Åbo Akademi

Avhandling Pro Gradu

Hardyrum och Hilbertmatrisoperatorn

FAKULTETEN FÖR
NATURVETENSKAPER OCH TEKNIK

MATEMATIK

Skribent:
David Norrbo, 37133

Handledare:
Mikael Lindström

16 januari 2019

Innehåll

Kapitel 1

Inledning

För $p \geq q > 1$ med $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ och följder $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}, b = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ med $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, sådana att $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < \infty$ och $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^q < \infty$, så gäller

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_n||b_k|}{n+k+1} \leq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Detta är en generalisering av Hilberts dubbelseriesats (se [11]). Notera att en mildare variant av olikheten ovan ges av

$$|aHb| \leq P\,||a||_{l^p}\,||b||_{l^q}\,,$$

där $P = \pi/\sin\frac{\pi}{p}$ och

$$H = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{i,j\geq 0} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

dvs. Hilbertmatrisen. Följderna a och b betraktas som en radvektor respektive en kolonnvektor. Betrakta aH för ett fixerat $a \in l^p$. Eftersom aH utgör en begränsad linjär operator på l^q, så gäller $aH \in l^p$, eftersom l^p är dualen till l^q (se [16]). Eftersom a var godtyckligt vald, så kan H betraktas som en avbildning från l^p till l^p. Vidare gäller att b kan väljas, på liknande sätt till (3.5) i Lemma 18, så att $||b||_{l^q} = 1$ och

$$|aHb| = ||aH||_{l^p}\,,$$

vilket ger

$$||aH||_{l^p} \leq P\,||a||_{l^p}\,. \tag{1.2}$$

En motsvarighet till (1.2), men på Hardyrum H^p, $2 \leq p < \infty$ är ett av huvudresultaten i denna avhandling. För att bevisa detta visas först att funktioner på Hardyrum

$H^p, p > 1$ har en Poissonintegralrepresentation, för vilken användbara egenskaper härleds. Ett annat viktigt hjälpmedel är Riezsfaktoriseringen. För att explicit bevisa att olikheten gäller för ovanstående konstant P införs ett annat funktionsrum H^p_+ som är isometriskt isomorf med H^p för $1 < p < \infty$.

Det förväntas att läsaren har grundläggande kunskaper i komplex analys samt operatorteori. Kända resultat, så som Hölders olikhet, är explicit framställda i Appendix. Härnäst introduceras några beteckningar, som kommer att användas i nedanstående betydelse ifall inget annat explicit nämns.

Två väsentliga delmängder av komplexa talplanet $\mathbb{C}$ är

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \text{ och } \mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}.$$

För en funktion definierad på $\mathbb{D}$ definieras

$$D_p(r,f) := \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}, 0 < p < \infty$$
$$D_\infty(r,f) := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,2\pi[} \left|f(re^{it})\right|$$

För en komplexvärd funktion f definieras $u(z) := \Re(f(z)), v(z) := \Im(f(z))$, så att $f = u + iv$.
För $r \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{C}$ definieras

$$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \text{ och}$$
$$\overline{B}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

För en följd eller mängd a betyder $\#(a) = N$ att a innehåller N stycken element. Med benämningen domän menas en öppen, sammanhängande mängd.
Låt $M, K \subseteq A \in \{\mathbb{R}^n : n \in \mathbb{N} \cup \infty\} \cup \{\mathbb{C}^n : n \in \mathbb{N} \cup \infty\}$ och låt $f : M \to K$. Nu definieras $Zero(f) = \{z \in M : f(z) = 0\}$. Vidare, kommer $|f|$ att betyda $|f(z)|$ för varje $z \in M$, ifall det inte uttryckligen nämnts en annan mängd än definitionsmängden M.
För en mängd M definieras indikatorfunktionen för M genom

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } x \in M \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

För ett intervall $I \in \{[a,b], [a,b[,]a,b],]a,b[\}, a \leq b$ definieras $|I| := b - a$. Om $M \subseteq \mathbb{R}$ så är Lebesgues yttre mått av mängden M definierat som

$$m^*(M) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| : M \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \text{ och } I_j \subseteq \mathbb{R} \text{ är ett intervall } \forall j\right\}.$$

Låt V, W vara två normerade vektorrum över en skalärkropp $\mathbb{K}$, försedda normerna $||\cdot||_V$ respektive $||\cdot||_W$. För en linjär operator $T : V \to W$ definieras operatornormen genom

$$||T||_{op} = \sup_{f \in W \setminus \{0\}} \frac{||T(f)||_W}{||f||_V}.$$

Notera även att den binära operationen funktionssammansättning, $\circ$ har högre prioritet än multiplikation, $\cdot$.

Definition 1. Låt $(X, *)$ vara en struktur på mängden X försedd med en binär operator $* : X \times X \to X$. Låt $a \in X$ och $Y \subset X$. Nu definieras $Y * a = \{z * a \in X : z \in Y\}$ och $a * Y = \{a * z \in X : z \in Y\}$.

Definition 2. Låt $M \subseteq \mathbb{C}$ vara en mängd. Nu definieras $\mathbb{A}(M)$ som mängden av alla analytiska funktioner $f : M \to \mathbb{C}$.

Definition 3. Låt $M \subseteq \mathbb{R}$ vara en mätbar Lebesguemätbar mängd med måttet $0 < m(M)$ och låt $p \geq 1$. Nu definieras

$$L^p(M) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} : ||f||_{L^p(M)} < \infty\}$$

där $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ovan är

$$||f||_{L^p(M)} = \left(\frac{1}{m(M)} \int_M |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

ifall $m(M) < \infty$. För intervall I sådana att $m(M) = \infty$ definieras

$$||f||_{L^p(M)} = \left(\frac{1}{\pi} \int_M |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Kapitel 2

Hardyrum

I detta kapitel bevisas väldigt grundläggande resultat gällande Hardyrum. De flesta resultat använder sig av en alternativ representation och erhålls därmed i kapitel 3.

Definition 4. Hardyrum är funktionsrum betående av funktioner $f \in \mathbb{A}(\mathbb{D})$, för vilka

$$\lim_{r \to 1^-} D_p(r, f) < \infty, \tag{2.1}$$

för något $p > 0$. Dessa rum brukar betecknas med H^p. Det är alltså olika konvergenskrav beroende på vilket Hardyrum (värdet på p) man undersöker. För $f \in H^\infty$ gäller $D_\infty(r, f) = \max_{t \in [0,2\pi]} |f(re^{it})|$, eftersom $f \in \mathbb{A}(\mathbb{D})$ medför att f är kontinuerlig på $|z| = r < 1$.

Anmärkning 1. Observera att dessa rum kan generaliseras till analytiska funktioner på andra domän $M \subset \mathbb{C}$, med en annan norm som består av en integral längs en jordankurva som närmar sig randen av M vid gränsvärdestagning. Dessa rum kan även kallas för Hardyrum. I denna avhandling kommer beteckningar som H^p och H^p_+ att användas, där den senare införs när funktioner med definitionsmängden $\mathbb{C}_+$ börjar undersökas.

Sats 1. *En analytisk, konform bijektion från $\mathbb{D}$ till $\mathbb{C}_+$ samt dess invers ges av*

$$T_{1+}(z) := \frac{1+z}{1-z}$$

respektive

$$T_{1+}^{-1}(z) = T_{+1}(z) := \frac{z-1}{1+z}$$

Bevis. Betrakta följande transformationer av området $\mathbb{D}$:

$$\mathbb{D} - 1 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| < 1\}$$
$$\frac{1}{\mathbb{D} - 1} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < -\frac{1}{2}\}$$
$$\frac{1}{\mathbb{D} - 1} + \frac{1}{2} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\}$$
$$-2\left(\frac{1}{\mathbb{D} - 1} + \frac{1}{2}\right) = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\} = \mathbb{C}_+.$$

Notera att ovanstående avbildning ges av $-2\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1-z} - \frac{1-z}{1-z} = \frac{1+z}{1-z}$ och att avbildningen är surjektiv. Vidare erhålls att dess invers ges av $\frac{z-1}{1+z}$ och därmed är avbildningen injektiv. Sats 4.2 i [8] säger att avbildningen även är analytisk och konform. □

Definition 5. Låt $M_{tot} \cong \mathbb{R}^n$ för något $n \in \mathbb{N}$ och $M \subseteq M_{tot}$ vara en domän. En funktion $f : M \to \mathbb{K}$, för $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sägs vara harmonisk i M om alla partiella derivator av alla ordningar existerar och

$$\nabla^2 f(v) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^2} f(v) = 0$$

gäller för varje $v = (x_1, x_2, ..., x_n) \in M$. Benämningen $\mathbb{K}$-harmonisk kommer att användas då $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ och $\mathbb{C}$-harmonisk då $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Om $M_{tot} = \mathbb{C}$ så säges f vara harmonisk om $f_{\mathbb{R}^2}(x_1, x_2) := f(z)$ är harmonisk, där $(x_1, x_2) = (\Re(z), \Im(z))$.

Sats 2. *Låt $M \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ vara en domän. Låt $u : M \to \mathbb{R}$ vara harmonisk i M. Nu existerar en analytisk funktion f sådan att $\Re(f) = u$.*

Bevis. Låt M vara en enkelt sammanhängande domän. Enligt Sats 2.12 i [7] är $g := \frac{\partial}{\partial x}u - i\frac{\partial}{\partial y}u$ analytisk i M, eftersom Cauchy-Riemann ekvationerna

$$\frac{\partial}{\partial x}\Re(g) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}u = \frac{\partial}{\partial y}\Im(g)$$

och

$$\frac{\partial}{\partial y}\Re(g) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}u = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}\Im(g)$$

är uppfyllda samt alla partiella derivator är kontinuerliga, då u är harmonisk. Cauchys integralsats ger att $\int_\Gamma g(z)dz = 0$ för varje sluten styckevis regulär kurva Γ. Sats 6.4 i [9] ger nu att g har en primitiv funktion. Låt denna funktion betecknas med f. Det är klart att f är analytisk. Låt $C(x, y) := \Re(f(x, y)) - u(x, y)$. Då f är analytisk erhålls

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Re(f) - u) = \Re(\frac{\partial}{\partial x}f) - \frac{\partial}{\partial x}u = 0 \text{ och}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\Re(f) - u) = -\Im(\frac{\partial}{\partial x}f) - \frac{\partial}{\partial y}u = 0,$$

vilket medför att $C(x,y)$ måste vara konstant, $C(x,y) = C \in \mathbb{C}$. $u(x,y)$ är således den reella delen till den analytiska funktionen $f(z) - C$. $\square$

Definition 6. Ifall $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ är harmonisk dvs.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

där $x := \Re z, y := \Im z$ och $\lim_{r\to 1^-} D_p(r,f) < \infty$, så sägs $f \in h^p, p > 0$.

Lemma 3. Låt $a, b > 0, p \geq 0$. Då gäller

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{2.2}$$

Olikeheten är en likhet om och endast om $p \in \{0,1\}$ eller $a = b$. För $a, b \geq 0, p > 0$ gäller

$$(a+b)^p \leq \max\{2^{p-1}, 1\}(a^p + b^p) \leq 2^p(a^p + b^p). \tag{2.3}$$

Bevis. För $p \in \{0,1\}$ gäller (2.2) med likhet. Ifall $a = b > 0$ så fås

$$(a+b)^p = (2a)^p = 2^{p-1}2a^p = 2^{p-1}\left(a^p + b^p\right),$$

vilket visar att dessa fall ger (2.2) med likhet. Antag att $p \notin \{0,1\}$. På grund av symmetrin kan $a \geq b$ eller $a \leq b$ antas för en given mängd värden på p. Betrakta polynomet $P(x;p) = 2^{p-1}(1+x^p) - (1+x)^p$. Dess derivata med avseende på x är $P'_x(x;p) = p\big((2x)^{p-1} - (1+x)^{p-1}\big)$. Derivatan är noll då

$$(2x)^{p-1} - (1+x)^{p-1} = 0 \Leftrightarrow 2^{p-1} = \left(\frac{1+x}{x}\right)^{p-1} \Leftrightarrow \frac{1+x}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1 \tag{2.4}$$

För $x > 0$ är P'_x kontinuerlig. Låt $x = \frac{b}{a}$, vilket är större än noll då $a, b \in]0, \infty[$. Antag först $p > 1$ och $b > a > 0$. Då gäller $x > 1$. För $x > 1$ är P_x monoton enligt (2.4). Eftersom

$$P'_x(2;p) = p(2x)^{p-1}\left(1 - \left(\frac{1+x}{2x}\right)^{p-1}\right)\Bigg|_{x=2} = p4^{p-1}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{p-1}\right) > 0$$

och $P(1;p) = 0$, så är $P(\frac{b}{a};p) = P(x;p) > 0$ för alla $x, p > 1$. Detta medför att för $x, p > 1$ så gäller

$$0 < a^p \cdot P\left(\frac{b}{a};p\right) = a^p\left[2^{p-1}\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^p\right) - \left(1 + \frac{b}{a}\right)^p\right] = 2^{p-1}(a^p + b^p) - (a+b)^p,$$

vilket är ekvivalent med olikhet (2.2). Antag nu $p < 1$ och $a > b > 0$. Då gäller $x < 1$. För $x < 1$ är P_x monoton enligt (2.4). Eftersom

$$P'_x(\frac{1}{2};p) = p\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{1-p}\right) > 0.$$

så följer $P(\frac{b}{a};p) = P(x;p) > 0$ för alla $x, p < 1$, vilket, enligt resonemanget ovan är ekvivalent med olikhet (2.2). Nu har det alltså bevisats att för $a = b$ eller $p \in \{0,1\}$ så gäller likhet medan de övriga fallen med $a, b \in]0, \infty[$ ger en strikt olikhet i formel 2.2.

Den första olikheten i (2.3) erhålls nu från (2.2) med den observationen att $(a+0)^p = a^p + 0^p > 0$, vilket medför att konstanten måste vara större än 1. Det samma gäller då $a = 0, b \neq 0$. $\square$

Sats 4. *En analytisk funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tillhör H^p om och endast om $u, v \in h^p$.*

Bevis. Då f är analytisk så är funktionens reella del respektive imaginära del harmoniska som följd av Cauchy-Riemann differentialekvationerna. Från definitionen på beloppet av ett komplext tal följer

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(re^{it})|^p dt\right], \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |v(re^{it})|^p dt\right] \leq \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(re^{it}) + iv(re^{it})|^p dt\right],$$

dvs. ifall $\lim_{r\to 1^-} D_p(r,f) < \infty$ så existerar även $\lim_{r\to 1^-} D_p(r,u)^p$ och $\lim_{r\to 1^-} D_p(r,v)^p$. Den andra olikheten fås från Lemma 3, samt integralens linjära egenskaper

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(re^{it}) + iv(re^{it})|^p dt\right] &\leq \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (|u(re^{it})| + |v(re^{it})|)^p dt\right] \\ &\leq \left[\frac{2^p}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(re^{it})|^p dt\right] + \left[\frac{2^p}{2\pi}\int_0^{2\pi} |v(re^{it})|^p dt\right]\end{aligned}$$

. $\square$

Lemma 5. Låt $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Nu gäller $f \in H^p, p < 1$ och $f \notin H^1$.

Bevis. Observera att

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos t)^{-\frac{p}{2}}\, dt &= \int_0^1 (1-x)^{-\frac{p}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 (1-x)^{-\frac{p+1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \\ &= \int_0^1 t^{-\frac{p+1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2-t}} \in \left(\int_0^1 t^{-\frac{p+1}{2}} dt\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right].\end{aligned} \tag{2.5}$$

För fallet $p = 1$ gäller

$$|1 - e^{it}| = \left((1-\cos t)^2 + (\sin t)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (2(1-\cos t))^{\frac{1}{2}},$$

varefter (2.5) medför

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|1 - e^{it}\right|^{-1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2(1-\cos t))^{-\frac{1}{2}}\, dt &\geq \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-1} dt \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}(-\ln t) = \infty.\end{aligned}$$

Fatous lemma ger nu

$$\liminf_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{1-re^{it}}\right| dt \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{1-e^{it}}\right| dt \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{1}{1-e^{it}}\right| dt = \infty.$$

Således gäller $f \notin H^1$.

För $0 < p < 1$ gäller

$$|1-re^{it}| = \left((1-r\cos t)^2 + (r\sin t)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1-2r\cos t + r^2)\right)^{\frac{1}{2}} \geq (2r(1-\cos t))^{\frac{1}{2}}, \tag{2.6}$$

varefter 2.5 ger

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|1-re^{it}\right|^{-p} dt &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2r(1-\cos t))^{-\frac{p}{2}}\, dt \leq (2r)^{-\frac{p}{2}} \int_0^1 t^{-\frac{p+1}{2}}\, dt \\ &= \lim_{t\to 0^+} 2(2r)^{-\frac{p}{2}} \left(\frac{1-t^{\frac{1-p}{2}}}{1-p}\right) = \frac{2(2r)^{-\frac{p}{2}}}{1-p}.\end{aligned}$$

Från (2.6) inser man att $|1-re^{it}|$ är växande med avseende på $t \in [0,\pi]$ och jämn kring π, för $0 < r < 1$. Detta medför att

$$\int_0^{2\pi} \left|1-re^{it}\right|^{-p} dt \leq 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|1-re^{it}\right|^{-p} dt \leq \frac{8(2r)^{-\frac{p}{2}}}{1-p} \leq \frac{8}{1-p}$$

då $\frac{1}{2} < r < 1$. Detta medför att

$$\lim_{r\to 1^-} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{1-re^{it}}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{8}{1-p}.$$

□

Sats 6. *För $p > p_0 \geq 1$ gäller*

$$H^p \subset H^{p_0} \text{ och } h^p \subset h^{p_0}$$

Bevis. Låt $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ vara en funktion. Då $q \geq 1$ så är $|z|^q$ en konvex funktion med avseende på $|z|$, varefter Jensens olikhet kan tillämpas för att erhålla

$$\left(\int_0^{2\pi} |f(re^{it})| \frac{dt}{2\pi}\right)^{\frac{q}{q}} \leq \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^q \frac{dt}{2\pi}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Låt $f \in H^p$, Nu existerar ett $M \in \mathbb{R}_{>0} : D_p(r,f) \leq M$ för varje $r < 1$. Tillämpa ovanstående olikhet på $D_{p_0}(r,f)^{\frac{q}{q}}, p > p_0 \geq 1$ med $q = \frac{p}{p_0}$. Låt sedan $r \to 1^-$ för att erhålla $D_{p_0}(r,f) \leq M$. För att visa att det handlar om en äkta delmängd, betrakta $f(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)^{\frac{1}{p}}$. En följd av Lemma 5 är att $f \notin H^p$ och $f \in H^q, q < p$. Beviset för att $h^p \subseteq h^{p_0}$ fås på samma sätt av Jensens olikhet. För att visa att delmängden är en äkta delmängd betraktas $f(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)^{\frac{1}{p}}$ för $p \geq 1$. Antag att $h^{p_0} = h^p$, för något par (p, p_0) med $p_0 < p$. Eftersom $f \in H^{p_0}$ så gäller $\Re f \in h^{p_0} = h^p$ och på samma sätt $\Im f \in h^p$, vilket betyder att $f \in H^p$, enligt Sats 4, vilket är en motsägelse. □

Lemma 7. Låt $M \subseteq \mathbb{C}$ och $U : M \to \mathbb{C}$, vara en analytisk funktion. Ifall $\overline{B}(z_0, r) \subset M$ för ett fixerat $r > 0$ så gäller

$$U(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z_0 + re^{it}) dt.$$

Ovanstående likhet gäller även om $U : M \to \mathbb{R}$ är harmonisk.

Bevis. Under antagandena givna i lemmat gäller Cauchys integralformel på $B = B(z_0, r)$. Vid substitutionen $z = z_0 + re^{it}$ erhålls

$$\begin{aligned} U(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_B \frac{U(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{U(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z_0 + re^{it}) dt. \end{aligned}$$

Låt V vara harmonisk. Nu existerar en analytisk funktion U sådan att $V = \Re U$. Vidare gäller

$$\Re(U(z_0)) = \frac{1}{2\pi} \Re \int_0^{2\pi} U(z_0 + re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Re(U(z_0 + re^{it}))) dt.$$

□

Kapitel 3

Poissonframställning av en Hardyfunktion

I detta kapitel kommer det att visas att H^p-funktioner har ett radiellt gränsvärde nästan överallt. Bättre resultat gällande gränsvärden mot randen hittas i [5] och [15]. Vidare visas att H^p-funktioner definieras entydigt av dessa randfunktioner genom Poissonintegralframställningen. Vitalis övertäckningssats samt teorin om L^p rummen är nödvändiga för beviset till Sats 33. Vidare så berör satserna 13, 44, 45 och 67 karakteriseringen av en H^p-funktioner som en Poissonintegral, varav de tre senare är helt beroende av satserna 13 samt 33. En annan representation av H^p-funktioner ges av Riezsfaktoriseringen, enligt vilken nollställen kan faktoriseras ut i form av en Blaschkeprodukt. Förutom dessa satser är även Sats 66 relevant för bevis i efterkommande kapitel.

Definition 7. Poissonkärnan definieras som

$$P(r,t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2rcos(t)}.$$

En funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ sägs vara en Poissonintegral ifall det existerar en funktion $u : [0, 2\pi[\to \overline{\mathbb{C}}$, sådan att

$$f(z) = f(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \alpha - t)u(t)dt.$$

Lemma 8. Poissonkärnans analytiska utvidgning ges av

$$\hat{P}(z,t) = P_u(r, \alpha - t) = \frac{1 + re^{i(\alpha-t)}}{1 - re^{i(\alpha-t)}} = \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z},$$

där $z = re^{i\alpha}$.

Bevis. Eftersom en analytisk utvidgning alltid är entydig, så är det tillräckligt att visa att $\hat{P}$ är analytisk samt att $\Re(\hat{P}(z,t)) = P(r, \alpha - t)$. Eftersom $\hat{P}$ är en sammansättning av analytiska funktioner och är väldefinierad för $z \in \mathbb{C} \backslash \{e^{it}\}$, så följer att $\hat{P}$ är analytisk i $\mathbb{C} \backslash \partial\mathbb{D} \supset \mathbb{D}$. Vidare gäller

$$\begin{aligned}\hat{P}(re^{i\alpha}, t) &= \frac{e^{it} + re^{i\alpha}}{e^{it} - re^{i\alpha}} = \frac{(e^{it} + re^{i\alpha})(e^{-it} - re^{-i\alpha})}{(e^{it} - re^{i\alpha})(e^{-it} - re^{-i\alpha})} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - r(e^{i(\alpha - t)} + e^{-i(\alpha - t)})} + \frac{r(e^{i(\alpha - t)} - e^{-i(\alpha - t)})}{1 + r^2 - r(e^{i(\alpha - t)} + e^{-i(\alpha - t)})} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\alpha - t)} + i\frac{2r\sin(\alpha - t)}{1 + r^2 - 2r\cos(\alpha - t)},\end{aligned}$$

vilket ger det önskade resultatet

$$\Re(\hat{P}(z,t)) = P(r, \alpha - t). \tag{3.1}$$

□

Lemma 9. Serieutvecklingen för Poissonkärnan samt dess analytiska utvidgning ges av

$$\hat{P}(re^{i\alpha}, t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\alpha - t)}$$

respektive

$$P(r, \alpha - t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\alpha - t)).$$

Bevis. Låt $r \in [0, 1[$. Då gäller

$$\begin{aligned}\hat{P}(re^{i\alpha}, t) &= \frac{e^{it} + re^{i\alpha}}{e^{it} - re^{i\alpha}} = \frac{1 + re^{i(\alpha - t)}}{1 - re^{i(\alpha - t)}} = (1 + re^{i(\alpha - t)})\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\alpha - t)} \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\alpha - t)}\end{aligned}$$

Nu följer från beviset till Lemma 8 att

$$P(r, \alpha - t) = \Re(\hat{P}(re^{i\alpha}, t)) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\alpha - t))$$

□

Lemma 10.

$$\int_0^{2\pi} P(r,t)dt = 2\pi \ \forall r < 1.$$

Bevis. Eftersom

$$\left|\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\alpha - t)} dt\right| \leq \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n dt = \frac{2\pi}{1 - r} < \infty,$$

så kan Fubini-Tonellis sats kan användas för att erhålla den andra likheten nedan

$$\int_0^{2\pi} \hat{P}(re^{i\alpha}, t)dt = \int_0^{2\pi} 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\alpha-t)}dt = 2\pi + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} e^{in(\alpha-t)}dt = 2\pi.$$

Eftersom $\hat{P}(re^{i\alpha}, t)dt = u(r, \alpha, t) + iv(r, \alpha, t)$, där u och v är reella funktioner, så ger integralens linjära egenskaper att

$$\int_0^{2\pi} \Re\hat{P}(re^{i\alpha}, t)dt = \Re(\int_0^{2\pi} \hat{P}(re^{i\alpha}, t)dt) = 2\pi$$

och

$$\int_0^{2\pi} \Im\hat{P}(re^{i\alpha}, t)dt = \Im\int_0^{2\pi} \hat{P}(re^{i\alpha}, t)dt = 0.$$

Lemmat erhålls nu med hjälp av (3.1). □

Sats 11. *Om* $f \in \mathbb{A}(B(0, 1+\epsilon))$ *för något* $\epsilon > 0$ *så gäller*

$$f(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \alpha - t)f(e^{it})dt,$$

för $re^{i\alpha} \in \mathbb{D}$.

Bevis. Låt $\epsilon > 0$ och antag att $f \in \mathbb{A}(B(0, 1+\epsilon))$. Nu existerar ett $0 < M < \infty$ sådant att

$$|f(z)| \leq M \ \forall z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Nu gäller

$$\begin{aligned} F(r, \alpha) :&= \int_0^{2\pi} P(r, \alpha - t)f(e^{it})dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\alpha - t))\right) f(e^{it})dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(e^{it})dt + 2\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\alpha - t))f(e^{it})dt. \end{aligned}$$

Låt $R < 1$. För $r \leq R$ gäller

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left|r^n \cos(n(\alpha - t))f(e^{it})\right| dt \leq \frac{1}{1-r}\int_0^{2\pi} \left|f(e^{it})\right| dt \leq \frac{2\pi M}{1-R},$$

varefter Fubini-Tonellis sats ger

$$\begin{aligned} &2\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\alpha - t))f(e^{it})dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(r^n e^{in\alpha}\int_0^{2\pi} e^{-int}f(e^{it})dt + r^n e^{-in\alpha}\int_0^{2\pi} e^{int}f(e^{it})dt\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\alpha}\int_0^{2\pi} e^{-int}f(e^{it})dt. \end{aligned}$$

Sista likheten ovan motiveras med följande: Om $f \in \mathbb{A}(B(0,1+\epsilon))$, så gäller $id^{n-1}f \in \mathbb{A}(B(0,1+\epsilon))$ för $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ och därmed gäller

$$\int_0^{2\pi} e^{int} f(e^{it})dt = -i \oint_{\partial\mathbb{D}} w^{n-1} f(w)dw = 0, \text{ då } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Nu erhålls, för $r \leq R$, att

$$\begin{aligned} F(r,\alpha) &= \int_0^{2\pi} f(e^{it})dt + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\alpha} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(e^{it})dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\alpha} \frac{1}{i} \oint_{\partial\mathbb{D}} w^{-(n+1)} f(w)dw \\ &= 2\pi f(re^{i\alpha}), \end{aligned}$$

vilket visar påståendet på $B(0,R)$. Då $R < 1$ är godtyckligt valt så gäller påståendet på

$$\bigcup_{i=2}^{\infty} B(0, 1-1/i) = \mathbb{D}.$$

$\square$

Följdsats 12. *Låt $u : B(0,1+\epsilon) \to \mathbb{R}$, för något $\epsilon > 0$, vara en harmonisk funktion. Nu kan u framställas både som en Poissonintegral och som följande serieutveckling*

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,\alpha - t)u(e^{it})dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(e^{it})}{e^{int}} dt.$$

Bevis. Enligt Sats 2 så utgör varje harmonisk funktion $u(z) = u(x+iy)$ den reella delen av en analytisk funktion $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Eftersom Poissonkärnan är reell, så gäller

$$u(re^{i\alpha}) = \Re(f(re^{i\alpha})) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,\alpha-t)\Re(f(e^{it}))dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,\alpha-t)u(e^{it})dt.$$

Enligt beviset till Sats 2 gäller

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} P(r,\alpha - t) f(e^{it})dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(e^{it})dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(r^n e^{in\alpha} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(e^{it})dt + r^n e^{-in\alpha} \int_0^{2\pi} e^{int} f(e^{it})dt \right), \end{aligned}$$

där endast integralens och summan linjära egenskaper, samt Fubini-Tonellis sats har använts. Eftersom $|\Re f| \leq |f|$ så kan Fubini-Tonellis sats tillämpas med f utbytt mot $\Re f$. Nu gäller alltså

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} P(r,\alpha - t) u(e^{it})dt \\ &= \int_0^{2\pi} u(e^{it})dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(r^n e^{in\alpha} \int_0^{2\pi} e^{-int} u(e^{it})dt + r^n e^{-in\alpha} \int_0^{2\pi} e^{int} u(e^{it})dt \right), \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\alpha} \int_0^{2\pi} e^{-int} u(e^{it})dt, \end{aligned}$$

vilket bevisar följdsatsen.

□

Sats 13. *Låt* $\infty \geq p \geq 1$ *och* $g : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}, g \in L^p[0, 2\pi[$. *Låt även*

$$u(re^{i\theta}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) g(t) dt. \tag{3.2}$$

Nu gäller

$$u \in h^p.$$

Bevis. Klart att u är reell, eftersom både g och P är reella funktioner. Låt $R < 1$. På disken $\overline{B}(0, R)$ gäller, med hjälp av Hölders olikhet,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} |r^n \cos(n(\theta - t)) g(t)| \, dt \leq \frac{1}{1-R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)| dt \leq \frac{||g||_{L^p}}{1-R}. \tag{3.3}$$

Nu kan Fubini-Tonellis sats tillämpas enligt följande

$$\begin{aligned}
u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta - t)) \right) g(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^n 2 \cos(n(\theta - t)) g(t) dt \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^n \left(e^{in(\theta - t)} + e^{-in(\theta - t)} \right) g(t) dt \right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} g(t) dt \right).
\end{aligned}$$

I det inre av denna mängd, dvs. $|z| < R$, så kan ovanstående uttryck deriveras enligt följande:

$$\Delta u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} g(t) dt \right) \Delta r^{|n|} e^{-in\theta},$$

där

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

är Laplaceoperatorn och $z = x + iy = re^{i\theta}$. Vidare gäller, för $r \neq 0, |n| > 1$, att

$$\Delta r^{|n|} e^{-in\theta} = r^{|n|-2} e^{-in\theta} \left(|n|(|n| - 1) + |n| + (-n^2) \right) = 0.$$

För $r = 0$ eller $|n| \leq 1$ gäller även $\Delta r^{|n|} e^{-in\theta} = 0$, vilket bevisar att u är harmonisk i det inre av varje kompakt disk $\overline{B}(0, R), R < 1$, men detta är ekvivalent med att u är harmonisk i $\mathbb{D}$, eftersom $\mathbb{D} = \bigcup_{k=2}^{\infty} B(0, 1 - \frac{1}{k})$. Vidare gäller, med $c = \theta - t$, att

$$\begin{aligned}
u(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta - 2\pi}^{\theta} P(r, c) g(\theta - c) dc \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, c) g(\theta - c) dc,
\end{aligned}$$

där sista likheten fås av periodiciteten hos Poissonkärnan samt g. Enligt (3.3) är u begränsad på $\overline{B}(0,R), R < 1$, varför $u_r \in L^\infty \subseteq L^q, q = \frac{p}{p-1}$, p>1, där $u_r(t) := u(re^{it}), r < 1$.

Definiera $h_r \in L^q$ genom

$$h_r(t) = \frac{u_r(t)^{\frac{p}{q}}}{||u_r||_{L^p}^{\frac{p}{q}}}.$$

Ifall $p = 1$ så är $q = \infty$ och $h_r :\equiv 1$. Fixera $r < 1$. Nu gäller

$$||u_r||_{L^p} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u_r(t)h_r(t)|dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(r,c)||g(t-c)|dc\right)|h_r(t)|dt. \tag{3.4}$$

Eftersom

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(r,c)g(t-c)|dc\;|h_r(t)|dt \leq ||g||_{L^p}\frac{2}{1-r},$$

så kan fubinis sats tillämpas på (3.4), varefter

$$\begin{aligned}
||u_r||_{L^p} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r,c)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(t-c)||h_r(t)|dt\right)dc \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r,c)\,||g||_{L^p}\,||h_r||_{L^q}\,dc \\
&= ||g||_{L^p}\,.
\end{aligned}$$

erhålls, där hölders olikhet tillämpats. Sista likheten följer från Lemma 10 samt, då $\infty > p > 1$, följande likheter

$$||h_r||_{L^q}^q = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h_r(t)|^q dt = \frac{1}{||u_r||_{L^p}^p}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u_r(t)|^p dt = 1.$$

För $p = 1, q = \infty$ så är $h_r \equiv 1$, vilket medför att $||h_r||_{L^q} = 1$ även i detta fall. Alltså, för varje $r < 1$ gäller $||u_r||_{L^p} \leq ||g||_{L^p}$, vilket medför

$$\lim_{r\to 1^-} D_p(r,u) \leq ||g||_{L^p} < \infty.$$

För $p = \infty$ gäller , enligt Lemma 10,

$$\begin{aligned}
\left|u(re^{i\theta})\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r,\theta-t)\,|g(t)|\,dt \leq \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,2\pi]}|g(t)|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r,\theta-t)dt \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,2\pi]}|g(t)|,
\end{aligned}$$

varför

$$\lim_{r\to 1^-} D_\infty(r,u) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,2\pi]}|g(t)| < \infty.$$

$\square$

Anmärkning 2. Ifall $g : [0, 2\pi[\to \mathbb{C}, g \in L^p$ sådan att f är analytisk så gäller att

$$\Re(f(re^{i\theta})) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\Re(g(t))dt \text{ och}$$
$$\Im(f(re^{i\theta})) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\Im(g(t))dt,$$

och därmed gäller att $\Re f, \Im f \in h^p$. Nu ger Sats 4 att $f \in H^p$.

Definition 8. För $p > 0$ definieras

$$\mathbb{H}^p = \left\{ f \in L^p : \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)f(t)dt \text{ är analytisk med avseende på } z = re^{i\theta} \right\}.$$

I Sats 67 visas en annan representation av mängden $\mathbb{H}^P$.

3.1 Lite L^p-teori

Följande lemma och därpå följande sats beskriver välkända resultat.

Lemma 14. Låt $M \subset \mathbb{R}$ vara en mätbar mängd, $\infty > p \geq 1$. Då är $L^p(M)$ ett normerat rum.

