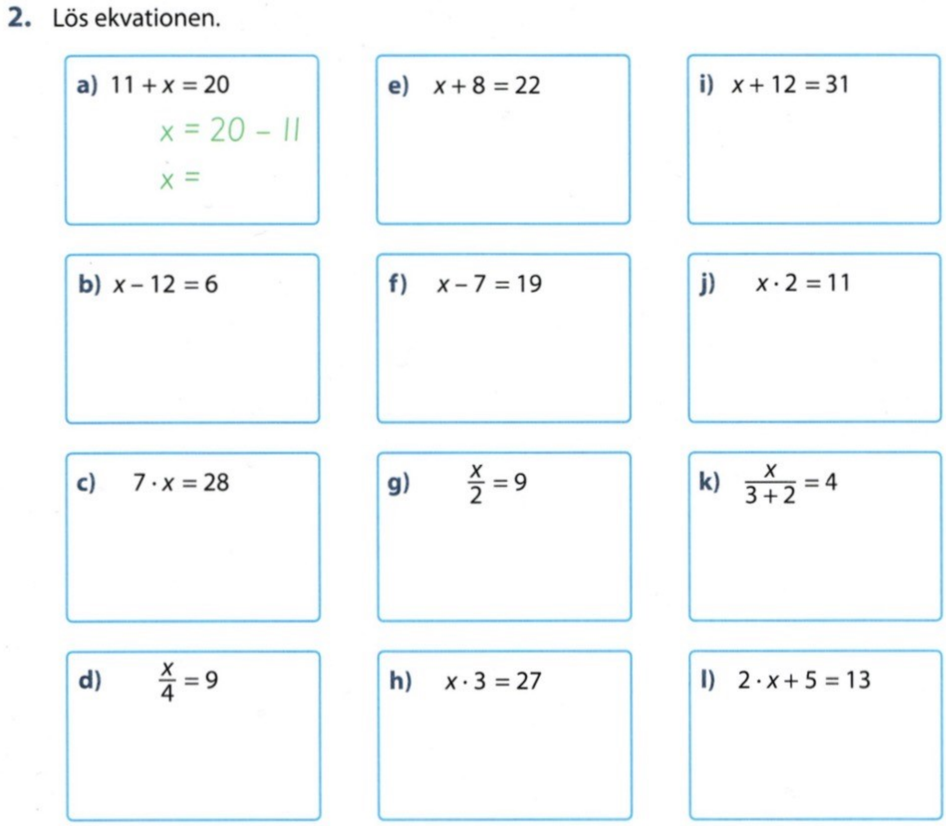


Bild 3. Exempel ur Supertal 6B

Kategorin *likhetstecknets innebörd* (Tabell 2) har ett varierande antal uppgifter i de olika årskurserna och en ökning av de procentuella andelarna kan ses ju högre upp i årskurserna eleverna kommer. En progression kan antydas i uppgifternas svårighetsgrad eftersom ju högre upp i årskurserna eleverna kommer desto breddare blir användningssättet för likhetstecknet. Till en början används likhetstecknet mer som ett operationstecken där uttrycket som ska räknas finns på ena sidan om likhetstecknet medan ett svar ska skrivas på andra sidan. Men redan i årskurs ett så ger uppgifter i Lyckotal en lite bredare förståelse för likhetstecknet genom att påvisa att det inte spelar någon roll på vilken sida av likhetstecknet uttrycket eller svaret kommer (ex. 2+1=__ och __=2+1). Senare i årskurs tre vidgas förståelsen för likhetstecknet ytterligare genom att eleverna ska skriva tankeled till uttryck genom att först skriva ett likhetstecken sedan en manipulerad version av uttrycket för att slutligen skriva ett till likhetstecken och svaret. Detta leder till att eleverna ser att likhetstecknet kan placeras på båda sidorna av ett uttryck. I årskurs fem förekommer uppgifter där eleverna ska placera likhetstecken på en ny rad under ursprungliga uttrycket för att sedan på den raden skriva en manipulerad version av uttrycket och slutligen på en sista rad skriva ett till likhetstecken och svaret. Detta bidrar till en ännu bredare förståelse för likhetstecknet, genom att visa att det inte behöver placeras direkt efter uttrycket utan kan placeras strukturerat på en ny rad under ett uttryck. Slutligen i årskurs sex i samband med att eleverna ska lösa ekvationer så vidgas förståelsen för likhetstecknet då eleverna ska förstå att om samma operation utförs på båda sidorna om ett likhetstecken så bibehålls likheten (Bild 4).



2. Lös ekvationen.

a) $11 + x = 20$

$x = 20 - 11$

$x =$

e) $x + 8 = 22$

i) $x + 12 = 31$

b) $x - 12 = 6$

f) $x - 7 = 19$

j) $x \cdot 2 = 11$

c) $7 \cdot x = 28$

g) $\frac{x}{2} = 9$

k) $\frac{x}{3+2} = 4$

d) $\frac{x}{4} = 9$

h) $x \cdot 3 = 27$

l) $2 \cdot x + 5 = 13$

Bild 4. Exempel ur Supertal 6B

Kategorin *konstruera* (Tabell 2) påvisar ingen direkt progression. Uppgiftsantalet varierar i de olika årskurserna och ingen tydlig ökning kan urskiljas. Vad gäller uppgifternas svårighetsgrad så syns inte heller någon progression. Eleverna ska bilda additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner men uppgifterna är utformade på samma sätt genom hela läroboksserien och uttrycken som de ska bilda blir inte längre.

Kategorin *manipulera* (Tabell 2) förekommer i varje lärobok i Lyckotal/Supertal. Den procentuella andelen uppgifter varierar mellan årskurserna men de större procentandelarna finns i de högre årskurserna och därför kan det antydas en progression i uppgiftsmängden. En progression i uppgifternas svårighetsgrad kan ses eftersom manipulationerna som eleverna ska utföra blir mera utmanande ju högre upp i årskurserna de kommer. Redan från årskurs ett börjar eleverna dela upp tal i additioner och subtraktioner för att senare i årskurs tre börja dela upp tal i multiplikationer och divisioner. I årskurs ett introduceras även den kommutativa lagen i samband med addition och senare i årskurs två i samband med multiplikation. I årskurs tre förekommer uppgifter där eleverna ska skriva ut tankeled genom att skriva ut en manipulerad version av ett givet uttryck. Tankeledsuppgifter förekommer sedan genomgående i läroboksserien men tankesätten förändras och blir mera komplicerade ju högre upp i årskurserna eleverna kommer. I årskurs fem och sex blir manipulerauppgifterna mera frekvent förekommande eftersom eleverna ska börja lära sig att förlänga och förkorta bråk samt bekanta sig med den distributiva lagen. Förlängning och förkortning av bråk går från att förlänga och förkorta enskilda bråk till att kunna förlänga och förkorta bråk i uträkningar av längre uttryck innehållande både heltal, bråk och olika räknesätt. Slutligen så kommer eleverna i kontakt med ekvationer där de ska lära sig att manipulera ekvationsuttryck så att variabeln x blir ensam kvar på ena sidan om likhetstecknet vilket kräver att eleven ska kunna tillämpa tidigare manipulationsfärdigheter för att åstadkomma ett svar.

I kategorin *prioriteringsregler* (Tabell 2) förekommer första gången i 3A och därefter följer den med genom de senare årskurserna. Det syns ingen direkt progression hos procentandelarna av uppgifterna men de två högsta procentandelarna förekommer i 5B och 6B. Svårighetsgraden på de uppgifter som kopplar till prioriteringsreglerna ökar ju högre upp i årskurserna eleverna kommer. Till en början i årskurs tre stöter eleverna på uttryck innehållande endera både multiplikation och addition eller multiplikation och subtraktion som de ska lösa. För att senare i årskurs fyra stöta på uppgifter innehållande tre räknesätt och även parenteser introduceras. I årskurs tre förekommer även fall där eleverna utgående från korta frågor och tabeller ska bilda uttryck som kräver att eleverna känner till prioriteringsregler och i årskurs fyra förekommer uppgifter där elever ska kunna bilda uttryck med fyra tal och två räknesätt utgående från illustrationer. Slutligen i årskurs fem och sex förekommer uppgifter med uttryck innehållande alla fyra räknesätten och parenteser som eleverna ska kunna lösa samt textuppgifter som kräver att eleverna ska kunna skriva ut uttryck innehållande flera räknesätt och parenteser.

4.1.1.2 Funktionellt tänkande

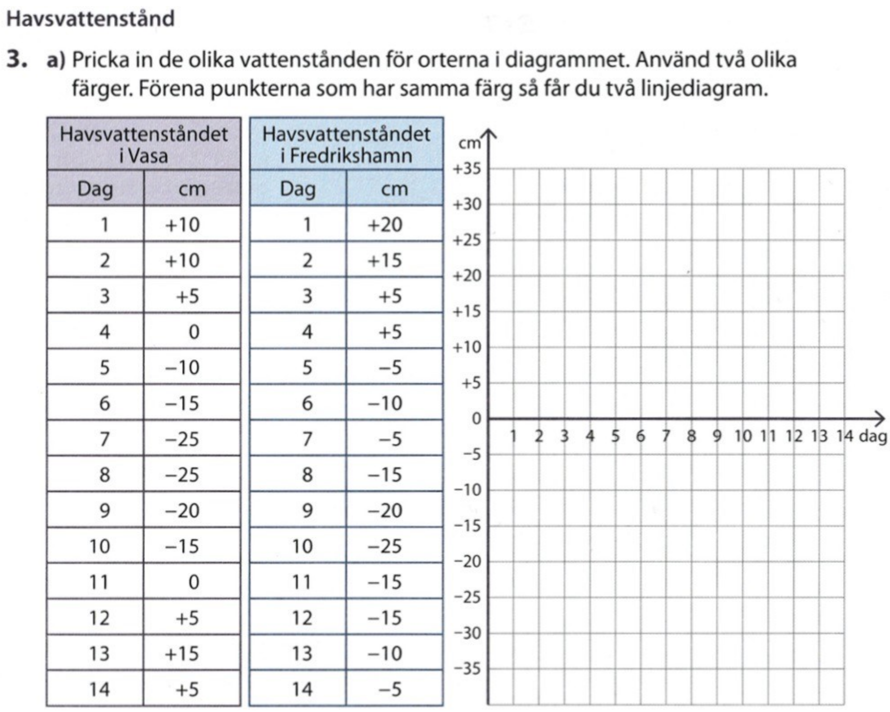
Tabell 3.
Procentuella andelar av uppgifter inom huvudkategorin funktionella tänkande i Lyckotal och Supertal

Lärobok	Tabell	Diagram	Tallinje	Mönster	Regel	Koordinat-system	Totala antalet uppgifter
1A	2,5	0,7	-	9,8	2,5	-	275
1B	2,6	0,6	0,9	7,5	2,3	-	348
2A	3,0	1,6	1,6	5,1	3,0	-	433
2B	5,5	4,8	0,2	4,6	4,6	0,2	454
3A	7,1	0,7	0,9	6,0	6,0	-	567
3B	13,2	1,2	1,9	5,7	5,1	-	644
4A	14,6	0,7	0,8	5,7	4,4	0,7	721
4B	12,1	5,2	2,3	3,3	3,6	-	695
5A	15,7	2,0	6,7	3,5	2,8	1,1	536
5B	13,4	4,5	1,4	0,8	0,5	2,5	629
6A	13,9	8,3	2,1	2,3	2,5	3,3	606
6B	15,6	0,4	1,5	2,8	2,0	0,7	539

Uppgifter som utvecklar elevernas funktionella tänkande finns genomgående i läroböckerna Lyckotal och Supertal. Vad gäller förhållandet mellan vanliga och fördjupade uppgifter så finns generellt en större andel av uppgifter som utvecklar funktionella tänkandet bland de vanliga uppgifterna i varje enskild lärobok. Den kategori som sticker ut är mönster där majoriteten av uppgifterna finns bland de fördjupade uppgifterna.

Kategorin *tabell* (Tabell 3) är den enda kategorin under funktionellt tänkande som påvisar en progression av mängden uppgifter i form av att den procentuella andelen uppgifter ökar ju högre upp i årskurserna eleverna kommer. Dessutom finns kategorin genomgående i alla årskurser, både bland de vanliga och de fördjupade uppgifterna. Vad gäller uppgifternas svårighetsgrad så går tabellerna från att bestå av två till fem rader och kolumner i årskurs ett till att bli mera omfattande innehållande flera rader och kolumner i de högre årskurserna. I årskurs ett och två ska eleverna kombinera information i raderna och kolumnerna för att fylla i tabellerna. I årskurs tre förekommer uppgifter där eleverna ska lista ut svaret på frågor utgående från information i en tabell. Senare i årskurs fyra ska eleverna kunna läsa av tabeller för att fylla i stapeldiagram och det förekommer även uppgifter där eleverna ska fylla i tabeller genom att ta i beaktande mer information i tabellen än de behövt göra i de tidigare årskurserna. Uppgifter där eleverna ska ta i beaktande mera information för att kunna fylla i tabellen går från att i årskurs fyra berätta vilket räknesätt som eleven ska tillämpa för att fylla i en lucka till att eleven i årskurs fem själv ska förstå vilket räknesätt eller vilken regel och vilka tal i tabellen hen ska använda för att fylla i en lucka.

Kategorin *diagram* (Tabell 3) förekommer genomgående i alla läroböcker men de procentuella andelarna av uppgifter varierar mellan årskurserna. Dock finns de större procentandelarna i de högre årskurserna. Den största procentandelen finns i lärobok 6A. En progression av uppgifternas svårighetsgrad kan antydas. Diagrammen går från att i de lägre årskurserna bestå av färre värden på axlarna till att i de högre årskurserna bestå av flera värden på axlarna. I årskurs ett förekommer uppgifter där eleverna ska fylla i stapeldiagram utgående från bilder och uppgifter där eleverna ska svara på frågor utgående från stapeldiagram. Senare i årskurs fyra dyker det upp uppgifter där eleverna ska fylla i stapeldiagram utgående från information i tabeller. I årskurs fem införs linjediagram och den negativa sidan av den vertikala axeln (Bild 5).


Havsvattenstånd

3. a) Pricka in de olika vattenstånden för orterna i diagrammet. Använd två olika färger. Förena punkterna som har samma färg så får du två linjediagram.

Havsvattenståndet i Vasa	
Dag	cm
1	+10
2	+10
3	+5
4	0
5	−10
6	−15
7	−25
8	−25
9	−20
10	−15
11	0
12	+5
13	+15
14	+5

Havsvattenståndet i Fredrikshamn	
Dag	cm
1	+20
2	+15
3	+5
4	+5
5	−5
6	−10
7	−5
8	−15
9	−20
10	−25
11	−15
12	−15
13	−10
14	−5

Bild 5. Exempel ur Supertal 5A

I kategorin *tallinje* (Tabell 3) varierar den procentuella andelen av antalet uppgifter men uppgifterna förekommer genomgående i alla årskurser. En progression i uppgifternas svårighetsgrad förekommer inte. Alla tallinjer har samma struktur. Det enda som ändrar är att talen på tallinjen blir större ju högre upp i årkurserna eleverna kommer samt att bråk-, decimal- och negativa tal tas med. Bråktalen tillkommer i årskurs tre, decimaltalen i årskurs fyra och negativa talen i årskurs fem.