Sats 15. *Låt $M \subset \mathbb{R}$ vara en mätbar mängd med lebesguemåttet $m(M) < \infty$ och $L^p = L^p(M)$. För $1 \leq p_1 < p_2$ gäller*

$$L^{p_2} \subset L^{p_1}$$

och för $f : M \to \mathbb{K}$

$$||f||_{L^{p_1}} \leq ||f||_{L^{p_2}}.$$

Lemma 16. Låt M vara en mätbar mängd, $\infty > p \geq 1$ och $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en följd med $f_k \in L^p(M)$. Om $\sum_{k\in\mathbb{N}} ||f_k||_{L^p} < \infty$, så är

$$f(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$$

väldefinierad nästan överallt $x \in M$. Vidare gäller

$$f \in L^p(M) \text{ och } \lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|_{L^p} = 0.$$

Bevis. Enligt Minkowskis olikhet erhålls

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} |f_k| \right\|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^{n} ||f_k||_{L^p}.$$

Höger led utgör en växande följd med avseende på n, varför antagandet medför att följden är begränsad av något $N \in \mathbb{N}$. Vidare, så utgör $\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$ en växande följd för varje $x \in M$, varefter Monotona konvergenssatsen ger

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|\right|\right|_{L^p} = \lim_{n\to\infty} \left|\left|\sum_{k=1}^{n} |f_k|\right|\right|_{L^p} \leq N,$$

vilket visar att $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \in L^p(M)$. Funktionen $f := \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ är väldefinierad nästan överallt, då serien konvergerar absolut nästan överallt, $x \in M$. Serien utgör även en mätbar funktion, eftersom mätbarhet bevaras vid summering och gränsvärdestagning. Eftersom $|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ för varje $x \in M$, så gäller att $f \in L^p(M)$. För att visa att $\sum_{k=1}^{n} f_k \to f$ i L^p så noteras

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k - f\right|^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k| + |f|\right)^p \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| + |f|\right)^p \in L^1$$

för varje $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, varefter Lebesgues dominerade konvergenssats ger

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left|f - \sum_{k=1}^{n} f_k\right|\right|_{L^p} = \left|\left|f - \sum_{k=1}^{\infty} f_k\right|\right|_{L^p} = 0.$$

□

Sats 17 (Riesz-Fischer). *Låt M vara en mätbar mängd och $1 \leq p < \infty$. Då är $L^p(M)$ ett Banachrum.*

Bevis. Sätt $L^p = L^p(M)$. Lemma 14 ger att L^p är ett normerat rum. Låt $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vara en Cauchyföljd i L^p. Välj en delföljd genom följande induktiva förfarande: Låt k_1 vara sådan att för $m, n \geq k_1 \Rightarrow ||f_n - f_m||_{L^p} < \frac{1}{2}$. Välj nu $k_2 > k_1$ så att $m, n \geq k_2 \Rightarrow ||f_n - f_m||_{L^p} < \frac{1}{4}$. k_l väljs så att $m, n \geq k_l \Rightarrow ||f_n - f_m||_{L^p} < \frac{1}{2^l}$. Nu har delföljden $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ den egenskapen att

$$||f_{k_{j+1}} - f_{k_j}||_{L^p} < \frac{1}{2^j}.$$

Om

$$h_j := \begin{cases} f_{k_{j+1}} - f_{k_j} & j \geq 1 \\ f_{k_1} & j = 0, \end{cases}$$

så uppfyller $(h_j)_{j=0}^{\infty}$ kraven i Lemma 16, varefter lemmat medför att $f \in L^p$, där $f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} h_j(x)$ är väldefinierad nästan överallt $x \in M$, samt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left|f - \sum_{j=0}^{n-1} h_j\right|\right|_{L^p} = 0.$$

Då $f_{k_n} = \sum_{j=0}^{n-1} h_j$ har det nu bevisats att varje cauchyföljd i L^p har en delföljd vars punktvisa gränsvärde f utgör en L^p-funktion. Dessutom konvergerar delföljden mot denna gränsfunktion i L^p-norm. Eftersom den ursprungliga följden är en Cauchyföljd så ger triangelolikheten,

$$||f_j - f||_{L^p} \leq \left|\left|f_j - f_{k_j}\right|\right|_{L^p} + \left|\left|f_{k_j} - f\right|\right|_{L^p},$$

att den ursprungliga följden konvergerar mot f i L^p-norm och därmed är L^p fullständigt. $\square$

Lemma 18. Låt $M \subset \mathbb{R}$ vara en mätbar mängd med $m(M) < \infty$. Låt $p, q > 1$ vara sådana att $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. För $g \in L^q(M)$ definieras $G : L^p \to \mathbb{C}$ genom

$$G(f) := G_g(f) = \frac{1}{m(M)} \int_M f(t)g(t)dt.$$

G utgör en begränsad linjär funktional med operatornormen

$$||G||_{op} = ||g||_{L^q}.$$

Bevis. Låt $g \in L^q$. Från integralens linjära egenskaper följer att G är linjär. Om $g = 0$ så är $G \equiv 0$ och därmed gäller $||G||_{op} = 0 = ||g||_{L^q}$. Antag därför att $g \neq 0$, vilket innebär att g är olika noll på en mängd med positivt mått. För varje $f \in L^p$ gäller, enligt Hölders olikhet,

$$|G(f)| \leq \frac{1}{m(M)} \int_M |f(t)g(t)|dt \leq ||f||_{L^p} ||g||_{L^q}.$$

För $f \neq 0$ gäller då

$$\frac{|G(f)|}{||f||_{L^p}} \leq ||g||_{L^q}.$$

Således är G begränsad och

$$||G||_{op} \leq ||g||_{L^q}.$$

Låt

$$f(t) = \frac{|g(t)|^{q-1}}{||g||_{L^q}^{q-1}} e^{-i \arg g(t)}. \tag{3.5}$$

f är väldefinierad nästan överallt, eftersom $q > 1$ och $g \neq 0 \Rightarrow ||g||_{L^q} > 0$. Nu gäller

$$\begin{aligned} ||f||_{L^p}^p &= \frac{1}{m(M)} \int_M \left| \frac{|g(t)|^{q-1}}{||g||_{L^q}^{q-1}} e^{-i \arg g(t)} \right|^p dt = \frac{||g||_{L^q}^{(1-q)p}}{m(M)} \int_M |g(t)|^{(q-1)p} dt \\ &= \frac{||g||_{L^q}^{-q}}{m(M)} \int_M |g(t)|^q dt = 1. \end{aligned}$$

och

$$G(f) = \frac{1}{m(M)} \int_M \frac{|g(t)|^{q-1}}{||g||_{L^q}^{q-1}} e^{-i \arg g(t)} g(t) dt = \frac{||g||_{L^q}^{1-q}}{m(M)} \int_M |g(t)|^q dt = ||g||_{L^q},$$

vilket resulterar i att

$$||G||_{op} \geq ||g||_{L^q}.$$

och därmed är lemmat bevisat. $\square$

Definition 9. Låt $\mathcal{F}$ vara en familj av mängder och $\phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ en funktion. En mängd $F \in \mathcal{F}$ sägs vara positiv med avseende på ϕ om

$$\phi(B) \geq 0 \ \forall B \subseteq F$$

och negativ med avseende på ϕ om

$$\phi(B) \leq 0 \ \forall B \subseteq F.$$

Följande resultat är välkänt.

Sats 19. *Låt V vara ett normerat vektorrum över kroppen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$. En linjär funktional $G : V \to \mathbb{K}$ är begränsad om och endast om den är kontinuerlig.*

Lemma 20. Låt $M \subset \mathbb{R}$ vara en mätbar mängd med $m(M) < \infty$. Låt $G : L^p(M) \to \mathbb{R}$ vara en begränsad linjär funktional som inte är identisk med noll. För varje mätbar delmängd $A \subseteq M$ definieras $\phi(A) := G(\chi_A)$. Om $A \subseteq M$ med $0 < \phi(A)$, så existerar en mängd $P \subseteq A$ sådan att $\phi(P) > 0$ och P är positiv med avseende på ϕ.

Bevis. Om M, G och A uppfyller antagandena så gäller, för $K := ||G||_{op}$,

$$|\phi(A)| = |G(\chi_A)| \leq K \, ||\chi_A||_{L^p} = Km(A)^{\frac{1}{p}} \leq Km(M)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{3.6}$$

Antag att det existerar en mängd $A \subseteq M$ sådan att $\phi(A) > 0$. Sätt

$$\sigma = \inf\{\phi(B) : B \text{ mätbar } \wedge B \subseteq A\}.$$

(3.6) ger att $-\phi(B) \leq Km(M)^{\frac{1}{p}}$ för varje $B \subset M$, vilket leder till att $\sigma > -\infty$. Tomma mängden är mätbar, vilket medför att $\sigma \leq 0$. Sätt $\sigma_1 = \sigma$ och låt $A_1 \subset A$ med $\sigma_1 \leq \phi(A_1) \leq \frac{\sigma_1}{2}$. En sådan mängd existerar enligt definitionen av σ_1. Definiera genom induktivt förfarande

$$\sigma_i = \inf\{\phi(B) : B \subseteq A \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \wedge B \text{ mätbar}\}, \ i = 2, 3, ...$$

och välj $A_i \subset A \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ så att

$$\sigma_i \leq \phi(A_i) \leq \frac{\sigma_i}{2}.$$

Låt $V = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ och $P = A \setminus V$. Observera att $\{A_i; i \in \mathbb{N}\}$ är disjunkta, vilket medför att $\chi_V = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}$. Nu gäller

$$-\infty < \phi(V) = G(\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} G(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(A_i) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i, \tag{3.7}$$

där G:s linearitet och kontinuitet använts. Eftersom $\sigma_i \leq 0$ för alla i och summan konvergerar, så gäller $\lim_{i\to\infty} \sigma_i = 0$. Det gäller att $B \subseteq P \Rightarrow B \subseteq A \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ för varje i, alltså $\phi(B) \geq \sigma_i$ för varje i, dvs. $\phi(B) \geq 0$. Vidare gäller att

$$\phi(P) = G(\chi_{A \setminus V}) = G(\chi_A - \chi_V) = G(\chi_A) - G(\chi_V) = \phi(A) - \phi(V) \geq \phi(A) > 0,$$

där $V \subseteq A$, $\phi(V) \leq 0$ och G:s linearitet har använts. $\square$

Lemma 21. Låt $M \subset \mathbb{R}$ vara en mätbar mängd med $m(M) < \infty$. För varje begränsad linjär funktional $G : L^p(M) \to \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$ existerar två mätbara mängder $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ sådana att

$$X \cup Y = M \wedge X \cap Y = \emptyset$$

och

$$G(\chi_A) \geq 0 \wedge G(\chi_B) \leq 0 \ \forall A \subseteq X, B \subseteq Y.$$

Om X, Y och X', Y' är två uppsättningar av mängder med de beskrivna egenskaperna så gäller $m(X \setminus X') = m(Y \setminus Y') = 0$.

Bevis. Låt $\phi(A) = G(\chi_A)$ för mätbara mängder $A \subseteq M$. Sätt

$$s = \sup\{\phi(A) : A \subset M \text{ mätbar} \wedge A \text{ positiv med avseende på } \phi\}.$$

Enligt (3.6) i Lemma 20 gäller $|s| < \infty$. Enligt definitionen av supremum hittas en följd $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bestående av positiva, mätbara mängder sådana att $\lim_{i\to\infty} \phi(A_i) = s$. Låt $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Notera att om $A, B \subseteq M$ är två positiva mängder så gäller

$$\phi(C) = \phi(C \cap (A \setminus B) \cup C \cap B) = \phi(C \cap (A \setminus B)) + \phi(C \cap B),\ \forall C \subseteq A \cup B.$$

Eftersom de disjunkta mängderna $C \cap (A \setminus B)$ och $C \cap B$ är delmängder av A respektive B, så gäller

$$\phi(C \cap (A \setminus B)) \geq 0 \text{ och } \phi(C \cap B) \geq 0,$$

vilket medför att $\phi(C) \geq 0$. Således är unionen av två positiva mängder positiv. Vidare gäller att X är positiv. Låt $\hat{A}_0 = \emptyset$ och

$$\hat{A}_i = \bigcup_{j=1}^{i} A_j,\ i = 1, 2, ...$$

Det gäller att $\hat{A}_i \setminus \hat{A}_{i-1}$ är disjunkta och

$$\begin{aligned}\phi(X) = \phi(\bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{A}_i \setminus \hat{A}_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi(\hat{A}_i \setminus \hat{A}_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\phi(\hat{A}_i) - \phi(\hat{A}_{i-1})) = \lim_{i\to\infty} \phi(\hat{A}_i) - 0.\end{aligned}$$

där samma förfarande som i (3.7) (Lemma 20) har använts. Eftersom X är positiv så gäller

$$\phi(A_i) \leq \phi(A_i) + \phi(\hat{A}_i / A_i) = \phi(\hat{A}_i) \leq s,$$

vilket medför att $\phi(X) = \lim_{i\to\infty} \phi(\hat{A}_i) = s$. Låt $Y = M \setminus X$. Antag som antites att Y inte är negativ med avseende på ϕ. Då existerar en mängd $A' \subseteq Y$ med $\phi(A') > 0$, varefter Lemma 20 garanterar existensen av en positiv mängd $P' \subseteq A'$ med $\phi(P') > 0$. Eftersom X, P' är disjunkta så gäller $\phi(X \cup P') = \phi(X) + \phi(P') > \phi(X) = s$, där $X \cup P'$ är positiv med avseende på ϕ. Detta strider mot konstruktionen av s, vilket ger att Y är negativ.

Låt X, Y och X', Y' vara två uppsättningar av en beskriven uppdelning av M. Nu gäller att

$$X \setminus X' \subseteq Y',$$

vilket medför att $X \setminus X'$ är både positiv och negativ med avseende på ϕ, dvs.

$$\phi(X \setminus X') = 0.$$

På samma sätt visas $\phi(Y \setminus Y') = 0$. □

Anmärkning 3. Att en mängd är positiv betyder i ovanstående bevis att mängden är positiv med avseende på ϕ.

Definition 10. Låt $M \subset \mathbb{R}$ med $m(M) < \infty$ vara en mätbar mängd. Nu definieras funktionsrummet $PL^p, 1 \leq p \leq \infty$ genom

$$PL^p(M) := \{f \in L^p(M)\} : f \geq 0 \text{ nästan överallt}\}$$

försedd med normen $||\cdot||_{L^p(M)}$.

I resten av detta underkapitel kommer $||\cdot||_{L^p}$ att syfta på $||\cdot||_{L^p(M)}$.

Definition 11. En enkel funktion γ är en funktion som kan representeras av

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i},$$

där $A_i \subseteq \mathbb{R}$ mätbar och $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$ och a_i tillhör ifrågavarande rums kropp, dvs. $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$.

Lemma 22. Låt $M \subset \mathbb{R}$ vara en mätbar mängd sådan att $m(M) < \infty$. För varje begränsad linjär funktional $G : PL^p(M) \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ 1 \leq p < \infty$, existerar en funktion $g \in PL^1(M)$ sådan att

$$G(\chi_A) = \frac{1}{m(M)} \int_M \chi_A(t) g(t) dt \ \forall A \subseteq M,\ A \text{ mätbar.}$$

Bevis. Låt $\mathcal{G}$ vara en familj bestående av alla funktioner $g \in PL^1(M)$ sådana att $G(\chi_A) \geq \int_A g(t)dt$ för varje mätbar mängd $A \subseteq M$. Eftersom $G(f) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ för varje $f \in PL^p(M)$, så gäller $0 \in \mathcal{G}$, dvs. $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Notera att om $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ så erhålls genom uppdelningen $A = A_1 \cup A_2$ att

$$\int_A \max\{g_1(t), g_2(t)\} dt = \int_{A_1} g_1(t)dt + \int_{A_2} g_2(t)dt \leq G(\chi_{A_1}) + G(\chi_{A_2}) = G(\chi_A),$$

där $A_1 := \{t \in A : g_1(t) > g_2(t)\}$ och $A_2 := \{t \in A : g_1(t) \leq g_2(t)\}$. Eftersom maximum är associativt så är $\mathcal{G}$ sluten med avseende på punktvis maximum. Låt

$$s(A) := \sup_{g \in \mathcal{G}} \left\{ \int_A g(t)dt \right\} \leq G(\chi_A).$$

Nu existerar en följd $(g_n) : g_n \in \mathcal{G}$ sådan att

$$\lim_{n\to\infty} \int_A g_n(t)dt = s(A).$$

Låt $\hat{g}_n(t) := \max_{k\in[1,n]}\{g_k(t)\}$. Eftersom $\mathcal{G}$ är sluten med avseende på punktvis maximum, så gäller

$$\int_A g_n(t)dt \leq \int_A \hat{g}_n(t)dt \leq s(A),$$

och därmed

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \hat{g}_n(t)dt = s(A).$$

Då $(\hat{g}_n(t))_n \in \mathbb{N}$ är en växande följd för varje $t \in M$, så är

$$h : M \to [0, \infty], h(t) = \lim_{n\to\infty} \hat{g}_n(t)$$

väldefinierad i den betydelse att

$$\liminf_{n\to\infty} \hat{g}_n(t) = \limsup_{n\to\infty} \hat{g}_n(t) \ \forall t \in M.$$

Monotona konvergenssatsen ger nu första likheten nedan:

$$\int_A h(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_A \hat{g}_n(t)dt = s(A) \leq G(\chi_A).$$

Låt $H(A) := G(\chi_A) - \int_A h(t)dt$. Konstruktionen av h och (3.6) i Lemma 20 medför att

$$0 \leq \int_A h(t)dt \leq G(\chi_A) \leq ||G||_{op}\, m(A)^{\frac{1}{p}}.$$

Om $m(A) = 0$ så gäller alltså

$$H(A) = 0.$$

Antag som antites att det existerar en mängd A sådan att $H(A) > 0$. Då är $\int_A dt = m(A) > 0$ och n kan nu väljs så stort att

$$0 < \frac{1}{n} m(A) < H(A).$$

Nu gäller

$$G(\chi_A) = H(A) + \int_A h(t)dt > \int_A (\frac{1}{n} + h(t))dt = \frac{1}{n} m(A) + s(A) > s(A)$$

och enligt defintionen av $s(A)$ så bör

$$\int_A (\frac{1}{n} + h(t))dt \leq s(A), \text{ då } \int_A (\frac{1}{n} + h(t))dt \leq G(\chi_A),$$

vilket ger en motsägelse. Alltså gäller

$$H(A) = 0 \ \forall A \subseteq M,$$

dvs.

$$G(\chi_A) = \int_A h(t)dt = \int_M \chi_A h(t)dt.$$

Låt

$$P = \{t \in M : h(t) \geq 0\} \text{ och } N = \{t \in M : h(t) < 0\}.$$

Nu gäller

$$\int_M |h(t)|dt = \int_M (\chi_P(t) - \chi_N(t))h(t)dt = G(\chi_P) - G(\chi_N) < \infty,$$

vilket visar att $h \in PL^1(M)$ och slutligen sätt $g(t) := m(A)h(t)$.

$\square$

Följande resultat är välkänt och lämnas därför utan bevis.

Lemma 23. Låt $M \subset \mathbb{R}$ vara en mätbar mängd. Om $f \in PL^p(M)$, $p \geq 1$ så existerar en växande följd $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$, bestående av positiva, enkla funktioner, sådan att

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = f, \text{ punktvis.}$$

Vidare gäller

$$\lim_{n\to\infty} ||\phi_n - f||_{L^p} = 0.$$

Lemma 24. Låt $M \subset \mathbb{R}$ vara en mätbar mängd med $0 < m(M) < \infty$ och låt $1 < p < \infty$. För varje begränsad linjär funktional $G : PL^p(M) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ existerar en funktion $g \in PL^q(M)$ sådan att

$$G(f) = \frac{1}{m(M)} \int_M f(t)g(t)dt \quad \forall f \in PL^p(M).$$

$PL^p(M)$ består här av reella funktioner och $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Bevis. Ifall $G \equiv 0$ så hittas $g \equiv 0$ som uppfyller lemmat. Ifall $G \not\equiv 0$ så bör $g(t) > 0$ på en mängd B med $m(B) > 0$, varför det i fortsättningen av detta bevis kan antas att $g(t) > 0$ för $t \in B$ där B är en mätbar mängd med $m(B) > 0$. Låt

$$\Phi = \left\{\phi : M \to \mathbb{R}_{\geq 0} : \phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi A_i, \ a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \ M \supseteq A_i \text{ mätbar}, \ n \in \mathbb{N}\right\},$$

dvs mängden av positiva, enkla funktioner. Enligt Lemma 22 existerar $g \in PL^1(M)$ sådan att, för $\phi \in \Phi$ gäller

$$G(\phi) = \sum_{i=1}^{n} a_i G(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{m(M)} \int_M \chi_{A_i}(t)g(t)dt = \frac{1}{m(M)} \int_M \phi(t)g(t)dt.$$

Antag $f \in PL^p(M)$. Enligt Lemma 23 existerar en växande följd $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestående av enkla funktioner sådan att $\phi_n \to f$ i L^p-normen, då $n \to \infty$. Vidare gäller, då G är kontinuerlig, att

$$G(f) = \lim_{n\to\infty} G(\phi_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(M)} \int_M \phi_n(t)g(t)dt.$$

Det gäller att $(\phi_n(t)g(t))_n$ är en positiv, växande följd för $t \in M$. Monotona konvergenssatsen ger att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(M)} \int_M \phi_n(t)g(t)dt = \frac{1}{m(M)} \int_M f(t)g(t)dt,$$

varefter

$$G(f) = \frac{1}{m(M)} \int_M f(t)g(t)dt \;\forall f \in PL^p(M)$$

erhålls.

Låt $\gamma = (\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en växande följd av enkla funktioner sådan att $\gamma_n(t) \to g(t)$ för $t \in M$, då $n \to \infty$. Det kan antas att $||\gamma_n||_{L^q} > 0$ för varje n, eftersom $||g||_{L^q} > 0$. Sätt

$$f_n(t) = \left(\frac{\gamma_n(t)}{||\gamma_n||_{L^q}}\right)^{q-1}.$$

Det gäller att

$$f_n(t)^p = \left(\frac{\gamma_n(t)}{||\gamma_n||_{L^q}}\right)^{p(q-1)} = \frac{\gamma_n(t)^q}{||\gamma_n||_{L^q}^q},$$

vilket medför att

$$||f_n||_{L^p} = 1.$$

Vidare gäller

$$\frac{1}{m(M)} \int_M \gamma_n(t) f_n(t)dt = ||\gamma_n||_{L^q}^{1-q} \frac{1}{m(M)} \int_M \gamma_n(t)^q dt = ||\gamma_n||_{L^q}.$$

Dessa likheter, Fatous lemma samt γ:s egenskaper ger

$$\begin{aligned} ||g||_{L^q} &\le \liminf_{n\to\infty} ||\gamma_n||_{L^q} = \frac{1}{m(M)} \int_M \gamma_n(t) f_n(t)dt \\ &\le \frac{1}{m(M)} \int_M g(t) f_n(t)dt = G(f_n) \le ||G||_{op}, \end{aligned}$$

alltså $g \in PL^q(M)$.

□

Sats 25. *Låt $M \subset \mathbb{R}$ vara en mätbar mängd med $0 < m(M) < \infty$. För varje begränsad, linjär funktional $G : L^p \to \mathbb{R}$, dvs. $G \in L^p(M)^*$ existerar en funktion $g \in L^q(M)$, entydigt bestämd nästan överallt i M, sådan att*

$$G(f) = \frac{1}{m(M)} \int_M f(t)g(t)dt \;\forall f \in L^p(M). \tag{3.8}$$

$L^p(M)$ består här av reella funktioner.

Bevis. Låt $PL^p = PL^p(M)$ och $L^p = L^p(M)$. Eftersom varje funktion $f \in L^p$ kan dekomponeras i $f = f^+ - f^-$, där $f^+(x) = \max\{0, f(x)\} \geq 0$ och $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\} \geq 0$, så gäller $G(f) = G(f^+) - G(f^-)$ Således räcker det att undersöka restriktionen $G|_{PL^p}$. Låt X, Y vara mängderna beskrivna i Lemma 21 och definiera

$$\begin{aligned} G^+ &: PL^p \to \mathbb{R}_{\geq 0} : G^+(f) = G(f\chi_X), \text{ samt} \\ G^- &: PL^p \to \mathbb{R}_{\leq 0} : G^-(f) = G(f\chi_Y). \end{aligned}$$

Notera att konstruktionen av G^+ och G^- medför att funktionalerna är linjära och begränsade. Som motivering till att $G^+(f)$ är positiv för godtyckligt $f \in PL^p$ utnyttjas Lemma 23. Det existerar alltså en följd enkla funktioner $(\gamma_n), \gamma_n = \sum_{i=1}^{k_n} a_{i,n}\chi_{A_{i,n}}$ sådan att

$$G^+(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} a_{i,n} G^+(\chi_{A_{i,n}}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} a_{i,n} G(\chi_{X\cap A_{i,n}}).$$

Eftersom mängderna $\{A_i : i = 1, ..., k_n\}$ är disjunkta och $\gamma_n(t)$ är positiv för varje $t \in M$, så följer det att $a_{i,n} \geq 0$ för alla relevanta heltalspar (i, n). Då X är positiv med avseende på $G(\chi_\cdot)$, så erhålls nu att

$$\sum_{i=1}^{k_n} a_{i,n} G(\chi_{X\cap A_{i,n}}) \geq 0 \ \forall n,$$

vilket medför att $G^+(f) \geq 0$. Nu gäller, för varje $f \in PL^p$,

$$G(f) = G(f\chi_{X\cup Y}) = G(f\chi_X + f\chi_Y) = G(f\chi_X) + G(f\chi_Y) = G^+(f) + G^-(f).$$

Denna uppdelning är dessutom entydig. Låt X', Y' vara en annan uppdelning av M och definiera G'^+ och G'^- analogt. Nu gäller

$$G^+(f) - G'^+(f) = G(f\chi_X) - G(f\chi_{X'}) = G(f(\chi_X - \chi_{X'})) = G(f\chi_{X\setminus X'}) = 0$$

för varje $f \in PL^+$. På likanande sätt visas att $G^- \equiv G'^-$, varför $G \equiv G'$. Notera att G är begränsad är ett nödvändigt krav för ovanstående resonemang.

Vid användning av Lemma 24 erhålls att det för G^+ och G^- existerar funktioner $g_+, g_- \in PL^q$ sådana att

$$\begin{aligned} G(f) &= G(f^+) - G(f^-) \\ &= G^+(f^+) - \big(-G^-(f^+)\big) - G^+(f^-) + \big(-G^-(f^-)\big) \\ &= \frac{1}{m(M)} \int_M f^+(t) g_+(t) dt - \frac{1}{m(M)} \int_M f^+(t) g_-(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{m(M)} \int_M f^-(t) g_+(t) dt + \frac{1}{m(M)} \int_M f^-(t) g_-(t) dt \\ &= \frac{1}{m(M)} \left(\int_M (f^+(t) - f^-(t)) g_+(t) dt - \int_M (f^+(t) - f^-(t)) g_-(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{m(M)} \int_M f(t)(g_+(t) - g_-(t)) dt, \end{aligned}$$

för alla $f \in L^p$. Klart att $g := g_+ - g_- \in L^q$.

Antag $g', g \in L^q$ är två funktioner sådana att (3.8) är uppfyllt och låt

$$P = \{t \in M : g(t) > g'(t)\} \text{ och } N = \{t \in M : g(t) < g'(t)\}.$$

Antag $m(P) > 0$. Nu gäller

$$G(\chi_P) = \int_M \chi_P(t) g(t) dt > \int_M \chi_P(t) g'(t) dt = G(\chi_P),$$

vilket är omöjligt. På samma sätt uppstår en motsägelse ifall $m(N) > 0$, vilket medför att $m(P \cup N) = 0$, alltså g är entydigt bestämd nästan överallt i M. □

Följdsats 26. *Låt $M \subset \mathbb{R}$ vara en mätbar mängd med $0 < m(M) < \infty$. För varje begränsad, linjär funktional $G : L^p(M) \to \mathbb{C}$, dvs. $G \in L^p(M)^*$ existerar en funktion $g \in L^q(M)$, entydigt bestämd nästan överallt i M, sådan att*

$$G(f) = \frac{1}{m(M)} \int_M f(t) g(t) dt \ \forall f \in L^p(M).$$

$L^p(M)$ består här av komplexvärda funktioner.

Bevis. Låt $G : L^p(M) \to \mathbb{C}$. För en funktion $f : M \to \mathbb{C}$ sådan att $f \in L^p(M)$, så existerar två entydigt bestämda funktioner $u, v : M \to \mathbb{R}$, sådana att $f = u + iv$ och $u, v \in L^p(M)$. Därmed gäller $G(f) = G(u) + iG(v)$. G defineras således entydigt av dess restriktion $G|_{\mathbb{R}} : L^p_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$, där $L^p_{\mathbb{R}}$ är L^p-rummet bestående av funktioner $f : M \to \mathbb{R}$. Således kan det antas att f är en reell funktion. Låt $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(M)$. Notera att

$$G(f) = \Re G(f) + i \Im G(f)$$

och att för $f_1, f_2 \in L^p$ gäller

$$\begin{aligned} \Re G(f_1) + \Re G(f_2) + i(\Im G(f_1) + \Im G(f_2)) &= G(f_1) + G(f_2) \\ ' &= G(f_1 + f_2) \\ &= \Re G(f_1 + f_2) + i \Im G(f_1 + f_2). \end{aligned}$$

Således utgör de punktvis definerade funktionalerna $RG = \Re G$ och $IG = \Im G$ linjära funktionaler vars belopp är mindre än $|G|$ och därmed begränsade, då G är begränsad. Sats 25 garanterar existensen av nästan överallt entydiga funktioner Rg och Ig sådana att

$$RG(f) = \frac{1}{m(M)} \int_M f(t) Rg(t) dt$$

och

$$IG(f) = \frac{1}{m(M)} \int_M f(t) Ig(t) dt.$$

Från lineariteten av integralen erhålls nu att

$$G(f) = \frac{1}{m(M)} \int_M f(t)g(t)dt \ \forall f \in L^p(M),$$

där g är entydigt definerad nästan överallt av $g = Rg + iIg$. Entydigheten hos g överförs från det reella fallet. $\square$

Definition 12. Låt $-\infty < u < v < \infty$. Låt I vara ett intervall med ändpunkterna u samt v. Nu definieras

$$P(I) = \left\{ f : I \to \mathbb{C} : f(t) = \sum_{k=l}^{n} c_k e^{2\pi i \frac{t-u}{v-u} k} : l \leq n,\ c_k \in \mathbb{C} \right\};$$

$$P_{\mathbb{Q}}(I) = \left\{ f : I \to \mathbb{C} : f(t) = \sum_{k=l}^{n} (a_k + ib_k) e^{2\pi i \frac{t-u}{v-u} k} : l \leq n,\ a_k, b_k \in \mathbb{Q} \right\}.$$

För alla intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definieras

$$\mathcal{C}(I) = \{ f : I \to \mathbb{C} : f \text{ är kontinuerlig} \}.$$

Lemma 27. Låt $-\infty < u < v < \infty$. Nu gäller

$$\overline{P_{\mathbb{Q}}([u,v])}^{L^p([u,v])} \supseteq P([u,v])$$

Bevis. Välj $f \in P([u,v])$. Nu finns det två konstanter $N, L \in \mathbb{Z}$ med $L \leq N$ och två följder $(a_k)_{k=L}^N$ samt $(b_k)_{k=L}^N$ med $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, sådana att f kan framställas enligt

$$f(t) = \sum_{k=L}^{N} (a_k + ib_k) e^{2\pi i \frac{t-u}{v-u} k}.$$

Vidare existerar två familjer av växande följder

$$\{(a_{k,n})_{n=1}^{\infty}\}_{k=L}^{N} \text{ och } \{(b_{k,n})_{n=1}^{\infty}\}_{k=L}^{N}$$

sådana att, för heltal $k \in [L, N]$ gäller

$$\lim_{n\to\infty} a_{k,n} = a_k \text{ och } \lim_{n\to\infty} b_{k,n} = b_k,$$

där $a_{k,n}, b_{k,n} \in \mathbb{Q}$ för varje relevant heltalspar (k, n). Låt $f_n \in P_{\mathbb{Q}}([u,v])$ vara definierad genom

$$f_n(t) = \sum_{k=L}^{N} (a_{k,n} + ib_{k,n}) e^{2\pi i \frac{t-u}{v-u} k}.$$

Nu gäller

$$\begin{aligned} ||f - f_n|||_{L^p([u,v])} &\leq \left(\frac{1}{v-u} \int_u^v \left(\sum_{k=L}^{N} (|a_k - a_{k,n}| + |b_k - b_{k,n}|) \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum_{k=L}^{N} (|a_k - a_{k,n}| + |b_k - b_{k,n}|) \to 0, \text{ då } n \to \infty, \end{aligned}$$

där gränsvärdet kan tas termvis, eftersom gränsvärdena existerar, är ändliga och antalet termer är ändligt. $\square$

Definition 13. Låt $a < b$ och $g :]a, b[\to \mathbb{R}$. g sägs vara konvex om det för varje $\theta \in [0, 1]$ och för varje $x, y \in]a, b[$ gäller att

$$g(x\theta + y(1 - \theta)) \leq \theta g(x) + (1 - \theta)g(y).$$

g sägs vara strikt konvex om det även gäller att

$$g(x\theta + y(1 - \theta)) < \theta g(x) + (1 - \theta)g(y),$$

då $\theta \in]0, 1[$.

Lemma 28. Låt $E \subset \mathbb{R}^n$. Nu gäller

$$m^*(E) = \inf\{m(\mathbb{O}) : E \subset \mathbb{O}, \mathbb{O} \text{ öppen}\}.$$

Om E är Lebesguemätbar så gäller även

$$m(E) = \sup\{m(K) : E \supset K, K \text{ sluten}\}.$$

Bevis. Se [13]. $\square$

Sats 29. *Låt $-\infty < u < v < \infty, 1 \leq p < \infty$. Nu gäller*

$$\overline{\mathcal{C}([u, v])}^{L^p} = L^p([u, v]).$$

Funktionerna är antingen komplexvärda eller reellvärda.

Bevis. Fixera $\epsilon > 0$. Låt $A \subseteq [u, v]$ vara en mätbar mängd. Lemma 28 ger att det existerar en kompakt mängd $K \subset \mathbb{R}$ och en öppen mängd $O \subset \mathbb{R}$ sådana att

$$K \subseteq A \subseteq O \wedge m(O \setminus K) < \epsilon^p.$$

Definiera

$$d(x, A) := \inf\{|x - y| : y \in A\},$$

och sätt $L = \mathbb{R} \setminus O$. Betrakta funktionen $f \in \mathcal{C}([u, v])$ definierad genom

$$f(x) = \frac{d(x, L)}{d(x, L) + d(x, K)}. \tag{3.9}$$

Eftersom $w := \inf_{x \in [u,v]} d(x, L) + d(x, K) > 0$, då L, K är disjunkta och slutna, så är f väldefinierad. Vidare gäller att

$$S \subseteq \mathbb{R} \wedge x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |d(x, S) - d(y, S)| \leq |x - y|,$$

så för $x, y \in [u, v]$ gäller

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| \frac{d(x,L)d(y,K) - d(y,L)d(x,K)}{(d(x,L) + d(x,K))(d(y,L) + d(y,K))} \right| \\
&\leq \left| \frac{(d(x,L) - d(y,L))d(y,K) - d(y,L)(d(x,K) - d(y,K))}{w} \right| \\
&\leq \frac{|d(x,L) - d(y,L)||d(y,K)|}{w} + \frac{|d(y,L)||d(x,K) - d(y,K)|}{w} \\
&\leq (v-u) \left(\frac{|d(x,L) - d(y,L)|}{w} + \frac{|d(x,K) - d(y,K)|}{w} \right) \\
&\leq \frac{2(v-u)}{w} |x - y|,
\end{aligned}$$

dvs. f är Lipschitzkontinuerlig. Vidare gäller, där $f_u \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definierad genom (3.9), att

$$\int_u^v |\chi_A(t) - f(t)|^p dt = \int_{O \setminus K} |\chi_A(t) - f_u(t)|^p dt \leq m(O \setminus K) < \epsilon^p,$$

vilket visar att indikatorfunktionen för en Lebesguemätbar mängd kan approximeras med en kontinuerlig funktion. Nu kan en enkel funktion $\phi := \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$ approximeras av en kontinuerlig funktion som skapas genom följande förfarande. Välj mängderna $O_i, K_i, i = 1, ..., n$ så att

$$K_i \subseteq A_i \subseteq O_i \wedge m(O_i \setminus K_i) < \epsilon^p.$$

och definiera för varje A_i funktionen $f_{A_i} \in \mathcal{C}([u,v])$ analogt med (3.9). Nu gäller att $F := \sum_{i=1}^n c_i f_{A_i} \in \mathcal{C}([u,v])$. Vidare gäller

$$\begin{aligned}
\left|\left| \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} - \sum_{i=1}^n c_k f_{A_i} \right|\right|_{L^p} &\leq \max_k |c_k| \sum_{i=1}^n \left|\left| \chi_{A_i} - f_{A_i} \right|\right|_{L^p} \\
&\leq n \max_k |c_k| \epsilon \\
&= M(\phi)\epsilon
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Notera att $M(\phi) := n \max_k |c_k|$ är oberoende av F. En godtycklig L^p-funktion g kan delas upp i två positiva funktioner g^+ och g^- med $g = g^+ - g^-$. Nu ger Lemma 23 att det existerar två enkla funktioner ϕ^+ och ϕ^- sådana att

$$\left|\left| g - (\phi^+ - \phi^-) \right|\right|_{L^p} \leq \left|\left| g^+ - \phi^+ \right|\right|_{L^p} + \left|\left| g^- - \phi^- \right|\right|_{L^p} < \epsilon.$$

Enligt (3.10) hittas nu två kontinuerliga funktioner f^+ och f^- sådana att

$$\begin{aligned}
\left|\left| g - (f^+ - f^-) \right|\right|_{L^p} &\leq \left|\left| g^+ - \phi^+ \right|\right|_{L^p} + \left|\left| g^- - \phi^- \right|\right|_{L^p} \\
&\quad + \left|\left| \phi^+ - f^+ \right|\right|_{L^p} + \left|\left| \phi^- - f^- \right|\right|_{L^p} \\
&< \left(1 + M(\phi^+) + M(\phi^-)\right) \epsilon \\
&= M(g)\epsilon,
\end{aligned}$$

vilket innebär att
$$\overline{\mathcal{C}([u,v])}^{L^p} \supseteq L^p([u,v]).$$
Beviset slutförs genom konstaterandet av
$$\mathcal{C}([u,v]) \subseteq L^p([u,v]).$$
$\square$

Definition 14. Fejers kärna är funktionsföljden $(K_n)_{n=1}^{\infty}$, där
$$K_n(t) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)}.$$

Lemma 30. Fejers kärna uppfyller följande egenskaper

1. $K_{N+1}(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=-k}^{k} e^{itn},\ N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;
2. $K_n(t) \geq 0\ \forall t \in [-\pi,\pi[,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$;
3. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$;
4. $\lim_{n\to\infty}\int_{\pi > |t| \geq \delta} K_n(t)dt = 0,\ \delta > 0.$

Bevis. För $t \neq 0$ gäller
$$\begin{aligned}\sum_{n=-k}^{k} e^{itn} &= \sum_{n=0}^{k} e^{itn} + \sum_{n=0}^{k} e^{-itn} - 1\\ &= \frac{1-e^{it(k+1)}}{1-e^{itn}} + \frac{1-e^{-it(k+1)}}{1-e^{-itn}} - 1\\ &= \frac{2(1-\cos(t)+\cos(tk)-\cos(t(k+1)))}{2(1-\cos(t))} - 1\\ &= \frac{\cos(tk)-\cos(t(k+1))}{(1-\cos(t))},\end{aligned}$$
vilket medför
$$\begin{aligned}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=-k}^{k} e^{itn} &= \frac{1}{N+1}\frac{1-\cos(t(N+1))}{1-\cos(t)}\\ &= \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)},\end{aligned}$$
där $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ har tillämpats. Egenskap 2 följer från att Fejers kärna är kvadraten av en reell funktionsföljd. Egenskap 1 medför att, för $N \geq 0$ gäller
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_{N+1}(t)dt &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=-k}^{k}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{itn}dt\\ &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=-k}^{k}\chi_{n=0}\\ &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} 1 = 1.\end{aligned}$$

Fixera nu $\delta > 0$. Nu gäller

$$\begin{aligned}\left|\int_{\pi>|t|\geq\delta} K_n(t)dt\right| &\leq \frac{1}{n}\int_{\pi>|t|\geq\delta} \frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}dt \\ &\leq \frac{2\pi}{n\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)},\end{aligned}$$

vilket bevisar egenskap 4. □

Sats 31. *Låt $-\infty < a < b < \infty, 1 \leq p < \infty$. Nu gäller*

$$\overline{P([a,b])}^{L^p([a,b])} = L^p([a,b]). \tag{3.11}$$

där funktionerna är komplexvärda. Om $f \in L^p([a,b])$ är kontinuerlig och $f(a) = f(b)$ så existerar det en följd i $P([a,b])$ som konvergerar likformigt mot f.