Kategorin *mönster* (Tabell 3) förekommer genomgående i varje årskurs men de procentuella andelarna minskar ju högre upp i årskurserna eleverna kommer och således finns det ingen progression gällande antalet uppgifter. Dock finns en progression av uppgifternas svårighetsgrad genom årskurserna. I årskurs ett stöter eleverna på uppgifter där de ska fortsätta rita enkla mönster och fortsätta skriva enkla talföljder. I talföljderna ska eleverna endera addera till samma tal till föregående tal i talföljden eller subtrahera bort samma tal från föregående tal i talföljden till nästa tal. Liknande uppgifter förekommer i de högre årskurserna men mönstren blir mera komplicerade och i årskurs tre ska eleverna skriva ut regler för det mönster de har identifierat. I årskurs fem blir talföljderna mera komplicerade. Då handlar det inte om att addera till eller subtrahera bort tal utan andra mer komplicerade regler tillkommer (Bild 6).

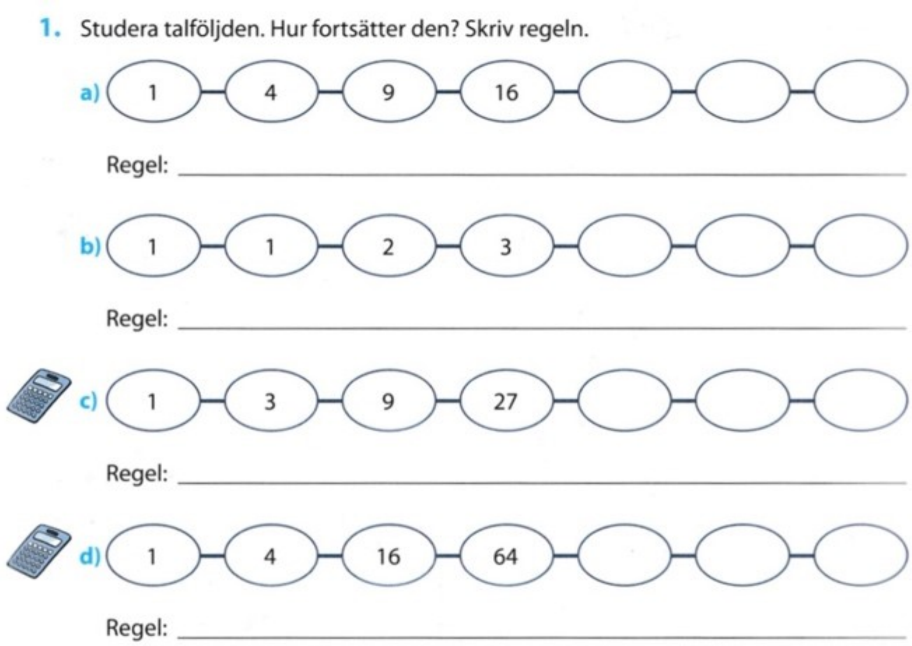
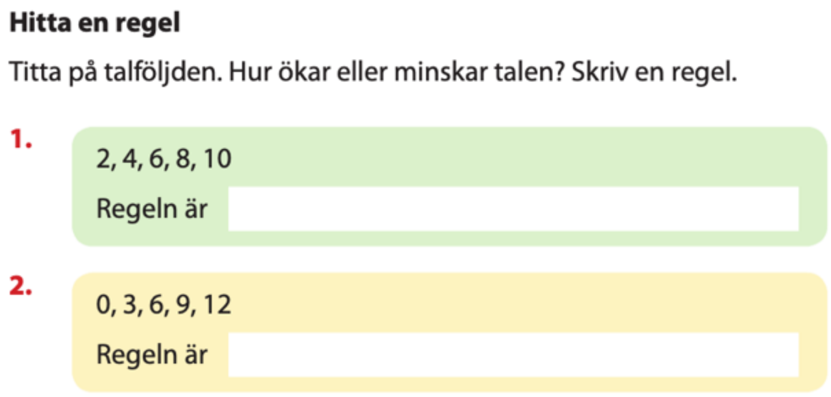


Bild 6. Exempel ur Supertal 5A

I kategorin *regel* (Tabell 3) varierar de procentuella andelarna av antalet uppgifter och ingen progression av antalet uppgifter kan urskiljas. Vad gäller uppgiftstyperna så anas en progression eftersom uppgifterna går från att eleverna i årskurs ett ska applicera givna regler på tal och talföljder till att i årskurs två uppfatta reglerna och skriva ner dem. I de lägre årskurserna handlar det om regler där eleverna ska addera till eller subtrahera bort tal från föregående tal i talföljden (Bild 7). Medan i årskurs fem och sex blir reglerna mera avancerade (Bild 6).



Hitta en regel

Titta på talföljden. Hur ökar eller minskar talen? Skriv en regel.

1. 2, 4, 6, 8, 10
   Regeln är

2. 0, 3, 6, 9, 12
   Regeln är

Bild 7. Exempel ur Lyckotal 2A

Sudokuliknande uppgifter förekommer någon enstaka gång så en progression vad gäller dem kan inte antydas.

Kategorin *koordinatsystem* (Tabell 3) förekommer första gången i årskurs två men introduceras ordentligt först i årskurs fyra. De procentuella andelarna av uppgiftsantalet varierar men de högsta procentandelarna finns i lärobok 5B och 6A. En progression av uppgifternas svårighetsgrad kan antydas. I årskurs två är det ett simpelt förstadium till ett koordinatsystem som förekommer i en uppgift. I årskurs fyra förekommer koordinatsystem där den första kvadranten syns (Bild 8).

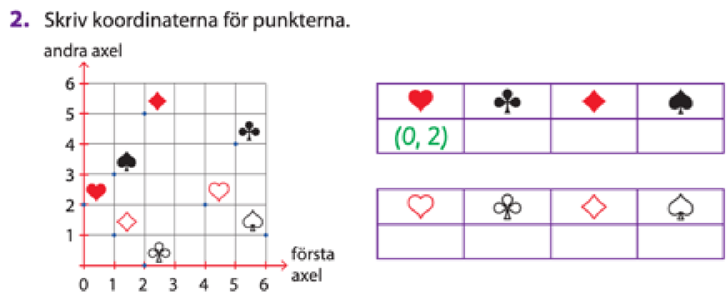


Bild 8. Exempel ur Lyckotal 4A

Eleverna stöter i årskurs fyra på uppgifter där de ska placera ut punkter i koordinatsystem, skriva ner koordinater för utritade punkter i koordinatsystem, rita figurer i koordinatsystem och skriva ut koordinaterna för hörnpunkter och förena punkter som är utmärkta i koordinatsystem. I årskurs fem och sex förekommer uppgifter med det fullständiga tvådimensionella koordinatsystemet där alla fyra kvadranter syns (Bild 9).

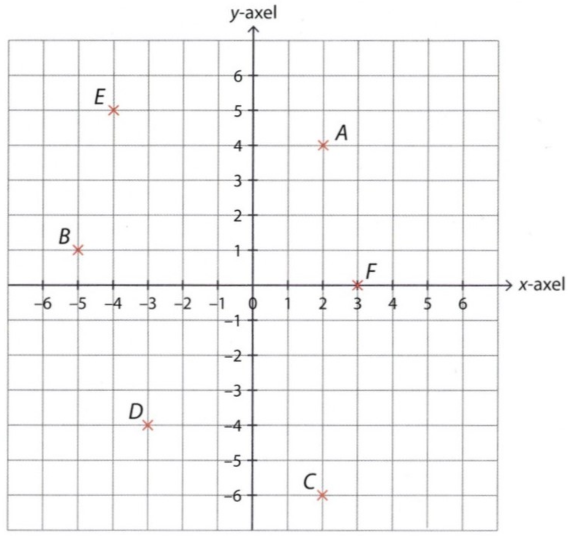


Bild 9. Exempel ur Supertal 5A

I uppgifter med fullständiga koordinatsystem ska eleverna rita ut koordinater, skriva ut koordinaterna till färdigt inritade punkter och rita egna koordinatsystem efter givna instruktioner om koordinatsystemets storlek samt rita ut koordinater eller figurer i dem. Ytterligare så förekommer uppgifter där eleverna ska spegla figurer i y-, x-axeln samt i förhållande till origo.

4.1.1.3 Proportionellt tänkande

Tabell 4.
Procentuella andelar av uppgifter inom huvudkategorin proportionella tänkande i Lyckotal och Supertal

Lärobok	Kongruens	Förhållande mellan enheter	Bråk- och blandad form	Bråk- och decimalform	Bråk- och procentform	Bråk- och promille	Decimal- och procentform	Symmetri	Skala	Dubbel/halv	Totala antalet uppgifter
1A	10,5	-	-	-	-	-	-	0,4	-	1,8	275
1B	3,2	-	-	-	-	-	-	0,9	-	0,6	348
2A	4,8	0,5	-	-	-	-	-	0,7	-	3,5	433
2B	1,8	3,7	-	-	-	-	-	0,4	-	1,1	454
3A	3,5	0,5	-	-	-	-	-	1,6	-	0,5	567
3B	1,4	9,8	-	0,6	-	-	-	0,2	-	1,6	643
4A	2,6	1,5	-	-	-	-	-	-	-	2,2	721
4B	1,0	15,5	3,2	1,2	-	-	-	0,1	-	2,0	695
5A	1,9	2,8	-	-	-	-	-	1,3	2,4	0,6	536
5B	-	16,7	9,2	3,2	2,7	-	0,5	-	-	1,1	629
6A	-	6,9	8,4	2,1	11,7	1,2	1,3	0,3	-	1,5	606
6B	1,3	15,4	0,6	1,3	2,6	-	1,5	2,6	4,6	0,2	539

Uppgifter som utvecklar elevernas proportionella tänkande förekommer genomgående i läroböckerna Lyckotal och Supertal. Vad gäller förhållandet mellan vanliga och fördjupade uppgifter så finns det flera uppgifter som utvecklar elevernas proportionella tänkande bland de fördjupade uppgifterna än bland de vanliga uppgifterna.

Kategorin *kongruens* (Tabell 4) finns genomgående i alla årskurser men de procentuella andelarna av antalet uppgifter minskar ju högre upp i årskurserna eleverna kommer. Däremot existerar en progression av uppgifternas svårighetsgrad men den är inte så tydlig. Uppgifterna går från att eleverna i årskurs ett ska para ihop, rita eller färglägga likformiga figurer (både tvådimensionella och tredimensionella). Figurerna som eleverna ska para ihop kan vara roterade på olika sätt, till att i årskurs tre förstora figurer genom att göra varje kant dubbelt så lång i ett punktsystem (Bild 10).

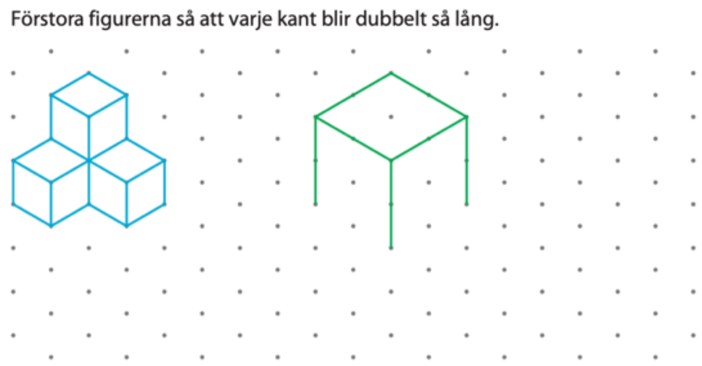


Bild 10. Exempel ur Lyckotal 3A

Figurerna blir mer komplicerade i de högre årskurserna. I årskurs sex dyker det även upp uppgifter där eleverna ska utföra parallellförskjutningar och rotationer av figurer i koordinatsystem.

I kategorin *förhållande mellan enheter* (Tabell 4) syns en progression av de procentuella andelarna av uppgiftmängden där de högsta procentandelarna förekommer i läroböckerna 4B, 5B och 6B. Kategorin lyfts fram första gången i 2A och finns sedan genomgående i de högre årskurserna. Progressionen gällande uppgifternas svårighetsgrad går från att eleverna ska kunna göra enhetsomvandlingar med vanliga och mindre enheter som används i vardagen till omvandlingar med större och ovanligare enheter till att i årskurs tre ytterligare kunna tillämpa sina omvandlingskunskaper i additioner, subtraktioner och textuppgifter. I årskurs två förekommer måttenheterna millimeter, centimeter, deciliter, liter, timmar, minuter, euro och cent. I årskurs tre införs decimeter, meter, kilometer, gram, kilogram och dygn. I årskurs fyra förekommer månader, veckor, år, decennier och sekel. I årskurs fem införs kvadratcentimeter, centiliter, milliliter och milligram. Slutligen i årskurs sex förekommer kvadratmeter, -decimeter, -millimeter, ar, hektar, tesked och matsked.

Vad gäller omvandling mellan bråk-, decimal-, procent-, blandad form och promille (Tabell 4) så kan man antyda en progression där *bråk- till decimalform* först presenteras i årskurs tre sedan *bråk- till blandad form* i årskurs fyra och därefter *bråk- till procentform*, *decimal- till procentform* och *bråkform till promille* i årskurs sex. Kategorin *bråk- till decimalform* presenteras första gången i 3B och de procentuella andelarna inom kategorin varierar men finns genomgående med i de högre årskurserna och de procentuella andelarna är som högst i 5B och 6A. Vad gäller progressionen av uppgifternas svårighetsgrad så går det från att eleverna ska omvandla mindre bråk, som tiondelar till decimalform, till att eleverna ska omvandla större hundradelsbråk till decimalform. Sedan i årskurs sex ska eleverna omvandla mer avancerade bråk som exempelvis 200/3 till decimalform med tre decimalers noggrannhet. *Bråk- till blandad form* presenteras för första gången i 4B och finns sedan genomgående med i de högre årskurserna. De procentuella andelarna varierar i de olika årskurserna. Uppgifterna där eleverna ska omvandla från bråk- till blandadform går från att eleverna först enbart ska omvandla mellan formerna till att sedan kunna tillämpa omvandling för att lösa additioner och senare i årskurs fem subtraktioner. Kategorierna *bråk- till procentform* och *decimal- till procentform*, som ofta går in i varandra, förekommer första gången i 5B och finns med genomgående i de högre årskurserna. De procentuella andelarna i kategorin bråk- till procentform är högst i 6A och i kategorin decimal- till procentform ökar de procentuella andelarna ju högre upp i årskurserna eleverna kommer. Uppgifterna går från att eleverna först enbart ska utföra omvandlingar till att sedan kunna tillämpa omvandlingar i kortare textuppgifter i årskurs fem och sedan även i längre och mera omfattande textuppgifter i årskurs sex. Slutligen i årskurs sex så förekommer uppgifter där eleverna ska kunna räkna ut nya rabatterade priser eller priser som har stigit. Kategorin *bråkform till promille* förekommer endast i de fördjupade uppgifterna i 6A och därav så kan ingen progression antydas i uppgifternas svårighetsgrad.

Kategorin *symmetri* (Tabell 4) finns genomgående i alla årskurser men de procentuella andelarna av uppgifterna varierar mellan årskurserna. Det kan antydas en progression av uppgifternas svårighetgrad eftersom uppgifterna till en början i årskurs ett går ut på att eleverna ska rita andra halvan av en figur, till att i årskurs två kunna avgöra om en figur är symmetrisk eller inte och rita en symmetriaxel i figurer till att i årskurs tre avgöra om en figur har flera symmetriaxlar och rita in dessa. I årskurs fem ska eleverna kunna spegla hela figurer i rutsystem med avseende på linjer och slutligen i årskurs sex även spegla figurer i en punkt.