Bevis. Låt $h_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ och definiera en affin bijektion $\phi : [-\pi,\pi] \to [a,b]$ genom

$$\phi_{a,b}(x) = (b-a)\frac{x+\pi}{2\pi} + a.$$

Nu existerar en funktion $h_0 : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ definierad av

$$h_0(x) = h_1 \circ \phi_{a,b}$$

sådan att

$$h_0 \in L^p([-\pi,\pi]) \Leftrightarrow h_1 \in L^p([a,b]) \text{ och } h_0 \in P([-\pi,\pi]) \Leftrightarrow h_1 \in P([a,b]).$$

Således räcker det att bevisa påståendet (3.11) för $a = -\pi$ och $b = \pi$. Låt $p \in [1,\infty[$ och fixera $f \in L^p([-\pi,\pi])$ och betrakta följden $(p_N)_{N=0}^{\infty}$, där

$$p_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} e^{itn} a_{n,N}(f)$$

och

$$a_{n,N}(f) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=|n|}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ixn}dx.$$

Notera att

$$\begin{aligned}p_N(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{N+1}\sum_{k=|n|}^{N} e^{itn}f(x)e^{-ixn}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=-k}^{k} e^{i(t-x)n}dx \qquad (3.12) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_{N+1}(t-x)dx\end{aligned}$$

där sista likheten ges av Lemma 30.

Antag först att f är kontinuerlig och att $f(-\pi) = f(\pi)$. Nu kan f utvidgas periodiskt till en funktion som är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$. Låt f nu beteckna denna utvidgning. Fejers kärna är periodisk. Om man i (3.12) sätter $y = t - x$ i integralframställningen, så erhålls nu

$$p_n(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t-y) - f(t))K_{n+1}(y)dy,$$

där Lemma 30 egenskap 3 använts. Fixera $\epsilon > 0$ och välj ett δ så att

$$|y| \leq \delta \Rightarrow \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t-y) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Detta är möjligt då f är kontinuerlig på slutna intervallet $[-2\pi, 2\pi]$ och därmed likformigt kontnuerlig på detta intervall. Eftersom f är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ och periodisk så existerar $M := \max_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. Välj nu N så stort att

$$n > N \Rightarrow \frac{M}{2\pi}\int_{\pi>|y|>\delta} K_{n+1}(y)dy < \frac{\epsilon}{2}$$

vilket är möjligt, enligt Lemma 30 egenskap 4. Sammanfattningsvis gäller, för $n > N$ och $t \in [-\pi, \pi]$, att

$$\begin{aligned}
|p_n(t) - f(t)| &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(t-y) - f(t)|K_{n+1}(y)dy \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi>|y|>\delta} |f(t-y) - f(t)|K_{n+1}(y)dy \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_{n+1}(y)dy + \frac{M}{2\pi}\int_{\pi>|y|>\delta} K_{n+1}(y)dy \\
&< \epsilon,
\end{aligned}$$

där egenskaperna 2 och 3 i Lemma 30 använts. Detta visar att

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |p_n(t) - f(t)| = 0.$$

Antag nu att $f \in L^p([-\pi, \pi])$ är godtyckligt vald och betrakta istället dess periodiska utvidgning till $\mathbb{R}$. Jensens olikhet och egenskap 3 i Lemma 30 ger nu

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |p_n(t) - f(t)|^p\, dt &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-y) - f(t)|^p K_{n+1}(y)dydt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} K_{n+1}(y)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-y) - f(t)|^p dtdy,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

där Fubini-Tonellis sats använts för likheten. Fixera $\epsilon > 0$. Enligt Sats 29 existerar en kontinuerlig funktion $g : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{C}$ sådan att

$$||f - g||_{L^p([-2\pi,2\pi])} < \frac{\epsilon}{12}.$$

Nu följer, för $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\left(\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-x) - g(t-x)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{12},$$

vilket kan omskrivas till

$$||f(\cdot - x) - g(\cdot - x)||_{L^p([-\pi,\pi])} < \frac{2^{\frac{1}{p}}\epsilon}{12} \leq \frac{\epsilon}{6}.$$

Fixera $\epsilon > 0$ och välj $\delta \in]0, \pi[$ så att

$$\sup_{y\in[-\delta,\delta]} |g(t-y) - g(t)| < \frac{\epsilon}{6},$$

vilket är möjligt då g är likformigt kontinuerlig. Det gäller, för $y \in [-\delta, \delta]$, att

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-y) - f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-y) - g(t-y)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t-y) - g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Välj nu N så att

$$n > N \Rightarrow \int_{\pi>|t|>\delta} K_{n+1}(y)dy < \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^p,$$

vilket är möjligt enligt Lemma 30. Nu följer från Lemma 30, uttryck (3.14), f:s periodicitet och triangelolikheten för L^p-normen, att för $n > N$ gäller

$$\begin{aligned}
K_p(n, f) :&= \int_{-\pi}^{\pi} K_{n+1}(y)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-y) - f(t)|^p dtdy \\
&< \int_{-\delta}^{\delta} K_{n+1}(y)\frac{\epsilon^p}{2^p}dy + \int_{\pi>|t|>\delta} K_{n+1}(y)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-y) - f(t)|^p dtdy \\
&< 2\pi\frac{\epsilon^p}{2^p} + \int_{\pi>|t|>\delta} K_{n+1}(y)\left(2\,||f||_{L^p(-\pi,\pi)}\right)^p dy \\
&= 2\pi\frac{\epsilon^p}{2^p} + \left(2\,||f||_{L^p(-\pi,\pi)}\right)^p \int_{\pi>|t|>\delta} K_{n+1}(y)dy \\
&< \epsilon^p\left(\frac{2\pi + ||f||^p_{L^p(-\pi,\pi)}}{2^p}\right) \\
&< 2\pi\epsilon^p\left(1 + ||f||^p_{L^p(-\pi,\pi)}\right),
\end{aligned}$$

vilket med hjälp av (3.13) ger

$$||p_n - f||_{L^p([-\pi,\pi])} < \epsilon\left(1 + ||f||^p_{L^p(-\pi,\pi)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

dvs. $L^p([a,b]) \subseteq \overline{P([a,b])}^{L^p([a,b])}$. Det önskade resultatet följer direkt från $P([a,b]) \subseteq L^p([a,b])$. $\square$

Sats 32. *Låt $I \subseteq \mathbb{R}$ vara en ett intervall. $L^p(I)$ är separabel, dvs. det existerar en numrerbar följd av funktioner $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ sådana att*

$$L^p(I) = \overline{\{h_n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}}^{L^p(I)}.$$

Bevis. Notera först att för varje $-\infty < a < b < \infty$ så är $L^p([a,b]), L^p(]a,b]),$ $L^p([a,b[)$ och $L^p(]a,b[)$ väsentligen samma rum. Detsamma gäller för $L^p([a,\infty[)$ och $L^p(]a,\infty[)$ respektive $L^p(]-\infty,b])$ och $L^p(]-\infty,b])$. Således kan det antas att intervallets ändliga randpunkter, i de fall sådana existerar, tillhör intervallet.

Välj $f \in L^p(I)$ och fixera $\epsilon > 0$. Eftersom

$$\int_I |f(t)|^p dt < \infty,$$

så existerar $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ så att för $n \geq N$ gäller

$$\int_{I \setminus [-n,n]} |f(t)|^p dt < \epsilon^p.$$

Ifall $|I| < \infty$ väljer N så stort att $I \setminus [-N,N] = \emptyset$. Låt $I_N := I \cap [-N,N]$. Enligt den inledande anmärkningen kan det antas att I_N är ett slutet intervall. Enligt Sats 31 existerar $P_{c2} \in P(I_N)$ sådan att

$$||f - P_{c2}||_{L^p(I_N)} < \frac{\epsilon}{2\max\{|I_N|^{\frac{1}{p}}, 1\}}. \tag{3.15}$$

Låt $P_c : I \to \mathbb{C}$ vara definierad genom

$$P_c(x) = \begin{cases} P_{c2} & \text{för } x \in I_N \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Enligt Lemma 27 hittas nu ett $P_q : I \to \mathbb{C}$ sådan att $P_q|_{I_N} \in P_{\mathbb{Q}}(I_N)$ med

$$||P_{c2} - P_q|_{I_N}||_{L^p(I_N)} < \frac{\epsilon}{2\max\{|I_N|^{\frac{1}{p}}, 1\}} \tag{3.16}$$

och $P_q(x) = 0$ för varje $x \in I \setminus I_N$. Ifall $|I| < \infty$ så gäller $I_N = I$ och

$$||f - P_q||_{L^p(I)} \leq ||f - P_c||_{L^p(I)} + ||P_c - P_q||_{L^p(I)} < \epsilon$$

där Minkowskis olikhet tillämpats. Eftersom $P_{\mathbb{Q}}(I_N) \cong \mathbb{N} \times \mathbb{Q}^2$ så är $P_{\mathbb{Q}}(I_N)$ numrerbar och därmed är $L^p(I)$ separabel. Om $|I| = \infty$ så erhålls med hjälp av (3.15) och (3.16)

$$
\begin{aligned}
\pi^{\frac{1}{p}} \left|\left|f - P_q\right|\right|_{L^p(I)} &\leq \left(\int_{I \setminus I_N} |f(t)|^p dt + \int_{I_N} |f(t) - P_q(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\left(\int_{I \setminus I_N} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{I_N} |f(t) - P_q(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&< 2^{\frac{1}{p}} \left(\epsilon + \frac{|I_N|^{\frac{1}{p}}}{\max\{|I_N|^{\frac{1}{p}}, 1\}} \epsilon \right) \\
&< 2^{1+\frac{1}{p}} \epsilon,
\end{aligned}
$$

där lemma 3 använts. Notera att en godtycklig funktion $f \in L^p(I)$ har approximerats med en funktion $P_q \in PQ(I)$, där

$$
PQ(I) = \{P_q : I \to \mathbb{C} : P_q|_{I_N} \in P_{\mathbb{Q}}(I_N) \text{ och } P_q|_{I \setminus I_N} \equiv 0 \text{ för något } N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}
$$

Eftersom $PQ(I) \cong \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Q}^2$ så är $PQ(I)$ numrerbar och därmed är $L^p(I)$ separabel.

□

Sats 33. *Låt $\infty > p > 1$ och låt $f \in H^p$. Då kan f representeras av en Poissonintegral*

$$
f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) F(t) dt,
$$

där $F \in L^p$.

Bevis. Låt $f_s(t) = f(se^{it})$ och $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av linjära funktionaler $G_n : L^q \to \mathbb{C}$ definierade av

$$
G_n(V) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{1-\frac{1}{n+1}}(t) V(t) dt.
$$

För varje $V \in L^q$ gäller

$$
|G_n(V)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{1-\frac{1}{n+1}}(t) V(t) dt \right| \leq \left|\left| f_{1-\frac{1}{n+1}} \right|\right|_{L^p} ||V||_{L^q} \leq ||f||_{H^p} ||V||_{L^q},
$$

där hölder olikhet tillämpats. Sats 32 medför att det existerar en mängd

$$
W = \{V_i\}_{i=1}^{\infty},\ V_i \in L^q \text{ med } \overline{W}^{L^q} = L^q.
$$

Eftersom följden

$$
(G_n(V_1))_{n \in \mathbb{N}}
$$

är begränsad och $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, så existerar, enligt Bolzano-Weierstrass sats, en delföljd

$$
(G_{n_{j,1}}(V_1))_{j \in \mathbb{N}}
$$

sådan att

$$\lim_{j\to\infty} G_{n_{j,1}}(V_1)$$

existerar. Låt värdet ovan betecknas med $G(V_1)$. Nu kan samma resonemang tillämpas på den begränsade följden

$$(G_{n_{j,1}}(V_2))_{j\in\mathbb{N}},$$

varefter en konvergent delföljd

$$(G_{n_{j,2}}(V_2))_{j\in\mathbb{N}}$$

erhålls. Notera att för indexmängderna gäller

$$\{n_{j,2}\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \{n_{j,1}\}_{j\in\mathbb{N}},$$

vilket medför att

$$\lim_{j\to\infty} G_{n_{j,2}}(V_1) = G(V_1).$$

Genom induktion erhålls att, för varje $k\in\mathbb{N}$ existerar en delföljd $(n_{j,k})_{j\in\mathbb{N}}$ av $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ sådan att

$$\lim_{j\to\infty} G_{n_{j,k}}(V_i)$$

existerar för varje $i \le k$. Låt $n_j := n_{j,j}$. Enligt ovanstående resonemang så är n_j väldefinierad för varje $j \in \mathbb{N}$. Betrakta följden $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Eftersom delföljden $(n_j)_{j=k}^{\infty}$ är en delföljd av $(n_{j,k})_{j\in\mathbb{N}}$ så existerar

$$\lim_{j\to\infty} G_{n_j}(V_k) = \lim_{j\to\infty} G_{n_{j,k}}(V_k) =: G(V_k)\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Eftersom $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ är likformigt begränsad av $||f||_{H^p}$ så gäller, enligt fatous lemma

$$||G|_W||_{op} \le ||G_n||_{op} \le ||f||_{H^p}.$$

Vidare definieras, för varje $c\in\mathbb{C}, U_1, U_2 \in W$,

$$\begin{aligned} cG(U_1) + G(U_2) &= \lim_{j\to\infty} \big(cG_{n_j}(U_1) + G_{n_j}(U_2)\big) \\ &= \lim_{j\to\infty} G_{n_j}(cU_1 + U_2) \\ &=: G(cU_1 + U_2), \end{aligned} \tag{3.17}$$

där första likheten är giltig på grund av att

$$G(U_1) = \lim_{j\to\infty} G_{n_j}(U_1) \text{ och } G(U_2) = \lim_{j\to\infty} G_{n_j}(U_2)$$

är väldefinierade. Notera att om $cU_1 + U_2 \in W$ så sammanfaller definition ovan med hur G definierats på mängden W. Eftersom G är begränsad och linjär så ger Lemma

19 att G är kontinuerlig i W. För varje $V \in L^q$ hittas en följd $(V_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ i W sådan att

$$\lim_{m\to\infty} ||V_{k_m} - V||_{L^q} = 0,$$

då W är tät i L^q. Definiera

$$G(V) := \lim_{j\to\infty} G(V_{k_j}).$$

Denna definition medför att G är kontinuerlig i L^q. Vidare gäller att

$$|G_{n_j}(V) - G_{n_j}(V_{k_m})| = |G_{n_j}(V - V_{k_m})| \leq ||f||_{H^p} \, ||V - V_{k_m}||_{L^q} \, ,$$

Låt $\epsilon > 0$ och välj $m \in \mathbb{N}$ så att

$$\max\{||f||_{H^p} \, ||V - V_{k_m}||_{L^q} \, , |G(V) - G(V_{k_m})|\} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Välj nu J sådan att $j \geq J$ implicerar

$$|G_{n_j}(V_{k_m}) - G(V_{k_m})| < \frac{\epsilon}{3}$$

vilket är möjligt då $G_{n_j} \to G$ på W, då $j \to \infty$. Nu gäller, för $j \geq J$,

$$\begin{aligned} \left|G_{n_j}(V) - G(V)\right| &\leq \left|G_{n_j}(V) - G_{n_j}(V_{k_m})\right| + \left|G_{n_j}(V_{k_m}) - G(V_{k_m})\right| + |G(V_{k_m}) - G(V)| \\ &< \epsilon, \end{aligned} \tag{3.18}$$

dvs. $\lim_{j\to\infty} G_{n_j}(V)$ existerar för varje $V \in L^q$. Detta medför att likheterna (3.17) gäller även då $U_1, U_2 \in L^q$, vilket visar att G är linjär. G utgör således en kontinuerlig och därmed begränsad linjär funktional. Nu garanterar Sats 26 existensen av en funktion $F \in L^p$ sådan att

$$G(V) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(t)F(t)dt \;\forall V \in L^q,$$

speciellt gäller, för fixerade $0 \leq r < 1, 0 \leq \theta < 2\pi$ gäller

$$G(P(r, \theta - \cdot)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)F(t)dt, \tag{3.19}$$

eftersom $P(r, \theta - \cdot) \in L^q$. Enligt Sats 11 så gäller

$$f_{1-\frac{1}{n+1}}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) f_{1-\frac{1}{n+1}}(e^{it})dt,$$

eftersom $f_{1-\frac{1}{n+1}} \in \mathbb{A}(B(0, \frac{n+1}{n}))$. Det faktum att f är kontinuerlig i $\mathbb{D}$, ovanstående likhet, (3.18) och (3.19) ger nu att, för fixerade $0 \leq r < 1$ och $0 \leq \theta < 2\pi$ gäller

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \lim_{j\to\infty} f\left(\left(1 - \frac{1}{n_j+1}\right) re^{i\theta}\right) \\ &= \lim_{j\to\infty} G_{n_j}(P(r, \theta - \cdot)) \\ &= G(P(r, \theta - \cdot)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)F(t)dt. \end{aligned}$$

□

Följdsats 34. *Låt $\infty > p > 1$ och låt $u \in h^p(\mathbb{D})$ vara en harmonisk funktion. Då kan u representeras av en Poissonintegral*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) U(t) dt.$$

där $U \in L^p$.

Bevis. Om u är en harmonisk funktion så existerar en analytisk funktion f sådan att $u = \Re f$. Nu ger Sats 33 att

$$u(re^{i\theta}) = \Re(f(re^{i\theta})) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) \Re(F(t)) dt$$

för något $F \in L^p$. Eftersom $|\Re F| \leq |F|$ så gäller $U := \Re F \in L^p$. □

3.2 Vitalis övertäckningslemma

Definition 15. Låt $E \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en mängd. Låt $J(a,b) \in \{[a,b],]a,b], [a,b[,]a,b[\}$ då $a < b$ och $J(a,b) = \emptyset$, annars. En familj bestående av generaliserade rätblock, dvs.

$$\mathbb{I} := \{I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n : I_j = J(a_j, b_j); a_j, b_j \in \mathbb{R}\}$$

sägs vara en Vitaliövertäckning ifall det för varje $\epsilon > 0$ och $x \in E$ finns ett $I \in \mathbb{I}$ sådant att $x \in I$ och $0 < |I| < \epsilon$, där $|I| = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$, ifall $b_j - a_j > 0 \; \forall j$ och $|I| = 0$ annars.

Lemma 35. (Vitalis övertäckningslemma) Låt $E \subseteq \mathbb{R} : m^*(E) < \infty$ och låt $\mathbb{I}$ vara en Vitaliövertäckning av E. Nu existerar, för varje $\epsilon > 0$, en delmängd $\{I_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{I}$ sådan att

$$I_i \cap I_j = \emptyset, \text{ för } i \neq j \text{ och } m^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^N I_k\right) < \epsilon.$$

Bevis. Notera att, ifall $I_{k_0} = J(a,a)$ för något $k_0 \in [1, N]$ och $a \in \mathbb{R}$ så skulle

$$m^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^N I_k\right) = m^*\left(E \setminus \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^N I_k\right).$$

Därför kan det antas att $I_k = J(a_k, b_k)$ med $a_k < b_k$ för varje k. Antag först att $\mathbb{I}$ består av slutna mängder med positivt yttre mått. Eftersom $m^*(E) < \infty$ så ger Lemma 28 att det hittas en öppen mängd F sådan att $E \subset F \wedge m^*(F) < m^*(E) + 1$. Vidare gäller att familjen

$$\mathbb{I}_0 := \{I \in \mathbb{I} : I \subset F\}$$

är en Vitaliövertäckning av E. För att inse detta, låt $\epsilon_0 > 0$ och välj $x \in E \subseteq F$. Då F är öppen så existerar ett $\alpha_0 > 0$ sådan att

$$I^{(\alpha_0)}(x) :=]x - \alpha_0, x + \alpha_0[\subset F.$$

Att $\mathbb{I}$ är en Vitaliövertäckning av E medför att

$$\exists I \in \mathbb{I} : x \in I \wedge |I| < \min(\epsilon_0, \alpha_0).$$

Att $|I| < \alpha_0$ medför att $I \subset I^{(\alpha_0)}(x) \subset F$ och därmed gäller $I \in \mathbb{I}_0$, medan $|I| < \epsilon_0$ medför att intervallet är godtyckligt litet. Sammanfattningsvis gäller

$$\forall \epsilon_0 > 0 \ \forall x \in E \ \exists I \in \mathbb{I}_0 : x \in I \wedge |I| < \epsilon_0.$$

Således är $\mathbb{I}_0$ en Vitaliövertäckning av E.

Nu skapas den sökta mängden $\{I_1, ..., I_N\}$ induktivt. Fixera $\epsilon > 0$ och välj ett intervall $I_1 \in \mathbb{I}_0$. Om $m^*(E \setminus I_1) = 0$ så är satsen bevisad, annars existerar det ett $x \in E \setminus I_1$ och ett $\alpha_0 > 0$ sådana att $I^{(\alpha_0)}(x) \subset F \wedge I^{(\alpha_0)}(x) \cap I_1 = \emptyset$. Eftersom $\mathbb{I}_0$ är en Vitaliövertäckning för E så existerar $I^{(\alpha_0)}(x) \supset I \in \mathbb{I}_0$ med $I \cap I_1 = \emptyset$. Enligt detta resonemang erhålls

$$\exists I_2 \in \mathbb{I}_0 : I_2 \cap I_1 = \emptyset \text{ och } |I_2| > \frac{1}{2} \sup\{|I| : I \in \mathbb{I}_0, I \cap I_1 = \emptyset\}.$$

Ifall $m^*(E \setminus (I_1 \cup I_2)) = 0$ så är satsen bevisad. Annars upprepas denna procedur. Efter n steg kollas $E \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k$. Ifall detta inte gäller så väljs $I_{n+1} \in \mathbb{I}_0$ så att

$$|I_{n+1}| > \frac{1}{2} \sup_{I \in A_n} |I|,$$

där

$$A_n = \{I \in \mathbb{I}_0 : I \cap \bigcup_{k=1}^n I_k = \emptyset\}.$$

Analogt med existensen av I_2 garanteras att $A_n \neq \emptyset$. Ifall $E \subseteq \bigcup_{k=1}^N I_k$ för något N så är satsen bevisad, annars erhålls ett obergänsat antal intervall I_k sådana att

$$m^*(F) \geq m^*(\bigcup_{k=1}^\infty I_k) = \sum_{k=1}^\infty m^*(I_k),$$

då $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ är disjunkta. Eftersom ovanstående summa konvergerar så gäller

$$m^*(I_k) = |I_k| \to 0, \text{ då } k \to \infty. \tag{3.20}$$

Detta medför att det finns ett N sådant att

$$\sum_{k=N+1}^\infty m^*(I_k) < \frac{\epsilon}{5}.$$

Nu återstår det att visa att $m^*(E\backslash\bigcup_{k=1}^N I_k) < \epsilon$. Välj ett $x \in E\backslash\bigcup_{k=1}^N I_k$. Eftersom I_k är slutet och därmed även $\bigcup_{k=1}^N I_k$, vilket ger att $F\backslash\bigcup_{k=1}^N I_k$ är öppen, så existerar ett öppet intervall $]a,b[\subseteq F\backslash\bigcup_{k=1}^N I_k$ sådant att $x \in]a,b[$. Då $\mathbb{I}_0$ är en Vitaliövertäckning av E så existerar nu ett intervall $I \in \mathbb{I}_0$ sådant att $x \in I$ och $|I| < \min\{b-x, x-a\}$. Låt

$$B := \{j : I \cap \bigcup_{k=1}^j I_k \neq \emptyset\}.$$

Notera att (3.20) garanterar existensen av ett $J \in \mathbb{N}$ sådant att för $j \geq J$ gäller $|I| > 2|I_{j+1}| > \sup_{I\in A_j} |I|$, vilket medför att $I \notin A_j$, alltså

$$I \cap \bigcup_{k=1}^j I_k \neq \emptyset \ \forall j \geq J.$$

Konstruktionen av I garanterar att $j_0 := \min B \geq N+1$, vilket medför att $j_0 \in [N+1, J]$. Eftersom $I \cap I_k = \emptyset,\ k = 1, 2, ..., j_0 - 1$ så gäller

$$|I| \leq \sup_{I\in A_{j_0-1}} |I| < 2|I_{j_0}|.$$

Låt c_{j_0} vara mittpunkten av I_{j_0} och låt $y \in I \cap I_{j_0}$. Nu gäller

$$|x - c_{j_0}| \leq |x-y| + |y - c_{j_0}| \leq |I| + \frac{1}{2}|I_{j_0}| \leq \frac{5}{2}|I_{j_0}|. \tag{3.21}$$

Låt I'_k vara ett intervall med samma mittpunkt som I_k och $5|I_k|$ som längd. (3.21) ger nu att $x \in I'_{j_0}$. Alltså, för ett godtyckligt $x \in E \setminus \bigcup_{k=1}^N I_k$ hittas ett $j_0 > N$ så att $x \in I'_{j_0}$, dvs.

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^N I_k \subseteq \bigcup_{k=N+1}^\infty I'_k.$$

Vidare gäller

$$\begin{aligned} m^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^N I_k\right) &\leq m^*\left(\bigcup_{k=N+1}^\infty I'_k\right) \\ &\leq \sum_{k=N+1}^\infty m^*(I'_k) \\ &= 5\sum_{k=N+1}^\infty |I_k| < \epsilon \end{aligned}$$

Således gäller lemmat för en Vitaliövertäckning bestående av slutna mängder.

Antag att $\mathbb{I}$ är en godtycklig Vitaliövertäckning av E. Från definitionen följer att $\mathbb{I}' := \{\overline{I} : I \in \mathbb{I}\}$ är en Vitaliövertäckning av E bestående av slutna mängder. Fixera $\epsilon > 0$. Det har bevisats att en ändlig familj $\{I'_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{I}'$ sådan att

$$I'_i \cap I'_j = \emptyset, \text{ för } i \neq j \text{ och } m^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^N I'_k\right) < \epsilon$$

kan hittas. Låt $I_k \in \mathbb{I}$ vara intervallet som slutet är $I'_k \in \mathbb{I}'$. Observer att I'_k hade en annan betydelse i ett tidigare skede av beviset. För $i \neq j$ gäller

$$I'_i \cap I'_j = \emptyset \Rightarrow I_i \cap I_j = \emptyset$$

och

$$\begin{aligned} m^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^N I_k\right) &= m^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^N I'_k\right) + m^*\left(E \cap \bigcup_{k=1}^N (I'_k \setminus I_k)\right) \\ &= m^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^N I'_k\right) < \epsilon \end{aligned}$$

Följden $(I_k)_{k=1}^N$ uppfyller således kraven. □

Definition 16. För $a < b$, låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Nu definieras överderivatan och underderivatan, för $x \in]a, b[$, genom

$$D_+ f(x) = \limsup_{\delta \to 0^+} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} : 0 < |h| < \delta \right\}$$

respektive

$$D_- f(x) = \liminf_{\delta \to 0^+} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} : 0 < |h| < \delta \right\}.$$

Lemma 36. För $a < b$, låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara en växande funktion. För varje $\alpha > 0$ så gäller

$$m^*(\{x \in [a, b] : D_+ f(x) \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha}(f(b) - f(a))$$

Bevis. Låt $\alpha > 0$ och definiera

$$E_\alpha = \{x \in]a, b[: D_+ f(x) \geq \alpha\}.$$

För $0 < \alpha' < \alpha$ definieras

$$\mathbb{I}_{\alpha'} = \{[c, d] \subseteq]a, b[: f(d) - f(c) \geq \alpha'(d - c)\}.$$

För att bevisa att $\mathbb{I}_{\alpha'}$ är en Vitaliövertäckning av E_α så fixeras $\epsilon' > 0,\ 0 < \alpha' < \alpha$ och $x \in E_\alpha$. Nu gäller $D_+ f(x) \geq \alpha > \alpha' > 0$, alltså

$$\limsup_{h \to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} > \alpha'. \tag{3.22}$$

Låt $\delta := \min\{\epsilon', b - x, x - a\}$. Notera att $\delta > 0$. Den strikta olikheten i (3.22) medför nu att

$$\exists h : 0 < |h| < \delta \text{ och } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \alpha'.$$

Ifall $h > 0$ så gäller $0 < h < b - x$ och därmed $a < x < x + h < b$. Sätt $c := x < x + h =: d$, varefter

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} > \alpha' \tag{3.23}$$

erhålls. Om $h < 0$ så gäller $0 < -h < x - a$ och därmed $a < x + h < x < b$. Sätt $c := x + h < x =: d$, varefter

$$\frac{f(c) - f(d)}{c - d} > \alpha'$$

erhålls. Notera att ovanstående uttryck är ekvivalent med (3.23). Sammanfattningsvis gäller

$$\forall x \in E_\alpha \ \exists [c, d] \in \mathbb{I}_{\alpha'} : m^*([c, d]) = d - c = |h| < \delta \le \epsilon',$$

vilket innebär att $\mathbb{I}_{\alpha'}$ är en Vitaliövertäckning av E_α.

Välj ett $\epsilon > 0$ och låt $\{I_1, ..., I_n\} \subseteq \mathbb{I}_{\alpha'}$ vara familjen bestående av disjunkta intervall som Lemma 35 garanterar existensen av. Nu gäller

$$\begin{aligned} m^*(E_\alpha) &= m^*(E_\alpha \setminus \bigcup_{k=1}^{N} I_k) + m^*(\bigcup_{k=1}^{N} I_k) \\ &< \epsilon + \sum_{k=1}^{N} m^*(I_k) \\ &= \epsilon + \sum_{k=1}^{N} (d_k - c_k) \\ &\le \epsilon + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\alpha'} \left(f(d_k) - f(c_k) \right) \\ &\le \epsilon + \frac{1}{\alpha'} \left(f(d) - f(c) \right), \end{aligned} \tag{3.24}$$

där den näst sista och sista olikheten kommer från det faktum att $I_k = [c_k, d_k] \in \mathbb{I}_{\alpha'}$ respektive att f är växande på $[a, b]$ och $[c_k, d_k], \ k = 1, ..., N$ är disjunkta. Eftersom (3.24) gäller för varje $\epsilon > 0$ så gäller

$$m^*(E_\alpha) \le \frac{1}{\alpha'} \left(f(d) - f(c) \right) \le \frac{1}{\alpha'} \left(f(b) - f(a) \right).$$

Eftersom ovanstående olikhet gäller för varje $0 < \alpha' < \alpha$ så gäller den även för $\alpha' = \alpha > 0$ och därmed är lemmat bevisat. $\square$

Sats 37. *Låt $f : I \to \mathbb{R}$, där $I \subset \mathbb{R}$ är ett intervall, vara en växande funktion. Då är f deriverbar nästan överallt.*

Bevis. Om $m^*(I) = 0$ så är saken klar. Annars existerar a, b med $a < b$ och $]a, b[\subseteq I$ och $m^*(I \setminus]a, b[) = 0$. Låt c, d med $c < d$ och $[c, d] \subset]a, b[$. f är deriverbar i $x \in]c, d[$ om $D_+ f(x) = D_- f(x) < \infty$. Notera att $D_+ f(x) \ge D_- f(x) \ge 0$ för varje $x \in]c, d[$. Låt

$$\begin{aligned} E_\infty &= \{x \in]c, d[: D_+ f(x) = \infty\}, \\ E &= \{x \in]c, d[: \infty > D_+ f(x) = D_- f(x)\} \\ E_> &= \{x \in]c, d[: \infty > D_+ f(x) > D_- f(x)\} \end{aligned}$$

vara en partition av $]c,d[$. Satsen är bevisad ifall det visas att $m^*(E_\infty) = m^*(E_>) = 0$. Enligt Lemma 36 erhålls $m^*(E_\infty) \leq \frac{1}{p}(f(d) - f(c))$ för varje $p > 0$, vilket ger det önskade påståendet $m^*(E_\infty) = 0$. Notera att

$$E_> = \bigcup_{p\in\mathbb{Q}} \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E_{p,q}$$

där

$$E_{p,q} := \{x \in]c,d[: \infty > D_+ f(x) > p > q > D_- f(x)\},$$

om $p > q$ och $E_{p,q} := \emptyset$ annars. Eftersom $\mathbb{Q}$ är numrerbar så implicerar $m^*(E_{p,q}) = 0$ att

$$0 = \sum_{p\in\mathbb{Q}} \sum_{q\in\mathbb{Q}} m^*(E_{p,q}) \geq m^* \left(\bigcup_{p\in\mathbb{Q}} \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E_{p,q} \right) = m^*(E_>) \geq 0.$$

Således räcker det att visa att $m^*(E_{p,q}) = 0$ för alla $p, q \in \mathbb{Q}$.

Låt $\epsilon > 0$. För $0 \leq q < p$ existerar, enligt Lemma 28, en öppen mängd F' sådan att $E_{p,q} \subset F'$ och $m^*(F') < m^*(E_{p,q}) + \epsilon$. Låt $F = F' \cap]c,d[$, vilket ger

$$E_{p,q} \subseteq F \subseteq]c,d[\text{ och } m^*(F) < m^*(E_{p,q}) + \epsilon. \tag{3.25}$$

Låt

$$\mathbb{I}_q := \{[r,s] \subset F : f(s) - f(r) < q(s-r)\}.$$

Härnäst visas att denna familj utgör en Vitaliövertäckning av $E_{p,q}$. I enlighet med beviset till Lemma 36 låtes $\epsilon' > 0, 0 \leq q < p$ och $x \in E_{p,q}$. Nu gäller

$$\liminf_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} < q.$$

Sätt $\delta = \min\{\epsilon', x - c, d - x\}$. Nu hittas ett h sådant att

$$0 < |h| < \delta \text{ och } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < q.$$

Ifall $h > 0$ så gäller $0 < h < d - x$, vilket medför $c < x < x + h < d$. Sätt $r := x, s := x + h$, varefter

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} < q \tag{3.26}$$

erhålls. Olikheten (3.26) gäller även om $h < 0$, vilket visas på samma sätt som i beviset till Lemma 36, med $r := x + h, s := x$. I båda fall tillhör $[r,s]$ mängden $\mathbb{I}_q$ och eftersom $x \in [r,s]$ och $m^*([r,s]) < \epsilon'$ så är $\mathbb{I}_q$ en Vitaliövertäckning av $E_{p,q}$.