Kategorin *skala* (Tabell 4) finns enbart i två årskurser 5A och 6B men det kan antydas en progression av uppgiftsantalet eftersom den procentuella andelen är större i 6B än i 5A. Uppgifter som innehåller skalor är i antalet väldigt få men ändå så finns en progression av svårighetsgraden eftersom eleverna i årskurs fem ska hantera mindre skalor som 1:2 och 3:1 till att i årskurs sex hantera större skalor som 1:3 000 000 och 1:250 000. Eleverna ska både i årskurs fem och sex rita förstorningar och förminskningar av figurer enligt givna skalor och räkna ut verkliga längder av figurer som blivit förminskade eller förstorade.

Slutligen har vi kategorin *dubbel/halv* (Tabell 4) som finns genomgående i läroböckerna men de procentuella andelarna varierar mellan läroböckerna. Även här kan det antydas en progression av svårighetsgraden hos uppgifterna eftersom eleverna i början av årskurs ett ska kunna avgöra om tvådimensionella figurer är dubbelt så stora eller hälften så små som en ursprunglig figur samt kunna rita ut dubbelt eller hälften av ett antal figurer. I årskurs tre stöter eleverna första gången på begreppen fördubbla och halvera i olika uppgifter och begreppen börjar komma in i olika textuppgifter. Slutligen i årskurs fem så blir textuppgifterna som berör fördubbling och halvering längre och mera omfattande och eleverna ska kunna rita tredimensionella figurer som är hälften så små eller dubbelt så stora som en ursprunglig figur.

4.1.1.4 Okända kvantiteter

Tabell 5.

Procentuella andelar av uppgifter inom huvudkategorin okända kvantiteter i Lyckotal och Supertal

Lärobok	En obekant	Flera obekanta	x som obekant variabel	Formell ekvations-lösning	Totala antalet uppgifter
1A	4,4	-	-	-	275
1B	3,2	-	-	-	348
2A	2,3	0,7	-	-	433
2B	2,4	-	-	-	454
3A	4,4	0,2	-	-	567
3B	3,0	0,5	-	-	644
4A	3,9	0,1	-	-	721
4B	3,7	1,7	-	-	695
5A	3,9	-	-	-	536
5B	2,1	0,6	-	-	629
6A	2,0	0,2	-	-	606
6B	2,8	0,7	3,5	2,2	539

Uppgifter som övar upp elevernas förståelse för okända kvantiteter av olika slag finns genomgående i läroböckerna Lyckotal och Supertal. Vad gäller förhållandet mellan vanliga och fördjupade uppgifter så finns de flesta uppgifter som utvecklar elevernas förståelse för okända kvantiteter bland de fördjupade uppgifterna.

Uppgifter med *en obekant* (Tabell 5) förekommer genomgående i alla läroböcker och de procentuella andelarna varierar mellan läroböckerna. Progressionen av svårighetsgraden bland uppgifter med en obekant syns på så vis att uppgifterna går från att innehålla ett räknesätt och mindre tal till att innehålla flera räknesätt och större tal. I årskurs ett så ska eleverna fylla i en saknad kvantitet på ett streck i ett uttryck, fylla i tomma rutor i uttryck och bestämma värdet på figurer i olika uttryck. Dessa typer av uppgifter följer med läroboksserien till slut. Uttrycken består av räknesätten addition och subtraktion i årskurs ett och det handlar om uttryck med två termer på ena sidan och ett tal på andra eller två termer på båda sidorna. I årskurs två tillkommer räknesättet multiplikation men då handlar det om uttryck med två faktorer på ena sidan och ett tal på andra. I årskurs tre förekommer uttryck med tre termer på ena sidan och ett tal på andra samt att decimaltal dyker upp i uttrycken. Ytterligare så tillkommer division i uttrycken och eleverna ska då ettdera fylla i nämnaren eller täljaren. I årskurs fyra blir talen i uttrycken större och parenteser införs i uttrycken och eleverna bör beakta prioriteringsreglerna. I årskurs fem förekommer uttryck med olikheter och eleverna ska då ringa in tal som passar in i olikheten. I årskurs sex blir uttrycken längre och innehåller fler räknesätt.

Uppgifter med *flera obekanta* (Tabell 5) uppkommer första gången i 2A och förekommer sedan i små etapper i de högre årskurserna med varierande procentuella andelar. Denna kategori kan sägas höra ihop med föregående kategori genom att den stärker elevernas förståelse för fenomenet okända kvantiteter. En progression vad gäller uppgifternas svårighetsgrad kan antydas. Uppgifterna går från att i årskurs ett innehålla räknesättet addition och två figurer som ska symbolisera de obekanta talen till att i årskurs tre även innehålla multiplikation och subtraktion till att i årskurs fem även innehålla division och de okända talen går från att vara figurer till tomma streck. I årskurs fem och sex så börjar uttrycken innehålla två räknesätt och eleverna ska lista ut tre okända tal.

Kategorin *x som obekant variabel* (Tabell 5) förekommer endast i 6B och procentuellt sett finns det flera uppgifter innehållande x bland de fördjupade uppgifterna. Därför finns det inte heller någon progression vad gäller uppgifternas svårighetsgrad inom denna enskilda kategori. Kategorin kan dock sägas ingå i progressionen för hela kategorin okända kvantiteter eftersom den ger en bredare bild av fenomenet okända kvantiteter. Det förekommer uppgifter där eleverna ska bestämma värdet på en kant (symboliserad av variabeln x) i en tredimensionell figur, uppgifter innehållande olikheter uttryckta med x där eleverna ska markera ut på en tallinje var x kan befinna sig eller skriva ner vilka värden x kan anta.

Slutligen har vi kategorin *formell ekvationslösning* (Tabell 5) som endast finns i 6B. Fastän det endast existerar formella ekvationslösningsuppgifter i en lärobok så kan man antyda en progression där uppgifterna går från att ekvationerna innehåller ett räknesätt som kräver mindre antal steg för att kunna lösa ut den obekanta variabeln till att ekvationerna innehåller flera räknesätt som kräver flera steg för att kunna lösa ut den obekanta variabeln till att eleverna slutligen ska kunna skriva ut en ekvation och lösa den utgående från en textuppgift.

4.1.2 Karlavagnen

Tabell 6.

Procentuella andelar av uppgifter inom de algebraiska kategorierna i Karlavagnen

Årskurs	Matematiska uttryck	Funktionellt tänkande	Proportionellt tänkande	Okända kvantiteter	Algebraiska uppgifter totalt	Antal uppgifter totalt
1	20,0	14,9	3,4	11,6	48,4	905
2	22,8	14,0	8,0	10,3	50,9	965
3	25,4	8,0	13,7	7,9	47,1	1134
4	37,6	18,9	18,9	4,9	60,5	1198
5	26,1	11,6	28,5	10,2	60,2	1228
6	51,3	8,3	31,0	9,3	72,4	1311
Totalt	31,6	12,4	18,5	8,9	57,5	6741

I läroboksserien Karlavagen för årskurs ett till sex är det 57,5 % av alla uppgifter som innehåller något som tränar elevens algebraiska tänkande. Procentandelarna varierar mellan att vara minst i årskurs tre (47,1 %) till att vara störst i årskurs sex (72,4 %).

Totalt 31,6 % av alla uppgifter i Karlavagnen från årskurs ett till sex har något typ av innehåll som relaterar till kategorin matematiska uttryck. Det är denna kategori som innehåller den största procentandelen av alla de fem olika kategorierna. Årskurs sex är den årskurs som innehåller överlägset störst procentandel (51,3 %) uppgifter med innehåll från kategorin matematiska uttryck. Näst störst procentandel är det i årskurs fyra (37,6 %). Årskurs ett är den årskursen som innehåller minst procentandel (20,0 %) uppgifter med innehåll från kategorin matematiska uttryck.

I Karlavagnen för årskurs ett till sex är det totalt 12,4 % av uppgifterna som har något innehåll som relaterar till kategorin funktionellt tänkande. Det är inom denna kategori som den näst minsta procentandelen förekommer av alla kategorier. I årkurs tre är procentandelen minst (8,0 %) och inte lågt därefter kommer årskurs sex med 8,3 %. Den största procentenheten (18,9 %) finns i årskurs fyra.

Totalt 18,5% av uppgifterna i Karlavagnen för årskurs ett till sex relaterar till kategorin proportionellt tänkande. Den minsta procentenheten finns i årskurs ett (3,4 %) och därefter ökar procentenheterna successivt fram till årskurs sex där den största procentenheten finns (31,0 %).

Kategorin okända kvantiteter är den kategori med den minsta procentandelen av alla fem kategorier. Det är endast 8,9 % av alla uppgifter i Karlavagnen för årskurs ett till sex som relaterar till kategorin okända kvantiteter. Den minsta procentandelen är i årskurs fyra där det är 4,9 % av uppgifterna som relaterar till kategorin okända kvantiteter. Den största procentandelen (11,6 %) finns i årskurs ett.

4.1.2.1 Matematiska uttryck

Tabell 7.
Procentuella andelar av uppgifter inom huvudkategorin matematiska uttryck i Karlavagnen

Lärobok	Skriva, gestalta och förstå	Olikheter	Likhets-tecknets innebörd	Konstruera	Manipulera	Prioriterings-regler	Totala antalet uppgifter
1A	5,5	10,8	1,6	4,4	3,2	-	436
1B	5,8	11,4	2,8	2,1	3,8	-	469
2A	9,1	3,7	1,9	0,6	3,2	2,3	473
2B	10,0	22,5	3,7	1,8	5,7	3,0	492
3A	15,8	10,6	5,8	0,2	8,2	-	462
3B	15,4	11,6	0,5	1,2	3,7	-	572
4A	14,9	6,1	17,2	0,2	11,3	4,6	582
4B	10,1	23,2	7,4	0,2	14,5	0,6	636
5A	17,1	1,3	5,8	-	13,1	3,9	619
5B	13,5	0,8	2,3	0,2	2,0	3,8	609
6A	26,0	0,3	15,2	-	24,3	6,8	650
6B	36,8	5,0	7,3	0,3	6,4	3,5	661

Uppgifter som utvecklar elevernas förståelse för matematiska uttryck finns genomgående i läroboksserien Karlavagnen för årskurs ett till sex. Vad gäller förhållandet mellan vanliga och fördjupade uppgifter så finns de flesta uppgifter som utvecklar elevers förståelse för matematiska uttryck bland de vanliga uppgifterna.

Kategorin *skriva, gestalta och förstå* (Tabell 7) förekommer genomgående i läroboksserien Karlavagnen och de procentuella andelarna av uppgifterna ökar inom kategorin ju högre upp i årskurserna eleverna kommer. Det finns en tydlig progression av uppgifternas svårighetsgrad inom kategorin. I årskurs ett börjar eleverna med att skriva enkla matematiska uttryck med addition och subtraktion utgående från bilder.

Senare förekommer korta textuppgifter bestående av en beskrivande mening av två antal av något och en fråga om skillnaden mellan antalen eller om det sammanlagda antalet. De korta textuppgifterna ska eleverna lösa genom att till en början göra det endast med en bild som de ritar för att senare kunna bilda matematiska uttryck utgående från informationen i texten. Till en början handlar det om uttryck innehållande två termer till att senare handla om uttryck med tre termer. I årskurs två införs räknesättet multiplikation och i årskurs tre tas division slutligen upp som sista räknesätt. På samma sätt som för addition och subtraktion så kan man antyda en progression i svårighetsgraden för multiplikation och division där det först handlar om att tolka bilder till uttryck för att senare kunna bilda uttryck utgående från textuppgifter. I de högre årskurserna tre till sex blir textuppgifterna längre samt flera räknesätt används i samma uttryck. Ytterligare så införs större tal och bråktal i årkurs tre och negativa tal i årskurs fyra i de matematiska uttrycken. För att klara av textuppgifterna så krävs det att eleverna vidgar sitt matematiska ordförråd. Exempel på ord som eleverna bör lära sig är omkrets, area, volym, medelvärde och rabatt. I årskurs sex förekommer uppgifter där eleverna ska kunna förklara vad givna matematiska uttryck beskriver från en given text (Bild 11), eleverna introduceras i ekvationer och ska även kunna bilda enkla ekvationer utgående från textuppgifter.

3. Uttrycken är lösta stegvis. Skriv vad man har räknat ut i de två stegen.

a. Paula har 50 euro. Hon köper sex böcker.
En bok kostar 7 euro. Hur mycket pengar har Paula kvar?

$6 \cdot 7\text{ €} = 42\text{ €}$ ______________________

$50\text{ €} - 42\text{ €} = 8\text{ €}$ ______________________

Bild 11. Exempel ur Karlavagnen 6a

I kategorin *olikheter* (Tabell 7) så minskar de procentuella andelarna av uppgifterna ju högre upp i årskurserna eleverna kommer och därför finns det ingen progression vad gäller antalet av olikhetsuppgifter. Det finns dock en progression vad gäller uppgifternas svårighetsgrad. I årskurs ett förekommer uppgifter där eleverna ska placera ut rätt tecken (>,< eller =) mellan ental, tiotal, enkla additioner och enkla subtraktioner. I årkurs två förekommer uppgifter där eleverna ska placera ut rätt tecken mellan multiplikationer, bråkkakor (Bild 12) och längre uttryck.

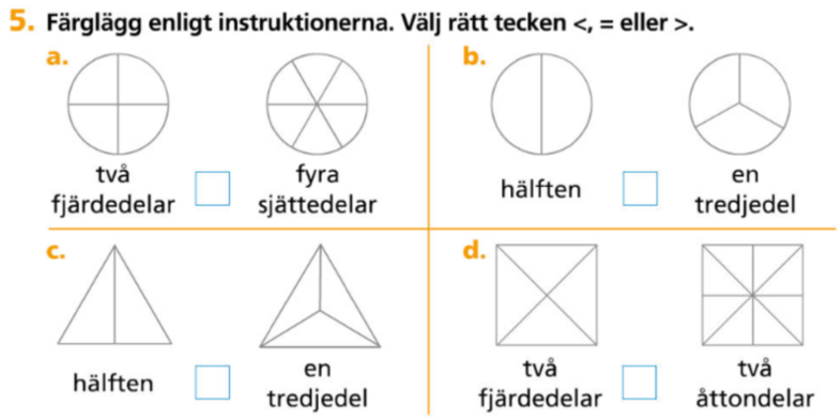


Bild 12. Exempel ur Karlavagnen 2a

I årskurs tre förekommer uppgifter där eleverna ska placera ut givna tal i storleksordning (Bild 13), placera ut rätt tecken mellan bråk, additioner med bråk och olika längdenheter.

Bild 13. Exempel ur Karlavagnen 3a

I årskurs fyra ska eleverna placera ut rätt tecken mellan bråk med större nämnare och täljare än i årskurs tre, mellan bråk och decimaltal och mellan olika negativa tal. I årskurs fem så får decimaltalen fler decimaler och eleverna ska nu även kunna välja rätt tecken mellan multiplikationer med decimaltal och flera längdenheter införs jämfört med i årskurs tre. I årskurs sex så förekommer x i olika olikheter. Eleverna ska då kunna rita ut de värden som x antar på en tallinje utgående från olikheten med x, ringa in olikheter som har en given lösning för x (Bild 14), skriva en olikhet innehållande x utgående från en kort text och slutligen kunna skriva en olikhet med en given lösning (Exempel. Lösning: x=1,2, 3, … Svar: x>0).

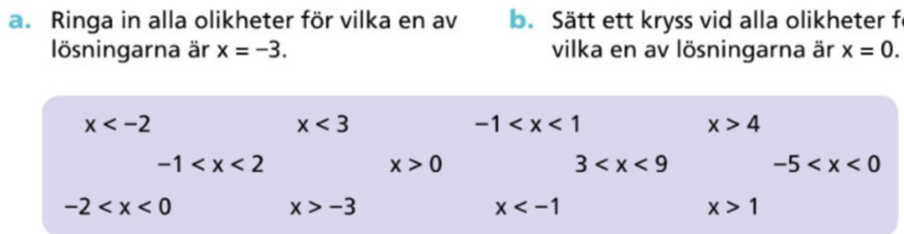


Bild 14. Exempel ur Karlavagnen 6b

I kategorin *likhetstecknets innebörd* (Tabell 7) så varierar de procentuella andelarna av uppgifterna men uppgifter som utvecklar elevernas förståelse för likhetstecknet finns genomgående i Karlavagnens alla läroböcker. De högsta procentuella andelarna finns i 4a och 6a. Det finns inte någon progression vad gäller uppgifternas svårighetsgrad eftersom användningssätten för likhetstecknet är desamma genom hela läroboksserien. I årskurs ett förekommer det uppgifter där eleverna ska placera ut rätt tecken (>,< eller =) mellan ett uttryck och ett svar. Dessa uppgifter vidgar elevernas förståelse för likhetstecknet genom att uttrycket och svaret inte alltid befinner sig på samma sida (Bild 15).

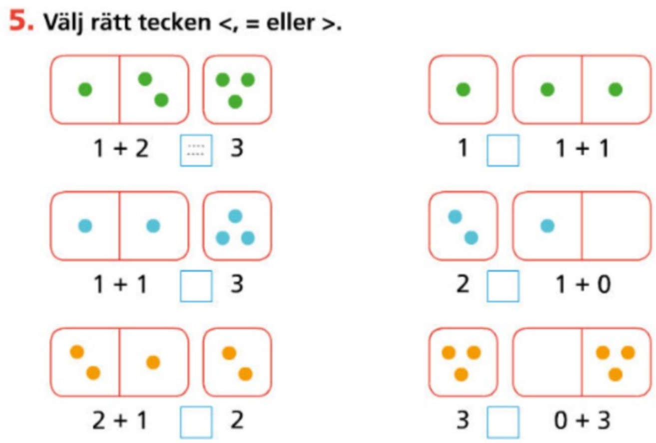


Bild 15. Exempel ur Karlavagnen 1a

Senare i årskurs ett förekommer uppgifter där eleverna ska fylla i en siffra i ett uttryck för att likhet ska gälla med ett annat uttryck. Det förekommer även uppgifter där eleverna ska kunna fylla i en siffra i ett uttryck så att likhet gäller med två andra uttryck. Ytterligare förekommer det uppgifter där likhetstecknet används genom att det placeras på en ny rad under föregående likhetstecken. Alla dessa användningssätt för likhetstecknet förekommer redan i årskurs ett och inga nya användningssätt förekommer i de högre årskurserna.

Uppgifter där elever ska *konstruera* (Tabell 7) matematiska uttryck förekommer genomgående i alla läroböcker men det finns ingen progression vad gäller de procentuella andelarna av uppgifterna eftersom de minskar ju högre upp i årskurserna eleverna kommer. Det kan inte heller urskiljas någon progression vad gäller uppgifternas svårighetsgrad. Uttrycken som eleverna ska konstruera innehåller addition, subtraktion, multiplikation eller division samt likhetstecken eller olikhetstecken men uttrycken blir inte längre och ska inte innehålla flera räknesätt samtidigt högre upp i årskurserna.

Kategorin *manipulera* (Tabell 7) finns genomgående i Karlavagnens läroböcker och det syns en progression vad gäller de procentuella andelarna eftersom de succesivt ökar ju högre upp i årskurserna eleverna kommer. Det kan även antydas en progression vad gäller uppgifternas svårighetsgrad. I årskurs ett så ska eleverna dela upp tal i två delar och kunna tillämpa detta för att skriva additioner av ett tal. Det förekommer även uppgifter där eleverna ska dela upp den ena termen i en addition, för att bilda ett helt tiotal, och sedan räkna ut additionen med tre termer (Bild 16).

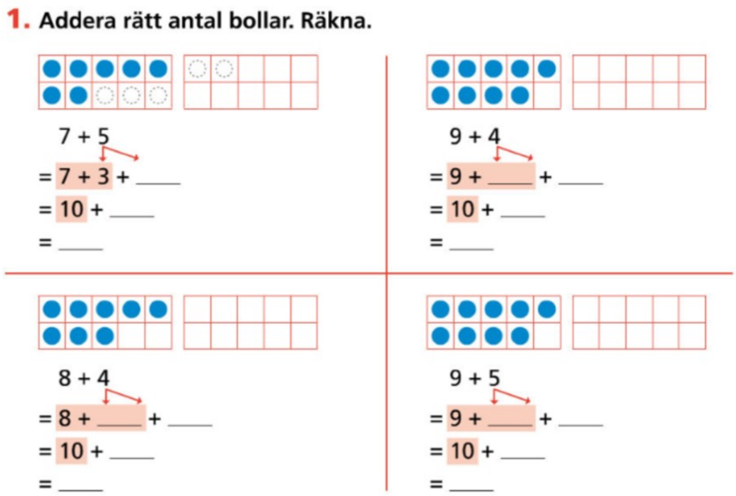


Bild 16. Exempel ur Karlavagnen 1b

I årskurs två ska eleverna kunna dela upp ett tal i tre termer i en addition respektive subtraktion. Det förekommer uppgifter där eleverna ska kunna skriva om en addition som en multiplikation och tvärtom. Ytterligare ska eleverna kunna prioriteringsregler och kommutativa lagen för addition för att stegvis manipulera och räkna ut ett uttryck. I årskurs tre introduceras även kommutativa lagen för multiplikation. I årskurs fyra ska eleverna dela upp större tal i additioner enligt talsort (Ex. 4531=4000+500+30+1) och även i multiplikationer (Ex. 500=5·100). Senare förekommer även uppgifter där elevernas ska multiplicera enligt talsort (Bild 17).

Bild 17. Exempel ur Karlavagnen 4a

I årskurs fyra dyker bråk upp och då förekommer det uppgifter där eleverna ska dela upp bråken och förlänga samt förkorta bråk skilt för sig och även vid uträkning av matematiska uttryck. I årskurs fem ska eleverna kunna tillämpa förlängning och förkortning av bråk utan att det specifikt står i uppgiften. Olika omskrivningar av bråk presenteras sedan i årskurs fem och sex och eleverna ska då använda dessa för att enklare kunna beräkna olika matematiska uttryck.

Slutligen har vi *prioriteringsregler* (Tabell 7) som förekommer första gången i 2a och därefter finns i alla årskurser förutom i årskurs tre. De procentuella andelarna av antalet uppgifter varierar i årskurserna och därför kan en progression inte antydas gällande uppgiftsantalet. De högsta procentuella andelarna finns i 4a och 6a. Däremot finns det en progression av uppgifternas svårighetsgrad. Till en början i årskurs två så förekommer uppgifter där eleverna ska veta att multiplikation räknas före addition. Senare i årskurs fyra så tillkommer de övriga räkneoperationerna, uttrycken blir längre och parentesen introduceras. Dessutom så förekommer det uppgifter där eleverna bör känna till prioriteringsreglerna för att kunna tänka ut värdet på obekanta kvantiteter. I årskurs fem förekommer det även uppgifter där eleverna ska kunna placera ut parenteser för att uttryck ska stämma. Slutligen i årskurs sex förekommer textuppgifter där eleverna behöver känna till prioriteringsreglerna för att kunna skriva ut ett uttryck och komma fram till rätt svar.

4.1.2.2 Funktionellt tänkande

Tabell 8.
Procentuella andelar av uppgifter inom huvudkategorin funktionella tänkande i Karlavagnen

Lärobok	Tabell	Diagram	Tallinje	Mönster	Regel	Koordinat-system	Totala antalet uppgifter
1A	-	3,1	4,4	7,3	1,4	-	436
1B	1,5	3,3	3,0	9,0	1,1	0,4	469
2A	3,0	3,6	2,3	6,8	1,9	-	473
2B	5,1	1,4	1,0	8,9	1,2	-	492
3A	3,7	-	1,8	4,6	0,7	-	562
3B	3,0	-	2,8	0,5	0,5	-	572
4A	1,9	1,9	0,2	2,4	0,9	6,2	582
4B	4,7	4,1	13,0	2,8	2,4	-	616
5A	1,9	3,9	1,0	4,5	1,6	0,2	619
5B	4,4	6,2	0,3	1,0	1,0	0,2	609
6A	0,9	-	-	1,2	4,3	0,2	650
6B	3,6	0,3	1,8	0,2	0,8	3,0	661

Uppgifter som utvecklar elevers funktionella tänkande finns i alla läroböcker för årskurs ett till sex i Karlavagnen. Vad gäller förhållandet mellan vanliga och fördjupade uppgifter så finns det en större andel uppgifter som utvecklar elevers funktionella tänkande bland de fördjupade uppgifterna än de vanliga uppgifterna.

Kategorin *tabeller* (Tabell 8) förekommer första gången i 1b och finns därefter genomgående i de högre årskurserna men de procentuella andelarna av uppgifterna varierar. Det existerar dock en progression av uppgifternas svårighetsgrad. Tabellerna går från att bestå av färre rader och kolumner till att bestå av flera rader och kolumner. I årskurs ett förekommer uppgifter där eleverna ska kombinera information från rader och kolumner för att fylla i tabellerna och uppgifter där eleverna ska fylla i tabellerna utgående från utomstående information. I årskurs två förekommer uppgifter där eleverna ska fylla i tomma luckor i tabeller genom att göra en uträkning med ett givet räknesätt och tabeller som eleverna bör kunna avläsa för att svara på tillhörande frågor. I årskurs tre förekommer uppgifter där eleverna ska fylla i tabeller utgående från en bild. I årskurs fem så blir tabellerna mera informationsrika och frågor till tabellerna blir mera komplicerade eftersom eleverna måste ta hänsyn till flera saker i tabellerna. Slutligen i årskurs fem och sex förekommer tabeller där eleverna själva måste lista ut vilken regel eller vilket räknesätt och vilken information i tabellen som bör beaktas för att fylla i tomma luckor.

Uppgifter som innehåller *diagram* (Tabell 8) finns genomgående i Karlavagnen men inte i årskurs tre. De procentuella andelarna av antalet uppgifter varierar mellan årskurserna och därför kan det inte antydas en progression vad gäller uppgiftsmängden. Dock kan det antydas en progression av uppgifternas svårighetsgrad. Diagrammen går från att i de lägre årskurserna ha färre värden på axlarna till att i de högre årskurserna ha flera värden på axlarna. I årskurs ett förekommer uppgifter där eleverna ska fylla i stapeldiagram utgående från bilder och läsa av antal ur diagram. Dessutom förekommer uppgifter där eleverna ska fylla i stapeldiagram utgående från en tabell. I årskurs två förekommer träddiagram som eleverna ska fylla i utgående från given information. Det förekommer uppgifter där eleverna ska svara på frågor till stapeldiagram. I årskurs fyra introduceras den negativa sidan av den vertikala axeln i diagram samt linjediagram. Dessutom förekommer uppgifter där eleverna ska fylla i stapeldiagram utgående från tabeller och uppgifter där eleverna ska svara på frågor till linjediagram, fylla i linjediagram med given information och hitta på en berättelse till ett linjediagram. I årskurs fem förekommer det uppgifter där eleverna ska konstruera träddiagram utgående från given information.

Slutligen i årskurs sex förekommer kombinationen av linje- och stapeldiagram och uppgifterna har samma struktur som för enskilda linje- och stapeldiagramsuppgifter.

Kategorin *tallinje* (Tabell 8) finns genomgående i läroböckerna men dess procentuella andelar varierar mellan årskurserna och därför finns det ingen progression vad gäller uppgiftsmängden inom kategorin. Det finns inte heller någon progression av uppgifternas svårighetsgrad. Tallinjerna har samma struktur genom hela läroboksserien. Det som ändrar är att talen på tallinjen blir större samt att bråk- decimal- och negativa tal tillkommer på tallinjen. Bråktalen tillkommer i årskurs tre och decimaltalen och de negativa talen i årskurs fyra.

Kategorin *mönster* (Tabell 8) finns genomgående i läroböckerna men dess procentuella andelar avtar en aning ju högre upp i årskurserna eleverna kommer. Däremot existerar en progression av uppgifternas svårighetsgrad. Till en början i årskurs ett finns det uppgifter där eleverna ska fortsätta rita enligt ett mönster och fortsätta talföljder enligt ett mönster. Mönstren som eleverna ska fortsätta rita blir mera invecklade i de högre årskurserna och talen i talföljderna blir större i de högre årskurserna. Talföljderna följer till en början regler som har med addition och subtraktion att göra, alltså samma tal adderas till föregående tal i talföljden eller subtraheras från föregående tal i talföljden för att bilda nästa tal. I årskurs fyra börjar talföljderna följa mera komplicerade regler, det kan handla om att eleverna ska multiplicera samma tal med föregående tal för att bilda nästa tal eller dividera med samma tal.

Kategorin *regler* (Tabell 8) förekommer genomgående i läroboksserien men uppgifternas procentuella andelar varierar mellan årskurserna. Det existerar dock en progression vad gäller uppgifternas svårighetsgrad. Det förekommer enstaka uppgifter där eleverna ska applicera givna regler på tal eller talföljder i årskurs två (Bild 18). Senare i årskurs två förekommer uppgifter där eleverna ska lista ut den regel som använts för att komma från ett tal till ett annat, skriva ner regeln och applicera den på resterande tal i uppgiften (Bild 19).

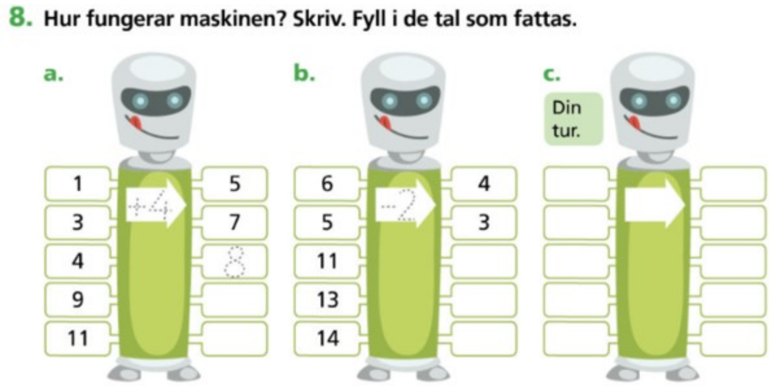


Bild 18. Exempel ur Karlavagnen 2a

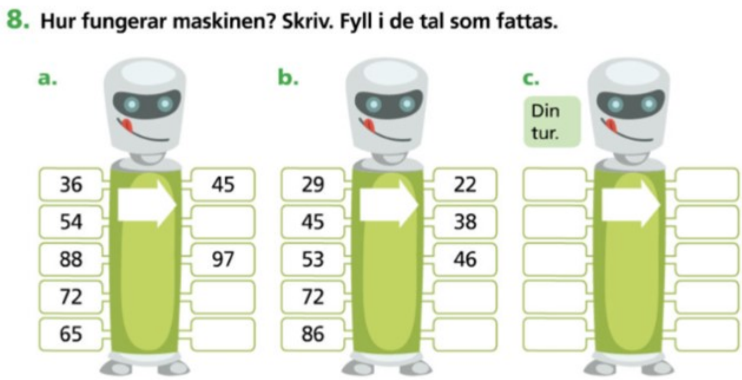


Bild 19. Exempel ur Karlavagnen 2a

Reglerna som eleverna ska lista ut i uppgifterna är sådana där eleverna ska addera till eller subtrahera bort tal, så reglerna som sådana blir inte svårare högre upp i årskurserna. Från årskurs ett förekommer små sudokun som eleverna ska lösa som består av fyra stycken 4x4-rutor till att i årskurs fyra förekommer sudokun som består av sex stycken 6x2-rutor samt att senare förekommer fullstora sudokun med nio stycken 9x9-rutor och specialversioner av sudokun.