Notera att $m^*([c,d]) < \infty$. Nu existerar en samling intervall $\{[r_k, s_k]\}_{k=1}^N \subset \mathbb{I}_q$ sådana att

$$m^* \left(E_{p,q} \setminus \bigcup_{k=1}^N [r_k, s_k] \right) < \epsilon. \tag{3.27}$$

Vidare gäller, för $k \in \{1, 2, ..., N\}$, att

$$E_{p,q} \cap [r_k, s_k] \subseteq \{x \in [r_k, s_k] : D_+ f(x) \geq p\},$$

varefter Lemma 36 ger att

$$m^*(E_{p,q} \cap [r_k, s_k]) \leq m^*(\{x \in [r_k, s_k] : D_+ f(x) \geq p\}) \leq \frac{1}{p}(f(s_k) - f(r_k)),$$

vilket resulterar i

$$\begin{aligned} m^* \left(E_{p,q} \cap \bigcup_{k=1}^{N} [r_k, s_k] \right) &= m^* \left(\bigcup_{k=1}^{N} (E_{p,q} \cap [r_k, s_k]) \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} m^*(E_{p,q} \cap [r_k, s_k]) \qquad (3.28) \\ &\leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{N} (f(s_k) - f(r_k)). \end{aligned}$$

Då

$$[r_k, s_k] \in \mathbb{I}_q : [r_i, s_i] \cap [r_j, s_j] \neq \emptyset \Leftrightarrow i = j \in \{1, 2, ..., N\},$$

så följer från definitionen på $\mathbb{I}_q$ att

$$\sum_{k=1}^{N} (f(s_k) - f(r_k)) < \sum_{k=1}^{N} q(s_k - r_k) < q m^*(F). \qquad (3.29)$$

Nu ger (3.27), (3.28), (3.29) samt (3.25)

$$\begin{aligned} m^*(E_{p,q}) &= m^* \left(E_{p,q} \setminus \bigcup_{k=1}^{N} [r_k, s_k] \right) + m^* \left(E_{p,q} \cap \bigcup_{k=1}^{N} [r_k, s_k] \right) \\ &< \epsilon + \frac{1}{p} \sum (f(s_k) - f(r_k)) \\ &\leq \epsilon + \frac{q}{p} m^*(F) \\ &\leq \epsilon \left(1 + \frac{q}{p} \right) + \frac{q}{p} m^*(E_{p,q}) \end{aligned}$$

Då $\epsilon > 0$ är godtyckligt valt och $p > q \geq 0$ så gäller

$$m^*(E_{p,q}) \leq \frac{q}{p} m^*(E_{p,q}),$$

vilket är omöjligt ifall $m^*(E_{p,q}) > 0$, alltså måste $m^*(E_{p,q}) = 0$. I annat fall gäller antingen $q < 0$ eller $p \leq q$. I dessa fall är $E_{p,q} = \emptyset$, vars mått är noll. Således gäller det att $m^*(E_>) = 0$ och därmed är f deriverbar nästan överallt i $[c, d]$. Eftersom $[c, d]$ var ett godtyckligt slutet intervall $\subset]a, b[$, så är f deriverbar nästan överallt i $\bigcup_{i=1}^{\infty} [a + \frac{1}{i}, b - \frac{1}{i}] =]a, b[$. Eftersom $I = (I \setminus]a, b[) \cup]a, b[$ och $m^*(I \setminus]a, b[) = 0$ så är f deriverbar nästanöverallt i I. $\square$

Sats 38. *Låt* $a, b \in \mathbb{R} : a < b$ *och låt* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$. *Om* f *är kontinuerlig i punkten* $x \in]a,b[$, *så gäller för varje* $c \in]a,b[$, *att*

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f(t)dt.$$

Om f *är växande så gäller ovanstående likhet nästan överallt* $x \in]a,b[$.

Bevis. Låt $c \in]a,b[$ och definiera $F(x) := \int_c^x f(t)dt$. F är då väldefinierad på $]a,b[$. Betrakta

$$D_h(F) := \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Låt $x \in]a,b[$ vara en punkt där f är kontinuerlig. För $0 < h < \min\{b - x, x - a\}$ gäller

$$\inf_{|t-x|<h} f(t) \leq D_h(F) \leq \sup_{|t-x|<h} f(t)$$

Låt nu $h \to 0$, varmed kontinuiteten medför

$$\lim_{h\to 0} \inf_{|t-x|<h} f(t) = \liminf_{t\to x} f(t) = f(x)$$

och

$$\lim_{h\to 0} \sup_{|t-x|<h} f(t) = \limsup_{t\to x} f(t) = f(x),$$

vilket i sin tur medför

$$\lim_{h\to 0} D_h(F) = f(x).$$

Om f är växande, så ger Sats 37 att f är deriverbar och därmed kontinuerlig nästan överallt. □

Lemma 39. (Partialintegration) Låt $f, g \in L^1([a,b])$ och definiera $F(x) := \int_a^x f(t)dt$, $G(x) := \int_a^x g(t)dt$. Nu gäller

$$F(b)G(b) = \int_a^b F(t)g(t)dt + \int_a^b G(t)f(t)dt.$$

Bevis. Betrakta st-planet och den uppdelning av kvadraten $]a,b[\times]a,b[$ som linjen $t = s$ orsakar. Låt $dA(s,t) := dsdt$. Eftersom $f, g \in L^1$ så kan Fubini-Tonellis sats tillämpas:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dt \int_a^b g(t)dt &= \int_a^b \int_a^b f(t)g(s)dsdt = \\
&= \iint_{]a,b[x]a,b[} f(t)g(s)dA(s,t) \\
&= \int_a^b \int_a^s f(t)g(s)dtds + \int_a^b \int_a^t f(t)g(s)dsdt \\
&= \int_a^b F(s)g(s)ds + \int_a^b f(t)G(t)dt.
\end{aligned}$$

□

Lemma 40. Låt $r < 1, t \in]-\pi, \pi]$ och $\delta > 0$. Den additiva inversen till derivatan av Poissonkärnan

$$T(r,t) := -\frac{\partial}{\partial t} P(r,t)$$

har följande egenskaper:

1. $T(r,t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \pi$,
2. $\lim_{r \to 1^-} \int_{\pi > |t| \geq \delta} |T(r,t)| dt = 0$,
3. $T(r,t) = -T(r,-t)$.

Bevis. Egenskaperna 1 och 3 erhålls direkt från

$$\frac{\partial}{\partial t} P(r,t) = -\frac{(1-r^2)(2r \sin t)}{(1+r^2-2r\cos t)^2}, \tag{3.30}$$

med beaktandet av $\{t \in]-\pi, \pi] : \sin(t) \geq 0\}$. För att visa egenskap 2 fixeras $\delta > 0$. Enligt egenskaperna 1 och 3 samt (3.30) gäller

$$\begin{aligned}
\int_{\pi > |t| \geq \delta} |T(r,t)| dt &= 2 \int_{\pi > t \geq \delta} T(r,t) dt \\
&\leq 2 \int_{\pi > t \geq \delta} \frac{2r(1-r^2)}{(1+r^2-2r\cos\delta)^2} dt \\
&\leq \frac{4\pi r(1-r^2)}{(1+r^2-2r\cos\delta)^2},
\end{aligned}$$

varefter egenskap 2 följer då $r \to 1^-$. □

Lemma 41. För varje $0 \leq r < 1$ och mätbar mängd $C \subseteq [-\pi, \pi]$ gäller

$$0 \leq \int_C -t \frac{\partial}{\partial t} P(r,t) dt \leq 4\pi.$$

Bevis. Från egenskaperna 1 och 3 i Lemma 40 följer att $-t\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)$ är jämn och positiv på intervallet $[-\pi, \pi]$. Nu gäller, för $0 < r < 1$, att

$$0 \leq \int_C -t \frac{\partial}{\partial t} P(r,t) dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} -t \frac{\partial}{\partial t} P(r,t) dt.$$

Vidare gäller

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (t-\pi) \frac{\partial}{\partial t} P(r,t) dt &= \left[(t-\pi) \int_{-\pi}^{t} \frac{\partial}{\partial x} P(r,x) dx \right]_{t=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} P(r,t) - P(r,-\pi) dt \\
&= -2\pi + 2\pi P(r,-\pi),
\end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} t \frac{\partial}{\partial t} P(r,t) dt &= -2\pi + 2\pi P(r,-\pi) + \pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial t} P(r,t) dt \\
&= -2\pi + 2\pi P(r,-\pi) = -2\pi + 2\pi \frac{1-r^2}{(1+r)^2}.
\end{aligned}$$

Således gäller

$$0 \leq \int_C -t\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt \leq 4\pi.$$

□

3.3 Radiella gränsvärdet för en Poissonintegral

Sats 42. *För en Poissonintegral*

$$\int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)f(t)dt,$$

där $f \in L^1([0,2\pi[)$*, existerar det radiella gränsvärdet* ($r \to 1^-$) *nästan överallt* $\theta \in [0,2\pi[$*. Ifall funktionen* f *är kontinuerlig i* θ*, så är det radiella gränsvärdet av Poissonintegralen* $f(\theta)$*.*

Bevis. Fixera $\epsilon > 0$ och låt $f \in L^1([0,2\pi[)$. Nu kan f utvidgas periodiskt till $\mathbb{R}$, vilket leder till att, för ett givet θ, så är avbildningen $\theta - t \mapsto f(t)$ är väldefinierad $t \in \mathbb{R}$. Låt denna avbildning betecknas med $g = g_\theta$. Låt

$$\begin{aligned} G(x) &:= \int_{-\pi}^{x} g(t)dt, \\ F(x) &:= \int_{-\pi}^{x} f(t)dt = \int_{-\pi}^{2\pi} \chi_{t<x} f(t)dt \text{ och} \\ H(l) &:= \int_{-\pi}^{2\pi} l(t)f(t)dt,\ l \in L^\infty([-\pi,2\pi]). \end{aligned}$$

Låt

$$M = \{\theta \in]-2\pi, 3\pi[: F \text{ är deriverbar i } \theta\}$$

och låt

$$\phi(A) := \int_{-\pi}^{2\pi} \chi_A f(t)dt,\ A \subseteq [-\pi, 2\pi].$$

Eftersom H är begränsad och linjär, så existerar, enligt Lemma 21, en positiv och en negativ mängd X respektive Y med avseende på ϕ så att $X \cup Y = [-\pi, 2\pi]$ och $X \cap Y = \emptyset$. Nu gäller

$$F(x) = F_+(x) + F_-(x)$$

där

$$F_+(x) := \int_{-\pi}^{2\pi} \chi_{t<x \wedge t\in X} f(t)dt \text{ och } F_-(x) := \int_{-\pi}^{2\pi} \chi_{t<x\wedge t\in Y} f(t)dt.$$

Eftersom

$$F_+(x_2) - F_+(x_1) = H(\chi_{t<x_2\wedge t\in X}) - H(\chi_{t<x_1 \wedge t\in X}) = H(\chi_{x_1 \leq t < x_2 \wedge t \in X}) \geq 0$$

för varje $x_1 < x_2$, så är F_+ är växande. På samma sätt visas att F_- är avatagande. Sats 37 ger att F_+ och F_- och därmed F är deriverbar nästan överallt

$x \in [-\pi, 2\pi]$. Periodiciteten medför att F är deriverbar nästan överallt $x \in \mathbb{R}$, så $m(]-3\pi, 2\pi[\setminus M) = 0$. Definiera även $h(x) = \frac{d}{dx}G(x)$ och $h_f(x) = h(\theta - x)$ för $x \in M$. Notera att, för varje $\theta \in M$ gäller

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}F(x) &= \frac{d}{dx}\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = \frac{d}{dx}\int_{-\pi}^{x} g(\theta - t)dt \\
&= \frac{d}{dx}\int_{\theta - x}^{\theta+\pi} g(u)du = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\pi}^{\theta+\pi} g(u)du - \int_{-\pi}^{\theta - x} g(u)du\right) \\
&= -\frac{d}{dx}\int_{-\pi}^{\theta - x} g(u)du = -\frac{d}{dx}G(\theta - x),
\end{aligned}$$

vilket innebär att G är deriverbar i 0, dvs.

$$|h(0)| < \infty. \tag{3.31}$$

Låt $\theta \in M \cap [0, 2\pi[$. Fixera $\epsilon > 0$. Eftersom $g(t)$ och $P(r,t)$ är periodiska med perioden 2π så erhålls, för $r < 1$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) f(t)dt - 2\pi h_f(\theta) &= \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\left(f(t) - h_f(\theta)\right) dt \\
&= \int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} P(r, \theta - t)\left(g(\theta - t) - h(0)\right) dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)\left(g(t) - h(0)\right) dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(g(t) - h(0)\right)\left(\int_{-\pi}^{t} \frac{\partial}{\partial y}P(r,y)dy\right) dt \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} P(r, -\pi)\left(g(t) - h(0)\right) dt
\end{aligned}$$

där

$$P(r,t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\partial}{\partial y}P(r,y)dy + P(r,-\pi)$$

har använts. Detta gäller då $P(r,t)$ är kontinuerligt deriverbar med avseende på t. Vidare kan Lemma 39 tillämpas, vilket ger

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \left(g(t) - h(0)\right)\left(\int_{-\pi}^{t} \frac{\partial}{\partial y}P(r,y)dy\right) dt \\
&= \left(G(\pi) - 2\pi h(0)\right)\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial t}P(r,y)dy - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\right)\left(G(t) - (t+\pi)h(0)\right) dt \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\right)\left(G(t) - (t+\pi)h(0)\right) dt \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\right)\left(G(t) - th(0)\right) dt \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\right)\pi h(0)dt \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\right)\left(G(t) - th(0)\right) dt.
\end{aligned}$$

Eftersom G är deriverbar i punkten 0 så hittas ett $\pi/2 > \delta_1 > 0$ sådant att $\sup_{|t|<\delta_1}\left|\frac{G(t)-G(-t)}{2t} - h(0)\right| < \frac{\epsilon}{16\pi}$. Nu följer

$$\begin{aligned}
-\int_{-\delta 1}^{\delta_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\right)G(t)dt &= \int_0^{\delta_1} G(t)\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt + \int_{-\delta_1}^{0} G(t)\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt \\
&= \int_0^{\delta_1} G(t)\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt + \int_0^{\delta_1} G(-t)\left[\frac{\partial}{\partial y}P(r,y)\right]_{y=-t} dt \\
&= \int_0^{\delta_1} (G(t)-G(-t))\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt,
\end{aligned}$$

där tredje likheten är giltig på grund av egenskap 3 i Lemma 40. Vidare gäller

$$\int_{-\delta 1}^{\delta_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\right)th(0)dt = \int_0^{\delta_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\right)2th(0)dt,$$

då $t\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)$ är jämn med avseende på t. Med hjälp av Lemma erhålls 41,

$$\begin{aligned}
&\left|-\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\right)(G(t)-th(0))\,dt\right| \\
&\qquad = \left|-\int_0^{\delta_1}\left(t\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\right)\left(\frac{G(t)-G(-t)}{t} - 2h(0)\right)dt\right| \\
&\qquad \le 2\sup_{0<t<\delta_1}\left|\frac{G(t)-G(-t)}{2t} - h(0)\right|\int_0^{\delta_1}\left|t\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\right|dt \\
&\qquad \le \frac{\epsilon}{8\pi}\int_0^{\delta_1} -t\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)dt < \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

Enligt Lemma 40 egenskap 2 finns det ett $0 < \delta_2 \in]0,1[$ sådant att $r \in]\delta_2, 1[$ medför

$$\begin{aligned}
&\left|-\int_{\pi>|t|\ge\delta_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\right)(G(t)-th(0))\,dt\right| \\
&\qquad \le \sup_{t\in]-\pi,\pi[}|G(t)-th(0)|\int_{\pi>|t|\ge\delta_1}\left|\frac{\partial}{\partial t}P(r,t)\right|dt \\
&\qquad \le \left(||g||_{L^1} + 2\pi|h(0)|\right)\epsilon
\end{aligned}$$

på grund av Lemma 40. Eftersom $||g||_{L^1} = ||f||_{L^1} < \infty$ och (3.31) så gäller, för nästan alla θ, att

$$\lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)f(t)dt = h_f(\theta).$$

Om f är kontinuerlig i θ så är g kontinuerlig i 0, vilket med hjälp av Sats 38 ger att $G'(0) = g(0)$ och därmed gäller $h_f(\theta) = h(0) = G'(0) = g(0) = f(\theta)$. □

Sats 43. *Om $f \in H^p, 1 < p < \infty$, så existerar en funktion G sådan att*

$$\lim_{r\to 1^-} f(re^{it}) = G(t),$$

för nästan varje $t \in [0, 2\pi[$

Bevis. Från Sats 33 följer att f har följande integralrepresentation

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)F(t)dt.$$

för något $F \in L^p$. Sats 42 ger nu att $\lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ existerar nästan överallt och ges av $\frac{d}{dt}\int_0^t F(x)dx$ nästan överallt. $\square$

3.4 Viktiga samband mellan Hardyrum och Poissonintegraler

Sats 44. *Låt $f \in \mathbb{A}(\mathbb{D})$ och $1 < p < \infty$. Det gäller att $f \in H^p$ om och endast om det existerar ett entydigt $F \in L^p$ sådant att*

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)F(t)dt,$$

dvs. Poissonintegralen är en bijektiv, linjär operator $\mathbb{H}^p \to H^p$.

Bevis. Anmärkning 2 till Sats 13 ger att om Poissonintegralen av en funktion $F \in L^p$ är analytisk så tillhör Poissonintegralen H^p. Sats 33 ger att varje $f \in H^p$ kan framställas som en Poissonintegral av en funktion $F \in L^p$. Det kvarstår att visa att F är entydigt bestämd nästan överallt. Låt $H \in \mathcal{C}([0, 2\pi])$. Nu ger Sats 42 att

$$H(\theta) = \lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)H(t)dt \ \forall\theta \in]0, 2\pi[.$$

Låt $F, G \in L^p$ sådana att

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)F(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)G(t)dt.$$

Sätt

$$J(r,\theta) := \frac{F(\theta) - G(\theta)}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)H(t)dt.$$

Nu gäller

$$(F(\theta) - G(\theta))H(\theta) = \lim_{r\to 1^-} J(r,\theta).$$

Eftersom H är kontinuerlig på en kompakt mängd, så gäller $|H(t)| < M$ för varje $t \in [0, 2\pi]$, för något $M < \infty$, varefter

$$|J(r,\theta)| \leq |F(\theta) - G(\theta)|M \ \forall 0 < r < 1$$

erhålls med hjälp av Lemma 10. Eftersom $|F - G|M \in L^p \subset L^1$ så ger Lebesgues dominerade konvergenssats att

$$\lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J(r,\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (F(\theta) - G(\theta))H(\theta)d\theta. \tag{3.32}$$

Vidare gäller

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J(r,\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(F(\theta)-G(\theta))P(r,\theta-t)H(t)dtd\theta.$$

Eftersom

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(\theta)-G(\theta)|P(r,\theta-t)|H(t)|dtd\theta &\le \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(\theta)-G(\theta)|d\theta\\ &\le M\,||F-G||_{L^p}\end{aligned}$$

så följer från Fubini-Tonellis sats, integralens linearitet, definitionen av F och G samt att Poissonkärnan är jämn med avseende på det andra argumentet, att

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J(r,\theta)d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(F(\theta)-G(\theta))P(r,\theta-t)H(t)d\theta dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(t)(f(re^{it})-f(re^{it}))dt = 0.\end{aligned}$$

Således är den begränsade, linjära operatorn FG:s restriktion till kontinuerliga funktioner från $[0,2\pi]$ identisk med noll, där $FG : L^q \to \mathbb{C}$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$ är genererad av $F-G\in L^p$, dvs. för varje $H\in L^q$ är

$$FG(H) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(t)(F(t)-G(t))dt.$$

Enligt Sats 29 så existerar, för varje $H\in L^q([0,2\pi])$, en följd

$$H_j \in \mathcal{C}([0,2\pi]) : \lim_{j\to\infty} ||H-H_j||_{L^q} = 0.$$

Nu gäller

$$|FG(H_j)-FG(H)| \le ||(H_j-H)(F-G)||_{L^1} \le ||H_j-H||_{L^q}\,||F-G||_{L^p},$$

Vilket medför att

$$FG(H) = \lim_{j\to\infty} FG(H_j) = 0.$$

Om $F-G\equiv 0$ så gäller $FG\equiv 0$ som sig bör. Enligt Sats 26 är den genererande funktionen entydig nästan överallt, vilket medför att $F-G=0$ nästan överallt.

□

Sats 45. *Låt* $1<p<\infty$. *Nu är*

$$J:\mathbb{H}^p\to H^p,\ J(F)(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)F(t)dt$$

en isomorfism.

Bevis. Sats 44 ger att J är bijektiv. Eftersom integralen är linjär så är J är linjär och därmed är J en isomorfism. □

3.5 Subharmonicitet

Definition 17. (Subharmonicitet) Låt $B \subset \mathbb{C}$ vara en begränsad domän och $u : B \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Vidare, låt M vara en godtycklig domän sådan att $\overline{M} \subset B$ och U vara en godtycklig funktion med egenskaperna: harmonisk i M, samt kontinunerlig i $\overline{M}$. u sägs vara subharmonisk om det för varje mängd M och funktion U, med egenskaperna givna ovan, gäller att

$$\forall z \in \partial M : u(z) \leq U(z) \Rightarrow \forall s \in M, u(s) \leq U(s) \tag{3.33}$$

.

Sats 46. *Låt $u : B \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion, där $B \subset \mathbb{C}$ är en begränsad domän. Funktionen u är subharmonisk i B om och endast om det för varje $z_0 \in B$ finns ett $r_0 > 0$, så att*

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r_0\} \subseteq B \text{ och } u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt$$

gäller för varje $r < r_0$.

Bevis. Se [5]. □

Sats 47. *Låt $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ vara en subharmonisk funktion. Då gäller att*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it})dt \tag{3.34}$$

är en icke-avtagande funktion för $0 \leq r < 1$.

Bevis. Se [5]. □

Sats 48. *Låt $M \subset \mathbb{C}$ vara en domän och låt $f : M \to \mathbb{C}$ vara analytisk. Då är $|f(z)|^p$ subharmonisk i dess definitionsmängd, där $p > 0$.*

Bevis. Låt $f(z)$ vara en funktion enligt beskrivningen ovan. Fixera $z_0 \in \mathbb{D}$ i enlighet med Sats 46. Ifall $f(z_0) = 0$ så är olikheten i Sats 46 uppfylld. Ifall $f(z_0) \neq 0$ så hittas ett $r_0 > 0$, sådant att $f(z) \neq 0$ för alla $z \in B(z_0, r_0)$ och $B(z_0, r_0) \subseteq M$. Detta är möjligt då f är kontinuerlig och M är en öppen mängd. Eftersom $f(z)$ är analytisk och olika noll så är även $f(z)^p,\ p > 0$ analytisk i $B(z_0, r_0)$. Från Lemma 7 följer nu att

$$f(z_0)^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})^p dt$$

för $r < r_0$. Vidare tillämpas triangelolikheten, varefter

$$|f(z_0)|^p = |f(z_0)^p| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})^p dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^p dt$$

erhålls. Nu medför Sats 46 det önskade resultatet. □

Sats 49. *Låt $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ vara analytisk. Då är $D_p(r, f)$ en icke-avtagande funktion med avseende på r.*

Bevis. Resultatet följer direkt från satserna 48 och 47. $\square$

Följdsats 50.

$$\sup_{r<1} D_p(r, f) = \lim_{r\to 1^-} D_p(r, f).$$

Sats 51. *För $p \geq 1$ är $||f||_{H^p} := \lim_{r\to 1^-} D_p(r, f)$ en norm.*

Bevis. Låt $p \geq 1, \alpha \in \mathbb{C}$ samt funktionerna $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ vara analytiska.

- $||f||_{H^p} \geq 0$.
  Denna egenskap följer direkt från definitionen.

- $||\alpha f||_{H^p} = |\alpha|\, ||f||_{H^p}$.
  Det gäller att

$$\left(\int |(af)(re^{it})|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |af(re^{it})|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |a|^p |f(re^{it})|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= |a| \left(\int |f(re^{it})|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

  Från detta erhålls, med hjälp av Följdsats 50 att $||\alpha f||_{H^p} \leq |\alpha|\, ||f||_{H^p}$ ifall supremum först tas på höger led, medan $||\alpha f||_{H^p} \geq |\alpha|\, ||f||_{H^p}$ erhålls då supremum först tas på vänster led.

- $||f||_{H^p} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.
  Antag $||f||_{H^p} = 0$. Låt, som antites, $f(z) > 0$ på en mängd A med positivt ytmått. Nu existerar ett $r_0 < 1$ sådant att

$$0 < D_p(r_0, f) \leq \sup_{r<1} D_p(r, f) = 0,$$

  vilket är en motsägelse. Således gäller $f(z) = 0$ nästan överallt $z \in \mathbb{D}$, varefter kontinuiteten medför att $f \equiv 0$. Den andra implikationen är trivial.

- $||f + g||_{H^p} \leq ||f||_{H^p} + ||g||_{H^p}$
  Fixera $r < 1$ och definiera $\phi_r, \gamma_r \in L^p$ genom $\phi_r(t) := f(re^{it}), \gamma_r(t) := g(re^{it})$. Nu gäller

$$D_p(r, f + g) = ||\phi_r + \gamma_r||_{L^p} \leq ||\phi_r||_{L^p} + ||\gamma_r||_{L^p} = D_p(r, f) + D_p(r, g),$$

  där triangelolikheten för L^p- normen tillämpats. Höger sida av olikheten är växande med avseende på r enligt Sats 49, vilket ger

$$D_p(r, f + g) \leq ||f||_{H_p} + ||g||_{H_p} \;\; \forall r < 1,$$

  Låt nu $r \to 1^-$ för att erhålla triangelolikheten för H^p-normen.

□

3.6 Blaschkeprodukten

Definition 18. Låt $a := (a_n)_{n=1}^N$, $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $a_n \in \mathbb{C}$ vara en följd med $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq ... < 1$. Låt även $m \in \mathbb{N}$. En Blaschke produkt är en funktion $B : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definierad genom

$$B(z) = B_{a,m}(z) := z^m \prod_{n=1}^{N} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a}_n z} \tag{3.35}$$

Lemma 52. Låt $a \in \mathbb{C}, |a| < 1$. För $|z| \leq 1$ gäller

$$\left| \frac{|a|}{a} \frac{a - z}{1 - \overline{a} z} \right| \leq 1$$

där olikheten är strikt för $|z| < 1$ och likhet för $|z| = 1$.

Bevis. För $|z| \leq 1$ gäller

$$|a - z|^2 = (\overline{a} - \overline{z})(a - z) = |a|^2 + |z|^2 - \overline{a} z - a \overline{z}$$

och

$$|1 - \overline{a} z|^2 = (1 - \overline{a} z)(1 - a \overline{z}) = 1 + |a|^2 |z|^2 - \overline{a} z - a \overline{z},$$

vilket medför att, för $|z| < 1$ gäller

$$|a - z|^2 - |1 - \overline{a} z|^2 = |a|^2 + |z|^2 - 1 - |az|^2 = |z|^2 (1 - |a|^2) - (1 - |a|^2) < 0$$

dvs.

$$\left| \frac{|a|}{a} \frac{a - z}{1 - \overline{a} z} \right| = \frac{|a - z|}{|1 - \overline{a} z|} < 1.$$

För $|z| = 1$ gäller

$$\left| \frac{|a|}{a} \frac{a - z}{1 - \overline{a} z} \right| = \frac{|a - z|}{\left| z \left(\frac{\overline{z}}{|z|^2} - \overline{a} \right) \right|} = \frac{1}{|z|} \frac{|a - z|}{|\overline{z - a}|} = 1.$$

□

Sats 53. *Låt $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ och $a = (a_n)_{n=1}^\infty$ vara en följd med $a_n \in \mathbb{C}$ och $0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| < 1$ för varje $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. En Blaschkeprodukt $B_{a,m}$ är identisk med noll om*

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| < 1.$$

Bevis. Antag att a är en icke-avtagande följd och att $\lim_{n \to \infty} |a_n| < 1$. Nu ger Lemma 52 att det för varje $z \in \mathbb{D}$ gäller att

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \left| \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} \right| < 1,$$

varefter $B_{a,m}(z) = 0$ erhålls. □

Sats 54. *Låt B vara en Blaschkeprodukt med $\#(a) = \infty$. Låt $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$. Nu konvergerar den partiella Blaschkeprodukten B_n likformigt, i $\overline{B}(0, R)$, mot en funktion $B(z)$ olik nollfunktionen, för varje $R < 1$. Funktionen B:s nollställen ges av följden a. Det gäller även att $|B(z)| < 1,\ z \in \mathbb{D}$ och $\lim_{r\to 1} |B(re^{it})| = 1$ nästan överallt $t \in [0, 2\pi[$.*

Bevis. I beviset nedan har $m = 0$ använts. Om $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ så gäller $|z|^m = 1$, då $|z| = 1$ och $|z|^m < 1$, då $|z| < 1$ varmed det önskade resultatet följer från fallet $m = 0$. Låt a vara en följd med $\#(a) = \infty$ och fixera $R < 1$. För $|z| \leq R$ och $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gäller

$$\left|1 - \frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k - z}{1 - \overline{a}_k z}\right| = \left|\frac{a_k - |a_k|^2 z - |a_k|a_k + |a_k|z}{a_k(1 - \overline{a}_k z)}\right| = \frac{|a_k + |a_k|z - |a_k|(|a_k|z + a_k)|}{|a_k||(1 - \overline{a}_k z)|}$$
$$= \frac{(1 - |a_k|)\left|z + \frac{a_k}{|a_k|}\right|}{|1 - \overline{a}_k z|} \leq \frac{2(1 - |a_k|)}{1 - R}.$$

Om $M := \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}(1 - |a_n|) < \infty$ så gäller, för varje $K > 1$,

$$\sum_{n=1}^{K}\left(1 - \left|\frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k - z}{1 - \overline{a}_k z}\right|\right) \leq \sum_{n=1}^{K}\left|1 - \frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k - z}{1 - \overline{a}_k z}\right| \leq \sum_{n=1}^{K}\frac{2(1 - |a_k|)}{1 - R} = \frac{2M}{1 - R}.$$

Konvergensen ($K \to \infty$) är således likformig, enligt Weierstrass M-test, för $|z| \leq R$. Enligt Lemma 52 kan Sats A.2 i appendix tillämpas, vilket resulterar i att

$$\left|\prod_{n\in\mathbb{N}}\frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k - z}{1 - \overline{a}_k z}\right| = \prod_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k - z}{1 - \overline{a}_k z}\right| > 0. \text{ för } z \notin a, |z| \leq R.$$

Att även denna konvergens är likformig fås från bevistekniken använd i Sats A.2, dvs. från olikheten i uttrycket (A.1).

Att $|B(z)| < 1, z \in \mathbb{D}$ följer från att faktorerna är < 1, enligt Lemma 52, vilket ger $|B(z)| < |B_n(z)| < 1$, för $z \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}$. Slutligen betraktas de analyitska funktionerna

$$V_n : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, V_n(z) = \frac{B(z)}{B_n(z)}, n = 1, 2, ...$$

Notera att $|V_n(z)| \leq 1$ för $z \in \mathbb{D}$, vilket medför att

$$V : \mathbb{D} \to \mathbb{D} : V(z) := \lim_{n\to\infty} V_n(z)$$

tillhör H^∞, vilket i sin tur medför att det radiella gränsvärdet existerar nästan överallt. Låt $V(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} V(re^{it})$ där gränsvärdet är väldefinierat nästan överallt. Låt denna mängd betecknas med MR, dvs.

$$MR := \left\{t \in [0, 2\pi[: \lim_{r\to 1^-} V(re^{it}) \text{ exists}\right\}. \tag{3.36}$$

På denna mängd är även $B(e^{it}) := \lim_{r\to 1^-} B(re^{it})$ väldefinierad. Eftersom det radiella gränsvärdet existerar nästan överallt, så är Lebesguemåttet $m([0,2\pi]\setminus MR) = 0$. Sats 49 ger första olikheten och Lebesgues dominerade konvergenssats, med dominerande funktionen $g \equiv 1$, ger den andra likheten i uttrycket nedan. Den sista likheten erhålls av att den partiella Blaschkeprodukten är kontinuerlig i $\overline{\mathbb{D}}$ och har beloppet ett på randen:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \left|V_n\left(re^{it}\right)\right| dt = \int_{MR} \left|V_n\left(re^{it}\right)\right| dt \leq \lim_{r\to 1^-} \int_{MR} \left|V_n\left(re^{it}\right)\right| dt \\ = \int_{MR} \left|V_n\left(e^{it}\right)\right| dt = \int_{MR} \left|B\left(e^{it}\right)\right| dt.\end{aligned}$$

För $R < 1$ och $r \leq R$ låt $K \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ vara sådant att $|a_K| > R$. Existensen av ett sådant K fås från det faktum att $|a_n| \to 1^-$, då $n \to \infty$, eftersom Blaschkeprodukten är olika nollfunktionen. För $n \geq K$ gäller $|V_n(z)| > 0, |z| \leq R$. Nu ger den likformiga konvergensen för $B_n \to B$ att även $V_n \to 1$ likformigt, varefter

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{MR} \left|V\left(re^{it}\right)\right| dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{MR} \left|V_n\left(re^{it}\right)\right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{MR} \left|B\left(e^{it}\right)\right| dt.$$

Antag att det finns ett $x \in [0,1[$ och en mätbar mängd M med $m(M) > 0$ sådana att $|B(e^{it})| \leq x < 1$ för varje $t \in M \subseteq MR \subseteq [0,2\pi]$. Då gäller

$$\int_M |B(e^{it})| dt + \int_{MR\setminus M} |B(e^{it})| dt < m(M) + m([0,2\pi] \setminus M) = 2\pi$$

Alltså $1 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{MR} \left|B\left(e^{it}\right)\right| dt < 1$ vilket är omöjligt. Alltså måste $|B(z)| = 1$ gälla nästan överallt på enhetscirkeln. □

Lemma 55. Låt $M \subseteq \mathbb{C}$ vara en domän och låt $f \in \mathbb{A}(M)$. Antingen är $f \equiv 0$ eller så har f ett numrerbart antal nollställen i $\mathbb{M}$, samt ett ändligt antal nollställen i varje kompakt delmängd.

Bevis. Låt $C \subseteq M$ vara kompakt och definiera $\hat{f}_C := f|_C$. Antag att $\#(Zero(\hat{f}_C)) = \infty$. Nu existerar en följd av nollställen i den kompakta disken, varefter Bolzano-Weierstrass sats ger att det existerar en konvergent delföljd a och därmed en hopningspunkt i C. Nu ger indentitets satsen för analytiska funktioner att $f \equiv 0$ i M, då $f \equiv 0$ på en sluten delmängd, $\overline{Zero(\hat{f}_C)} \subset M$, med hopningspunkt. Således har en funktion f som inte är identisk med nollfunktionen ett ändligt antal nollställen i varje kompakt delmängd av M. Eftersom det existerar en numrerbar mängd $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ av kompakta delmängder av M sådana att

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,$$

så är $\#Zero(f) < \infty$ eller så har $Zero(f)$ samma kardinalitet som $\mathbb{N}$. □

Sats 56 (Jensens formel)**.** *Låt $M \subseteq \mathbb{C}$ vara en domän och låt $f \in \mathbb{A}(M)$ sådan att $|f(0)| \in \mathbb{R}_{>0}$. Fixera $r > 0$ med $\overline{B}(0,r) \subset M$. Om*

$$Zero(f) \cap \partial B(0,r) = \emptyset,$$

så gäller

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{it})|dt = \ln|f(0)| + \sum_{a\in A_r} m_a \ln\frac{r}{|a|},$$

där $A_r := Zero(f) \cap B(0,r)$ och m_a är multipliciteten för nollstället a. Notera att $\#(A_r) < \infty$ och $m_a < \infty$ för alla $a \in A_r$, så summan är väldefinierad.