Slutligen har vi *koordinatsystem* (Tabell 8) som första gången dyker upp i 1b i ett förenklat format och sedan introduceras ordentligt i 4a och därefter finns de genomgående i de högre årskurserna, dock varierar de procentuella andelarna mellan årskurserna och den högsta procentuella andelen finns i lärobok 4a. En progression av uppgifternas svårighetsgrad kan antydas. I årskurs ett förekommer uppgifter med enkla varianter av koordinatsystem där eleverna, utan att vara medvetna om att figuren i uppgiften har formen av ett koordinatsystem, ska läsa av koordinater för att lista ut bokstäver (Bild 20).

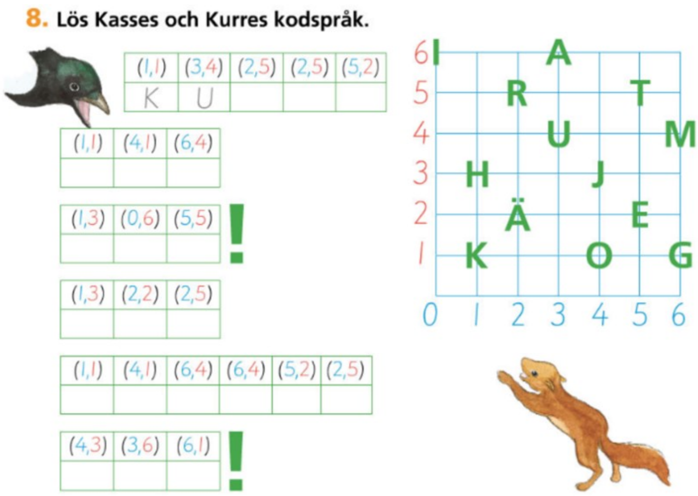


Bild 20. Exempel ur Karlavagnen 1b

Senare i årskurs fyra introduceras officiellt den första kvadranten av koordinatsystemet. Uppgifterna med koordinatsystem som består av den första kvadranten går ut på att eleverna ska skriva ut koordinater som är utmärkta i koordinatsystem, rita ut givna koordinater i koordinatsystem, rita linjer som förbinder koordinater och skriva koordinater för skärningspunkter mellan linjer. Ytterligare förekommer uppgifter där eleverna ska rita ut och förbinda flera punkter i en given ordning, spegla figurer i givna eller egenkonstruerade linjer i koordinatsystem och skriva ut koordinaterna för den speglade figurens hörnpunkter. Senare i årskurs sex introduceras det fullständiga tvådimensionella koordinatsystemet och uppgifter med dessa koordinatsystem innehåller samma typ av uppgifter som koordinatsystemen bestående av endast första kvadranten. Senare förekommer det uppgifter där eleverna ska rotera figurer i det fullständiga koordinatsystemet och skriva ut hörnpunkterna till de roterade figurerna.

4.1.2.3 Proportionellt tänkande

Tabell 9.
Procentuella andelar av uppgifter inom huvudkategorin proportionellt tänkande i Karlavagnen

Lärobok	Kongruens	Förhållande mellan enheter	Bråk- och blandad form	Bråk- och decimalform	Bråk- och procentform	Bråk och promille	Decimal- och procentform	Symmetri	Skala	Dubbel/halv	Totala antalet uppgifter
1A	1,6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	436
1B	4,3	-	-	-	-	-	-	0,2	-	0,6	469
2A	4,4	-	-	-	-	-	-	1,7	-	2,3	473
2B	0,2	7,1	-	-	-	-	-	-	-	0,8	492
3A	-	4,3	-	-	-	-	-	-	-	0,9	562
3B	0,7	11,0	7,5	-	-	-	-	0,2	0,2	1,7	572
4A	0,7	0,7	-	-	-	-	-	10,0	0,2	0,9	582
4B	0,2	11,9	10,6	1,6	-	-	-	-	-	1,9	616
5A	0,3	1,3	6,3	1,8	-	-	-	0,5	0,3	1,5	619
5B	5,4	21,7	-	2,0	7,2	-	-	-	10,0	2,3	609
6A	1,5	2,6	13,8	-	-	-	-	-	0,3	3,7	650
6B	2,1	12,1	4,4	2,4	16,8	-	1,5	-	-	1,1	661

Uppgifter som utvecklar elevernas proportionella tänkande finns i varje lärobok för årskurs ett till sex i Karlavagnen. Vad gäller förhållandet mellan vanliga och fördjupade uppgifter så finns det generellt flera uppgifter som utvecklar proportionellt tänkande bland de fördjupade uppgifterna.

Kategorin *kongruens* (Tabell 9) finns genomgående i alla årskurser men de procentuella andelarna av uppgifter varierar mellan årskurserna. En progression vad gäller uppgifternas svårighetsgrad kan antydas. I årskurs ett ska eleverna rita och färglägga figurer på samma sätt som en given figur och para ihop likformiga figurer, både tvådimensionella och tredimensionella. De tredimensionella figurerna är i vissa uppgifter roterade på olika sätt. Dessutom förekommer uppgifter där eleverna ska förstora bilder genom att granska den ursprungliga bilden som befinner sig i ett rutsystem och rita in den i ett rutsystem med större rutor men rutantalet är lika stort som i det lilla rutsystemet. I årskurs två förekommer uppgifter där eleverna ska kunna para ihop en utvecklad tredimensionell figur med rätt fullständiga figur (Bild 21).

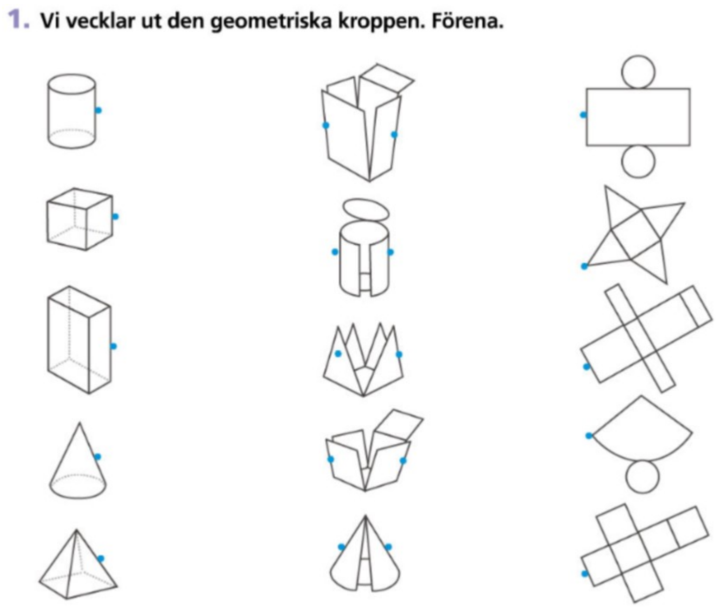


Bild 21. Exempel ur Karlavagnen 2a

I årskurs tre förekommer uppgifter där eleverna ska täcka en plangeometrisk figur med flera utav en mindre plangeometrisk figur som ska roteras på olika sätt för att passa in (Bild 22).

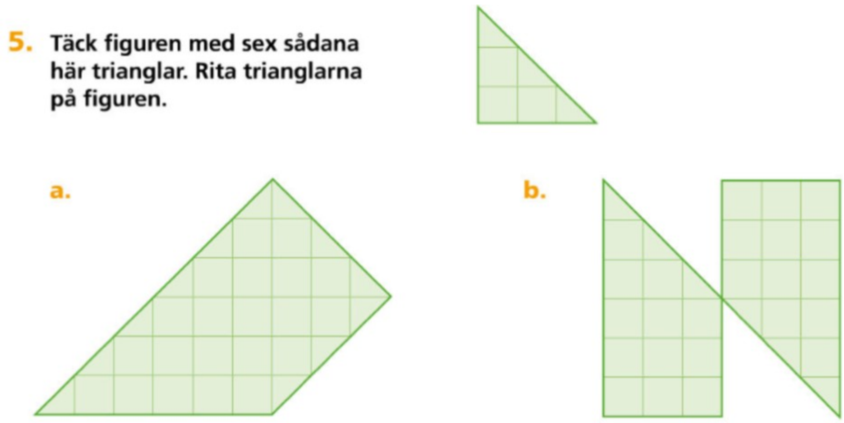


Bild 22. Exempel ur Karlavagnen 6b

I årskurs fem förekommer uppgifter där eleverna ska rita förstorningar av figurer men i dessa blir inte rutorna större där eleverna ska rita in den förstorade figuren utan eleverna ska förstå att göra kanterna två eller tre rutor längre. I årskurs sex förekommer det uppgifter där eleverna ska utföra förskjutningar och rotationer av figurer i rut- och koordinatsystem.

Kategorin *förhållande mellan enheter* (Tabell 9) uppkommer första gången i 2b och finns därefter genomgående i de högre årkurserna men de procentuella andelarna av uppgifter varierar mellan årskurserna. En progression vad gäller uppgifternas svårighetsgrad kan antydas. Uppgifterna går från att eleverna ska göra enhetsomvandlingar mellan mindre och vanligare enheter till att göra omvandlingar mellan större och ovanligare enheter. I årskurs fem ske eleverna även kunna tillämpa sina omvandlingskunskaper för att utföra en beräkning. I årskurs två införs centimeter, meter, kilometer, gram, kilogram, deciliter och liter. I årskurs tre tillkommer minuter, timmar och millimeter. I årkurs fyra dyker dygn, veckor, euro och cent upp. I årskurs fem förekommer deci-, hekto-, kilo-, dekameter, centi- och milliliter. I årkurs sex tillkommer kvadratmeter, -kilometer, -centimeter, -decimeter, hektar, ar, sekunder och olika tidsenheter per timme och per sekund i några fördjupade uppgifter.

Vad gäller omvandling mellan bråk-, decimal-, procent- och blandadform (Tabell 9) så kan man antyda en progression där man först presenterar *bråk- till blandad form* i årskurs tre sedan *bråk- till decimalform* i årskurs fyra och slutligen *bråk- till procentform i årskurs fem* och *decimal- till procentform* i årskurs sex. Kategorin *bråk- till blandad form* presenteras första gången i 3b och finns genomgående med i de högre årskurserna och de procentuella andelarna inom kategorin varierar. Dessa uppgifter går från att eleverna ska omvandla från bråk till blandad form med en tallinje eller bråkkakor som stöd till att utföra omvandlingen utan stöd och i samband med beräkning av additioner och subtraktioner. I årskurs sex introduceras räknestrategier för att utföra omvandlingen andra vägen, från blandadform till bråk. *Bråk- till decimalform* presenteras första gången i 4b och finns genomgående med i de högre årskurserna men de procentuella andelarna varierar mellan årskurserna. I årskurs fyra går uppgifterna ut på att eleverna ska skriva in bråk och decimaltal på en tallinje och välja rätt tecken (<,> och =) mellan olika bråk och decimaltal. Senare i årskurs fem ska eleverna kunna utföra omvandling mellan bråk- och decimalform i samband med textuppgifter. *Bråk- till procentform* förekommer första gången i 5b och finns genomgående med i de högre årskurserna. En progression kan antydas eftersom de procentuella andelarna av uppgiftsmängden är högre i årskurs sex än i fem. Dessa uppgifter går från att eleverna ska utföra direkta omvandlingar till att kunna tillämpa omvandlingar för att räkna ut procenter av tal och nedsatta samt höjda priser. I årskurs sex förekommer sedan uppgifter där eleverna ska räkna ut hur stor procent ett tal utgör av ett annat tal vilket då kräver att eleverna utför omvandlingar. *Decimal- till procentform* förekommer först i 6B och finns endast bland de vanliga uppgifterna och därför kan det inte antydas en progression av uppgiftsmängden i den kategorin. Det kan inte heller antydas en progression av svårighetsgraden på uppgifterna eftersom uppgifterna liknar varandra och är bara tio stycken till antalet. Kategorin *bråk till promille* förekommer inte i Karlavagnen.

Symmetri (Tabell 9) förekommer första gången i 1 och följer med ända till 5. De procentuella andelarna av symmetriuppgifter varierar mellan årskurserna. En progression vad gäller uppgifternas svårighetsgrad kan antydas. I årskurs två ska eleverna rita och färglägga andra halvan av en figur och spegla en figur i förhållande till en linje i ett rutsystem. I årskurs fyra ska eleverna spegla mera komplicerade figurer och mönster, hitta spegelbilder till figurer, spegla figurer i koordinatsystem samt spegla en figur åt flera olika håll i förhållande till linjer som omger figuren. Slutligen förekommer det uppgifter i årskurs fyra där eleverna ska avgöra om en figur är symmetrisk eller inte och rita in symmetriaxlar i figurer.

Kategorin *skala* (Tabell 9) förekommer första gången i 3 och finns därefter genomgående i de högre årskurserna men de procentuella andelarna av uppgifter varierar. En progression av uppgifternas svårighetsgrad kan antydas. Uppgifterna i årskurs tre och fyra har inte korrekt utskrivna skalor utan skalan beskrivs och eleverna ska då kunna utgående från beskrivningen av skalan avgöra den verkliga storleken på ett föremål. I årskurs fem införs korrekt utskrivna skalor och eleverna ska då avgöra utgående från en skala om det är frågan om en förminskning eller förstorning, förstora och förminska en figur i rutsystem enligt en given skala och räkna ut verkliga storleken av en figur som blivit förminskad eller förstorad. I årskurs sex förekommer det uppgifter där eleverna ska förstora tredimensionella figurer enligt en given skala och kunna räkna ut den verkliga arean av en rektangel som blivit förminskad. I årskurs fem är det frågan om mindre skalor och i årskurs sex handlar det om större skalor.

Slutligen har vi kategorin *dubbel/halv* (Tabell 9) som förekommer första gången i 1b och sedan finns med genomgående i de högre årskurserna. Det finns inte en progression av den procentuella andelen uppgifter inom kategorin eftersom de procentuella andelarna varierar mellan läroböckerna. Det finns inte heller inte en tydlig progression vad gäller uppgifternas svårighetsgrad. I årskurs ett förekommer uppgifter där eleverna ska rita dubbelt så många bollar, färglägga hälften av figurerna och även uppgifter där eleverna ska lista ut vilket namn eller vilken sak som hör ihop med vem eller med vad. Genom hela läroboksserien så förekommer uppgifter där eleverna ska lista ut något och senare textuppgifter som innehåller orden dubbelt eller hälften.

Uppgifterna blir aningen längre i de högre årskurserna och begreppen fördubbla och halvera kommer in i årskurs sex.

4.1.2.4 Okända kvantiteter

Tabell 10.
Procentuella andelar av uppgifter inom huvudkategorin okända kvantiteter i Karlavagnen

Lärobok	En obekant	Flera obekanta	x som obekant variabel	Formell ekvations-lösning	Totala antalet uppgifter
1A	12,2	3,4	-	-	436
1B	5,5	2,6	-	-	469
2A	6,8	4,2	-	-	473
2B	6,7	3,7	-	-	492
3A	6,4	4,3	-	-	562
3B	3,5	1,9	-	-	572
4A	2,4	3,1	-	-	582
4B	1,9	1,0	-	-	616
5A	6,0	3,9	5,7	-	619
5B	2,1	1,6	1,0	-	609
6A	2,0	3,2	0,6	-	650
6B	0,5	1,7	10,7	-	661

Uppgifter som utvecklar elevers förståelse för okända kvantiteter finns i alla läroböcker i Karlavagnen. Vad gäller förhållandet mellan vanliga och fördjupade uppgifter så finns majoriteten av uppgifterna som utvecklar elevernas förståelse för okända kvantiteter bland de fördjupade uppgifterna.