Bevis. Fixera $0 < r < 1$ och antag att f uppfyller satsens villkor. Låt $\hat{f}_r = f|_{B(0,r)}$.Enligt Lemma 55 har $\hat{f}_r$ ett ändligt antal nollställen. Vidare hittas ett $R > r$ sådant att $Zero(\hat{f}_r) = Zero(\hat{f}_R)$ och $B(0,R) \subseteq M$, eftersom $Zero(\hat{f}_R) < \infty$ för alla $R < 1$ och $\overline{B}(0,r) \subset M$. Eftersom $\frac{1}{r}A_r, \frac{1}{r}B(0,r) \subseteq M$ så ger Lemma 52, för $a \in A_r$, att

$$\left|\frac{r|a|}{a}\frac{a-z}{r^2-\overline{a}z}\right| = \left|\frac{|b|}{b}\frac{b-s}{1-\overline{b}s}\right| \leq 1,$$

där $b = \frac{a}{r}$ och $s = \frac{z}{r}$. Vidare erhålls att olikheten är en likhet om och endast om $|z| = r$. Låt Blaschkeprodukten h och funktionen $g \in \mathbb{A}(B(0,R))$ vara definierade genom

$$h(z) := \prod_{a\in A_r}\prod_{i=1}^{m_a}\left(\frac{r|a|}{a}\frac{a-z}{r^2-\overline{a}z}\right) = \prod_{a\in A_r}\left(\frac{r|a|}{a}\frac{a-z}{r^2-\overline{a}z}\right)^{m_a}$$

respektive

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{h(z)} & z \in B(0,R) \setminus A_r \\ \lim_{s\to z}\frac{f(s)}{h(s)} & z \in A_r. \end{cases}$$

Från konstruktionen är g väldefinierad, analytisk och saknar nollställen. Då är $\ln g$ analytisk i $B(0,R)$, varefter medelvärdessatsen, dvs. Lemma 7, ger

$$\ln g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(g(re^{it})).$$

Vidare gäller

$$\ln|g(0)| = \Re\ln g(0) = \Re\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln(g(re^{it}))dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|g(re^{it})|dt$$

Eftersom $f(0) \neq 0$ så gäller $h(0) \neq 0$ och

$$\ln|g(0)| = \ln|f(0)| - \ln|h(0)| = \ln|f(0)| - \sum_{a\in A_r} m_a \ln\frac{|a|}{r}.$$

Notera till sist att för $z \in \partial B(0,r)$ gäller

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{h(z)}\right| = |f(z)|\,.$$

Sammanfattningsvis gäller

$$\ln|f(0)| - \sum_{a\in A_r} m_a \ln\frac{|a|}{r} = \ln|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|g(re^{it})|dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{it})|dt,$$

dvs. den önskade likheten. □

Lemma 57. *Låt $0 \not\equiv f \in H^p,\ p \geq 1$. Då ges f:s nollställen inkluderande duplikat i enlighet med respektive multiplicitet av en icke-avtagande följd $a = (a_n)_{n=1}^N$ med $\sum_{n=1}^N (1-|a_n|) < \infty$, där $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$.*

Bevis. Lemma 55 ger att f högst har ett numrerbart antal nollställen inkluderande multipliciteter. Eftersom antalet nollställen samt deras multipliciteter, i varje kompakt disk är ändliga, så kan en växande följd, som uppfyller alla krav utom eventuellt $\sum_n (1-|a_n|) < \infty$, skapas. Om $Zero(f) < \infty$ så är även det nyss nämnda villkoret uppfyllt. Låt nu $|Zero(f)| = \mathbb{N}$. Antag att f har ett nollställe med multipliciteten m_0 i 0. Eftersom f är analytisk måste f vara av formen

$$z^{m_0}\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

där $b_0 \neq 0$. Definiera $g \in \mathbb{A}(\mathbb{D})$ genom

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z^{m_0}} & z \neq 0 \\ b_0 & z = 0. \end{cases}$$

Eftersom f:s nollställen är numrerbara så existerar för varje $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$$r_n \in \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right] \text{ med } \partial B(0, r_n) \cap Zero(f) = \emptyset.$$

För dessa r_n gäller nu, enligt Sats 56,

$$\ln|g(0)| - \sum_{a\in A_{r_n}} m_a \ln\frac{|a|}{r_n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|g(r_n e^{it})|dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\ln|f(r_n e^{it})| - \ln r_n^{m_0}\right) dt,$$

vilket medför

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(r_n e^{it})|dt &= \ln r_n^{m_0} + \ln|b_0| - \sum_{a\in A_{r_n}} m_a \ln\frac{|a|}{r_n} \\ &= \ln(|b_0| r_n^{m_0}) + \sum_{a\in A_{r_n}} m_a \ln\frac{r_n}{|a|}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

där $A_r = Zero(f) \cap B(0,r) \setminus \{0\}$.

Notera att då ln är konkav på $\mathbb{R}_{>0}$, så ger Jensens olikhet

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{it})|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\ln\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt\right)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall p \in]0,\infty[. \tag{3.38}$$

Eftersom

$$m\left(B\left(0,\frac{r_n+1}{2}\right)\cap Zero(f)\right)=0$$

så kan denna mängd negleras vid integreringen nedan. Den andra olikheten nedan ges av (3.38) och att e^x är växande

$$\begin{aligned}e^{\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{it})|dt\right]} &= \left(e^{\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{it})|^p dt\right]}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p dt\right)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall 0<p<\infty.\end{aligned}$$

Om $f\in H^p$ så gäller alltså

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(r_ne^{it})|dt}\le ||f||_{H^p}\,. \tag{3.39}$$

Olikheten (3.39) ger nu

$$\prod_{a\in A_{r_n}}\left(\frac{r_n}{|a|}\right)^{m_a}=e^{\sum_{a\in A_{r_n}}m_a\ln\frac{r_n}{|a|}}=e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(r_ne^{it})|dt-\ln(|b_0|r_n^{m_0})}\le\frac{||f||_{H^p}}{|b_0|r_n^{m_0}}$$

för varje $n\in\mathbb{Z}_{\ge 2}$. Låt $n\to\infty$, vilket medför att $r_n\to 1^-$ och eftersom vänster led är växande, både med avseende på faktorn r_n och summeringen över A_{r_n}, så existerar gränsvärdet

$$\prod_{a\in A}\left(\frac{1}{|a|}\right)^{m_a}$$

eller

$$\prod_{a\in A}\prod_{k=1}^{m_a}|a|\ge\frac{|b_0|}{||f||_{H^p}}>0,$$

där $A=Zero(f)\setminus\{0\}$. Nu ger Sats A.2 att även

$$\sum_{a\in Zero(f)}\sum_{k=1}^{m_a}(1-|a|)=m_0+\sum_{a\in A}\sum_{k=1}^{m_a}(1-|a|)<\infty.$$

□

3.7 Riezsfaktoriseringen

Sats 58 (F. Riesz). *För varje $f\in H^p (p\ge 1)$ med $f\not\equiv 0$ existerar en Blaschkeprodukt B och en funktion $g\in H^p$ sådana att $f\equiv Bg$ och $|g(z)|>0$ för alla $z\in\mathbb{D}$. Vidare gäller*

$$||f||_{H^p}=||g||_{H^p}\,.$$

Bevis. Enligt Lemma 57 har f högst ett numrerbart antal nollställen. Antag f har nollställena, $a=(a_n)_{n=1}^N, N\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. Låt g definieras som

$$g(z):=A(f,B):=\begin{cases}\frac{f(z)}{B(z)} & z\in\mathbb{D}\setminus a\\ \lim_{s\to z}\frac{f(s)}{B(s)} & z\in a,\end{cases}$$

där B är en Blaschkeprodukt genererad av följden a, dvs. f:s nollställen. I beviset nedan antas att $N = \infty$. För funktioner f med ett ändligt antal nollställen görs beviset analogt med det nedan, men en del detaljer kan i detta fall lämnas bort, eftersom gränsvärdestagning av partiella Blaschkeprodukter inte behövs. Antag således att f har ett oändligt antal nollställen. Lemma 57 ger att Sats 54 kan användas, varefter $B_n \to B$ likformigt på $B(0,R)$, för varje $R < 1$, då $n \to \infty$. Eftersom B_n är kontinuerlig så följer nu att B är kontinuerlig. Eftersom f är analytisk så kan f, för varje k, representeras av Taylorserien $\sum_{j=0}^{\infty} b_{j,k}(z-a_k)^j$ för någon komplex följd $(b_{j,k})_{j=0}^{\infty}$. Låt a_k vara ett nollställe av multiplicitet m_k, vilket medför att $b_{j,k} = 0$ för varje $j < m_k$ och $b_{j,k} \neq 0$ för $j = m_k$. Nu gäller

$$\frac{f(z)}{B(z)} = \frac{(z-a_k)^{m_k} \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+m_k,k}(z-a_k)^j}{\left(\prod_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+\\ a_j=a_k}} \frac{|a_j|}{a_j}\frac{a_j-z}{1-\overline{a_j}z}\right)} \left(\prod_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+\\ a_j\neq a_k}} \frac{|a_j|}{a_j}\frac{a_j-z}{1-\overline{a_j}z}\right)^{-1}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{\infty} b_{j+m_k,k}(z-a_k)^j}{\left(\frac{|a_k|}{a_k}\frac{1}{\overline{a_k}z-1}\right)^{m_k}} \left(\prod_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+\\ a_j\neq a_k}} \frac{|a_j|}{a_j}\frac{a_j-z}{1-\overline{a_j}z}\right)^{-1}$$

$$\to b_{m_k,k}\overline{a_k}(|a_k|^2-1) \prod_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+\\ a_j\neq a_k}} \frac{a_j}{|a_j|}\frac{1-\overline{a_j}a_k}{a_j-a_k} \neq 0, \text{ då } z \to a_k.$$

Gränsvärdet är entydigt, då f:s serieutveckling och Blaschkeprodukten är kontinuerliga och konvergerar likformigt på varje kompakt origocentrerad disk som innehålls i enhetsdisken. Då det även gäller att $|B| \leq 1$ på $\mathbb{D}$, så saknar g nollställen. Från definitionen av g så erhålls nu $gB = f$.

Låt $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ och

$$B_n(z) = z^m \prod_{j=1}^{n} \frac{|a_j|}{a_j}\frac{a_j-z}{1-\overline{a_j}z}.$$

Definiera $g_n := A(f, B_n)$. Då är g_n analytisk, eftersom funktionen utgörs av kvoten av två analytiska funktioner, sådana att nämnarens nollställen utgör hävbara singulariteter. För alla $z \in \mathbb{D}$ gäller $|B_n(z)| < 1$ och $|B_n(z)| = 1$ ifall $|z| = 1$ enligt Sats 54. Eftersom B_n är kontinuerlig så medför detta att, för $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$,

$$|B_n(z)| > 1-\epsilon, \text{ då } \delta < |z| < 1$$

för något $1 > \delta > 0$. Nu följer

$$\int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |A(f,B_n)(re^{i\theta})|^p d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|^p}{|B_n(re^{i\theta})|^p} d\theta$$
$$< \frac{1}{(1-\epsilon)^p} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{2\pi\, ||f||_{H^p}^p}{(1-\epsilon)^p}$$

för $\delta < r < 1$. Eftersom $D_p(r, f)$ är icke-avtagande enligt Sats 49 så gäller

$$\int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{2\pi \, ||f||_{H^p}^p}{(1-\epsilon)^p}$$

för varje $r < 1$ och för varje $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$. Låt nu $\epsilon \to 0$ för att erhålla

$$\int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p d\theta \leq 2\pi \, ||f||_{H^p}^p \,. \tag{3.40}$$

Enligt Sats 54 konvergerar $g_n(z) = \frac{f(z)}{B_n(z)}$ likformigt mot $g(z) = \frac{f(z)}{B(z)}$ i varje disk $\overline{B}(0, R), R < 1$, vilket medför att även g är analytisk i $\mathbb{D}$, enligt Sats A.3. Dessutom gäller att $D_p(r, g), r < 1$ är uppåtbegränsad enligt (3.40). Detta medför att $g \in H^p$ och mera specifikt, att $||g||_{H^p} \leq ||f||_{H^p}$. Eftersom $|Bg| \leq |g|$ i $\mathbb{D}$, så erhålls att $||f||_{H^p} \leq ||g||_{H^p}$. □

3.8 Hilbertrum

Låt $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vara ett Hilbertrum över kroppen $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$), och låt $(e_n)_{n \in I}$ vara en ortonormal följd, där I är en ändlig indexmängd. Från egenskaper av en inre produkt följer följande identitet för $f, g \in H$:

$$\begin{aligned}
A(f,g) &:= \langle f - \sum_{n \in I} \langle f, e_n \rangle e_n, g - \sum_{n \in I} \langle g, e_n \rangle e_n \rangle \\
&= \langle f, g \rangle - \langle \sum_{n \in I} \langle f, e_n \rangle e_n, g \rangle - \langle f, \sum_{n \in I} \langle g, e_n \rangle e_n \rangle + \langle \sum_{n \in I} \langle f, e_n \rangle e_n, \sum_{n \in I} \langle g, e_n \rangle e_n \rangle \\
&= \langle f, g \rangle - \sum_{n \in I} \langle f, e_n \rangle \langle e_n, g \rangle - \sum_{n \in I} \overline{\langle g, e_n \rangle} \langle f, e_n \rangle + \sum_{n_1 \in I} \sum_{n_2 \in I} \langle f, e_{n_1} \rangle \overline{\langle g, e_{n_2} \rangle} \langle e_{n_1}, e_{n_2} \rangle \\
&= \langle f, g \rangle - \sum_{n \in I} \langle f, e_n \rangle \overline{\langle g, e_n \rangle} - \sum_{n \in I} \langle f, e_n \rangle \overline{\langle g, e_n \rangle} + \sum_{n \in I} \langle f, e_n \rangle \overline{\langle g, e_n \rangle} \\
&= \langle f, g \rangle - \sum_{n \in I} \langle f, e_n \rangle \overline{\langle g, e_n \rangle}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Sats 59 (Bessels olikhet). *Låt $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vara ett Hilbertrum över kroppen $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$), och låt $(e_n)_{n \in I}$ vara en ortonormal följd, där I antingen är numrerbar eller ändlig. För varje $f \in H$ gäller nu*

$$\sum_{n \in I} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq ||f||^2 \,.$$

Bevis. Sätt $g = f$ i (3.41) och låt $||f|| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ vara den inducerade normen. Nu följer direkt, för varje ändlig indexmängd I

$$0 \leq A(f, f) = \langle f, f \rangle - \sum_{n \in I} |\langle f, e_n \rangle|^2,$$

vilket ger

$$\sum_{n\in I} |\langle f, e_n\rangle|^2 \leq ||f||^2 .$$

Ifall I är en numrerbar indexmängd så existerar en bijektion T till de naturliga talen. Låt $\mathbb{N}_N := 0, 1, 2, ..., N$. Låt $I_N := T^{-1}(\mathbb{N}_N)$. Från definitionen för union och invers avbildning, samt att T är en bijektion följer nu

$$I_N \subset I_{N+1}\ \forall N \in \mathbb{N},\ \bigcup_{N=0}^{K} I_N = I_K \text{ och}$$
$$\lim_{K\to\infty} \bigcup_{N=0}^{K} I_N = \bigcup_{N=0}^{\infty} T^{-1}(\mathbb{N}_N) = T^{-1}(\bigcup_{N=0}^{\infty} \mathbb{N}_N) = T^{-1}(\mathbb{N}) = I.$$

Detta implicerar Bessels olikhet för uppräkneliga indexmängder

$$\sum_{n\in I} |\langle f, e_n\rangle|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n\in\bigcup_{K\in\mathbb{N}_N} I_K} |\langle f, e_n\rangle|^2 \leq ||f||^2 .$$

□

Lemma 60. Låt $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ vara ett Hilbertrum över kroppen $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$), i vilket en ortonormal bas $(e_n)_{n\in I}$ existerar, där I är en numrerbar eller ändlig indexmängd. Då gäller för varje $f \in H$ att

$$f = \sum_{n\in I} \langle f, e_n\rangle e_n.$$

Bevis. Välj $f \in H$. Då $(e_n)_{n\in I}$ är en bas så kan varje vektor skrivas som en linjärkombination av dessa. Låt

$$A = \sum_{k\in I} a_k e_k, \tag{3.42}$$

vara en godtycklig vektor i rummet. Eftersom det existerar en bijektion mellan I och en delmängd av de naturliga talen så räcker det att undersöka fallena $I = \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Ifall I är ändlig och innehåller $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ element, så erhålls dessa vektorer genom att sätta $a_k = 0$ för varje $k > N$. Uttryck (3.42) betyder att

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left| A - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right|\right| = 0,$$

där $||\cdot||$ är den inducerade normen. Nu gäller

$$\begin{aligned} &\langle f - \sum_{n\in I} \langle f, e_n\rangle e_n, A\rangle \\ &= \sum_{k\in I} \overline{a_k}\langle f, e_k\rangle - \sum_{n\in I}\sum_{k\in I} \langle f, e_n\rangle \overline{a_k} \langle e_n, e_k\rangle \\ &= \sum_{k\in I} \overline{a_k}\langle f, e_k\rangle - \sum_{k\in I} \langle f, e_k\rangle \overline{a_k} = 0 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Eftersom A var godtyckligt vald kan A väljas till $f - \sum_{n\in I}\langle f, e_n\rangle e_n$, varefter inre produktens definition ger att

$$f - \sum_{n\in I}\langle f, e_n\rangle e_n = \mathbf{0}$$

och därmed är

$$f = \sum_{n\in I}\langle f, e_n\rangle e_n.$$

□

Sats 61 (Parsevals identitet)**.** *Låt $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ vara ett Hilbertrum över kroppen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$), i vilket en ortonormal följd $(e_n)_{n\in I}$ sådan att varje $f \in H$ kan framställas som $f = \sum_{n\in I} f_n e_n$ existerar, där $f_n = \langle f, e_n\rangle$, dvs vektorns komponenter med avseende på basen $(e_n)_{n\in I}$. Då gäller*

$$\langle f, \overline{g}\rangle = \sum_{n\in I} f_n\overline{g_n},$$

Bevis. Låt först $I = I_N$ vara ändlig. Som tidigare visats kan indexen överföras bijektivt till en delmängd av de naturliga talen. Antag därför att $I_N = \mathbb{N}_N$. Låt $f = \sum_{n\in\mathbb{N}_N} f_n e_n$ och $g = \sum_{n\in\mathbb{N}_N} g_n e_n$. Nu ger Lemma 60 att $A(f,g) = \langle 0, 0\rangle = 0$ i (3.41). Härur följer Parsevals likhet direkt. Antag nu att I är numrerbar. Låt $g \in H$ och betrakta den linjära operatorn $T_g : H \to \mathbb{K}$, $T_g(f) = \langle f, g\rangle$. Med hjälp av Cauchy–Schwarz olikhet erhålls

$$|T_g(f)| \leq \sqrt{\langle f, f\rangle}\sqrt{\langle g, g\rangle} = ||f||\sqrt{\langle g, g\rangle},$$

där $||\cdot||$ är den inducerade normen. Detta visar att operatorn T_g är begränsad, dvs. $||T_g||_{op} \leq \sqrt{\langle g, g\rangle}$ och därav kontinuerlig. På samma sätt kan det visas att $\hat{T}_g := \langle g, \cdot\rangle$ är kontinuerlig. Nu gäller

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n\in I}\sum_{k\in I} f_n\overline{g}_k\langle e_n, e_k\rangle = \sum_{n\in I} f_n\overline{g}_n.$$

□

Lemma 62. Låt H vara ett hilbertrum och låt $e = (e_n)_{n=1}^N : e_n \in H$ vara en ändlig ortnormal följd. För en godtycklig vektor av formen $c = \sum_{n=1}^N c_n e_n$ gäller

$$||c||_H^2 = \sum_{n=1}^N |c_n|^2.$$

Vidare gäller, att för $a \in H$ minimeras uttrycket

$$||a - c||_H\,,$$

då $c_n = \langle a, e_n\rangle$. Normen är här inducerad av inre produkten.

Bevis. Det gäller att

$$||c||^2 = \langle c, c\rangle = \langle \sum_{n=1}^{N} c_n e_n, \sum_{n=1}^{N} c_n e_n\rangle = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_n \overline{c}_k \langle e_n, e_k\rangle = \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2,$$

eftersom normen är inducerad av inre produkten som är linjär i första komponenten och konjugatsymmetrisk, samt att följden $(e_n)_n$ är ortonormal. För att visa det andra påståendet betraktas följande likheter

$$\begin{aligned}
||a-c||^2 &= \langle a-c, a-c\rangle \\
&= \langle a, a\rangle - \langle c, a\rangle - \langle a, c\rangle + \langle c, c\rangle \\
&= ||a||^2 + \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 - \sum_{n=1}^{N} c_n\langle e_n, a\rangle - \sum_{n=1}^{N} \overline{c}_n \overline{\langle e_n, a\rangle} \\
&= ||a||^2 + \sum_{n=1}^{N} (\overline{\langle e_n, a\rangle} - c_n)(\langle e_n, a\rangle - \overline{c}_n) - \sum_{n=1}^{N} \overline{\langle e_n, a\rangle}\langle e_n, a\rangle \\
&= ||a||^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle e_n, a\rangle|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\langle e_n, a\rangle - \overline{c}_n|^2
\end{aligned}$$

Nu är det klart att för givna $a, b \in H$ så minimeras högersida om $\overline{c}_n = \langle e_n, a\rangle$ med andra ord $c_n = \langle a, e_n\rangle$. □

Lemma 63. Om $f \in L^2([0, 2\pi[)$, så gäller att

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n\rangle e_n, \tag{3.44}$$

där $e_n(t) = e^{itn}$ och

$$\langle f, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{e_n(t)}dt.$$

(3.44) innebär att

$$\left|\left| f - \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k \right|\right|_{L^2}^2 = \langle f - \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k, f - \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k\rangle \to 0,$$

då $n \to \infty$.

Bevis. Eftersom $\mathbb{Z}$ är numrerbar så kan $(e^{itn})_{n\in\mathbb{Z}}$ betraktas som en följd. Följden är ortonormal. Sats 31 ger att $L^2 = \overline{P}^{L_2}$. Fixera $\epsilon > 0$ och låt P_N vara ett utvidgat polynom, dvs. $P_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$, sådant att

$$||f - P_N||_{L^2} < \epsilon.$$

Observera att $c_n = c_{n,N}$, men ett polynom betraktas för ett givet N och således lämnas ofta indexet N bort. Lemma 62 ger nu att

$$\left|\left| f - \sum_{n=-N}^{N} \langle f, e_n\rangle e_n \right|\right|_{L^2} < \epsilon.$$

□

Sats 64 (Parsevals identitet i H^2)**.** *$A \in H^2$ om och endast om $a = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in l^2$, där $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Vidare gäller i dessa fall att*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = ||A||_{H^2}^2 \, .$$

Bevis. Låt $A_\rho(z) := A(\rho z)$ för $\rho \in [0,1[$. Klart att $A \in H^2 \Rightarrow A_\rho(e^{i\cdot}) \in L^2([0,2\pi[)$. Vidare gäller $A_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n z^n$, vilket medför att dess Maclaurinutveckling är $A_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$, med $\alpha_n = a_n \rho^n$ för varje n. Eftersom $A_\rho \in L^2([0,2\pi[)$, så gäller

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |A(\rho e^{it})|^2 dt = ||A_\rho||_{L^2} = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n}|a_n|^2$$

Vidare ger monotona konvergenssatsen

$$\lim_{\rho \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n}|a_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2,$$

vilket ger

$$||A||_{H^2} = \lim_{\rho \to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |A(\rho e^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

□

Lemma 65. Låt $I \subseteq \mathbb{R}$ och låt, för $0 < p < \infty$, $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ vara en följd funktioner $A_n \in L^p(I)$ med punktvis existerande gränsvärde nästan överallt. Låt $A(t) := \lim_{n\to\infty} A_n(t)$ som är väldefinierad nästan överallt $t \in I$. Antag även att

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |A_n(t)|^p dt = \int_I |A(t)|^p dt < \infty.$$

Då gäller

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |A_n(t) - A(t)|^p dt = 0.$$

Bevis. Låt $M \subseteq I$ och låt $A, A_n \in L^p := L^p(I)$. Alla integraler nedan är med avseende på Lebesguemåttet $dt = dm(t)$,

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^p &\le \liminf_{n\to\infty} \int_M |A_n|^p \le \limsup_{n\to\infty} \int_M |A_n|^p \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left(\int_I |A_n|^p - \int_{I\setminus M} |A_n|^p \right) \\
&\le \limsup_{n\to\infty} \int_I |A_n|^p - \liminf_{n\to\infty} \int_{I\setminus M} |A_n|^p \\
&= \int_I |A|^p - \liminf_{n\to\infty} \int_{I\setminus M} |A_n|^p \le \int_I |A|^p - \int_{I\setminus M} |A|^p = \int_M |A|^p,
\end{aligned}$$

där första och sista olikheten är Fatous lemma. Således gäller

$$\lim_{n\to\infty} \int_M |A_n|^p = \int_M |A|^p, \tag{3.45}$$

för varje mängd $M \subseteq I$. Välj ett $\epsilon > 0$ och en mängd F med $m(F) < \infty$ och $\int_{I\setminus F} |A|^p < \epsilon$. Detta är möjligt då $A \in L^p$. Välj nu ett $\delta > 0$ så att för $S \subseteq F$ gäller $m(S) < \delta \Rightarrow \int_S |A|^p < \epsilon$. Egoroffs sats ger att

$$\exists S \subset F : m(S) < \delta \wedge A_n \to A \text{ likformigt på } F \setminus S.$$

Låt n vara så stort att

$$\begin{aligned} &\left| \int_I |A_n|^p - \int_I |A|^p \right| < \epsilon \text{ och} \\ &||(A_n(t) - A(t))^p||_{L^\infty(F\setminus S)} < \epsilon. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Existensen av första olikheten bekräftas av (3.45). Nu gäller

$$\begin{aligned} \int_I |A_n - A|^p &= \int_S |A_n - A|^p + \int_{F\setminus S} |A_n - A|^p + \int_{I\setminus F} |A_n - A|^p \\ &\leq \int_S (|A_n| + |A|)^p + \int_{I\setminus F} (|A_n| + |A|)^p + \int_{F\setminus S} |A_n - A|^p \\ &\leq 2^p \left(\int_S |A_n|^p + \int_S |A|^p + \int_{I\setminus F} |A_n|^p + \int_{I\setminus F} |A|^p \right) \\ &\quad + \int_{F\setminus S} |A_n - A|^p \\ &\leq 2^p \left(2 \int_S |A|^p + \epsilon + 2 \int_{I\setminus F} |A|^p + \epsilon \right) \\ &\quad + \int_{F\setminus S} ||(A_n(t) - A(t))^p||_{L^\infty(F\setminus S)} \\ &\leq \left(2^p(2+1+2+1) + m(F \setminus S)\right) \epsilon \end{aligned}$$

där andra olikheten fås från Lemma 3. Näst sista olikheten erhålls av (3.46). □

Anmärkning 4. Alla mängder involverade i detta lemma, samt bevis antas vara Lebesguemätbara.

Sats 66. *Låt $A \in H^p, \infty > p > 1$. Nu gäller*

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |A(re^{it})|^p dt = \int_0^{2\pi} |A(e^{it})|^p dt \textit{ och} \tag{3.47}$$

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |A(re^{it}) - A(e^{it})|^p dt = 0. \tag{3.48}$$

Bevis. Låt $A(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \in H^2$. Nu ger Sats 64 att $\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 < \infty$. Då f är analytisk i $\mathbb{D}$ så konvergerar Taylorserien absolut i $\mathbb{D}$ och således gäller, för $1 > s > r \geq 0$,

$$\begin{aligned} A(se^{it}) - A(re^{it}) &= \sum_{n=0}^\infty a_n s^n e^{int} - \sum_{k=0}^\infty a_k r^k e^{ikt} = \sum_{n=0}^\infty a_n (s^n - r^n) e^{int} \\ &= \sum_{n=0}^\infty a_n \rho^n e^{int} =: \hat{A}_\rho(e^{it}), \end{aligned}$$

där $\rho = (s^n - r^n)^{\frac{1}{n}}$. Sats 64 ger nu att

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\hat{A}_\rho(e^{it})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{a}_{\rho,n}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |(s^n - r^n)|^2.$$

Eftersom $A(e^{it}) = \lim_{s\to 1^-} A(se^{it})$ är väldefinierad nästan överallt, enligt Sats 43, så gäller för alla $r < 1$, att

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |A(e^{it}) - A(re^{it})|^2 dt &\le \liminf_{s\to 1^-} \int_0^{2\pi} |A(se^{it}) - A(re^{it})|^2 dt \\
&\le \liminf_{s\to 1^-} 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |(s^n - r^n)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (1 - r^n)^2.
\end{aligned}$$

där Fatous lemma tillämpats vid första olikheten. Monotona konvergenssatsen ger den sista likheten ($s \ge r$). Låt nu $r \to 1^-$, där Lebesgues dominerade konvergenssats ger att gränsvärdestagningen kan flyttas innanför summan. Därmed är (3.48) bevisad för $p = 2$. Observera att från Minkowskis olikhet följer

$$\left| \left|\left|\hat{A}_r\right|\right|_{L^2} - \left|\left|\hat{A}\right|\right|_{L^2} \right| \le \left|\left|\hat{A}_r - \hat{A}\right|\right|_{L^2},$$

där $\hat{A}_r(t) := A(re^{it}), \hat{A}(t) := A(e^{it})$, vilket visar att påstående (3.47) gäller för $p = 2$. Låt nu $A \in H^p, 1 < p < \infty$. Notera att $A^{\frac{p}{2}} \in H^2$ inte kan antas, eftersom alla derivator inte nödvändigtvis existerar i alla punkter. Enligt Sats 58 existerar en Blaschkeprodukt B och en funktion $0 < g \in H^p$ sådana att $A = Bg$. Eftersom g saknar nollställen så gäller $g^{\frac{p}{2}} \in H^2$. Enligt Sats 43 är $A(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} A(re^{it})$ och $\hat{g}(t) = \lim_{r\to 1^-} g(re^{it})$ väldefinierade nästan överallt. Eftersom $\hat{B}(t) := \lim_{r\to 1^-} B(re^{it})$ har beloppet 1 nästan överallt $t \in [0, 2\pi[$, så gäller $|\hat{A}| = |\hat{g}|$ nästan överallt, varefter $p = 2$-fallet och Sats 58 ger att

$$||A||_{H^p} = \left|\left|g^{\frac{p}{2}}\right|\right|_{H^2}^{\frac{2}{p}} = \left|\left|\hat{g}^{\frac{p}{2}}\right|\right|_{L^2}^{\frac{2}{p}} = \left|\left|\hat{A}^{\frac{p}{2}}\right|\right|_{L^2}^{\frac{2}{p}} = \left|\left|\hat{A}\right|\right|_{L^p},$$

vilket är (3.47) för $A \in H^p, 1 < p < \infty$. Nu ger Lemma 3.45 med $I = 2\pi$ att för en godtycklig följd $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ med $0 \le r_n < 1$ för varje n och $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$, så gäller (3.48) för varje $A \in H^p$. □

Sats 67. *Isomorfismen* $J : \mathbb{H}^p \to H^p, 1 < p < \infty$,

$$J(F)(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) F(t) dt$$

avbildar randfunktionen av $f \in H^p$*, som är väldefinierad nästan överallt, på* f*.*

Bevis. Låt $f \in H^p$ och sätt $f_r(t) := f(re^{it})$ samt $\lim_{r\to 1^-} f(re^{it}) =: \hat{f}(t)$, som är väldefinierad nästan överallt. Härnäst visas att J avbildar randunktionen på f. För givna $r, \rho \in [0,1[, \theta \in [0, 2\pi[$ gäller, enligt Sats 11 och Hölders olikhet,

$$\begin{aligned}\left|J(\hat{f})(re^{i\theta}) - f_{\rho r}(t)\right| &= \left|J(\hat{f})(re^{i\theta}) - J(f_\rho)(re^{i\theta})\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\left|\hat{f}(t) - f_\rho(t)\right| dt \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)^{\frac{p}{p-1}} dt\right)^{1-\frac{1}{p}} \left|\left|\hat{f} - f_\rho\right|\right|_{L^p},\end{aligned}$$

vilket, enligt Sats 66, medför att det punktvisa gränsvärdet

$$f(re^{it}) = \lim_{\rho\to 1^-} f(\rho re^{it})$$

ges av $J(\hat{f})(re^{i\theta})$, för varje $(r, \theta) \in [0, 1[\times[0, 2\pi[$. $\square$

Kapitel 4

Hardyrummet på högra halvplanet

En av de inledande resultaten i detta kapitel är att $\left(L^p(\mathbb{R}) \circ \frac{\mathrm{id}}{i}\right)$ och $L^p([0,2\pi[) \circ \frac{\ln(\mathrm{id})}{i}$ är isometriskt isomorfa (Sats 69). Detta resultat är ett av de centrala resultaten som behövs för att visa att H^p och H^p_+ är isometriskt isomorfa. Med hjälp av en Poissonframställningen för funktioner $f \in H^p$ och lite substitutioner härleds en motsvarande framställning för funktioner tillhörande H^p_+. Detta är ändå inte tillräckligt. För att visa att dessa rum är isometriskt isomorfa införs rummet $\hat{H}^p_+$, varefter Följdsats 88 spelar en central roll.

Definition 19. Låt H^p_+ vara ett funktionsrum bestående av analytiska funktioner $f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ sådana att

$$\sup_{x>0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dy < \infty,$$

försedd med

$$||f||_{H^p_+} = \sup_{x>0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p dy$$

Definition 20. För $p > 0$ definieras

$$L^p_+ := L^p(\mathbb{R})$$

försedd med tillhörande norm, där funktionerna är komplexvärda.

Sats 68. *Rummet H^p_+ är ett normerat rum med normen $||\cdot||_{H^p_+}$.*

Bevis. Låt $f_1, f_2 \in H^p_+$ och definiera $f_{j,x}(y) := f_j(x+iy)$ för $j = 1, 2$. Nu gäller att $f_{j,x} \in L^p_+$ vilket medför, att för varje $x > 0$ gäller

$$||f_{1,x} + f_{2,x}||_{L^p_+} \leq ||f_{1,x}||_{L^p_+} + ||f_{1,x}||_{L^p_+} \leq ||f_1||_{H^p_+} + ||f_2||_{H^p_+},$$

eftersom $||\cdot||_{L^p_+}$ är en norm. Således gäller triangelolikheten för operatorn $||\cdot||_{H^p_+}$. Om $f_{1,x}(y) = 0$ nästan överallt $y \in \mathbb{R}$, för något x så ger identitetssatsen för analytiska funktioner att $f_1 \equiv 0$, vilket i sin tur leder till att $||f_1||_{H^p_+} = 0$. Annars, så är $f_{1,x}(y) = 0$ enbart på en delmängd till $\mathbb{R}$ med måttet noll, tomma mängden inkluderad, för varje $x > 0$, vilket medför att

$$0 < ||f_{1,x}||_{L^p_+} \leq ||f_1||_{H^p_+},$$

eftersom $||\cdot||_{L^p_+}$ är en norm. De restrerande axiomen är triviala. □

Sats 69. *Antag $f(i\cdot) \in L^p_+$. Nu gäller*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |Q(f)(e^{it})|^p dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(iy)|^p \, dy < \infty,$$

där

$$Q(f)(e^{it}) = \left(\frac{4}{(1-e^{it})^2}\right)^{\frac{1}{p}} f(T_{1+}(e^{it})) \quad \textit{och}$$
$$T_{1+} = \frac{1+z}{1-z}, \ T_{+1} = \frac{z-1}{1+z}.$$

Vidare gäller att $Q : \left(L^p_+ \circ \frac{\mathrm{id}}{i}\right) \to L^p([0,2\pi[) \circ \frac{\ln(\mathrm{id})}{i}$ är en isomorfism sådan att

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|Q^{-1}(F)(iy)\right|^p dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|F(e^{it})\right|^p dt < \infty$$

för varje $F \in L^p([0,2\pi[) \circ \frac{\ln(\mathrm{id})}{i}$. Funktionen ln *är här den naturliga logaritmens principalgren.*

Bevis. Det gäller att

$$T_{1+}(e^{it}) = \frac{1+e^{it}}{1-e^{it}} = \frac{(1+e^{it})(1-e^{-it})}{2-(e^{it}+e^{-it})} = i\frac{\sin(t)}{1-\cos(t)},$$

dvs. $-iT_{1+}(e^{it})$ avbildar $]0,2\pi[$ bijektivt på $]-\infty,\infty[$. För $t \to 2\pi^-$ gäller

$$\begin{aligned} 0 > \frac{\sin(t)}{1-\cos(t)} &= \frac{\sin(t-2\pi)}{1-\cos(t-2\pi)} \\ &= \frac{t-2\pi+\mathcal{O}((t-2\pi)^3)}{1-\left(1-\frac{(t-2\pi)^2}{2}+\mathcal{O}((t-2\pi)^4)\right)} = \frac{1-\mathcal{O}((t-2\pi)^2)}{\frac{t-2\pi}{2}+\mathcal{O}((t-2\pi)^3)} \sim \frac{2}{t-2\pi}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

vilket leder till att

$$\lim_{t\to 2\pi^-} T_{1+}(e^{it}) = -i\infty.$$

På liknande sätt erhålls att för $t \to 0^+$ gäller

$$0 < \frac{\sin(t)}{1-\cos(t)} \sim \frac{2}{t}, \tag{4.2}$$

vilket i sin tur leder till att

$$\lim_{t\to -0^+} T_{1+}(e^{it}) = i\infty.$$

Låt $T_{1+}(e^{it}) = iy,\ y\in\mathbb{R}$. Nu gäller $e^{it} = T_{+1}\circ T_{1+}(e^{it}) = T_{+1}(iy)$ och differentiering ger

$$ie^{it}dt = d(e^{it}) = d(T_{+1}(iy)) = T'_{+1}(iy)d(iy) = \frac{(iy+1)-(iy-1)}{(1+iy)^2} idy,$$

där logaritmens principalgren använts. Ovanstående uttryck är ekvivalent med

$$dt = \frac{2}{(iy-1)(1+iy)}dy = -\frac{2}{1+y^2}dy. \tag{4.3}$$

Absolutbeloppet av transformen Q inkluderar även följande faktor

$$\left|1-\left(e^{it(y)}\right)\right|^2 = \left|1-\frac{iy-1}{1+iy}\right|^2 = \left|\frac{1+iy+1-iy}{1+iy}\right|^2 = \frac{4}{1+y^2}. \tag{4.4}$$

Nu ger (4.1) – (4.4) att

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |Q(f)(e^{it})|^p dt &= \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 2\pi^-}} \frac{1}{2\pi}\int_{\pi-a}^{\pi+a} \left|\left(\frac{4}{(1-e^{it})^2}\right)^{\frac{1}{p}} f(T_{1+}(e^{it}))\right|^p dt \\
&= \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 2\pi^-}} \frac{2}{\pi}\int_a^b \frac{1}{|1-e^{it}|^2}\left|f(T_{1+}(e^{it}))\right|^p dt \\
&= \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 2\pi^-}} \frac{2}{\pi}\int_{\frac{2}{a}}^{\frac{2}{b-2\pi}} \frac{1+y^2}{4}\,|f(iy)|^p\,\frac{-2}{1+y^2}dy \\
&= \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 2\pi^-}} \frac{1}{\pi}\int_{\frac{2}{b-2\pi}}^{\frac{2}{a}} |f(iy)|^p\,dy,
\end{aligned}$$

där $iy = T_{1+}(e^{it})$. Således är Q en isometri.