Kategorin *en obekant* (Tabell 10) finns genomgående i hela läroboksserien men de procentuella andelarna av uppgifter avtar en del ju högre upp i årskurserna eleverna kommer. Det kan antydas en progression vad gäller uppgifternas svårighetsgrad. I årskurs ett ska eleverna fylla i tomma rutor eller streck i uttryck och dessa typer av uppgifter följer med hela läroboksserien till slut. Räknesätt som förekommer i årskurs ett är addition och subtraktion och uttrycken går från att vara två termer på ena sidan och ett tal på andra till att ha två termer på båda sidorna till att slutligen ha tre termer på en sida och ett tal på andra. Dessutom förekommer uppgifter med olikheter och eleverna ska då fylla i något tal som passar in i olikheten. I årskurs två införs multiplikation och uttryck innehållande både multiplikation och addition eller multiplikation och subtraktion. I årskurs tre förekommer hundratal i uttrycken och uppgifter där eleverna med hjälp av skrivna ledtrådar ska lista ut ett tal. Ytterligare tillkommer division i uttrycken där täljaren saknas. I årskurs fyra förekommer decimaltal och negativa tal i uttrycken. I årskurs fem förekommer hundratusental och uttryck innehållande bråk där nämnaren saknas. Slutligen i årskurs sex blir uttrycken längre och mera komplexa innehållande flera räknesätt.

Uppgifter med *flera obekanta* (Tabell 10) finns genomgående i alla årskurser och de procentuella andelarna varierar mellan årskurserna. Denna kategori kan sägas höra ihop med föregående kategori genom att den stärker elevernas förståelse för fenomenet okända kvantiteter. Det kan antydas en progression av uppgifternas svårighetsgrad eftersom uttrycken blir längre och innehåller fler räknesätt ju högre upp i årskurserna eleverna kommer. I årskurs ett förekommer uppgifter där eleverna ska lista ut tre till sex obekanta tal som symboliseras av figurer och uttrycken innehåller addition och/eller subtraktion. Det förekommer även uppgifter där de obekanta talen är bokstäver och uppgifter där eleverna ska skriva in tal på tomma streck. I årskurs två tillkommer multiplikation och division i uttrycken där eleverna ska lista ut okända kvantiteter. I årskurs tre förekommer uppgifter som ger information om okända kvantiteter i skriven text och eleverna ska då genom informationen lista ut de obekanta talen. Ytterligare så förkommer uttryck som innehåller bråktal och uppgifter där eleverna ska lista ut värdet på saker som finns på en våg för att lösa uppgiften (Bild 23).

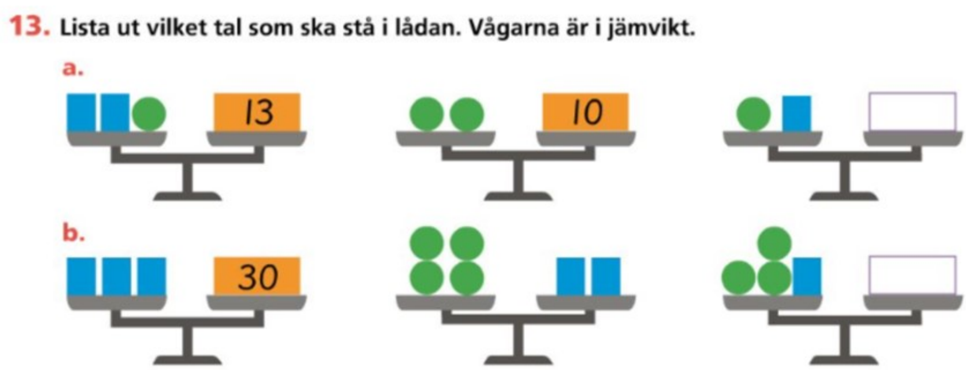


Bild 23. Exempel ur Karlavagnen 3a

Uppgifterna med vågar förekommer sedan genom hela läroboksserien till slut. I årskurs fyra tillkommer parenteser i uttrycken och även decimaltal. I årskurs fem och sex blir uppgifterna längre, bland annat så finns det uppgifter i årskurs sex där eleverna ska lista ut värdet på flera okända kvantiteter för att kunna räkna ut det som det frågas efter, det handlar alltså inte enbart om att lista ut värdet på de okända kvantiteterna utan även vidare tillämpa dem i beräkningar.

Uppgifter som innehåller *x som obekant variabel* (Tabell 10) förekommer första gången i 5a och finns sedan genomgående med i de högre årskurserna. En progression vad gäller uppgiftsmängden kan antydas eftersom procentuellt så finns det flera uppgifter innehållande x i årskurs sex än i årskurs fem. En progression av uppgifternas svårighetsgrad kan också antydas. I årskurs fem förekommer uppgifter där eleverna ska lista ut värdet på x i uttryck, bilder (Bild 24) och när x representerar en vinkel i en triangel där de två andra vinklarna är givna.

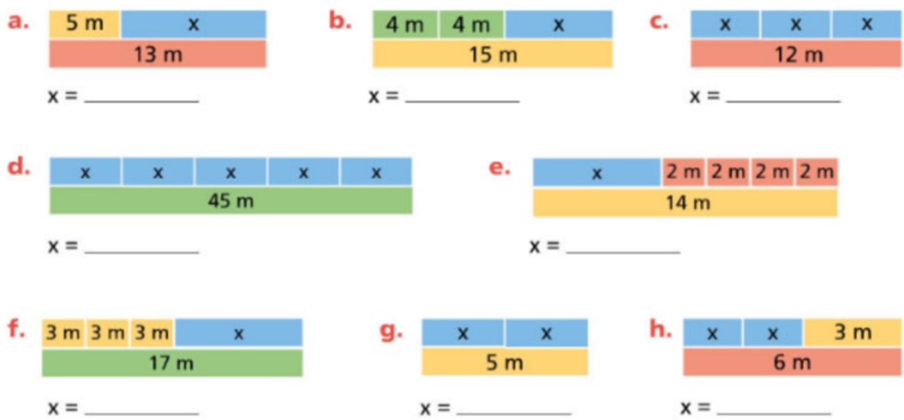


Bild 24. Exempel ur Karlavagnen 6b

Dessutom förekommer det uppgifter i årskurs fem där eleverna ska bilda ekvationer utgående från textuppgifter, med vägledning där uppgiften berättar steg för steg hur eleverna ska tänka för att bilda ekvationen. I årskurs sex så ska eleverna självständigt, utan vägledning, bilda ekvationer utgående från textuppgifter och sedan lista ut värdet på x.

Slutligen har vi kategorin *formell ekvationslösning* (Tabell 10) som inte förekommer i Karlavagnen.

5 Diskussion

I detta kapitel förs en sammanfattande resultatdiskussion som svarar på de uppställda forskningsfrågorna och en metoddiskussion där det reflekteras över metodval samt tillförlitlighet och trovärdighet. Slutligen ges förslag på vidare forskning.

5.1 Sammanfattande resultatdiskussion

Det finns uppgifter inom alla de fyra underkategorierna: matematiska uttryck, funktionellt tänkande, proportionellt tänkande och okända kvantiteter, som utvecklar elevernas tänkande inom respektive kategori genomgående i alla läroböcker i både läroboksserien Lyckotal/Supertal och läroboksserien Karlavagnen. Gemensamt för de båda läroboksserierna är att kategorin *matematiska uttryck* är den kategori som innehåller den största procentandelen uppgifter och kategorin okända kvantiteter innehåller den minsta procentandelen uppgifter. Inom det olika underkategorierna som utformats till varje huvudkategori ser den algebraiska progressionen olika ut och inom vissa underkategorier existerar det inte någon tydlig progression varken i fråga om uppgiftsmängd uttryckt i procentantal eller i fråga om svårighetsgrad. I det stora hela innehåller både läroboksserien Lyckotal/Supertal och läroboksserien Karlavagnen många uppgifter som utvecklar elevernas algebraiska tänkande, totalt 61,5 % respektive 57,5 % av alla uppgifter innehåller något som relaterar till algebra.

Lyckotal/Supertals och Karlavagnens omfattande algebrainnehåll är fördelaktigt eftersom det är viktigt att elevernas algebraiska tänkande stöds redan i lågstadiet för att deras övergång från lågstadiematematiken till högstadiematematiken ska gå så smidigt som möjligt (Cai et al., 2005). I och med det omfattande algebrainnehållet i läroboksserierna säkerställs det att de allra flesta elever får ta del av tidig algebra innan de börjar högstadiet. Detta eftersom flera studier visar att läroboken är det hjälpmedel som påverkar och strukturerar undervisningens innehåll mest och därmed också visar vad som ska tas upp under lektionerna (Långström et al., 2011). Detta höga algebrainnehåll är dock aningen förvånande eftersom algebra inte har någon stor roll i läroplanen (Glgu, 2014). Algebra kommer in som centralt innehåll först i läroplanen för årskurs tre till sex och finns inte alls med som centralt innehåll i läroplanen för årskurs ett till två (Glgu, 2014).

5.1.1 Den algebraiska progressionen i Lyckotal och Supertal

Kategorin *matematiska uttryck* är den kategori som innehåller den största procentandelen av alla kategorier i Lyckotal och Supertal. Detta resultat är i likhet med det resultat som Bråting et al. (2019) kom fram till i deras undersökning de svenska läroböckerna Eldorado och Matte Direkt, de kunde konstatera att progressionen inom den stora idéen *likhet, uttryck, ekvationer och olikheter* är relativt tydlig och elevernas kunskaper fördjupas progressivt inom dessa områden. Inom underkategorierna *skriva, gestalta och förstå*, *likhetstecknets innebörd* och *manipulera* så syns en ökning både inom uppgiftsmängden och inom svårighetsgraden genom hela läroboksserien. Till exempel kategorin *likhetstecknets innebörd* introduceras redan i början av årskurs ett och finns sedan med genomgående ända fram till slutet av årskurs sex. Även Hemmi et al. (2019) konstaterar att likhetstecknet introduceras redan i årskurs ett i Lyckotal. Detta trots att det inte nämns något om likheter i den finska läroplanen för årskurs ett till två (Hemmi et al., 2020). I den finska läroplanen nämns det explicit att eleverna ska lära sig användningen av den kommutativa lagen (Hemmi et al., 2020). I Lyckotal introduceras den kommutativa lagen för addition i årskurs ett och för multiplikation i årskurs två. Inom underkategorierna *olikheter* och *prioriteringsregler* syns en progression i svårighetsgrad från att underkategorin introduceras till slutet av årskurs sex, men ingen progression i avseende på uppgiftsmängd. Denna undersökning visar att underkategorin *olikheter* presenteras redan i Lyckotal 1B och sedan förkommer genomgående fram till årskurs sex. Detta resultat står i strid med Hemmis et al. (2019) konstaterande att olikheter endast introduceras väldigt kort i Lyckotal. Inom underkategorin *konstruera* finns ingen tydlig progression varken i avseende på uppgiftsmängd eller i avseende på svårighetsgrad bland uppgifterna. Dessutom finns över hälften av de uppgifter som relaterar till kategorin *konstruera* bland de fördjupade uppgifterna, vilket kan leda till att många elever inte kommer att lösa dessa uppgifter. Denna undersökning visar, i likhet med Hemmi et al. (2019) undersökning att Lyckotal innehåller uppgifter där eleverna till exempel ska kunna skapa en räknehändelse utgående från ett uttryck.

Olika aktiviteter kopplade till regelbundenheter, såsom siffersekvenser, betonas i den finska läroplanen genom hela grundskolan (Hemmi et al., 2020). Denna typ av aktiviteter har i denna undersökning kategoriserats under kategorin *funktionellt* *tänkande*. Underkategorin *tabell* är den enda underkategori inom denna huvudkategori där det syns en progression både inom uppgiftsmängden och inom svårighetsgraden på uppgifterna. Inom underkategorierna *diagram*, *regel*, *koordinatsystem* och *mönster* syns en progression i uppgifternas svårighetsgrad men inte i uppgiftsmängden. Inom underkategorin *mönster* syns till och med en omvänd progression med avseende på uppgiftsmängden, mängden minskar ju högre upp i årskurserna eleverna kommer. Majoriteten av mönsteruppgifterna finns dessutom bland de fördjupade uppgifterna vilket kan leda till att många elever inte löser dessa uppgifter. Tabeller och diagram ska enligt den finska läroplanen tas upp genomgående i grundskolan från och med årskurs ett och koordinatsystem finns med i den finska läroplanen för årskurs tre till sex (Hemmi et al., 2020). Inom dessa tre underkategorier korrelerar innehållet i läroplanen och Lyckotal/Supertal bra. Inom underkategorin *tallinje* syns ingen progression alls.

Det finns fler uppgifter bland de fördjupade uppgifterna än bland de vanliga uppgifterna som utvecklar elevernas proportionella tänkande i lärobocksserien Lyckotal/Supertal för årskurs ett till sex. Detta kan leda till att flera elever inte får ta del av dessa uppgifter och detta tankesätt på grund av att de inte hinner arbeta med de fördjupade uppgifterna. Proportionella förhållanden är inget som tas upp i den finska läroplanen, dock tas olika specifika appliceringar av proportionella förhållanden upp såsom till exempel skala och enhetsomvandling (Hemmi et al., 2020). Detta är även några av de specifika applikationer som tas upp i Lyckotal och Supertal för årskurs ett till sex. Inom underkategorierna *förhållanden mellan enheter*, *skala* och olika typer av omvandlingar mellan bråk-, blandad-, decimal- och procentform syns en progression både i avseende på uppgiftsmängden och svårighetsgraden. Underkategorin *bråk till promille* finns endast bland de fördjupade uppgifterna vilket innebär att alla elever kanske inte får bekanta sig med denna underkategori. *Symmetri* och *dubbel/halv* är två underkategorier där det inte syns någon progression i fråga om uppgiftsmängden, men det finns en progression i svårighetsgraden inom underkategorierna. Inom underkategorin *kongruens* finns det en antydan till progression gällande svårighetsgraden men uppgiftsmängden minskar ju högre upp i årkurserna eleverna kommer.

Uppgifter som övar elevernas förståelse för okända kvantiteter finns med ända från årskurs ett till årskurs sex i läroboksserien Lyckotal/Supertal. Detta i enlighet med den finska läroplanen där det står att ”okända siffror” ska finnas med genom hela lågstadiet (Hemmi et al., 2020). Dock finns det flera uppgifter bland de fördjupade uppgifterna som utvecklar elevernas förståelse för okända kvantiteter än vad det finns bland de vanliga uppgifterna, precis som inom kategorin proportionellt tänkande. Inom underkategorierna *en obekant* och *flera obekanta* finns en progression gällande svårighetsgraden på uppgifterna men ingen progression i avseende på uppgiftsmängden. Hemmi et al. (2019) konstaterar i sin undersökning att det inte förekommer några bokstäver som okända siffror eller variabler i Lyckotal för årskurs ett till tre. Detta stämmer bra överens med resultatet i denna undersökning. Underkategorierna *x som obekant* och *formell ekvationslösning* finns endast med i sista läroboken för årskurs sex, 6B.