För $t\in[0,2\pi[$ gäller

$$f(T_{1+}(e^{it})) = \left(\frac{(1-e^{it})^2}{4}\right)^{\frac{1}{p}} Q(f)(z). \tag{4.5}$$

$T_{+1} = T_{1+}^{-1}$ avbildar $\mathbb{C}_+$ bijektivt på $\mathbb{D}$, vilket medför att (4.5) är ekvivalent med

$$\begin{aligned}
f(iy) &= \left(\frac{(1-T_{+1}(iy))^2}{4}\right)^{\frac{1}{p}} Q(f)(T_{+1}(iy)) = \left(\left(1-\frac{iy-1}{1+iy}\right)^2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{p}} Q(f)(T_{+1}(iy)) \\
&= \left(\frac{1}{(1+iy)^2}\right)^{\frac{1}{p}} Q(f)(T_{+1}(iy)),
\end{aligned}$$

där $iy = T_{1+}(e^{it})$. Inversen Q^{-1} ges således av

$$Q^{-1}(g) = \left(\frac{1}{(1+\mathrm{id})^2}\right)^{\frac{1}{p}} g(T_{+1}).$$

Antag som antites att Q inte är surjektiv. Då existerar en funktion $F \in L^p([0,2\pi[) \circ \frac{\ln(\mathrm{id})}{i}$ sådan att $Q^{-1}(F) \notin L_+^p \circ \frac{\mathrm{id}}{i}$. Välj $F \in L^p([0,2\pi[) \circ \frac{\ln(\mathrm{id})}{i}$. Ifall $Q^{-1}(F) \in L_+^p \circ \frac{\mathrm{id}}{i}$ för varje F, så har en motsägelse påträffats, varmed Q är surjektiv. Det gäller att

$$dy = -id(T_{1+}(e^{it})) = \frac{2}{(1-e^{it})^2} dt.$$

Vidare gäller

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|Q^{-1}(F)(iy)\right|^p dy &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{(1+iy)^2}\right| |F(T_{+1}(iy))|^p \, dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(T_{+1}(iy))|^p \frac{dy}{1+y^2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \left|F(e^{it})\right|^p dt < \infty,
\end{aligned}$$

dvs. Q är surjektiv och därmed bijektiv. För $f, g \in L_+^p \circ \frac{\mathrm{id}}{i}$ och $a, b \in \mathbb{C}$ gäller

$$Q(af + bg) = K \cdot (af + bg) \circ T_{1+} = aK \cdot f \circ T_{1+} + bK \cdot g \circ T_{1+} = aQ(f) + bQ(g),$$

där $K = \left(\frac{4}{(1-e^{i\mathrm{id}})^2}\right)^{\frac{1}{p}}$. Detta medför nu att

$$Q : \left(L_+^p \circ \frac{\mathrm{id}}{i}\right) \to L^p([0,2\pi[) \circ \frac{\ln(\mathrm{id})}{i}$$

är en isometrisk isomorfism. $\square$

Lemma 70. Låt $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{C}$ och låt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Låt $f : M_1 \to M_2$ vara analytisk och $u : M_2 \to \mathbb{K}$ vara $\mathbb{K}$-harmonisk. Då är $u \circ f$ $\mathbb{K}$-harmonisk i M_1.

Bevis. Detta visas direkt genom tillämpning av derivatan av en sammansatt funktion. Låt $z = z(x,y) = x + iy$ och låt derivatan av en funktion g med avseende på en funktion t betecknas med g_t. Nu erhålls

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u \circ f \circ z = \frac{\partial}{\partial x} u_f \cdot f_z \cdot z_x + \frac{\partial}{\partial y} u_f \cdot f_z \cdot z_y \\
&= (u_{ff} \cdot f_z \cdot z_x) \cdot f_z \cdot z_x + (u_f \cdot f_{zz} \cdot z_x) \cdot z_x + u_f \cdot f_z \cdot z_{xx} \\
&+ (u_{ff} \cdot f_z \cdot z_y) \cdot f_z \cdot z_y + (u_f \cdot f_{zz} \cdot z_y) \cdot z_y + u_f \cdot f_z \cdot z_{yy} \\
&= u_{ff} \cdot f_z \cdot f_z + u_f \cdot f_{zz} - u_{ff} \cdot f_z \cdot f_z - u_f \cdot f_{zz} = 0
\end{aligned}$$

$\square$

Definition 21. Låt $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. Nu definieras faltningen, också kallad konvolutionen, genom

$$(f * g)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt.$$

Definition 22. Poissonkärnan på högra halvplanet definieras genom

$$\mathcal{P}_x(y-t) := \frac{x}{(t-y)^2 + x^2}.$$

I följande sats sammanfattas några egenskaper för Poissonkärnan på halvplanet. Andra egenskaper så som kontinuitet är underförstådda.

Sats 71. *Poissonkärnan har följande egenskaper, där $x > 0$, $y, t \in \mathbb{R}$:*

1. $\mathcal{P}_x(y) > 0$,
2. $\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_x(y)dy = 1$,
3. $\lim_{x \to 0} \int_{|t-y| \geq \delta} \mathcal{P}_x(t-y)dt = 0$,
4. $\mathcal{P}_x(y) = \mathcal{P}_x(-y)$ *(kärnan är jämn).*

Bevis. Egenskap 1 är självklar. Notera vidare att

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_x(y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{y^2 + x^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} dy \\ &= \left[\arctan \frac{y}{x}\right]_{y=-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi,\end{aligned}$$

vilket bevisar egenskap 2. Låt nu $z = t - y$. Välj $\delta > 0$ och fixera ett $\epsilon > 0$. Nu ger egenskaperna 1 och 2 att det hittas ett $R > \delta$ sådant att

$$\int_{|z|>R} \mathcal{P}_x(z)dz < \frac{\epsilon}{2}.$$

Vidare gäller

$$0 \leq \int_{R \geq |z| \geq \delta} \mathcal{P}_x(z)dt \leq \int_{R \geq |z| \geq \delta} \mathcal{P}_x(\delta)dt \leq 2R\mathcal{P}_x(\delta) \leq \frac{2Rx}{\delta^2}.$$

Med $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon\delta^2}{4R}$ erhålls nu

$$0 < x < \delta_\epsilon \Rightarrow \int_{|t-y|>\delta} \mathcal{P}_x(t-y)dz = \int_{|z|>\delta} \mathcal{P}_x(z)dz < \epsilon,$$

med andra ord egenskap 3. Eftersom $y^2 = (-y)^2$, för $y \in \mathbb{R}$, så följer den sista egenskapen. □

Följdsats 72. *Låt $x > 1$. Då gäller $\mathcal{P}_x \in L^q_+$, för varje $q \geq 1$.*

Bevis. För $q = \infty$ erhålls direkt att $\mathcal{P}_x \in L^q_+$, eftersom

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |\mathcal{P}_x(y)| = \frac{1}{x} < \infty.$$

Enligt egenskaperna 1 och 2 samt kontinuiteten finns det ett $R > 0$ med $|y| > R \Rightarrow 1 > \mathcal{P}_x(y)$. Följaktligen gäller

$$\frac{1}{\pi} \int_{|y|>R} |\mathcal{P}_x(y)|^q \, dy \leq \frac{1}{\pi} \int_{|y|>R} |\mathcal{P}_x(y)| \, dy < 1$$

och

$$\frac{1}{\pi} \int_{|y|\leq R} |\mathcal{P}_x(y)|^q \, dy < \frac{2R}{x^q} < \infty,$$

vilket visar att $\mathcal{P}_x \in L^q_+$, för varje $q \in [1, \infty]$. □

Sats 73. *Låt $a, b > 0$. Nu gäller*

$$\mathcal{P}_{a+b} = \mathcal{P}_a * \mathcal{P}_b.$$

Bevis. Fixera $y \in \mathbb{R}$. Nu gäller

$$(\mathcal{P}_a * \mathcal{P}_b)(y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{a}{t^2 + a^2} \frac{b}{(y-t)^2 + b^2} dt. \tag{4.6}$$

Eftersom faltningen är kommutativ kan $b \geq a > 0$ antas. Härnäst tillämpas partialbråksuppdelning

$$\frac{1}{t^2 + a^2} \frac{1}{(y-t)^2 + b^2} = \frac{At + B}{t^2 + a^2} + \frac{Ct + D}{(y-t)^2 + b^2}, \tag{4.7}$$

där $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Vidare erhålls

$$\begin{aligned}
1 &= (t^2 + a^2)((y-t)^2 + b^2) \left(\frac{At + B}{t^2 + a^2} + \frac{Ct + D}{(y-t)^2 + b^2} \right) \\
&= (At + B)((y-t)^2 + b^2) + (Ct + D)(t^2 + a^2) \\
&= t^3(A + C) + t^2(B - A2y + D) + t(Ay^2 + Ab^2 - 2yB + Ca^2) \\
&\quad + By^2 + Bb^2 + Da^2
\end{aligned}$$

och därmed ekvationssystemet

$$A + C = 0 \tag{4.8}$$

$$B - 2Ay + D = 0 \tag{4.9}$$

$$Ay^2 + Ab^2 - 2yB + Ca^2 = 0 \tag{4.10}$$

$$By^2 + Bb^2 + Da^2 = 1. \tag{4.11}$$

Antag först att $b > a$. Med hjälp av ekvationerna (4.8) samt (4.9) kan C respektive D elimineras ur ekvationerna (4.10) och (4.11), varefter de två senare ekvationerna kan skrivas som:

$$A(y^2 + b^2 - a^2) = 2By \tag{4.12}$$

$$By^2 + Bb^2 + 2Aya^2 - Ba^2 = 1. \tag{4.13}$$

Insättning av (4.12) i (4.13) så att A elimineras ger

$$B = \left(y^2 + b^2 + \frac{(2ya)^2}{y^2 + b^2 - a^2} - a^2\right)^{-1} = \frac{y^2 + b^2 - a^2}{(y^2 + b^2 - a^2)^2 + (2ya)^2}. \tag{4.14}$$

Insättning i ekvation (4.12) ger

$$A = B\frac{2y}{y^2 + b^2 - a^2} = \frac{2y}{(y^2 + b^2 - a^2)^2 + (2ya)^2}. \tag{4.15}$$

Vid betraktandet av A, B, C och D som funktioner av $y \in \mathbb{R}$, så är $|A|$ och $|B|$ begränsade på $\mathbb{R}$, vilket på grund av (4.8) leder till att $|C|$ är begränsad på $\mathbb{R}$. Eftersom $Ay \to 0$, då $|y| \to \infty$, så ger (4.9) att även $|D|$ och yC är begränsade. Vidare gäller, för $\infty > N > M > -\infty$, att

$$\begin{aligned}
&\int_{M<t<N} \frac{At + B}{t^2 + a^2} + \frac{Ct + D}{(t-y)^2 + b^2} dt \\
&= \int_{M<t<N} \frac{At}{t^2 + a^2} dt + \int_{M<t<N} \frac{B}{t^2 + a^2} dt \\
&\quad + \int_{M<t<N} \frac{C(t-y)}{(t-y)^2 + a^2} + \int_{M<t<N} \frac{yC + D}{(t-y)^2 + b^2} dt \\
&\\
&= \frac{A}{2} \int_{M<t<N} \frac{2t}{t^2 + a^2} dt + \frac{B}{a} \int_{M<t<N} \frac{a}{t^2 + a^2} dt \\
&\quad + \frac{C}{2} \int_{M<t<N} \frac{2(t-y)}{(t-y)^2 + b^2} + \frac{yC + D}{b} \int_{M<t<N} \frac{b}{(t-y)^2 + b^2} dt \\
&\\
&= \frac{A}{2} \ln\left(\frac{N^2 + a^2}{M^2 + a^2}\right) + \frac{B}{a} \int_{M<t<N} \mathcal{P}_a(t-y) dt \\
&\quad + \frac{C}{2} \ln\left(\frac{(N-y)^2 + b^2}{(M-y)^2 + b^2}\right) + \frac{yC + D}{b} \int_{M<t<N} \mathcal{P}_b(t-y) dt.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Nu ger (4.8) att de termer som innehåller funktionen ln, i ovanstående uttryck, kan skrivas som

$$\begin{aligned}
U(N, M) :&= \frac{A}{2} \ln\left(\frac{N^2 + a^2}{M^2 + a^2} \frac{(M-y)^2 + b^2}{(N-y)^2 + b^2}\right) = \frac{A}{2} \ln\left(\frac{N^2 + a^2}{(N-y)^2 + b^2} \frac{(M-y)^2 + b^2}{M^2 + a^2}\right) \\
&= \frac{A}{2} \ln\left(\frac{1 + \frac{a^2}{N^2}}{(1 - \frac{y}{N})^2 + \frac{b^2}{N^2}} \frac{(1 - \frac{y}{M})^2 + \frac{b^2}{M^2}}{1 + \frac{a^2}{M^2}}\right)
\end{aligned}$$

Låt

$$V = V(N,M) := \frac{1+\frac{a^2}{N^2}}{(1-\frac{y}{N})^2+\frac{b^2}{N^2}} \frac{(1-\frac{y}{M})^2+\frac{b^2}{M^2}}{1+\frac{a^2}{M^2}}.$$

Nu gäller

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\ \exists K = K(a,b,y) \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : N, -M > K \\ &\Rightarrow |V(N,M) - 1| < \epsilon. \end{aligned}$$

Vidare gäller

$$U(N,M) \leq \frac{|A|}{2} \ln(1+|V-1|) < \frac{|A|}{2}|V-1| < \frac{|A|}{2}\epsilon$$

och

$$U(N,M) \geq \frac{|A|}{2} \ln(1-|V-1|) \geq -|V-1||A| \ln 2 > -(|A| \ln 2)\epsilon.$$

För undre begränsningen har konkavitetsvillkoret för ln använts. För $\theta \in]0,1[$ gäller

$$\ln\left(1-\frac{\theta}{2}\right) = \ln\left(\theta \cdot \frac{1}{2} + (1-\theta)\cdot 1\right) \geq \theta \ln\frac{1}{2} + (1-\theta)\ln 1 = -\frac{\theta}{2} 2\ln 2.$$

Sätt $\frac{\theta}{2} = |V-1| < \frac{1}{2}$. Låt nu

$$E_1(N,M) = \frac{B}{a} \int_{M<t<N} \mathcal{P}_a(t-y)dt,$$

$$E_2(N,M) = \frac{yC+D}{b} \int_{M<t<N} \mathcal{P}_b(t-y)dt.$$

Eftersom

$$\begin{aligned} &E_1(N,M) \to E_1 := \frac{\pi B}{a}, \\ &E_2(N,M) \to E_2 := \frac{\pi(yC+D)}{b} \text{ och} \\ &U(N,M) \to 0, \end{aligned}$$

då $(N,M) \to (\infty, -\infty)$, så erhålls från (4.16), att

$$\lim_{(N,M)\to(\infty,-\infty)} \frac{1}{\pi} \int_{M<t<N} \frac{At+B}{t^2+a^2} + \frac{Ct+D}{(y-t)^2+b^2} dt = \frac{B}{a} + \frac{yC+D}{b}. \tag{4.17}$$

Detta kan omskrivas med hjälp av (4.8) och (4.9):

$$\frac{B}{a} + \frac{-yA+2Ay-B}{b} = \frac{1}{ab}\left(\frac{Aay}{b} + B(b-a)\right).$$

Sammanfattningsvis så ger (4.6), (4.7) och (4.17) att

$$(\mathcal{P}_a * \mathcal{P}_b)(y) = Aay + B(b-a).$$

Insättning av A och B ger

$$\begin{aligned}
Aay + B(b-a) &= \frac{2ay^2 + (b-a)(y^2+b^2-a^2)}{(y^2+b^2-a^2)^2+(2ya)^2} = \frac{2ay^2 + (b-a)(y^2+b^2-a^2)}{(y^2+b^2-a^2)^2+(2ya)^2} \\
&= \frac{2ay^2 + (b-a)(y^2+b^2+a^2) - 2a^2(b-a)}{y^4+b^4-a^4+2y^2b^2-2y^2a^2-2b^2a^2+4y^2a^2} \\
&= \frac{(b-a)(y^2+b^2+a^2) - 2a^2b + 2a(y^2+a^2+b^2) - 2ab^2}{(y^2+b^2+a^2)^2-(2ab)^2} \\
&= \frac{(b+a)(y^2+b^2+a^2) - 2ab(a+b)}{(y^2+b^2+a^2)^2-(2ab)^2} \\
&= \frac{(b+a)}{(y^2+b^2+a^2)+2ab} = \frac{(b+a)}{(y^2+(a+b)^2} = \mathcal{P}_{a+b}(y)
\end{aligned}$$

Ifall $b = a$, så erhålls

$$\begin{aligned}
B &= \frac{y^2}{y^4+(2ya)^2} = \frac{1}{y^2+(2a)^2}, \\
Ay &= \frac{2}{y^2+(2a)^2}, \\
Cy &= -\frac{2}{y^2+(2a)^2} \text{ och} \\
D &= 2Ay - B = \frac{3}{y^2+(2a)^2}
\end{aligned}$$

ur ekvationerna (4.8)-(4.11). Notera att A är inte väldefinierad för $y = 0$, men för $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ härledes analogt med fallet $b > a$ att

$$(\mathcal{P}_a * \mathcal{P}_b)(y) = \mathcal{P}_{2a}(y).$$

Eftersom båda framställningar är väldefinierade och kontinuerliga med avseende på y, för varje $y \in \mathbb{R}$, så gäller satsen för $y = 0$ även i fallet $a = b$. $\square$

Lemma 74. Låt $f \in L^p(\mathbb{R}),\ p \geq 1$ och $g \in L^1(\mathbb{R})$. Nu gäller

$$||f * g||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} \, ||g||_{L^1} \, .$$

Bevis. Antag först $||g||_{L^1} = 1$. Då är $\frac{|g(t)|dt}{\pi}$ ett sannolikhetsmått. Därför kan Jensens olikhet användas, varefter Fubini-Tonellis sats tillämpas:

$$\begin{aligned}
||f * g||_{L^p} &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)g(s-t)dt \right|^p ds \leq \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)| \frac{|g(s-t)|}{\pi} dt \right)^p ds \\
&\leq \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|g(s-t)|}{\pi} |f(t)|^p dtds \leq \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} g(s-t)dsdt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt = ||f||_{L^p} \, .
\end{aligned}$$

Nu gäller för godtyckligt $g \in L^1$ att $\frac{|g(t)|}{||g||_{L^1}} \frac{dt}{\pi}$ är ett sannolikhetsmått, vilket ger att

$$||f * \hat{g}||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} \, ,$$

där $\hat{g}(t) = \frac{|g(t)|}{||g||_{L^1}}$. Eftersom faltningen är linjär så erhålls nu vid multiplikation av $||g||_{L^1}$ den önskade olikheten. $\square$

Definition 23. För en kropp $\mathbb{K}$ och $p \geq 1$ definieras rummet $\hat{L}_+^p$ som mängden

$$\left\{ a : \mathbb{R} \to \mathbb{K} : \int_{-\infty}^{\infty} |a(t)|^p \frac{dt}{1+t^2} < \infty \right\}$$

försedd med

$$||a||_{\hat{L}_+^p} = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |a(t)|^p \frac{dt}{1+t^2} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sats 75. *$||\cdot||_{\hat{L}_+^p}$ är en norm i $\hat{L}_+^p$.*

Bevis. Låt $a \in L_+^p$. Nu erhålls, vid substitutionen $x = 2 \arctan t$ och $g := a \circ \tan \frac{\mathrm{id}}{2}$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |a(t)|^p \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| a \left(\tan \frac{x}{2} \right) \right|^p dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^p \, dx.$$

Då $2 \arctan : \mathbb{R} \to]-\pi, \pi[$ bijektivt, så erhålls normegenskaperna från normen $||\cdot||_{L^p(]-\pi,\pi[)}$. $\square$

4.1 Poissonintegralframställning på högra halvplanet

Sats 76. *Låt $\hat{f}(i\cdot) \in \hat{L}_+^p, p > 1$ vara reellvärd. Då är*

$$f(x+iy) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(y-t)^2 + x^2} \hat{f}(it) dt \tag{4.18}$$

en harmonisk funktion i högra halvplanet. Dessutom gäller

$$\hat{f}(iy) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(t-y)^2 + x^2} \hat{f}(it) dt. \tag{4.19}$$

nästan överallt $y \in \mathbb{R}$.

Bevis. Låt bijektionen $T_{1+} : \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\} \to \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq 0\}$ vara definierad som

$$T_{1+} = \frac{1+z}{1-z}$$

med inversen

$$T_{+1} = \frac{z-1}{1+z}.$$

Från beviset till Sats 69 fås att $-iT_{1+}(e^{i]0.2\pi[}) =]-\infty, \infty[$, där $-iT_{1+}(e^{i\alpha})$ är en strikt avtagande funktion. Detta medför att $\partial\mathbb{D}$ avbildas bijektivt på den imaginära axeln, så låt $t = t(\alpha) = -iT_{1+}(e^{i\alpha})$. Vidare erhålls genom användandet av logratimens principalgren

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(-i\ln T_{+1}(it)\right) = -i\frac{it+1}{it-1}\frac{i(it+1)-i(it-1)}{(it+1)^2}\\ &= \frac{-2(it+1)}{(1-it)(1+it)^2} = \frac{-2}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Det gäller alltså att

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(it)|^p\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\hat{f}(T_{1+}(e^{i\alpha}))|^p d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(e^{i\alpha})|^p d\alpha, \tag{4.20}$$

där $g := \hat{f}\circ T_{1+}$, vilket innebär att

$$\hat{f}(i\cdot) \in \hat{L}^p_+ \Leftrightarrow g(e^{i\cdot}) \in L^p(]0,2\pi[). \tag{4.21}$$

Nu ger anmärkningen till Sats 13 att utvidgningen

$$g(z) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\alpha)g(e^{i\alpha})d\alpha,$$

där $z = re^{i\theta}$, är harmonisk i enhetsdisken. Låt nu $f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{R}$ vara definierad genom $f(w) = g(T_{+1}(w))$. Vidare erhålls

$$\begin{aligned}\hat{P}(re^{i\theta},\alpha) &= \frac{e^{i\alpha}+re^{i\theta}}{e^{i\alpha}-re^{i\theta}} = \frac{T_{+1}(it)+T_{+1}(w)}{T_{+1}(it)-T_{+1}(w)} = \frac{T_{+1}(it)+T_{+1}(w)}{T_{+1}(it)-T_{+1}(w)}\\ &= \frac{\frac{it-1}{it+1}+\frac{w-1}{w+1}}{\frac{it-1}{it+1}-\frac{w-1}{w+1}} = \frac{(it-1)(w+1)+(w-1)(it+1)}{(it-1)(w+1)-(w-1)(it+1)}\\ &= \frac{2itw-2}{2it-2w} = \frac{(itx-(ty+1))\left(i(y-t)-x\right)}{|i(t-y)-x|^2}\\ &= \frac{x(ty+1)+tx(t-y)+i\left(tx^2-(y-t)(ty+1)\right)}{|i(t-y)-x|^2}\\ &= \frac{x(1+t^2)+i(t(x^2-y^2+1)-y(1-t^2))}{(t-y)^2+x^2},\end{aligned}$$

där diskranden avbildas på imaginära axeln enligt $T_{1+}(e^{i\alpha}) = it$ och en inrepunkt i disken avbildas till en inrepunkt på högra halvplanet enligt $T_{1+}(re^{i\theta}) = w = x+iy$. Sammanfattningsvis gäller

$$P(r,\theta-\alpha)d\alpha = \Re\hat{P}(z,\alpha)d\alpha = \frac{x(1+t^2)}{(t-y)^2+x^2}\frac{-2dt}{1+t^2} = \frac{-2x}{(t-y)^2+x^2}dt.$$

Eftersom $\hat{f}(i\cdot) \in \hat{L}^p_+$ så gäller $\hat{f}\circ T_{1+}(e^{i\cdot}) \in L^p(]0,2\pi[)$, vilket medför att

$$\int_0^{2\pi} P(r,\theta-\alpha)\hat{f}\circ T_{1+}(e^{i\alpha})d\alpha$$

existerar . Vidare så gäller

$$\begin{aligned} f(w) = g(T_{+1}(w)) = g(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-\alpha)\hat{f}\circ T_{1+}(e^{i\alpha})d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(t-y)^2+x^2}\hat{f}(it)dt. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Notera att sista likheten ovan gäller även ifall $g(e^{i\cdot}) \in L^p(]0,2\pi[)$, eftersom detta skulle medför att $\hat{f}(i\cdot) \in \hat{L}^p_+$, enligt (4.20). Eftersom g är harmonisk och T_{+1} är analytisk så är f harmonisk enligt, Lemma 70.

För att bevisa (4.19) erhålls först, från Sats 42, att

$$\lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-\alpha)\hat{f}\circ T_{1+}(e^{i\alpha})d\alpha = \hat{f}\circ T_{1+}(e^{i\theta}) = \hat{f}(iy)$$

för nästan varje θ. Eftersom $iy = T_{1+}(e^{i\theta})$ så gäller ovanstående för nästan varje y. Eftersom $T_{1+} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_+$ är en konform avbildning så avbildas gränsvärdet vinkelrätt mot randen på enhetscirkeln på ett gränsvärde vinkelrätt mot randen till $\mathbb{C}_+$, dvs. vinkelrätt mot den imgainära axeln. Således gäller i enlighet med utredningen ovan, att

$$\begin{aligned} \hat{f}(iy) &= \lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta(x,y)-\alpha)\hat{f}\circ T_{1+}(e^{i\alpha})d\alpha \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(t-y)^2+x^2}\hat{f}(it)dt. \end{aligned}$$

nästan överallt $y \in \mathbb{R}$. □

Definition 24. För $\infty > p \geq 1$,

$$\hat{H}^p_+ := \left\{ f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C} : \frac{f}{(1+\mathrm{id})^{\frac{2}{p}}} \in H^p_+ \right\}$$

och

$$\hat{h}^p_+ := \left\{ f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C} : \left\| \frac{f}{(1+\mathrm{id}^2)^{\frac{1}{p}}} \right\|_{H^p_+} < \infty \right\}.$$

Anmärkning 5. Observera att skillnanden mellan H^p och h^p är annan än mellan $\hat{H}^p$ och $\hat{h}^p$.

Definition 25. För $p \geq 1$ definieras

$$\mathbb{H}^p_+ = \{f \in L^p_+ : P_x * f(y) \text{ är analytisk med avseende på } z = x+iy\}.$$

Sats 77. *Låt* $\hat{f}(i\cdot) \in L^p = L^p_+, p \geq 1$ *och låt*

$$f_x(y) = f(x+iy) \text{ och } f_x(y) = (\hat{f} * \mathcal{P}_x)(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(t-y)^2+x^2}\hat{f}(it)dt.$$

Nu gäller:

1. $\sup_{x>0} ||f_x||_{L^p} < \infty$*,*

2. $||f_x||_{L^p}$ *är avtagande med avseende på* x*,*

3. $\lim_{x\to 0^+} \left|\left| f_x - \hat{f} \right|\right|_{L^p} = 0$ *och*

4. För varje $\delta > 0$ *gäller*

$$\limsup_{\substack{\Re w \geq \delta \\ |w|\to\infty}} |f(w)| = 0.$$

Bevis. Enligt Lemma 74 gäller

$$||f_x||_{L^p} = \left|\left| \hat{f} * \mathcal{P}_x \right|\right|_{L^p} \leq \left|\left| \hat{f} \right|\right|_{L^p} ||\mathcal{P}_x||_{L^1} = \left|\left| \hat{f} \right|\right|_{L^p} < \infty, \tag{4.23}$$

där Sats 71 ger den sista likheten. Detta innebär att Poissonintegralen av en L^p-funktion är likformigt begränsad, vilket är egenskap 1. För varje $x > 0$ gäller således $f_x \in L^p$. Låt nu $0 < x_1 < x_2 < \infty$ och notera att

$$\begin{aligned} f_{x_1} * \mathcal{P}_{x_2-x_1}(y) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f_{x_1}(s)\mathcal{P}_{x_2-x_1}(y-s)ds \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\mathcal{P}_{x_1}(s-t)dt \right) \mathcal{P}_{x_2-x_1}(y-s)ds, \end{aligned}$$

Fubinis sats kan nu tillämpas, eftersom

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left| \hat{f}(t)\mathcal{P}_{x_1}(s-t)\mathcal{P}_{x_2-x_1}(y-s) \right| dtds \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|\left| \hat{f} \right|\right|_{L^p} \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_{x_1}^q(s-t)dt \right)^{\frac{1}{q}} \mathcal{P}_{x_2-x_1}(y-s)ds \\ &\leq \left|\left| \hat{f} \right|\right|_{L^p} ||\mathcal{P}_{x_1}||_{L^q} < \infty, \end{aligned}$$

enligt Hölders olikhet, där $q = \frac{p}{p-1}$ och Följdsats 72. Detta medför att

$$(f_{x_1} * \mathcal{P}_{x_2-x_1})(y) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_{x_1}(s-t)\mathcal{P}_{x_2-x_1}(y-s)dsdt.$$

För den inre integralen görs substitutionen $s = w + t,\ ds = dw$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_{x_1}(s-t)\mathcal{P}_{x_2-x_1}(y-s)ds &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_{x_1}(w)\mathcal{P}_{x_2-x_1}(y-t-w)dw \\ &= (\mathcal{P}_{x_2-x_1} * \mathcal{P}_{x_1}(y-t)) = \mathcal{P}_{x_2}(y-t), \end{aligned}$$

där sista likheten fås av Sats 73. Nu gäller alltså

$$f_{x_1} * \mathcal{P}_{x_2-x_1} = \hat{f} * \mathcal{P}_{x_2} = f_{x_2}.$$

Då $f_{x_1} \in L^p$, enligt första delen av beviset, så kan samma förfarande tillämpas här, vilket ger

$$||f_{x_2}||_{L^p} = ||f_{x_1} * \mathcal{P}_{x_2-x_1}||_{L^p} \leq ||f_{x_1}||_{L^p} ||\mathcal{P}_{x_2-x_1}||_{L^1} = ||f_{x_1}||_{L^p},$$

vilket är egenskap 2. För att visa egenskap 3 så utnyttjas Lemma 65. Sats 76 ger att $f_x(iy) \to \hat{f}(iy)$ nästan överallt $y \in \mathbb{R}$. Från (4.23) följer första olikheten nedan medan Fatous lemma ger den andra:

$$\lim_{x \to 0^+} ||f_x||_{L^p} \leq \left|\left|\hat{f}\right|\right|_{L^p} \leq \lim_{x \to 0^+} ||f_x||_{L^p}.$$

Vidare ger egenskap 2 och egenskap 1 att

$$\lim_{x \to 0^+} ||f_x||_{L^p} = \sup_{x>0} ||f_x||_{L^p} < \infty.$$

Nu är villkoren i Lemma 65 uppfyllda, med $I = \mathbb{R}$, varefter lemmat ger den önskade olikheten.

Låt $\delta > 0$. Nu gäller $\sup_{x \geq \delta} |\mathcal{P}_x| \leq \frac{1}{\delta}$. Låt $\epsilon > 0$ och låt $I = I_a := [-a, a]$. För varje $a > 0$ gäller

$$\pi f(x+iy) = \int_{\mathbb{R} \setminus I} \hat{f}(t)\mathcal{P}_x(y-t)dt + \int_I \hat{f}(t)\mathcal{P}_x(y-t)dt.$$

För den första integralen gäller, då $x \geq \delta$, att

$$\left| \int_{\mathbb{R} \setminus I} \hat{f}(t)\mathcal{P}_x(y-t)dt \right| \leq \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R} \setminus I} |\hat{f}(t)|dt.$$

Välj nu $a > 0$ så stort att $\int_{\mathbb{R} \setminus I} |\hat{f}(t)|dt$ begränsas av $\frac{\epsilon\delta}{2}$. För den andra integralen gäller

$$\left| \int_I \hat{f}(t)\mathcal{P}_x(y-t)dt \right| \leq \left|\left|\hat{f}\right|\right|_{L^1(I)} \sup_{t \in [-a,a]} \mathcal{P}_x(y-t)dt,$$

då $x \geq \delta$. Notera att $f \in L^p(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in L^p(I) \Rightarrow f \in L^1(I)$, där den andra implikationen är en följd av att I är en begränsad mängd. Vidare gäller

$$\lim_{|x+iy| \to \infty} \sup_{t \in [-a,a]} \mathcal{P}_x(y-t)dt = 0.$$

Detta inses genom betraktandet av x och y i polära koordinater, nämligen, för $x = R\cos\theta$ och $y = R\sin\theta$ gäller

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x(y-t) &= \frac{R\cos\theta}{R^2\cos^2\theta + (R\sin\theta - t)^2} = \frac{R\cos\theta}{R^2\cos^2\theta + (R\sin\theta - t)^2} \\ &= \frac{1}{R} \frac{\cos\theta}{1 - \frac{t\sin\theta - t^2}{R}}. \end{aligned}$$

Eftersom $|t| \leq a$ kan R väljas så stort att

$$\mathcal{P}_x(y-t) \leq \frac{2}{R}.$$

Således kan r väljas så stort att $r < R \Rightarrow \left| \int_I \hat{f}(t)\mathcal{P}_x(y-t)dt \right| < \frac{\epsilon}{2}$. Sammanfattningsvis, för alla $\delta > 0$ gäller

$$\forall \epsilon > 0 \exists a > 0, r_a > 0 : r_a < |x+iy|, x \geq \delta \Rightarrow |f(x+iy)| < \frac{\epsilon}{\pi}.$$

$\square$

Under bevisgenomförandet av egenskap 3, bevisades följande resultat.

Följdsats 78. *Låt antagandena i satsen ovan vara uppfyllda. Nu gäller*

$$\sup_{x>0} ||f_x||_{L^p} = \lim_{x\to 0^+} ||f_x||_{L^p} = \left|\left|\hat{f}\right|\right|_{L^p}.$$

Följdsats 79. *Om* $f \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+)$ *och* $f(x+iy) = \mathcal{P}_x * F(y)$ *för något* $F \in L^p_+$, *så gäller*

$$f \in H^p_+.$$

Bevis. Sats 77 egenskap 1 ger resultatet. □

Lemma 80. Om $f \in H^p_+, (p \geq 1)$ så gäller för $z \in \mathbb{C}_+$, att

$$|f(z)| \leq \frac{M}{(\Re(z))^{\frac{1}{p}}},$$

där

$$M = \sup_{\sigma>0} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(\sigma+iy)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bevis. Fixera $z \in \mathbb{C}_+$. Enligt Sats 48 är $|f|^p$ subharmonisk på $\mathbb{C}_+$, vilket innebär att

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z+re^{it})|^p dt,$$

för $r < \Re(z)$. Låt $0 < R < \Re(z)$ och multiplicera båda sidor i ovanstående olikhet med r, varefter båda sidor integreras från 0 till R med avseende på r,

$$\frac{R^2}{2}|f(z)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} |f(z+re^{it})|^p r dt dr.$$

□

Eftersom integranden är positiv för varje $z \in \mathbb{C}$ med $\Re z > R$, så kan integralen uppåtskattas genom att cirkelområdet uppåtapproximeras med den omslutande kvadraten, dvs.