5.1.2 Den algebraiska progressionen i Karlavagnen

Som tidigare nämnt är kategorin *matematiska uttryck* den kategori som innehåller den största procentandelen av alla kategorier i Karlavagnen. Även detta resultat är i likhet med det resultat som Bråting et al. (2019) kom fram till i deras undersökning de svenska läroböckerna Eldorado och Matte Direkt, de kunde konstatera att progressionen inom den stora idéen *likhet, uttryck, ekvationer och olikheter* är relativt tydlig och elevernas kunskaper fördjupas progressivt inom dessa områden. Inom underkategorierna *skriva, gestalta och förstå* och *manipulera* syns en progression både i avseende på uppgiftsmängden och i avseende på svårighetsgraden hos uppgifterna. I den finska läroplanen nämns det explicit att eleverna ska lära sig att använda sig av den kommutativa lagen i årskurs ett till två (Hemmi et al., 2020). Hemmi et al. (2019) har i sin undersökning kunnat konstatera att den kommutativa lagen för addition presenteras redan i årskurs ett i Karlavagnen och den kommutativa lagen för multiplikation presenteras sedan i årskurs två. Detta kan även konstateras efter denna undersökning. Inom underkategorin *prioriteringsregler* syns en progression gällande uppgifternas svårighetsgrad men inte gällande uppgiftsmängden. Prioriteringsreglerna introduceras i Karlavagnen i årskurs två och senare behöver eleverna till exempel kunna använda sig av prioriteringsreglerna för att kunna räkna ut värdet på en okänd kvantitet. Även Hemmi, et al. (2019) konstaterade att prioriteringsreglerna introducerades i årskurs två i läroboksserien Karlavagnen. Inom underkategorin *olikheter* finns en progression i avseende på uppgifternas svårighetsgrad men inte i avseende på uppgiftsmängden i Karlavagnen för årskurs ett till sex. Procentandelen uppgifter rent av minskar ju högre upp i årskurserna eleverna kommer. I årskurs ett ska eleverna jämföra siffror för att sedan i årskurs sex kunna förstå olikheter innehållandet det obekanta värdet x. Inom underkategorierna *likhetstecknets innebörd* och *konstruera* syns ingen progression alls.

Den största delen av de uppgifter som utvecklar elevernas funktionella tänkande finns bland de fördjupade uppgifterna i Karlavagnen för årskurs ett till sex. Detta kan leda till att flera elever inte får ta del av detta innehåll. Det syns ingen progression angående uppgiftsmängden i någon av underkategorierna till huvudkategorin *funktionellt tänkande*. Inom underkategorin *mönster* finns det till och med en minskning i uppgiftsmängden ju högre upp i årskurserna som eleverna kommer. Men inom underkategorierna *tabeller*, *diagram*, *mönster*, *regler* och *koordinatsystem* syns en progression i avseende på uppgifternas svårighetsgrad. Inom underkategorin *tallinje* syns ingen progression gällande svårighetsgraden på uppgifterna.

Generellt finns en större procentandel av de uppgifter som utvecklar det proportionella tänkandet bland de fördjupade uppgifterna än bland de vanliga uppgifterna i läroboksserien Karlavagnen för årskurs ett till sex. Detta kan innebära, precis som för det funktionella tänkandet, att flera elever inte får ta del av majoriteten av de uppgifter som utvecklar det proportionella tänkandet. De specifika appliceringarna av proportionella resonemang, till exempel skala och enhetsomvandling, som tas upp i den finska läroplanen (Hemmi et al., 2020) finns också med i Karlavagnen för årskurs ett till sex. Inom underkategorin *förhållande mellan enheter*, *skala* och olika typer av omvandlingar mellan bråk-, blandad-, decimal- och procentform syns en progression både i avseende på uppgiftsmängden och i avseende på svårighetsgraden. Omvandling mellan decimal- och procentform förekommer dock först i slutet av årskurs sex, i läroboken Karlavagnen 6b. Underkategorin *bråkform till promille* förkommer inte alls i Karlavagnen för årskurs ett till sex. Inom underkategorierna *kongruens* och *symmetri* syns ingen tydlig progression gällande uppgiftsmängden men en progression i avseende på svårighetsgraden hos uppgifterna finns. Inom underkategorin *dubbel/halv* syns ingen progression varken med avseende på uppgiftsmängeden eller med avseende på svårighetsgraden hos uppgifterna.

Även inom huvudkategorin okända kvantiteter i Karlavagnen för årskurs ett till sex finns den procentuella majoriteten av uppgifterna som utvecklar elevernas tänkande bland de fördjupande uppgifterna, vilka alla elever inte tar del av. Inom underkategorin *en obekant* syns en progression gällande uppgifternas svårighetsgrad men uppgiftsmängden minskar ju högre upp i årskursernas som eleverna kommer. Även inom underkategorin *flera obekanta* syns en progression gällande uppgifternas svårighetsgrad. Redan i årskurs ett i Karlavagnen finns det uppgifter där eleverna ska lista ut upp till och med sex obekanta värden i samma uppgift symboliserade med olika symboler, till exempel med hjärtan och stjärnor. Underkategorin *x som obekant* förekommer första gången i början av årskurs fem och efter detta syns en progression både med avseende på uppgiftsmängden och med avseende på uppgifternas svårighetsgrad. Hemmi et al. (2019) kunde även de konstatera i sin undersökning av Karlavagnen att bokstäver som okända kvantiteter förekom inte i årskurs ett till tre. Underkategorin *formell ekvationslösning* finns inte i Karlavagnen för årskurs ett till sex.

5.1.3 Skillnader i den algebraiska progressionen i Lyckotal/Supertal och Karlavagnen

Överlag ärläroboksserien Lyckotal/Supertal och läroboksserien Karlavagnen likvärdiga gällande den algebraiska progressionen i årskurs ett till sex. Dock är uppgifterna i Lyckotal/Supertal mer varierande och eleverna måste tänka mer utanför ramarna jämfört med Karlavagnen. Det som skiljer de två läroboksserierna åt är i huvudsak när olika underkategorier tas upp första gången och andra liknande detaljer.

De två läroboksserierna skiljer sig åt gällande när prioriteringsregler tas upp för första gången. I Karlavagnen tas prioriteringsreglerna upp första gången i början av årskurs två medan de i Lyckotal tas upp första gången i början av årskurs tre. Andra saker som skiljer de båda läroboksserierna åt under kategorin *matematiska uttryck* är att det i Lyckotal/Supertal syns en progression med avseende på svårighetsgraden hos uppgifter som tränar elevernas förståelse av likhetstecknets innebörd, men i Karlavagnen kan en progression inte ses. I Lyckotal/Supertal får eleverna öva sig i att skriva en räknehändelse utgående från ett givet uttryck, denna typ av uppgift finns inte i Karlavagnen.

En av de största skillnaderna mellan läroboksserierna Lyckotal/Supertal och Karlavagnen inom kategorin *funktionellt tänkande* är att i Karlavagnen finns en större procentandel av de uppgifter som tränar elevernas funktionella tänkande bland de vanliga uppgifterna och i Karlavagnen finns en större procentandel av dessa uppgifter bland de fördjupade uppgifterna. Detta kan eventuellt leda till att flera av de elever som använder sig av läroboksserien Karlavagnen får öva sitt funktionella tänkande mindre än elever som använder sig av Lyckotal/Supertal. En annan skillnad som finns mellan de olika läroboksserierna under kategorin funktionellt tänkande är att underkategorin *koordinatsystem* uppkommer första gången i årskurs ett i Karlavagnen och i årskurs två i Lyckotal. Dock introduceras koordinatsystem ordentligt först i årskurs fyra i båda läroboksserierna.

Det finns en del saker som skiljer Lyckotal/Supertal och Karlavagnen åt under kategorin *proportionellt tänkande*. Det är inom de olika underkategorierna som handlar om omvandlingar mellan bråk-, blandad-, decimal- och procentform som de största variationerna gällande när något tas upp första gången i något av de olika läroboksserierna finns. Till exempel så tas omvandling mellan *bråk- och blandadform* upp första gången i årskurs tre i Lyckotal men först i årskurs fyra i Karlavagnen. Underkategorin *bråk till promille* finns inte alls med i Karlavagnen men finns med i slutet av årskurs sex i Supertal. Underkategorin *förhållanden mellan enheter* tas upp första gången i årskurs ett i Lyckotal men först i årskurs två i Karlavagnen. Lyckotal/Supertal och Karlavagnen tar även upp olika enheter i lite olika årskurser och till exempel enheten hektometer förekommer i Karlavagnen men inte i Lyckotal/Supertal medan enheterna decennium och sekel tas upp i Lyckotal/Supertal men inte i Karlavagnen. Underkategorin *skala* berörs första gången i årskurs tre i Karlavagnen men i Lyckotal/Supertal är det först i början av årskurs fem som skala tas upp. I Karlavagnen får eleverna arbeta med skala hos tredimensionella figurer medan det i Lyckotal/Supertal endast finns uppgifter som berör skala med tvådimensionella figurer.

Det är inom kategorin *okända kvantiteter* som de olika läroboksserierna skiljer sig mest åt i avseende på det procentuella antalet uppgifter. I Karlavagnen finns en större procentandel (8,5%) uppgifter som relaterar till kategorin *okända kvantiteter* än vad det finns i Lyckotal/Supertal (3,8%). Underkategorin *flera obekanta* dyker upp första gången i Karlavagnen redan i början av årskurs ett medan flera obekanta introduceras först i årskurs två i Lyckotal. I Karlavagnen förekommer det uppgifter med upp till sex stycken obekanta medan det i Lyckotal/Supertal förekommer max tre stycken obekanta i samma uppgift. I Lyckotal/Supertal förekommer det dock uttryck med en obekant där parenteser är iblandade, detta förekommer inte i Karlavagnen.

Underkategorin *x som obekant* tas upp första gången i början av årskurs fem i Karlavagnen, men först i slutet av årskurs sex i Supertal. Slutligen så förekommer underkategorin *formell ekvationslösning* inte alls i Karlavagnen medan den förekommer i Lyckotal/Supertal.

5.1.4 Sammanfattning

I både läroboksserien Lyckotal/Supertal för årskurs ett till sex och läroboksserien Karlavagnen för årskurs ett till sex finns det en algebraisk progression både med avseende på den totala procentandelen uppgifter som relaterar till algebra på något sätt och med avseende på uppgifternas svårighetsgrad. Den algebraiska progressionen ser dessutom väldigt lika ut i de båda läroboksserierna, det är i huvudsak endast detaljer som skiljer dem åt. De båda läroboksserierna ger alltså eleverna motsvarande kunskaper inom algebran och främjar därmed jämlikheten inom matematiken i Svenskfinland. Den största skillnaden syns i den procentuella andelen uppgifter som finns inom kategorin *okända kvantiteter*, där Karlavagnen innehåller betydligt fler uppgifter som kan relateras till denna kategori. Stacey et al. (2004) menar att det mest kännetecknande för algebraiska aktiviteter är olika generaliserande och omvandlade aktiviteter. Dessa olika typer av aktiviteter finns det genomgående mycket av i både Lyckotal/Supertal och Karlavagnen från årskurs ett till sex. Trots att algebra kommer med som centralt innehåll först i årskurs tre till sex i den finska läroplanen (Glgu, 2014) så finns det uppgifter som tränar det algebraiska tänkandet hos eleverna i både Lyckotal/Supertal och Karlavagnen redan från årskurs ett.

Inom det sociokulturella perspektivet för lärandet, som denna avhandling utgår från, så anses olika artefakter viktiga för lärandet. Att kunna använda sig av artefakter är avgörande för människans förmåga att tänka och lära sig, tack vare artefakterna klarar människan av mycket mer än hon gör utan dem (Säljö, 2000). Läroboksserierna Lyckotal/Supertal och Karlavagnen är fysiska artefakter som stöder eleverna algebraiska tänkande tack vare deras omfattande algebraiska innehåll. Läroboksserierna är bra material för lärare att använda i lågstadiet för att öka elevernas chanser att lyckas i de mer avancerade matematikstudierna. Dock är det nämnvärt att oberoende av vilket läromedel som används i undervisningen så är lärarrollen, lärarens förmåga att inspirera och väcka elevernas intresse för ämnet och lärarens sätt att använda läromedlet väldigt avgörande för inlärningen hos eleverna (Röj-Lindberg, 1999).

5.2 Metoddiskussion

Härnäst kommer en diskussion kring valet av läroböcker, metodval och reflektion över studiens tillförlitlighet och trovärdighet. Eftersom syftet med studien var att undersöka det algebraiska innehållet och progressionen i två läroboksserier för årskurs ett till sex utvecklade enligt Glgu 2014 så föll det naturligt att välja Lyckotal/Supertal och Karlavagnen. Båda är populära läroboksserier och finns tillgängliga på svenska. Det skulle också ha varit möjligt att ta i beaktande en finsk version och en finlandssvensk, men eftersom ingen av oss läser och pratar flytande finska så var valet av svenska läroböcker lämpligare för att få ett mera tillförlitligt resultat. Bryman (2018) nämner att dokumentets kvalité är av vikt vid dokumentanalys. Ett dokument eller materials kvalité baserar sig på autencitet, trovärdighet, representativitet och meningsfullhet (Bryman, 2018). Läroboksserierna vi har använt är autentiska och representativa för den kategori de tillhör. Läroboksserierna består inte av förvrängningar och felaktigheter vilket alltså gör dem trovärdiga och de är meningsfulla eftersom de är tydliga och begripliga.

Kategoriseringen av algebraiska uppgifter var inspirerade av Blantons et al. (2015) stora idéer om algebraiskt tänkande och Hemmis et al. (2020) kategoriseringar av algebraiska uppgifter. Det som skiljer sig mellan våra kategoriseringar och Hemmis et al. (2020) kategoriseringar är att vi har slagit ihop det två första kategorierna likhet, uttryck, ekvationer och olikheter samt generaliserad aritmetik till en och samma kategori som vi valt att kalla matematiska uttryck. Överlag så är kategoriseringen liknande bortsett från att vi i sista kategorin *okända kvantiteter* även räknar in formell ekvationslösning som en underkategori. Formell ekvationslösning innebär sådana uppgifter där eleverna ska lösa ekvationer genom att utföra samma operation på båda led i ett uttryck för att få den obekanta variabel ensam i det ena ledet och då skriva ut mellansteg och/eller skriva ut vilken operation som utförs på uttrycket. Till formell ekvationslösning hör inte sådana uppgifter där eleverna enbart ombes att lista ut värdet på en obekant. Det skulle eventuellt ha varit bra att använda precis samma kategorisering som Hemmi et al. (2020) använt sig av för att kunna dra precisa paralleller mellan deras resultat, Bråtings et al. (2019) resultat och vårt resultat.

Metodvalet, att utföra en kvalitativ innehållsanalys med kvantitativa inslag, baserade sig på syftet att undersöka det algebraiska innehållet och progressionen. För att kunna redogöra för innehållet och progressionen så krävdes en innehållsanalys. Det skulle antagligen inte ha gett en tillräckligt utförlig bild av innehållet och progressionen om endast kvalitativ eller endast kvantitativa metoder skulle ha tillämpats. Så den kvalitativa innehållsanalysen med kvantitativa inslag tjänade sitt syfte eftersom resultatet kunde presenteras på ett överskådligt sätt och ge svar på de forskningsfrågor som blev ställda. Analysen av läroboksserierna bestod av flera steg. Först räknade vi genom hur många uppgifter som hörde till alla underkategorier och i den genomgången kunde en uppgift räknas två gånger inom samma huvudkategori, sedan analyserade vi progressionen av uppgifternas svårighetsgrad och slutligen kollade vi genom läroböckerna ytterligare en gång för att räkna hur många uppgifter som hörde till huvudkategorierna. Vid både andra och tredje genomgången lade vi till uppgifter som vi hade missat och därför borde vårt resultat vara tillförlitligt och trovärdigt, eftersom reproducerbarhetskravet borde vara uppfyllt om man följer de kategoriseringar av algebraiska uppgifter som vi har haft och framför resultatet på ett liknande sätt som vi har gjort. Dessutom har vi varit två forskare och därför gjort val som blivit väl genomtänkta eftersom vi har diskuterat och bollat idéer med varandra på ett annat sätt än forskare kan göra när de är ensamma i forskningsprocessen.

Analysen av läroboksserierna skulle ha gått smidigare och snabbare om vi först skulle ha bläddrat igenom läroböckerna innan vi började med den djupgående analysen. Eftersom vi med en gång började analysera böckerna på djupet utan att först skaffa oss en helhetsuppfattning av innehållet i böckerna så kom vi efterhand i kontakt med nya underkategorier. Detta gjorde att vi flera gånger måste gå tillbaka och analysera redan analyserat material igen för att kolla om det fanns någon uppgift som kunde relateras till den nya underkategorin. Detta gjorde analysen mer tidskrävande än nödvändigt.

5.3 Förslag på vidare forskning

För att få en bättre uppfattning på hur väl läroboksserierna Lyckotal/Supertal och Karlavagnen följer de innehåll och centrala mål som finska läroplanen för lågstadiet (Glgu, 2014) har ställt upp behöver en jämförelse av läroboksserierna och läroplanen göras i sin helhet. En motsvarande studie har genomförts av Bråting et al. (2019) men då med två svenska läroboksserier som jämförts med den svenska läroplanen. Hemmi et al. (2019) har även genomfört en omfattande forskning angående det algebraiska innehållet i den finska, svenska och estniska läroplanen. Men ingen forskning har ännu gjorts där innehållet i läroböcker tillverkade i Finland med svenska som undervisningsspråk har jämförts med den finska läroplanens innehåll och mål.

För att få en ännu bättre uppfattning om progressionen under varje enskild kategori och hur uppgifterna utvecklas mer i detalj kunde en forskning genomföras där man djupdyker i endast en av de fem underkategorierna.

Röj-Lindberg (1999) har konstaterat att oberoende av vilket läromedel som används i undervisningen så är lärarrollen, lärarens förmåga att inspirera och väcka elevernas intresse för ämnet och lärarens sätt att använda läromedlet väldigt avgörande för inlärningen hos eleverna. På grund av detta borde en forskning kring lärares användning av läroboksserierna Lyckotal/Supertal och Karlavagnen genomföras för att säkert kunna veta om läroboksserierna fulla potential når eleverna. Använder lärare sig av läroboksserierna på ett sådant sätt att eleverna faktiskt erhåller alla de algebraiska kunskaper som Lyckotal/Supertal och Karlavagnen erbjuder. Korsell (2007) skriver att ju osäkrare en lärare är på ämnet desto mer litar hen på och följer läroboken in i minsta detalj. Därför skulle det även vara relevant att forska i vilka algebraiska kunskaper lärare i Svenskfinland besitter för att få en ännu bättre inblick i lärarens användning av läroböckerna och därmed också vilka algebraiska kunskaper elever som haft läroboksserierna Lyckotal/Supertal eller Karlavagnen i lågstadiet besitter då de kommer till högstadiet.

Litteraturförteckning

Arzarello, F., Bazzini, L. & Chiappini, G. (2002). A Model for Analysing Algebraic Processes of Thinking. I R.C. Lins, T. Rojano, A. Bell & R. Sutherland, *Perspective on School Algebra* (s. 61–82). Hämtad den 28 januari 2020, från https://link-springer-com.ezproxy.vasa.abo.fi/content/pdf/10.1007%2F0-306-47223-6.pdf

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I. & Kim, J–S. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39–87.

Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder.* Liber: Stockholm.

Bråting, K., Madej, L. & Hemmi, K. (2019). Development, of Algebraic Thinking: Opportunities offered by the Swedish Curriculum and Elementary Mathematics Textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education, 24*(1), 27–49.

Cai, J., Lew, H.C., Morris, A., Moyer, J. C., Ng, S. F. & Schmittau, J. (2005). The Development of Students´ Algebraic Thinking in Earlier Grades: A Cross-Cultural Comparative Perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1). Hämtad den 26 januari 2020, från https://link-springer-com.ezproxy.vasa.abo.fi/article/10.1007%2FBF02655892

Dahlström, J., Stenmark, M. & Lahtinen, U. (2003). *Idag får ni räkna framåt i era böcker! En studie av matematikprestationer och matematikböcker i åk 5 och åk 8.* Vasa: Åbo Akademi.

Douard, J–P. & Teppo, A. (2004). Symbols and Language. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal, *The Future of Teaching and Learning Algebra* (s. 227–264). Hämtad den 27 januari 2020, från https://link-springer-com.ezproxy.vasa.abo.fi/book/10.1007/1-4020-8131-6

Elsaleh, I. (2010). Teachers’ Interactions with Curriculum Materials in Mathematics. I *School, Science and Mathematics 110*(4), 177–179. Hämtad den 27 januari 2020, från https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1949-8594.2010.00020.x

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development, status and directions. I I *ZDM – Mathematics Education 45,* 633–646. Hämtad den 27 januari 2020, från https://link-springer-com.ezproxy.vasa.abo.fi/article/10.1007/s11858-013-0539-x

Hartman, J. (2004). *Vetenskapligt tänkande – Från kunskapsteori till metodteori.* Lund: Studentlitteratur.

Hemmi, K., Krzywacki, H. & Partanen, A.-M. (2018). Mathematics Curriculum: The Case of Finland. I D. R. Thompson, M. A. Huntley & C. Suurtamm, *International Perspectives on Mathematics Curriculum* (s. 71–102). Charlotte: Information Age Publishing, Inc.

Hemmi, K., Lepik, M., & Bråting, K. (2020). Curricular approaches to algebra in Estonia, Finland and Sweden – a comparative study. *Mathematical Thinking and Learning.*

Hemmi, K., Lepik, M., Madej, L., Bråting, K., & Smedlund, J. (2019). Introduction to early algebra in Estonia, Finland and Sweden – some distinctive features identified in textbooks for Grades 1–3. In Jankvist, U. T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (Red.). (2019). *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11, February 6 – 10, 2019),* (s. 2035-2046). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Holme, I. & Solvang, B. (1991). *Forskningsmetodik. Om kvalitativa och kvantitativa metoder.* Lund: Studentlitteratur.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. & Ng, S. F. (2016). *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching.* Hämtad den 26 januari 2020, från https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-32258-2

Korsell, I. (2007). *Läromedel. Det fria valet?* Stockholm: Liber.

Lins, R., Rojano, T., Bell, A. & Sutherland, R. (2002). Approaches to Algebra. I R.C. Lins, T. Rojano, A. Bell & R. Sutherland, *Perspectives on School Algebra* (s. 1–12). Hämtad den 28 januari 2020, från https://link-springer-com.ezproxy.vasa.abo.fi/content/pdf/10.1007%2F0-306-47223-6.pdf

Lins, R. & Kaput, J. (2004). Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal, *The Future of Teaching and Learning Algebra* (s. 47–70). Hämtad den 27 januari 2020, från https://link-springer-com.ezproxy.vasa.abo.fi/book/10.1007/1-4020-8131-6

Långström, S. & Viklund, U. (2011). *Praktisk lärarkunskap.* Lund: Studentlitteratur.

May, T. (2013). *Samhällsvetenskaplig forskning.* Lund: Studentlitteratur.

Nationalencyklopedin [u.å.]. *Lärobok*. Hämtad den 27 januari 2020, från https://www-ne-se.ezproxy.vasa.abo.fi/uppslagsverk/ordbok/svensk/l%C3%A4robok

Nationalencyklopedin [u.å.]. *Läromedel.* Hämtad den 27 januari 2020, från https://www-ne-se.ezproxy.vasa.abo.fi/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/l%C3%A4romedel

Olsson, H. & Sörensen, S. (2007). *Forskningsprocessen. Kvalitativa och kvantitativa perspektiv.* Stockholm: Liber.

Olsson, H. & Sörensen, S. (2011). *Kvalitativa och kvantitativa perspektiv. Forskningsprocessen.* Liber: Stockholm.

Powell, S. & Fuchs, L. (2014). Does Early Algebraic Reasoning Differ as a Function of Students' Difficulty with Calculations versus Word Problems? *Learning disabilities Research & Practice*, *29*(3), 106–116. Hämtad den 29 januari 2020, från https://onlinelibrary-wiley-com.ezproxy.vasa.abo.fi/doi/epdf/10.1111/ldrp.12037

Rennstam, J. & Wästerfors, D. (2015). Att analysera kvalitativt material. I G. Ahrne & Svensson, P. (Red.), *Handbok i kvalitativa metoder* (s.220–236). Stockholm: Liber.

Röj-Lindberg, A.-S. (1999). *Läromedel och undervisning i matematik på högstadiet. En kartläggning av läget i Svenskfinland*. Vasa: Svenskfinlands läromedelscentral.

Schmittau, J. (2005). The Development of Algebraic Thinking. A Vygotskian Perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*, 16–22. Hämtad den 28 januari 2020, från https://link-springer-com.ezproxy.vasa.abo.fi/content/pdf/10.1007/BF02655893.pdf

Skolverket, (2019). *PISA 2018. 15- åringars kunskaper i läsförståelse, matematik och naturvetenskap.* Hämtad den 27 januari 2020, från https://www.skolverket.se/getFile?file=5347

Stacey, K. & Chick, H. (2004). Solving the Problem with Algebra. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal, *The Future of Teaching and Learning Algebra,* 1–20. Hämtad den 27 januari 2020, från https://link-springer-com.ezproxy.vasa.abo.fi/book/10.1007/1-4020-8131-6

Stacey, K. & MacGregor, M. (2000). Learning the Algebraic Method of Solving Problems. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 149-167. Hämtad den 29 januari 2020, från https://www-sciencedirect-com.ezproxy.vasa.abo.fi/science/article/pii/S0732312399000267

Stein, M.K., Remillard, J. & Smith, M.S. (2007). How Curriculum Influences Student Learning. I F.K. Lester, Jr. (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics,* 319–370. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv.* Stockholm: Prima.

Säljö, R. (2011). Lärande och läramdemiljöer. I S-E. Hansén & L. Forsman (Red.), *Allmändidaktik - vetenskap för lärare* (s. 155–185). Lund: Studentlitteratur.

Säljö, R. (2014). Den lärande människan - teoretiska traditioner. I U. P. Lundgren, R. Säljö & C. Liberg (Red.), *Lärande skola bildning. Grundbok för lärare* (s. 251–311). Stockholm: Natur & Kultur.

Trost, J. (2012). *Enkätboken.* Lund: Studentlittertur.

Ursini, S. (2002). General Methods: A Way of Entering the World of Algebra. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins, *Perspectives on School Algebra* (s. 209–230). Hämtad den 27 januari 2020, från https://link-springer-com.ezproxy.vasa.abo.fi/book/10.1007/0-306-47223-6

Utbildningsstyrelsen. (2014). *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen 2014.* Helsingfors: Utbildningsstyrelsen.

Woolfolk, A. & Karlberg, M. (2015). *Pedagogisk psykologi.* Edinburgh: Pearson.

Wikman, T. (2004). *På spaning efter den goda läroboken: om pedagogiska texters lärandepotential*. (Doktorsavhandling, Åbo Akademi, Åbo). Hämtad den 26 januari 2020, från https://www.doria.fi/bitstream/handle/10024/4136/TMP.objres.44.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Willers, M. (2015). *Algebra. x och y i vardagsmatematik.* Stockholm: Lind & Co.

Bilaga 1. Läroboksseriern Karlavagnen

Forsback, M., Kalliola, A., Tikkanen, A. & Waneus, M-L. (2014). *Karlavagnen 1a.* Otava: Helsingfors.

Forsback, M., Kalliola, A., Tikkanen, A. & Waneus, M-L. (2015). *Karlavagnen 1b.* Otava: Helsingfors.

Forsback, M., Kalliola, A., Tikkanen, A. & Waneus, M-L. (2016). *Karlavagnen 2a.* Otava: Helsingfors.

Forsback, M., Kalliola, A., Tikkanen, A. & Waneus, M-L. (2016). *Karlavagnen 2b.* Otava: Helsingfors.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, T., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M. & Tapiainen, T. (2018). *Karlavagnen 5b.* Otava: Helsingfors.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, T., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M. & Tapiainen, T. (2018). *Karlavagnen 6a.* Otava: Helsingfors.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, T., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M. & Tapiainen, T. (2018). *Karlavagnen 6b.* Otava: Helsingfors.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, T., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M. & Tapiainen, T. (2019). *Karlavagnen 4b.* Otava: Helsingfors.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, T., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M. & Tapiainen, T. (2020). *Karlavagnen 3a.* Otava: Helsingfors.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, T., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., Tapiainen, T. & Manninen, M. (2019). *Karlavagnen 3b.* Otava: Helsingfors.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, T., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., Tapiainen, T. & Manninen, M. (2019). *Karlavagnen 4a.* Otava: Helsingfors.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, T., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., Tapiainen, T., … Heinonen, C. (2018). *Karlavagnen 5a.* Otava: Helsingfors.

Bilaga 2. Läroboksserien Lyckotal/Supertal

Silvander, Y., Renlund, T., Pykäläinen, M. & Nousiainen, P. (2017). *Supertal 5a.* Schildts & Söderströms: Helsingfors.

Silvander, Y., Renlund, T., Pykäläinen, M. & Nousiainen, P. (2017). *Supertal 5b.* Schildts & Söderströms: Helsingfors.

Silvander, Y., Renlund, T., Pykäläinen, M. & Nousiainen, P. (2018). *Supertal 6a.* Schildts & Söderströms: Helsingfors.

Silvander, Y., Renlund, T., Pykäläinen, M. & Nousiainen, P. (2019). *Supertal 6b.* Schildts & Söderströms: Helsingfors.

Hartikainen, S. & Häggblom, L. (2017). *Lyckotal 1a.* Schildts & Söderströms: Helsingfors.

Hartikainen, S. & Häggblom, L. (2017). *Lyckotal 1b.* Schildts & Söderströms: Helsingfors.

Hartikainen, S. & Häggblom, L. (2017). *Lyckotal 2b*. Schildts & Söderströms: Helsingfors.

Hartikainen, S. & Häggblom, L. (2017). *Lyckotal 3a*. Schildts & Söderströms: Helsingfors.

Hartikainen, S. & Häggblom, L. (2017). *Lyckotal 4a.* Schildts & Söderströms: Helsingfors.

Hartikainen, S. & Häggblom, L. (2017). *Lyckotal 4b.* Schildts & Söderströms: Helsingfors.

Hartikainen, S. & Häggblom, L. (2018). *Lyckotal 2a*. Schildts & Söderströms: Helsingfors.

Hartikainen, S. & Häggblom, L. (2018). *Lyckotal 3b*. Schildts & Söderströms: Helsingfors.

Hartikainen, S. & Häggblom, L. (2017). *Lyckotal 4a.* Schildts & Söderströms: Helsingfors.

Hartikainen, S. & Häggblom, L. (2017). *Lyckotal 4b.* Schildts & Söderströms: Helsingfors.