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_0^{2\pi} |f(z+re^{it})|^p r dt dr &\leq \int_{\Im z - R}^{\Im z + R} \int_{\Re z - R}^{\Re z + R} |f(x+iy)|^p dx dy \\ &\leq \int_{\Re z - R}^{\Re z + R} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dy \right) dx \\ &\leq \sup_{\sigma>0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma+iy)|^p dy \int_{\Re z - R}^{\Re z + R} dx. \end{aligned}$$

Sammanfattningsvis gäller

$$|f(z)|^p \leq \frac{2}{R^2} \frac{1}{2\pi} \sup_{\sigma>0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma+iy)|^p dy 2R = \sup_{\sigma>0} \frac{1}{\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma+iy)|^p dy$$

för varje $R < \Re(z)$. Låt nu $R \to \Re(z)^-$ för att erhålla den önskade olikheten.

Lemma 81. Låt S vara en mängd bestående av ett ändligt antal element och låt $f \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+ \setminus S)$. Låt $S_+ = \{\Re a : a \in S\}$ och fixera $h \in \mathbb{R}_{>0} \setminus S_+$ och $z = x + iy \in \mathbb{C}_+$. Välj slutligen

$$R \in \mathbb{R}_{>0} : R > \max\{2|z+h|, \max_{a \in S} |a|\}$$

samt definiera

$$\hat{f}_x(y) = f_x(iy) = f(x+iy),$$

$$S_h = \{a \in \mathbb{C} : \Re a > h \wedge (a \in S \vee a = z+h)\}$$

Då gäller

$$SR - g(x,y,h,R) = \frac{1}{\pi} \int_{-\arccos \frac{h}{R}}^{\arccos \frac{h}{R}} \frac{2x f(Re^{i\alpha}) Re^{i\alpha}}{(Re^{i\alpha} - h - iy)^2 - x^2} d\alpha,$$

där

$$g(x,y,h,R) = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}} \mathcal{P}_x(y-t) f_h(it) dt,$$

$$H_1(w) = \frac{f(w)}{w-(z+h)},\ H_2(w) = \frac{f(w)}{w-(-\overline{z}+h)}$$

och

$$SR := \sum_{a \in S_h} \left(\operatorname{Res}(H_1)(a) - \operatorname{Res}(H_2)(a)\right).$$

Bevis. Låt $1 \leq p < \infty$. Fixera $h \in \mathbb{R}_{>0} \setminus S_+, x + iy = z \in \mathbb{C}_+$. Fixera nu ett R, så stort att $R > \max\{2|z+h|, \max_{a\in S}|a|\}$ och låt θ vara vinkeln mellan reella axeln och $h + iR$, dvs. $\theta := \arccos \frac{h}{R} \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Då gäller $z + h \in C_R$, där

$$C_R := \{w : |w| < R \wedge \Re w > h\}.$$

Vidare gäller, för det godtyckligt valda $z \in \mathbb{C}_+$,

$$\begin{aligned}
A(z,h,f) &:= \sum_{a \in S_h} \operatorname{Res}(H_1)(a) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(w)}{w-(z+h)} dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(w-h+h)}{w-h-z} dw \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \int_{-R\sin\theta}^{R\sin\theta} \frac{f(it+h)}{it-z} d(it+h) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{f(Re^{i\alpha})}{Re^{i\alpha}-z-h} d(Re^{i\alpha}) \\
&= \frac{-1}{2\pi} \int_{-R\sin\theta}^{R\sin\theta} \frac{f_h(it)}{it-z} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{f(Re^{i\alpha})}{Re^{i\alpha}-z-h} Re^{i\alpha} d\alpha,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

där residysatsen ger den första likheten. Notera att $\Re z > 0, h > 0$ medför

$$R > 2|h+z| = 2|x+h+iy| > 2|-x+h+iy| = |h-\overline{z}|.$$

Analogt med ovanstående utredning erhålls

$$\begin{aligned}\sum_{a\in S_h}\operatorname{Res}(H_2)(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(w)}{w-(-\overline{z}+h)}dw\\ &= \frac{-1}{2\pi}\int_{-R\sin\theta}^{R\sin\theta}\frac{f_h(it)dt}{it+\overline{z}}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{f(Re^{i\alpha})Re^{i\alpha}d\alpha}{Re^{i\alpha}+\overline{z}-h}.\end{aligned}$$

Vidare gäller

$$\begin{aligned}RH &:= \int_{-\theta}^{\theta}\frac{f(Re^{i\alpha})}{Re^{i\alpha}-z-h}Re^{i\alpha}d\alpha-\int_{-\theta}^{\theta}\frac{f(Re^{i\alpha})}{Re^{i\alpha}+\overline{z}-h}Re^{i\alpha}d\alpha\\ &= \int_{-\theta}^{\theta}\left(\frac{Re^{i\alpha}f(Re^{i\alpha})}{Re^{i\alpha}-x-iy-h}-\frac{Re^{i\alpha}f(Re^{i\alpha})}{Re^{i\alpha}+x-iy-h}\right)d\alpha\\ &= \int_{-\arccos\frac{h}{R}}^{\arccos\frac{h}{R}}\frac{2xRe^{i\alpha}f(Re^{i\alpha})}{(Re^{i\alpha}-iy-h)^2-x^2}d\alpha\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}LH &:= -\int_{-R\sin\theta}^{R\sin\theta}\frac{f_h(it)}{it-z}dt-\int_{-R\sin\theta}^{R\sin\theta}\frac{f_h(it)}{it+\overline{z}}dt\\ &= \int_{-R\sin\theta}^{R\sin\theta}\frac{2xf_h(it)}{(x+iy-it)(it+x-iy)}dt\\ &= \int_{-\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}}\frac{2xf_h(it)}{x^2+(t-y)^2}dt,\end{aligned}$$

där sista likheten kommer från att $R\sin\theta>0$ och

$$(R\sin\theta)^2=R^2(1-\cos^2\theta)=R^2\left(1-\frac{h^2}{R^2}\right).$$

Således erhålls

$$\sum_{a\in S_h}\operatorname{Res}(H_1)(a)-\sum_{a\in S_h}\operatorname{Res}(H_2)(a)=\frac{1}{2\pi}LH+\frac{1}{2\pi}RH.$$

Subtrahera $\frac{1}{2\pi}LH$ från båda sidor för att erhålla den önskade likheten. $\square$

Sats 82. *Om $f\in\hat{H}_+^p$, $\infty>p>1$ så gäller, för $h>0$ och $f_h(x+iy):=f(x+h+iy)$,*

$$f_h(x+iy)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_x(y-t)f_h(it)dt.$$

Bevis. Låt $1\le p<\infty$. Fixera $h>0, x+iy=z\in\mathbb{C}_+$. Välj nu ett R, så stort att $R>\max\{2|z+h|,\sqrt{2}h,2\}$ och låt θ vara vinkeln mellan reella axeln och $h+iR$, dvs. $\theta:=\arccos\frac{h}{R}\in]0,\frac{\pi}{2}[$. Lemma 81 ger, med $S=\emptyset$, att

$$SR(h)-g(x,y,h,R)=\frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{2xf(Re^{i\alpha})Re^{i\alpha}}{(Re^{i\alpha}-h-iy)^2-x^2}d\alpha, \tag{4.25}$$

där

$$g(x,y,h,R) = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}} \mathcal{P}_x(y-t)f_h(it)dt,$$

$$H_1(w) = \frac{f(w)}{w-(z+h)} \text{ och } H_2(w) = \frac{f(w)}{w-(-\overline{z}+h)},$$

$$SR(h) = \sum_{a\in S_h} (\operatorname{Res}(H_1)(a) - \operatorname{Res}(H_2)(a),)$$

och

$$S_h = \{a \in \mathbb{C} : \Re a > h \wedge (a \in S \vee a = z+h)\}.$$

Eftersom $f \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+)$ och $h - \overline{z} \notin S_h$, så erhålls

$$SR(h) = \operatorname{Res}(H_1)(z+h) = f(z+h)\ \forall h > 0.$$

Notera att

$$R > \sqrt{2}h \Rightarrow \theta > \frac{\pi}{4} \text{ och}$$
$$R > 2|z+h| \Rightarrow |y| < \frac{R}{2}.$$

För $\frac{\pi}{4} \le |\alpha| < \theta$ gäller

$$\begin{aligned} |(Re^{i\alpha} - h - iy - x)| &= \sqrt{(R\cos\alpha - h - x)^2 + (y + R\sin\alpha)^2} \\ &\ge y + R\sin\alpha \\ &\ge y + \frac{R}{\sqrt{2}} > \frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{R}{2} = \frac{R(\sqrt{2}-1)}{2} > 0. \end{aligned} \tag{4.26}$$

För $|\alpha| < \frac{\pi}{4}$ gäller

$$\begin{aligned} |(Re^{i\alpha} - h - iy - x)| &= \sqrt{(R\cos\alpha - h - x)^2 + (y + R\sin\alpha)^2} \\ &\ge R\cos\alpha - h - x \\ &\ge \frac{R}{\sqrt{2}} - h - x > \frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{R}{2} = \frac{R(\sqrt{2}-1)}{2} > 0. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Man inser lätt att (4.26) och (4.27) gäller även om x byts ut mot $-x$. Således erhålls

$$|(Re^{i\alpha} - h - iy - x)(Re^{i\alpha} - h - iy + x)| \ge \left(\frac{R(\sqrt{2}-1)}{2}\right)^2 \tag{4.28}$$

för $|\alpha| < \theta$. Vidare gäller

$$\begin{aligned} RH :&= \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} \frac{2xf(Re^{i\alpha})Re^{i\alpha}}{(Re^{i\alpha}-h-iy)^2 - x^2} d\alpha\right| \\ &\le \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} \left|\frac{2xR(1+Re^{i\alpha})^{\frac{2}{p}}}{(Re^{i\alpha}-h-iy-x)(Re^{i\alpha}-h-iy+x)}\right| \left|\frac{f(Re^{i\alpha})}{(1+Re^{i\alpha})^{\frac{2}{p}}}\right| d\alpha \\ &\le \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} \frac{8xR(1+R)^{\frac{2}{p}}}{(R(\sqrt{2}-1))^2} \left|\frac{f(Re^{i\alpha})}{(1+Re^{i\alpha})^{\frac{2}{p}}}\right| d\alpha \\ &\le \frac{72x(1+R)^{\frac{2}{p}}}{\pi R} \int_{-\theta}^{\theta} \left|\frac{f(Re^{i\alpha})}{(1+Re^{i\alpha})^{\frac{2}{p}}}\right| d\alpha. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Vidare gäller, att $\frac{f}{(1+id)^{\frac{2}{p}}} \in H_+^p$, då $f \in \hat{H}_+^p$, vilket medför

$$\begin{aligned}
\int_{-\theta}^{\theta} \left| \frac{f(Re^{i\alpha})}{(1+Re^{i\alpha})^{\frac{2}{p}}} \right| d\alpha &\leq \int_{-\theta}^{\theta} \frac{M}{(R\cos\alpha)^{\frac{1}{p}}} d\alpha \\
&\leq \int_0^{\theta} \frac{2M}{(R\cos\alpha)^{\frac{1}{p}}} d\alpha \\
&\leq \frac{2M}{R^{\frac{1}{p}}} \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2t} dt \\
&= \frac{\pi M}{R^{\frac{1}{p}}} \ln\left(\frac{\pi}{2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \right) \\
&\leq \frac{\pi M}{R^{\frac{1}{p}}} \ln\left(\frac{\pi}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \right) \\
&= \frac{\pi M}{R^{\frac{1}{p}}} \ln\left(\frac{\pi}{2\cos\theta} \right) \\
&= \frac{\pi M}{R^{\frac{1}{p}}} \ln\left(\frac{\pi R}{2h} \right),
\end{aligned}$$

där

$$M = \sup_{\sigma>0} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(\sigma+iy)|^p}{(1+\sigma+iy)^2} dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Första olikheten ovan är en följd av Lemma 80 och att $R > 2$. Den andra olikheten erhålls av substitutionen $t = \frac{\pi}{2} - \alpha$ och det faktum, att för $\infty > p \geq 1, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gäller

$$\cos^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \geq \sin t \geq \frac{2}{\pi} t.$$

Det gäller alltså att

$$RH \leq 72xM \left(\frac{1}{R} + 1\right)^{\frac{2}{p}} R^{\frac{2}{p}-\frac{1}{p}-1} \ln\left(\frac{\pi R}{2h}\right) \leq 288xMR^{\frac{1}{p}-1} \ln\left(\frac{\pi R}{2h}\right).$$

Med hjälp av 4.25 erhålls nu

$$\begin{aligned}
288xMR^{\frac{1}{p}-1} \ln\left(\frac{\pi R}{2h}\right) &\geq \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{2xf(Re^{i\alpha})Re^{i\alpha}}{(Re^{i\alpha}-h-iy)^2 - x^2} d\alpha \right| \\
&= |SR(h) - g(x,y,h,R)| \qquad (4.30) \\
&= \left| f(z+h) - \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}} \mathcal{P}_x(y-t) f_h(it) dt \right|.
\end{aligned}$$

Låt nu $R \to \infty$ i (4.30). Eftersom vänsterled går mot noll, då $p > 1$, så gäller den önskade likheten i principalvärdesmening. Notera att Lemma 74 och Sats 71 egenskaperna 1 och 2 medför att Poissonintegralen konvergerar absolut och således erhålls den önskade likheten. $\square$

Lemma 83. Låt $f_u(z) = \frac{1}{u^2 - z^2}$, $u > 0$. För $z = x + iy \in \mathbb{C}_+ \setminus \{u\}$ gäller

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+(y-t)^2}\frac{1}{u^2+t^2}dt &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(y-t)f_u(it)dt \\ &= \frac{(u+x)}{u((x+u)^2+y^2)}.\end{aligned}$$

Bevis. $f_u \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+ \setminus \{u\})$ och har en enkel pol i u. Låt $z = x + iy \in \mathbb{C}_+ \setminus \{u\}$ och $0 < h < \min\{\frac{1}{2}, \frac{u}{2}, \frac{|u-x|}{2}\}$. Definiera

$$H_1(w) := \frac{f_u(w)}{w-(z+h)} \text{ och } H_2(w) := \frac{f_u(w)}{w-(-\overline{z}+h)}.$$

Låt $R > \max\{2|z+h|, \sqrt{2}h, 2, u\}$. Relevanta residyer för användning av Lemma 81 är

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(H_1)(u) &= \lim_{w\to u}\frac{w-u}{w-(z+h)}\frac{1}{(u-w)(u+w)} = \frac{1}{2u(h+z-u)} \\ \mathrm{Res}(H_1)(z+h) &= \lim_{w\to z+h}\frac{w-z-h}{w-(z+h)}f_u(w) = f_u(z+h) = \frac{1}{u^2-(z+h)^2} \\ \mathrm{Res}(H_2)(u) &= \lim_{w\to u}\frac{w-u}{w+\overline{z}-h}\frac{1}{(u-w)(u+w)} = \frac{1}{2u(h-u-\overline{z})}.\end{aligned}$$

Notera att $h - \overline{z} \notin C_R$, där C_R är cirkelsegmentet beskrivet i Lemma 81. Lemmat ger att

$$SR_u(h) - g(x,y,h,R,u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\arccos\frac{h}{R}}^{\arccos\frac{h}{R}} \frac{2xf_u(Re^{i\alpha})Re^{i\alpha}}{(Re^{i\alpha}-h-iy)^2-x^2}d\alpha,$$

där

$$g(x,y,h,R,u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}} \mathcal{P}_x(y-t)f_u(h+it)dt$$

och

$$SR_u(h) := \sum_{a\in S_h}\left(\mathrm{Res}(H_1)(a) - \mathrm{Res}(H_2)(a)\right).$$

Det gäller att

$$\begin{aligned}\left|u^2-(Re^{i\alpha})^2\right| &= \left|(u+Re^{i\alpha})(u-Re^{i\alpha})\right| \\ &= \sqrt{(u+R\cos\alpha)^2+R^2\sin^2\alpha}\sqrt{(u-R\cos\alpha)^2+R^2\sin^2\alpha} \\ &= \sqrt{u^2+2Ru\cos\alpha+R^2}\sqrt{u^2-2Ru\cos\alpha+R^2} \\ &\geq R(R-u).\end{aligned}$$

Med hjälp av ekvation (4.28) i Sats 82 erhålls, med $\theta = \arccos\frac{h}{R} > \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}
RH :&= \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\arccos\frac{h}{R}}^{\arccos\frac{h}{R}} \frac{2xf_u(Re^{i\alpha})Re^{i\alpha}}{(Re^{i\alpha}-h-iy)^2-x^2}d\alpha\right| \\
&\le \frac{2xR}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{|f_u(Re^{i\alpha})|}{|(Re^{i\alpha}-h-iy)^2-x^2|}d\alpha \\
&\le \frac{8xR}{R^2\pi(\sqrt{2}-1)^2}\int_{-\theta}^{\theta}|f_u(Re^{i\alpha})|d\alpha \\
&\le \frac{72x}{R\pi}\int_{-\theta}^{\theta}\left|\frac{1}{u^2-Re^{i\alpha}}\right|d\alpha \\
&\le \frac{72x}{\pi R}\frac{2\theta}{R(R-u)} \\
&\le \frac{144x}{R^2(R-u)},
\end{aligned}$$

vilket medför

$$|SR_u(h) - g(x,y,h,R,u)| \le \frac{144x}{R^2(R-u)}.$$

Således gäller

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\mathcal{P}_x(y-t)f_u(h+it)dt &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}}\mathcal{P}_x(y-t)f_u(h+it)dt \\
&= SR_u(h),
\end{aligned} \tag{4.31}$$

där första likheten gäller då $SR_u(h)$ är konstant med avseende på R, för stora R. Eftersom

$$\begin{aligned}
\left|u^2-(h+it)^2\right| &= |(u-h-it)(u+h+it)| \\
&\ge \sqrt{(u-h)^2+t^2}\sqrt{(u+h)^2+t^2} \\
&\ge \frac{u^2}{2},
\end{aligned}$$

då $h < \frac{u}{2}$, så gäller

$$|\mathcal{P}_x(y-t)f_u(h+it)| \le \frac{2}{u^2}\mathcal{P}_x(y-t) \quad \forall t\in\mathbb{R}. \tag{4.32}$$

Detta medför att integralen (4.31) konvergerar absolut, enligt Sats 71 egenskaperna 1 och 2, vilket medför att integralen är konvergent och värdet sammanfaller med principalvärdet

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_x(y-t)f_u(h+it)dt = SR_u(h).$$

Olikheten (4.32) medför även att Lebesgues dominerade konvergenssats kan tillämpas, vilket ger

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0^+}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_x(y-t)f_u(h+it)dt &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_x(y-t)f_u(it)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+(y-t)^2}\frac{1}{u^2+t^2}dt.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Vidare gäller

$$\begin{aligned}SR_u(h) &= \sum_{a\in S_h} (\mathrm{Res}(H_1)(a) - \mathrm{Res}(H_2)(a)) \\ &= \frac{1}{2u(h+z-u)} + \frac{1}{u^2-(z+h)^2} - \frac{1}{2u(h-u-\overline{z})}.\end{aligned}$$

och därmed erhålls

$$\begin{aligned}S_u &:= \lim_{h\to 0^+} SR_u(h) \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2u(h+z-u)} + \frac{1}{u^2-(z+h)^2} - \frac{1}{2u(h-u-\overline{z})} \\ &= \frac{1}{2u(z-u)} + \frac{1}{u^2-z^2} + \frac{1}{2u(u+\overline{z})} \\ &= \frac{-(u+z)(u+\overline{z}) + 2u(u+\overline{z}) + (u^2-z^2)}{2u(u+\overline{z})(u^2-z^2)} \\ &= \frac{-2x^2+2u^2-2iuy-2ixy}{2u(u^3-ux^2+uy^2-2iuxy+u^2x-iu^2y-x^3-xy^2-iyx^2-iy^3)} \\ &= \frac{(u+x)(u-x-iy)}{u((u-x)((x+u)^2+y^2)-iy((u+x)^2+y^2))} \\ &= \frac{(u+x)(u-x-iy)}{u((x+u)^2+y^2)(u-x-iy)} \\ &= \frac{(u+x)}{u((x+u)^2+y^2)}.\end{aligned} \tag{4.34}$$

Nu medför påståendena (4.34), (4.33) och (4.31) att

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+(y-t)^2}\frac{1}{u^2+t^2}dt = \frac{(u+x)}{u((x+u)^2+y^2)}.$$

□

Sats 84. *För $1<p<\infty$ gäller*

$$\hat{L}^p_+(\mathbb{R}) \cong L^p([-\pi,\pi[).$$

och $J(f) = (f\circ 2\arctan)$ är en isometrisk isomorfism.

Bevis. Betrakta en funktion $f\in L^p([-\pi,\pi[)$. Låt

$$J(f) = (f\circ 2\arctan).$$

Nu gäller

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{|J(f)(t)|^p}{1+t^2}dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |f(2\arctan(t))|^p d(2\arctan t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx\end{aligned}$$

alltså $J : L^p([-\pi,\pi[) \to \hat{L}^p_+$ och J är en isometri. För ett godtyckligt $F \in \hat{L}^p_+$ gäller

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|F\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right|^p dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|F\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right|^p dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F\left(\tan\frac{2\arctan t}{2}\right)\right|^p d(2\arctan t)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|F(t)|^p}{1+t^2}dt\end{aligned}$$

dvs. hittas $g \in L^p([-\pi,\pi[)$ med $g(x) = F\left(\tan\frac{x}{2}\right)$, vilket ekvivalent kan skrivas som $J(g) = F$. J är alltså surjektiv. J är även injektiv med inversen $J^{-1}(F) = F\left(\tan\frac{\mathrm{id}}{2}\right)$. Vidare gäller, för $a \in \mathbb{C}$ och $f, g \in L^p([-\pi,\pi[)$ att

$$J(af + bg) = aJ(f) + bJ(g),$$

vilket innebär att J är linjär och därmed en isomorfism. □

Sats 85. *Om $F \in \hat{L}^p_+, p > 1$ så gäller $f \in \hat{h}^p_+$, där*

$$f_x(y) = f(x+iy) := (\mathcal{P}_x * F(i\cdot))(y)$$

och $x > 0$. Dessutom gäller

$$f \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+) \Rightarrow f \in \hat{H}^p_+.$$

Bevis. Låt $1 \le p < \infty$ och $F \in \hat{L}^p_+$. Nu gäller, för givet $x > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x+iy)}{(1+x+iy)^{\frac{2}{p}}}\right|^p dy &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(x+iy)|^p}{(1+x)^2+y^2}dy\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{x}{x^2+(y-t)^2}F(it)dt\right)\right|^p\frac{1}{(1+x)^2+y^2}dy\\ &\le \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{x}{x^2+(y-t)^2}|F(it)|^p\frac{1}{(1+x)^2+y^2}dtdy\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{x}{x^2+(y-t)^2}\frac{1}{(1+x)^2+y^2}dy\right)|F(it)|^p dt,\end{aligned}$$

där Jensens olikhet använts för första olikheten och Fubini-Tonellis sats använts vid därpåföljande likhet. Nu ger Lemma 83, med $u = x + 1 > 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x+iy)}{(1+x+iy)^{\frac{2}{p}}}\right|^p dy &\le \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{x}{x^2+(y-t)^2}\frac{1}{(1+x)^2+y^2}dy\right)|F(it)|^p dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{1+2x}{1+x}\frac{1}{(1+2x)^2+t^2}|F(it)|^p dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{1+2x}{1+x}\frac{1+t^2}{(1+2x)^2+t^2}\frac{|F(it)|^p}{1+t^2}dt\\ &\le \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{|F(it)|^p}{1+t^2}dt\\ &< \infty,\end{aligned}$$

dvs. $f \in \hat{h}^p_+$. Notera att

$$(1+id)^{-\frac{2}{p}} \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+) \ \ \forall p \geq 1,$$

vilket medför att

$$\frac{f}{(1+id)^{\frac{2}{p}}} \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+) \Leftrightarrow f \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+)$$

och därmed gäller

$$\frac{f}{(1+id)^{\frac{2}{p}}} \in H^p_+ \Leftrightarrow f \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+) \wedge f \in \hat{h}^p_+.$$

□

Definition 26.

$$\hat{\mathbb{H}}^p_+ := \{F \in \hat{L}^p_+ : \mathcal{P} * F \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+)\}.$$

Lemma 86. Låt $f \in \hat{H}^p_+$. Nu gäller

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}+it\right)\right|^p}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Bevis. Låt $t \in \mathbb{R}$ och $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Nu gäller

$$\begin{aligned}
Diff(N,t,f) :&= \left| \frac{\left| f\left(\frac{1}{N}+it\right)\right|^p}{1+t^2} - \frac{\left| f\left(\frac{1}{N}+it\right)\right|^p}{\left|1+\frac{1}{N}+it\right|^2} \right| \\
&= \left(\frac{2}{N}+\frac{1}{N^2}\right) \left| f\left(\frac{1}{N}+it\right)\right|^p \frac{1}{(1+t^2)\left(\left(1+\frac{1}{N}\right)^2+t^2\right)} \\
&\leq \frac{3}{N} \frac{\left| f\left(\frac{1}{N}+it\right)\right|^p}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^2+t^2}.
\end{aligned}$$

Välj $\epsilon > 0$. Existensen av ett $N_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, så stort att $N > N_1$ implicerar

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| f\left(\frac{1}{N}+it\right)\right|^p}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^2+t^2} dt - \sup_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}+it\right)\right|^p}{\left|1+\frac{1}{n}+it\right|^2} dt \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

garanteras av Följdsats 78. Välj N_1 enligt ovan och N_2 så att $N > N_2$ medför

$$\frac{3}{N} \sup_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}+it\right)\right|^p}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+t^2} dt < \frac{\epsilon}{2},$$

vilket är möjligt då $f \in \hat{H}^p_+$. För $N > \max\{N_1, N_2\}$ gäller det att

$$\begin{aligned}
Diff_2(N,f) &:= \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|f\left(\frac{1}{N}+it\right)\right|^p}{1+t^2} dt - \sup_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|f\left(\frac{1}{n}+it\right)\right|^p}{\left|1+\frac{1}{n}+it\right|^2} dt \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|f\left(\frac{1}{N}+it\right)\right|^p}{1+t^2} dt - \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|f\left(\frac{1}{N}+it\right)\right|^p}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^2+t^2} dt \right| \\
&\quad + \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|f\left(\frac{1}{N}+it\right)\right|^p}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^2+t^2} dt - \sup_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|f\left(\frac{1}{n}+it\right)\right|^p}{\left|1+\frac{1}{n}+it\right|^2} dt \right| \\
&< \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|f\left(\frac{1}{N}+it\right)\right|^p}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^2+t^2} dt + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon
\end{aligned}$$

och därmed gäller även

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|f\left(\frac{1}{N}+it\right)\right|^p}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| \frac{f}{(1+\mathrm{id})^{\frac{2}{p}}} \right\|_{H^p_+},$$

vilket implicerar det önskade resultatet. □

Sats 87. *Låt $\infty > p > 1$ och låt $f \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+)$. Nu gäller att $f \in \hat{H}^p_+$ om och endast om det existerar en entydig funktion $F(i\cdot) \in \hat{L}^p_+$ med $f(x+iy) = (\mathcal{P}_x * F(i\cdot))(y)$.*

Bevis. Antag $f \in \hat{H}^p_+$. Fixera $z = x+iy \in \mathbb{C}_+$. Låt $(G_n)_{n=1}^\infty$ vara en följd av linjära funktionaler $G_n : \hat{L}^q_+ \to \mathbb{C}$ definierade av

$$G_n(V) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f\left(\frac{1}{n}+it\right)}{1+t^2} V(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{1}{n}+it\right) V(t) d(\arctan t), \tag{4.35}$$

där $V \in \hat{L}^q_+$. Vidare gäller, enligt Hölders olikhet:

$$\begin{aligned}
G_n(V) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f\left(\frac{1}{n}+it\right)}{1+t^2} V(t) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f\left(\frac{1}{n}+it\right)}{(1+t^2)^{\frac{1}{p}}} \frac{V(t)}{(1+t^2)^{\frac{1}{q}}} dt \\
&\leq \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|f\left(\frac{1}{n}+it\right)\right|^p}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|V(t)|^q}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|f\left(\frac{1}{n}+it\right)\right|^p}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|V(t)|^q}{1+t^2} dt \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,
\end{aligned}$$

vilket visar att G_n är begränsad enligt Lemma 86, då $f \in \hat{H}^p_+$. Vid substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ i (4.35) erhålls

$$G_n(V) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{n} + i\tan\frac{x}{2}\right) V\left(\tan\frac{x}{2}\right) dx.$$

Sats 84 ger att $f(\frac{1}{n}+i\tan\frac{\mathrm{id}}{2})\in L^p([-\pi,\pi[)$ för alla $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ och på samma sätt tillhör $V(\tan\frac{\mathrm{id}}{2})$ rummet $L^q([-\pi,\pi[)$. Enligt samma resonemang som använts för att bevisa existensen av F i Sats 33 så hittas ett $H\in L^p$ sådant att

$$G_n(V)\to\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(x)V\left(\tan\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(2\arctan t)}{1+t^2}V(t)dt.$$

för varje $V\in\hat{L}^q_+$, då $n\to\infty$. Sätt $F(it)=H(2\arctan t)$, vilket medför att $F(i\cdot)\in\hat{L}^p_+$. Eftersom $P_x(y-\cdot)\in\hat{L}^q_+$, så gäller

$$\lim_{n\to\infty}G_n(P_x(y-\cdot))=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(it)\frac{x}{x^2+(y-t)^2}dt.$$

Sats 82 ger att

$$f\left(\frac{1}{n}+x+iy\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}+it\right)\frac{x}{x^2+(y-t)^2}dt=G_n(P_x(y-\cdot)).$$

Då f är kontinuerlig kring $x+iy\in\mathbb{C}$ så erhålls den önskade likheten då $n\to\infty$.

Antag nu att $F_1(i\cdot),F_2(i\cdot)\in\hat{L}^p_+$ är två funktioner sådana att

$$f(x+iy)=(\mathcal{P}_x*F_j(i\cdot))(y),j=1,2.$$

Eftersom $F_1(i\cdot)-F_2(i\cdot)\in\hat{L}^p_+$ så erhålls, vid substitutionen $it=T_{1+}(e^{i\alpha}):=\frac{1+e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}$, att

$$0=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{P}_x(y-t)\left(F_1(it)-F_2(it)\right)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r,\theta-\alpha)(F_1-F_2)\circ T_{1+}(e^{i\alpha})d\alpha$$

Detaljer kring substitutionen hittas i beviset till Sats 76. Nu ger Sats 44 att $(F_1-F_2)\circ T_{+1}(e^{i\alpha})=0$ nästan överallt $\alpha\in]0,2\pi[$. Eftersom $T_{1+}(e^{i\cdot})$ är en bijektiv avbildning $]0,2\pi[\to\mathbb{R}$, så gäller $F_1(t)-F_2(t)=(F_1-F_2)(t)=0$ nästan överallt $t\in\mathbb{R}$. Den andra implikationen ges av Sats 85. □

Följdsats 88. *Funktionen $\hat{J}:\hat{\mathbb{H}}^p_+\to\hat{H}^p_+$ definierad genom*

$$\hat{J}(F)(x+iy)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{P}_x(y-t)F(t)dt$$

är en isomorfism. Vidare så avbildas randfunktionen till $\hat{J}(F)(x+iy)$ på just denna funktion.

Bevis. Lineariteten för faltningen med $\mathcal{P}_x$ är klar, således är $\hat{J}$ en isomorfism. Låt $F\in\hat{L}^p_+$ och definiera

$$f(x+iy)=(\mathcal{P}_x*F)(y).$$

Med hjälp av Sats 85 erhålls $f\in\hat{H}^p_+$ och enligt Sats 76 så gäller

$$\lim_{x\to 0^+}f(x+iy)=F(iy)$$

nästan överallt $y\in\mathbb{R}$. Således utgör $F(iy)$ randfunktionen till f och denna randfunktion genererar funktionen f genom faltning med $\mathcal{P}_x$. □

Sats 89. *För* $1 \le p < \infty$ *gäller*

$$\hat{H}^p_+ \supset H^p_+.$$

och

$$\hat{L}^p_+ \supset L^p_+.$$

Bevis. Eftersom vikten $(1+t^2)^{-\frac{1}{p}} \le 1$ för varje $t \in \mathbb{R}$, så ger integralens monotonitet, att

$$\hat{L}^p_+ \supseteq L^p_+.$$

gäller. På samma sätt erhålls

$$\hat{H}^p_+ \supseteq H^p_+,$$

eftersom $\left|(1+x+iy)^{-\frac{2}{p}}\right| \le 1$ då $x > 0$ och $y \in \mathbb{R}$. Låt $1 \le p < \infty$ och betrakta funktionen $f(z) = (z+1)^{-\frac{1}{p}}$. Notera att $f \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+)$, men för $x < 1$ gäller

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)^p| dy \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|1+x+iy|} dy \ge \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2^2+y^2}} dy \ge \int_0^\infty \frac{1}{2+y} dy = \infty.$$

Detta visar att $f \notin H^p_+$. Däremot gäller att $|f(z)| \le 1$ för varje $z \in \mathbb{C}_+$, vilket medför att

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{f}{(1+\mathrm{id})^{\frac{2}{p}}}\right\|_{H^p_+} &\le \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|1+x+iy|^2} dy \\
&\le \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \sup_{x>0} \frac{1}{|1+x+iy|^2} dy \\
&\le \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2} dy = 1,
\end{aligned}$$

enligt Sats 71 egenskap 2. Därmed gäller $f \in \hat{H}^p_+$. Analogt kan det visas, att för $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{p}}$ gäller $f \notin L^p_+$ och $f \in \hat{L}^p_+$. □

4.2 H^p isometriskt isomorf med H^p_+

Sats 90. H^p_+ *och* H^p *är isomorfa då* $1 < p < \infty$. *En isometrisk isomorfism* $Q : H^p_+ \to H^p$ *ges av*

$$Q(f)(z) = \left(\frac{4}{(1-z)^2}\right)^{\frac{1}{p}} f(T_{1+}(z))$$

och dess invers är

$$Q^{-1}(g)(w) = \left(\frac{1}{(1+w)^2}\right)^{\frac{1}{p}} g(T_{+1}(w)),$$

där

$$T_{1+} = \frac{1+z}{1-z},\ T_{+1} = \frac{z-1}{1+z}.$$

Bevis. Låt Q vara definierat som ovan, $1 < p < \infty$ och låt $f \in H^p_+$. Eftersom $T_{1+} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_+$ konformt så är $f \circ T_{1+}$ analytisk i $\mathbb{D}$. Vidare gäller att $Q(f)$ är en produkt av två analytiska funktioner, vilket medför att $Q(f) \in \mathbb{A}(\mathbb{D})$. Vidare gäller att randfunktionen $\hat{f}(t) = f(it)$ är väldefinierad nästan överallt $t \in \mathbb{R}$, då $f \in H^p_+$. Dessutom existerar

$$\lim_{r \to 1^-} f(T_{1+}(re^{i\alpha}))$$

nästan överallt $\alpha \in]0, 2\pi[$, enligt samma motivering som använts i slutet av beviset till Sats 76. Nu är det klart att

$$\widehat{Q(f)}(\alpha) = Q(f)(e^{i\alpha}) := \lim_{r \to 1^-} Q(f)(re^{i\alpha})$$

är väldefinierad nästan överallt. Vidare så ger Följdsats 88, Sats 69 samt Följdsats 78 att

$$\left|\left|\widehat{Q(f)}\right|\right|_{L^p} = \left|\left|\hat{f}\right|\right|_{L^p_+} = ||f||_{H^p_+} < \infty, \tag{4.36}$$

då $f \in H^p_+$. Låt

$$V(re^{i\theta}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - \alpha) Q\hat{(f)}(\alpha) d\alpha.$$

Nu gäller, för $re^{\theta} = T_{+1}(x + iy)$,

$$\begin{aligned} V(T_{+1}(x+iy)) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_x(y-t)(Q(f) \circ T_{+1}(it))dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_x(y-t) \left(\frac{4}{(1 - T_{+1}(it))^2} \right)^{\frac{1}{p}} f(T_{1+}(T_{+1}(it)))dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_x(y-t)(1+it)^{\frac{2}{p}} f(it)dt \\ &= ((1+x+iy)^2)^{\frac{1}{p}} f(x+iy) \\ &= (\frac{4}{(1 - T_{1+}(re^{i\theta}))^2})^{\frac{1}{p}} (f \circ T_{1+})(re^{i\theta}) \\ &= Q(f)(re^{i\theta}), \end{aligned} \tag{4.37}$$

där första likheten ges av uttryck (4.22) i beviset till Sats 76. Den fjärde likheten ges av Följdsats 88, då $f(\mathrm{id}) \in H^p_+ \Rightarrow (1+\mathrm{id})^{\frac{2}{p}} \hat{f}(\mathrm{id}) \in \hat{H}^p_+$. Utredningen (4.37) visar att $Q(f) \in \mathbb{A}(\mathbb{D})$ kan framställas som en Poissonintegral, varefter Sats 44 ger att $Q(f) \in H^p$. Detta visar att $Q : H^p_+ \to H^p$. Vidare gäller nu, enligt (4.36) och Sats 66, att

$$||Q(f)||_{H^p_+} = \left|\left|\widehat{Q(f)}\right|\right|_{L^p} = \left|\left|\hat{f}\right|\right|_{L^p_+} = ||f||_{H^p_+},$$

dvs. Q är en isometri.

För $z \in \mathbb{D}$ gäller

$$f(T_{1+}(z)) = \left(\frac{(1-z)^2}{4} \right)^{\frac{1}{p}} Q(f)(z). \tag{4.38}$$

$T_{+1} = T_{1+}^{-1}$ avbildar $\mathbb{C}_+$ bijektivt på $\mathbb{D}$, vilket medför att (4.38) är ekvivalent med

$$f(w) = \left(\frac{(1-T_{+1}(w))^2}{4}\right)^{\frac{1}{p}} Q(f)(T_{+1}(w)) = \left(\left(1-\frac{w-1}{1+w}\right)^2 \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{p}} Q(f)(T_{+1}(w))$$
$$= \left(\frac{1}{(1+w)^2}\right)^{\frac{1}{p}} Q(f)(T_{+1}(w)),$$

där $w = T_{1+}(z)$. Inversen Q^{-1} ges således av

$$Q^{-1}(g)(w) = \left(\frac{1}{(1+w)^2}\right)^{\frac{1}{p}} g(T_{+1}(w)),$$

för $g \in H^p$.

På samma sätt som i Sats 69 visas surjektiviteten genom att bevisa att

$$F \in H^p \Rightarrow Q^{-1}(F) \in H^p_+.$$

Låt $F \in H^p$. På samma sätt som ovan existerar

$$\widehat{Q^{-1}(F)}(t) := \lim_{\sigma \to 0^+} Q^{-1}(F)(\sigma + it).$$

Eftersom $F \in H^p$ så gäller $\hat{F} = F(e^{i\cdot}) \in L^p$. Vidare så ger Sats 69 samt Sats 66 att

$$\left|\left|\widehat{Q^{-1}(F)}\right|\right|_{L^p_+} = \left|\left|\hat{F}\right|\right|_{L^p} = ||F||_{H^p} < \infty.$$

Låt

$$V(x+iy) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_x(y-t)\widehat{Q^{-1}(F)}(t)dt.$$

Nu gäller, för $x + iy = T_{1+}(re^{\theta})$, att

$$\begin{aligned}
V(T_{1+}(re^{i\theta})) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-\alpha)(Q^{-1}(F)\circ T_{1+})(e^{i\alpha})d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-\alpha)\left(\frac{1}{(1+T_{1+}(e^{i\alpha}))^2}\right)^{\frac{1}{p}} F(T_{+1}(T_{1+})(e^{i\alpha})))d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-\alpha)\left(\frac{1-e^{i\alpha}}{2}\right)^{\frac{2}{p}} F(e^{i\alpha})d\alpha \\
&= \left(\frac{1-re^{i\theta}}{2}\right)^{\frac{2}{p}} F(re^{i\theta}) \\
&= \left(\frac{1}{(1+T_{1+}(re^{i\theta}))^2}\right)^{\frac{1}{p}} F(T_{+1}(T_{1+}(re^{i\theta}))) \\
&= \left(\frac{1}{(1+x+iy)^2}\right)^{\frac{1}{p}} F(T_{+1}(x+iy)) \\
&= Q^{-1}(F)(x+iy),
\end{aligned} \tag{4.39}$$

där första likheten ges av (4.22) i beviset till Sats 76. Den fjärde likheten ges av Sats 67, då $F \in H^p \Rightarrow (\frac{1-\mathrm{id}}{2})^{\frac{2}{p}} F \in H^p$. På liknande sätt som början av detta bevis erhålls att $Q^{-1}(F) \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+)$, varefter Följdsats 79 och (4.39) ger att $Q^{-1}(F) \in H^p_+$. Detta visar att $Q : H^p_+ \to H^p$ är surjektiv och därmed bijektiv. Analogt med beviset till Sats 69 visas lineariteten, dvs. att Q är en homomorfism. Sammanfattningsvis är Q en isometrisk isomorfism från H^p_+ på H^p. $\square$

Kapitel 5

Användbara satser samt Hilbertmatrisoperatorn

Detta kapitel inleds med nödvändiga lemman och satser för att visa Sats 95, dvs. Hardys olikhet. Sedan introduceras Hilbermatrisoperatorn på mängden polynom, varefter kapitlet avslutas med Fejér-Riesz olikhet, Sats 98.

Lemma 91. Låt $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vara ett inre produktrum. För den inducerade normen gäller

$$||f+g||^2 + ||f-g||^2 = 2(||f||^2 + ||g||^2),$$

där $f, g \in H$.

Bevis. För $f, g \in H$ gäller

$$\begin{aligned} &||f+g||^2 + ||f-g||^2 = \langle f+g, f+g\rangle + \langle f-g, f-g\rangle \\ &= \langle f+g, f\rangle + \langle f+g, g\rangle + \langle f-g, f\rangle - \langle f-g, g\rangle \\ &= 2\langle f, f\rangle + 2\langle g, g\rangle = 2(||f||^2 + ||g||^2). \end{aligned}$$

$\square$

Sats 92. *Låt $\infty > P > 0$ och låt f vara en periodisk funktion sådan att $f \in L^\infty([0,P])$. Låt även*

$$\hat{f}(n) = \ \tfrac{1}{P}\int_0^P e^{-in\frac{2\pi t}{P}} f(t)dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, ...$$

vara en del av f:s Fourierkoefficienter. Nu gäller, för $N \geq 0$

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} \hat{f}(n+k) a_n b_k \right| \leq ||f||_\infty \, ||a||_{2,N} \, ||b||_{2,N} \, ,$$

där $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *och* $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *med* $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ *för alla* n*, samt*

$$||a||_{2,N} = \left(\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bevis. Låt

$$H(a,b) := \left|\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} \hat{f}(n+k)a_n b_k\right|$$

Inleder beviset med att bevisa specialfallet $b = a$.

$$\begin{aligned}
H(a,a) &= \left|\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{P}\int_0^P e^{-i(n+k)\frac{2\pi t}{P}} f(t)dt\ a_n a_k\right| \\
&= \left|\frac{1}{P}\int_0^P \sum_{n=0}^{N}\left(e^{-in\frac{2\pi t}{P}} a_n\right)\sum_{k=0}^{N}\left(e^{-ik\frac{2\pi t}{P}} a_k\right) f(t)dt\right| \\
&\leq \frac{1}{P}\int_0^P \left|\sum_{n=0}^{N}\left(e^{-in\frac{2\pi t}{P}} a_n\right)\right|\left|\sum_{k=0}^{N}\left(e^{-ik\frac{2\pi t}{P}} a_k\right)\right| |f(t)|\, dt \qquad (5.1) \\
&\leq \sup_{x\in[0,P]} |f(x)| \frac{1}{P}\int_0^P \left|\sum_{k=0}^{N}\left(e^{-ik\frac{2\pi t}{P}} a_k\right)\right|^2 dt \\
&= ||f||_\infty \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 = ||f||_\infty\, ||a||_{2,N}^2\,,
\end{aligned}$$

där den inledande likheten på sista raden är Parsevals likhet, Sats 61. Det är lätt att se att $H(a,b)$ är linjär i båda komponenter samt symmetrisk, $H(a,b) = H(b,a)$. Därför gäller följande

$$\begin{aligned}
&H(a+b, a+b) - H(a-b, a-b) \\
&= H(a+b, a) + H(a+b, b) - H(a-b, a) + H(a-b, b) \\
&= 2H(b,a) + 2H(a,b) = 4H(a,b).
\end{aligned}$$

På vänsterled kan (5.1) tillämpas, vilket ger

$$|H(a,b)| \leq \frac{1}{4}\left(|H(a+b,a+b)| + |H(a-b,a-b)|\right) \leq \frac{1}{4}\,||f||_\infty\,(||a+b||_{2,N}^2 + ||a-b||_{2,N}^2).$$

Eftersom $A_N = \{(a_n)_{n=0}^N : (a_n)_{n=0}^\infty \in l^2\} \subseteq l^2$ är ett Hilbertrum så gäller Lemma 91, vilket medför

$$|H(a,b)| \leq \frac{1}{2}\,||f||_\infty\,(||a||_{2,N}^2 + ||b||_{2,N}^2).$$

Antag nu att $||a||_{2,N} = ||b||_{2,N} = 1$. Då gäller

$$|H(a,b)| \leq ||f||_\infty = ||f||_\infty\, ||a||_{2,N}\, ||b||_{2,N}\,.$$

Låt nu $a, b \in A_N$ vara två godyckliga vektorer. Ifall den ena är nollvektorn, så gäller satsen trivialt ($0 \leq 0$). Annars, betrakta vektorerna $\hat{a} = \frac{a}{||a||_{2,N}}, \hat{b} = \frac{b}{||b||_{2,N}}$. För dessa gäller

$$H(\hat{a}, \hat{b}) \leq ||f||_\infty\,,$$

enligt vad som just bevisats. Då H är linjär i båda komponenter så erhålls vid multiplikation av $||a||_{2,N}\,||b||_{2,N}$ den önskade olikheten. $\square$

I fortsättningen kommer $P = 2\pi$ att användas, men denna generalisering till ett godtyckligt positivt P är alltid möjlig.

Sats 93. *Låt $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$, $b = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ med $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ för varje n. För varje $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gäller*

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N}\frac{|a_n||b_k|}{1+k+n} \leq \pi\,||a||_{2,N}\,||b||_{2,N}\,,$$

där $||a||_{2,N} = \left(\sum_{n=0}^{N}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Om $a, b \in l^2$ så gäller ovanstående olikhet med $N = \infty$.

Bevis. Betrakta Sats 92 och låt $f(t) = -ie^{-it}(t-\pi)$ i satsen. Detta ger

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= -i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(1+n)t}(t-\pi)dt \\ &= -i\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-i(1+n)t}(t-\pi)}{-i(1+n)}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-i(1+n)t}}{(1+n)}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}2\frac{\pi}{(1+n)} = \frac{1}{1+n}\end{aligned}$$

och

$$||f||_{\infty} = \sup_{t\in[0,2\pi]}|-ie^{-it}(t-\pi)| = \sup_{t\in[0,2\pi]}|t-\pi| = \pi.$$

Nu gäller alltså

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N}\frac{a_n b_k}{1+k+n}\right| \leq \pi\,||a||_{2,N}\,||b||_{2,N}\,.$$

Ovanstående olikhet gäller speciellt för följderna $|a| := (|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}, |b| \in l^2$. Genom att välja följderna $|a|$ och $|b|$ i ovanstående olikhet, så erhålls den önskade olikheten. Ur de relevanta normernas perspektiv är alla följder a utbytbara mot $|a|$. Ifall $a, b \in l^2$ så gäller $||a||_{2,N} \leq ||a||_{2,\infty} < \infty$ och $||a||_{2,N} \leq ||a||_{2,\infty} < \infty$, eftersom $||\cdot||_{2,N}$ är växande med avseende på N. Således gäller

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N}\frac{|a_n||b_k|}{1+k+n} \leq \pi\,||a||_{2,\infty}\,||b||_{2,\infty} < \infty.$$

Eftersom termerna är icke-negativa, så ger Fubini-Tonellis sats att summeringsordningen inte spelar någon roll, vilket leder till att vänsterled ges av

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_n||b_k|}{1+k+n}.$$

$\square$

Sats 94. *Låt $f \in L^\infty([0,2\pi])$ vara sådan att $\hat{f}(n) \geq 0$ för varje $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, där*

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)dt, \quad n = 0,1,2,....$$

Då gäller för $A(z) = \sum a_n z^n \in H^1$ att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)|a_k| \leq ||f||_\infty \, ||A||_{H^1}.$$

Bevis. Antag att $A \in H^1$ enligt ovan. Enligt Sats 58 kan varje funktion $A \in H^1$ faktoriseras enligt $A = \beta g$, där $\beta(z)$ är en Blaschkeprodukt och $g \in H^1$ med $g(z) \neq 0$ för alla $z \in \mathbb{D}$. Nu är det klart att $B := \beta g^{\frac{1}{2}}, C := g^{\frac{1}{2}} \in H^2$, då Blaschkeprodukten $|\beta(z)| \leq 1, z \in \mathbb{D}$. Eftersom B, C är analytiska i den öppna, origocentrerade enhetsdisken, så kan de representeras av $\sum b_n z^n$ respektive $\sum c_n z^n$. Nu följer, av Fubini-Tonellis sats, att

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} b_n c_k z^{k+n} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} z^l \sum_{\substack{n+k=l \\ n,k \geq 0}} b_n c_k = \sum_{l=0}^{\infty} z^l \sum_{n=0}^{l} b_n c_{l-n},\end{aligned}$$

för varje $z \in \mathbb{D}$. Fubini-Tonellis sats kan tillämpas, eftersom potensserier, analytiska i $\mathbb{D}$, konvergerar absolut i $\mathbb{D}$. Ovanstående likheter medför att $a_l = \sum_{n=0}^{l} b_n c_{l-n}$. Nu gäller

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{N} \hat{f}(l)|a_l| &\leq \sum_{l=0}^{N}\sum_{n=0}^{l} \hat{f}(l)|b_n||c_{l-n}| = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N-n} \hat{f}(n+k)|b_n||c_k| \\ &\leq \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} \hat{f}(n+k)|b_n||c_k|.\end{aligned}$$

Genom att tillämpa Sats 92 erhålls första olikheten nedan

$$\sum_{l=0}^{N} \hat{f}(l)|a_l| \leq ||f||_\infty \, ||b||_{2,N} \, ||c||_{2,N} \leq ||f||_\infty \, ||b||_{2,\infty} \, ||c||_{2,\infty}.$$

Nu följer från Sats 64 att

$$\sum_{l=0}^{N} \hat{f}(l)|a_l| \leq ||f||_\infty \, ||B||_{H^2} \, ||C||_{H^2}. \tag{5.2}$$

Låt

$$MR := \left\{ t \in [0.2\pi[: \lim_{r \to 1^-} \beta(re^{it}) = 1 \right\}.$$

Fixera $\epsilon > 0$. Välj nu ett $r_1 < 1$, så att $r > r_1$ medför att $1 \geq |\beta(re^{it})|^2 > 1 - \epsilon$ för alla $t \in MR$. Välj $r_2 < 1$ så att

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{it})| dt - ||g||_{H^1} \right| < \epsilon$$

då $r > r_2$. Låt $r > \max\{r_1, r_2\}$ och notera att $m(MR \setminus [0, 2\pi[) = 0$, enligt Sats 54. Då $g \in H^1$ så gäller $||C||_{H^2}^2 = ||g||_{H^1}$ och

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(re^{it})|^2 dt - ||C||_{H^2}^2 \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{MR} |B(re^{it})|^2 dt - ||g||_{H^1} \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{MR} |B(re^{it})|^2 dt - \frac{1}{2\pi} \int_{MR} |g(re^{it})| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{MR} |g(re^{it})| dt - ||g||_{H^1} \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{MR} \left| |\beta(re^{it})|^2 - 1 \right| |g(re^{it})| dt + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{MR} |g(re^{it})| dt - ||g||_{H^1} \right| \\
&< \frac{1}{2\pi} \int_{MR} \epsilon |g(re^{it})| dt + \epsilon \\
&\leq \epsilon \left(||g||_{H^1} + 1 \right),
\end{aligned}$$

där sista olikheten följer från att $D(r, g)$ är växande för $g \in \mathbb{A}(\mathbb{D})$. Alltså gäller $||B||_{H^2} = ||C||_{H^2}$. På samma sätt som ovan visas $||A||_{H^1} = ||C||_{H^2}^2$. Det gäller att $A = BC$ och för varje $\epsilon > 0$ existerar ett $r < 1$ så att

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |A(re^{it})| dt - ||C||_{H^2}^2 \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\beta(re^{it})| |g(re^{it})| dt - ||C||_{H^2}^2 \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{it})| \left| |\beta(re^{it})| - 1 \right| dt \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| g(re^{it}) \right| dt - ||g||_{H^1} \right| \\
&\epsilon (||g||_{H^1} + 1).
\end{aligned}$$

Nu gäller alltså $||f||_\infty ||B||_{H^2} ||C||_{H^2} = ||f||_\infty ||A||_{H^1}$. Genom att kombinera detta med (5.2) så erhålls

$$\sum_{k=0}^{N} \hat{f}(k) |a_k| \leq ||f||_\infty ||A||_{H^1} .$$

Låt nu $N \to \infty$ för att erhålla den önskade olikheten. □

Sats 95 (Hardys olikhet)**.** *Låt* $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^1$. *Då gäller*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{1+n} \leq \pi ||A||_{H^1} .$$

Bevis. Låt $f(t) = -ie^{-it}(t - \pi)$. Nu erhålls

$$\begin{aligned}
&\hat{f}(n) = -i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(1+n)t} (t - \pi) dt = \frac{1}{1+n} \text{ och} \\
&||f||_\infty = \pi,
\end{aligned}$$

enligt Sats 93, vilket, vid insättning i Sats 94, ger den önskade olikheten. □

Låt $Z = (z^n)_{n=0}^{\infty}$. Ett polynom av grad N bestäms entydigt av en följd $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$, där $a_n = 0$ för varje $n > N$ och erhålls från $f_N(z) = a^T Z$. Till mängden $P(\mathbb{D}) := \{p : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : p \text{ polynom med komplexa koefficienter}\} \subset \mathbb{A}(\mathbb{D})$ definieras operatorn $\mathcal{H} : P(\mathbb{D}) \to \mathbb{A}(\mathbb{D})$ genom

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(f_N) :&= H(a,Z) = (Ha)^T Z = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{n+k+1}\right)z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{N} a_k \int_0^1 x^{n+k}dx\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 f_N(x)x^n dx\right)z^n,\end{aligned}$$

där

$$(Ha)_n = \int_0^1 f_N(x)x^n dx$$

kan ses som de transformerade koefficienterna. Utredningen ovan kan vidare utvecklas, varefter följande erhålls

$$\mathcal{H}(f_N) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 f_N(x)(zx)^n dx.$$

Eftersom, för ett givet polynom och för varje $0 < R < 1$ gäller

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 |f_N(x)(zx)^n|\,dx \le \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (N+1)R^n \max_j |a_j| dx = \frac{(N+1)\max_j |a_j|}{1-R} < \infty$$

då $z \in B(0,R)$, så kan Fubini-Tonellis sats tillämpas, varefter

$$\mathcal{H}(f_N) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_N(x)(zx)^n dx = \int_0^1 \frac{f_N(x)}{1-zx}dx \tag{5.3}$$

erhålls. Operatorn $\mathcal{H}$ definierad genom (5.3) kommer i denna avhandling att kallas för Hilbertmatrisoperatorn.

Definition 27. Låt $LH(\mathbb{D})$ vara mängden av alla linjära underrum $lh(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{A}(\mathbb{D})$ där $\mathcal{H}(f) = \int_0^1 \frac{f(x)}{1-zx}dx$ är väldefinierad för varje $f \in lh$.

Sats 96.

$$\mathbb{A}(\mathbb{D}) \notin LH(\mathbb{D})$$

Bevis. Låt $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \in \mathbb{A}(\mathbb{D})$. Vidare gäller

$$(Ha)_n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+1}dx = \infty \ \forall n.$$

$\square$

Sats 97. *$H^p \in LH(\mathbb{D})$ för alla $1 \leq p \leq \infty$.*

Bevis. Med hjälp av definitionen av rummet H^p och Lemma 5 samt Sats 6 fås $H^p \subseteq H^1 \subset \mathbb{A}(\mathbb{D})$ för varje $p \in [1, \infty]$. Vidare gäller för $f \in H^p, p \in [1, \infty]$, framställd på formen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, att

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k||z^n|}{n+k+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k||z^n|}{k+1} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{k+1}\right) \\ &= \frac{\pi}{1-|z|}\, ||f||_{H^1} < \infty \ \forall z \in \mathbb{D}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

där Hardys olikhet har använts. Notera att (5.4) medför att Fubini-Tonellis sats kan tillämpas och i enlighet med härledningen av formel (5.3) för polynom, så erhålls

$$\mathcal{H}(f)(z) = \int_0^1 \frac{f(x)}{1-zx} dx = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^n}{n+k+1}$$

och därför är $\mathcal{H}$ väldefinierad för $H^p,\ p \in [1, \infty]$.

$\square$

Sats 98 (Fejér-Riesz)**.** *Låt $f \in H^p$, $1 \leq p < \infty$. Nu gäller*

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |f(r)|^p dr \leq \frac{\pi}{2}\, ||f||_{H^p}^p$$

Bevis. Antag först att $f \in H^2$ och att för varje $z \in \mathbb{D}$ gäller $\Im z = 0 \Rightarrow f(z) \in \mathbb{R}$. För $R < 1$ och $UC_R := \{z : \Im z \geq 0 \wedge (\Im z = 0 \vee |z| = R)\}$ gäller

$$0 = \oint_{UC_R} f(z)^2 dz = \int_{-R}^{R} f(r)^2 dr + \int_0^{\pi} f(Re^{it})^2 iRe^{it} dt.$$

Eftersom $\int_{-R}^{R} f(r)^2 dr \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ så gäller nu

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{R} f(r)^2 dr &= -iR\int_0^{\pi} f(Re^{it})^2 e^{it} dt \\ &= \left| -iR\int_0^{\pi} f(Re^{it})^2 e^{it} dt \right| \\ &\leq R\int_0^{\pi} \left|f(Re^{it})\right|^2 dt \\ &\leq \int_0^{\pi} \left|f(Re^{it})\right|^2 dt. \end{aligned}$$

På samma sätt fås, för $LC_R := \{z : \Im z \leq 0 \wedge (\Im z = 0 \vee |z| = R)\}$, att

$$0 = \oint_{LC_R} |f(z)|^2 dz = -\int_{-R}^{R} f(r)^2 dr + \int_{\pi}^{2\pi} f(Re^{it})^2 iRe^{it} dt.$$

och

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} f(r)^2 dr &= iR\int_{\pi}^{2\pi} f(Re^{it})^2 e^{it} dt \\ &= \left| iR\int_{\pi}^{2\pi} f(Re^{it})^2 e^{it} dt \right| \\ &\leq R\int_{\pi}^{2\pi} \left| f(Re^{it})\right|^2 dt \\ &\leq \int_{\pi}^{2\pi} \left| f(Re^{it})\right|^2 dt.\end{aligned}$$

Sammanslagning ger nu att

$$2\int_{-R}^{R} f(r)^2 dr \leq \int_{0}^{2\pi} \left| f(Re^{it})\right|^2 dt, \tag{5.5}$$

för $f \in H^2$ med $\Im z = 0 \Rightarrow f(z) \in \mathbb{R}$. Välj nu en godtycklig funktion $f \in H^2$. Eftersom $f \in \mathbb{A}(\mathbb{D})$, så kan f uttryckas i en absolutkonvergent serie

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + ib_k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + i\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

för $z \in \mathbb{D}$. Låt

$$A(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ och } B(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Notera att både A och B är reellvärda på de relevanta delmängderna av reella axeln, vilket resulterar i att

$$\begin{aligned}2\int_{-R}^{R} |f(r)|^2 dr &= 2\int_{-R}^{R} A(r)^2 + B(r)^2 dr \\ &\leq \int_{0}^{2\pi} \left|A(Re^{it})\right|^2 + \left|B(Re^{it})\right|^2 dt \\ &= \int_{0}^{2\pi} \left|f(Re^{it})\right|^2 + \left|A(Re^{it})\right|^2 + \left|B(Re^{it})\right|^2 - \left|f(Re^{it})\right|^2 dt.\end{aligned}$$

På enhetsdisken gäller

$$\begin{aligned}|A|^2 + |B|^2 - |f|^2 &= A\overline{A} + B\overline{B} - (A + iB)(\overline{A} - i\overline{B}) \\ &= i(A\overline{B} - B\overline{A})\end{aligned}$$

och $\overline{A(Re^{it})} = A(R(e^{-it}))$, vilket resulterar i att

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \left|A(Re^{it})\right|^2 + \left|B(Re^{it})\right|^2 - \left|f(Re^{it})\right|^2 dt \\
&= i\int_0^{2\pi} A(Re^{it})B(Re^{-it}) - A(Re^{-it})B(Re^{it})dt \\
&= i\int_0^{2\pi} A(Re^{it})B(Re^{-it})dt - i\int_0^{2\pi} A(Re^{-it})B(Re^{it})dt \\
&= i\int_0^{2\pi} A(Re^{it})B(Re^{-it})dt - i\int_0^{2\pi} A(Re^{it})B(Re^{-it})dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nu ger (5.5) och Sats 49 att

$$2\int_{-R}^{R} |f(r)|^2 dr \leq \int_0^{2\pi} \left|f(Re^{it})\right|^2 dt \leq 4\frac{\pi}{2} \left|\left|f\right|\right|_{H^2}^2 .$$

Låt $R \to 1^-$ för att erhålla den önskade olikheten. Betrakta nu en funktion $f \in H^p$, $1 \leq p < \infty$. Enligt Sats 58 kan f:s nollställen faktoriseras ut i en Blaschke-produkt B, $f = Bg$, sådan att $g \in H^p$ saknar nollställen. Vidare gäller $g^{\frac{p}{2}} \in H^2$ och

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-R}^{R} |f(r)|^p dr &\leq \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} |g(r)|^p dr \\
&= \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \left|g(r)^{\frac{p}{2}}\right|^2 dr \\
&\leq \frac{\pi}{2} \left|\left|g^{\frac{p}{2}}\right|\right|_{H^2}^2 \\
&= \frac{\pi}{2} \left|\left|g\right|\right|_{H^p}^p \\
&= \frac{\pi}{2} \left|\left|f\right|\right|_{H^p}^p .
\end{aligned}$$

$\square$

Kapitel 6

Hilbertmatrisoperatorn på Hardyrum

I detta kapitel visas det att Hilbertmatrisoperatorn är begränsad, vilket inkluderar resultatet $\mathcal{H}(H^p) \in LH$ då $p \in]1, \infty[$. Vidare erhålls, för $2 \leq p < \infty$, att

$$||\mathcal{H}(f)||_{H^p} \leq \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}} ||f||_{H^p}$$

för varje $f \in H^p$. Olikheten ovan kommer även att gälla för $1 < p < 2$ ifall $f(0) = 0$.

Lemma 99. Låt $f_s(x) = \frac{1}{x}\left(ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-s}$. För $s > 1$ och $0 < \delta < 1$ gäller

$$f_s \in L^1([0, \delta])$$

och

$$f_s \circ T \in L^1([1 - \delta, 1]),$$

där $T(x) = 1 - x$.

Bevis. Partiell integrering ger

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta \frac{1}{x}\left(ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-s} dx &= \lim_{h \to 0^+} \left[-ln\left(\frac{1}{x}\right)\left(ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-s}\right]_h^\delta \\
&\quad + \int_0^\delta ln\left(\frac{1}{x}\right)(-s)\left(ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-s-1}\left(-\frac{1}{x}\right) dx \\
&= -\left(ln\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)^{1-s} + s\int_0^\delta \frac{1}{x}\left(ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-s} dx.
\end{aligned}$$

Vid subtraktion av den sista termen, efterföljt av division med $1 - s$ erhålls

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta \left|\frac{1}{x}\left(ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-s}\right| dx &= \int_0^\delta \frac{1}{x}\left(ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-s} dx \\
&= \frac{1}{s-1}\left(ln\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)^{1-s} < \infty.
\end{aligned}$$

Vid substitution $x = 1 - t$ erhålls

$$\int_0^{\delta} \frac{1}{x} \left(ln \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{-s} dx = \int_1^{1-\delta} \frac{1}{1-t} \left(\ln \left(\frac{1}{1-t} \right) \right)^{-s} (-1) dt, \tag{6.1}$$

vilket ger

$$\int_{1-\delta}^{1} \frac{1}{1-t} \left(\ln \left(\frac{1}{1-t} \right) \right)^{-s} dt = \frac{1}{s-1} \left(\ln \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{1-s} < \infty. \tag{6.2}$$

□

Lemma 100. Betrakta funktionen

$$f_s(z) = \frac{1}{1-z} \left(\frac{1}{z} \ln \left(\frac{1}{1-z} \right) \right)^{-s}.$$

För $s > 1$ gäller $f_s \in H^1$.

Bevis. Betrakta funktionen

$$\begin{aligned} g(z) := z \left(ln \left(\frac{1}{1-z} \right) \right)^{-1} &= -z \left(\ln(1-z) \right)^{-1} \\ = -z \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(-z)^k}{k} \right)^{-1} &= \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k+1} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Maclaurinutvecklingen av $\ln(1-z)$ är giltig i $\mathbb{D}$ och från ovanstående uttryck inses att $g(z)$ är analytisk och saknar nollställen i denna mängd. Detta medför att $g(z)^s$ är analytisk i $\mathbb{D}$, varefter $f_s(z) = \frac{1}{1-z} g(z)^s$ är analytisk, då $\frac{1}{1-z}$ är analytisk i $\mathbb{D}$.

Notera att f_s är väldefinierad i $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$. För en funktion $f : M \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gäller

$$|\ln f(z)| = |\ln |f(z)| + i \arg(f(z))| \geq |\ln |f(z)|| \,. \tag{6.3}$$

Notera att

$$\left| \frac{1}{1 - re^{i\theta}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + r^2 - 2r\cos(\theta))}}. \tag{6.4}$$

Låt $\delta = \frac{19}{20}, \theta_0 = \arccos \frac{19}{20}$ och $\frac{9}{10} < r < 1$. Nu gäller

$$2\pi D_1(r, f_s) = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left| f_s(re^{i\theta}) \right| d\theta + \int_{[-\pi,-\theta_0]\cup[\theta_0,\pi]} \left| f_s(re^{i\theta}) \right| d\theta.$$

Låt den första integralen betecknas med $I_1(r)$ och den andra med $I_2(r)$. Låt $V := \{re^{it} : r \in [0,1], \theta \in [-\pi, -\theta_0] \cup [\theta_0, \pi]\}$. För den andra integralen gäller

$$I_2(r) \leq 2(\pi - \theta_0) \max_{z \in V} |f_s(z)| \leq 2\pi \max_{z \in V} |f_s(z)| < \infty, \forall s > 1.$$

Vidare gäller, för I_1,

$$\begin{aligned}
I_1(r) &\leq \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left|\frac{1}{1-re^{i\theta}}\right| \left|\ln\left|\frac{1}{1-re^{i\theta}}\right|\right|^{-s} d\theta \\
&= \int_0^{\theta_0} \frac{2}{\sqrt{(1+r^2-2r\cos(\theta))}} \frac{d\theta}{\left(\ln\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos(\theta)}}\right)^s} =: I_{\theta_0}(r),
\end{aligned}$$

där olikheten ges av (6.3), samt att $r<1<s$, och likheten av (6.4) samt att cos är en jämn funktion. Vidare fås, genom substitutionen $2r(1-\cos\theta)=1-t$, att

$$\begin{aligned}
I_{\theta_0}(r) &= \int_1^{1-2r(1-\delta)} \frac{2\left(\ln\frac{1}{\sqrt{(1+r^2+1-t-2r)}}\right)^{-s}}{\sqrt{(1+r^2+1-t-2r)}} \frac{\left(-\frac{1}{2r}\right)dt}{\sqrt{1-\left(\frac{2r-1+t}{2r}\right)^2}} \\
&= \int_{1-\frac{r}{10}}^1 \frac{2\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{(1-r)^2+1-t}\right)^{-s}}{\sqrt{(1-r)^2+1-t}} \frac{dt}{\sqrt{(2r-(2r-1+t))\,(2r+(2r-1+t))}}. \\
&\leq 2^{s+1}\int_{\frac{9}{10}}^1 \frac{\left(\ln\frac{1}{(1-r)^2+1-t}\right)^{-s}}{\sqrt{(1-r)^2+1-t}} \frac{dt}{\sqrt{1-t}}.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Låt

$$T_t(r) := \left((1-r)^2+1-t\right)\left(\ln\frac{1}{(1-r)^2+1-t}\right)^{2s},$$

varefter $\frac{d}{dr}T_t$ ges av

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}T_t(r) &= -2(1-r)\left(\ln\frac{1}{(1-r)^2+1-t}\right)^{2s} + \\
&\quad \left((1-r)^2+1-t\right)2s\left(\ln\frac{1}{(1-r)^2+1-t}\right)^{2s-1}\left(-\frac{-2(1-r)}{(1-r)^2+1-t}\right) \\
&= 2(1-r)\left(\ln\frac{1}{(1-r)^2+1-t}\right)^{2s-1}\left(2s-\ln\frac{1}{(1-r)^2+1-t}\right).
\end{aligned}$$

För $(1-r)^2\leq t\leq 1$ är derivatan av den reella funktionen reell, då $s>1$. För dylika $r,t\in[0,1]$ gäller

$$\frac{d}{dr}T_t(r)\leq 0 \Leftrightarrow 2<2s\leq \ln\frac{1}{(1-r)^2+1-t} \Leftrightarrow t-1+e^{-2}>(1-r)^2.$$

Integralens gränser i formel (6.5) ger att relevanta värden på t är $t\in[\frac{9}{10},1]$, vilket medför att $T_t(r)$ är icke-växande på det nyssnämnda intervallet, eftersom $t-1+e^{-2}\geq e^{-2}-\frac{1}{10}>\frac{1}{100}\geq(1-r)^2$, där $r\in]\frac{9}{10},1[$. Då $T_t(r)$ är icke-växande, så är $\frac{1}{T_t(r)}$ och även $\sqrt{\frac{1}{T_t(r)}}$ icke-avtagande med avseende på $r\geq\frac{9}{10}$ då $t\in[\frac{9}{10},1]$, vilket medför att (6.5) kan uppåtskattas med

$$2^{s+1}\int_{\frac{9}{10}}^1 \frac{\left(\ln\frac{1}{1-t}\right)^{-s}}{\sqrt{1-t}}\frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2^{s+1}\int_{\frac{9}{10}}^1 \frac{\left(\ln\frac{1}{1-t}\right)^{-s}}{1-t}dt = \frac{2^{s+1}}{s-1}\left(\ln 10\right)^{1-s},$$

där den sista likheten följer från beviset till Lemma 99. Sammanfattningsvis gäller, för varje $s > 1$, att

$$D_1(r, f_s) \leq \frac{2^s}{\pi(s-1)} (\ln 10)^{1-s} + \max_{z \in V} |f_s(z)| < \infty.$$

Låt till sist $r \to 1^-$. □

För Hilbertmatrisoperatorn opererande på H^1-funktioner gäller

$$\mathcal{H}(f) = \int_0^1 \frac{f(x)}{1-zx} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f(x)(zx)^n dx.$$

Vidare gäller, för varje $R < 1$ och $z \in B(0, R)$, att

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} |f(x)(zx)^n| \, dx \leq \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} |f(x)| \, (|z|)^n dx \leq \pi \frac{||f||_{H_1}}{1-R},$$

där Sats 98 har använts för att erhålla den sista olikheten. Nu kan alltså Fubini-Tonellis sats tillämpas, vilket medför

$$\mathcal{H}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 f(x) x^n dx \right) z^n.$$

Det gäller även att $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, för någon följd $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, eftersom f är analytisk på $\mathbb{D}$. Sats 95 medför att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 |a_k x^k x^n| dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \frac{1}{1+k} < \infty,$$

varefter Fubini-Tonellis sats ger den andra likheten nedan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 f(x) x^n dx \right) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k x^n dx \right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^1 x^k x^n dx \right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{1+n+k} z^n.
\end{aligned}$$

Nu har följande resultat bevisats.

Sats 101. *För Hilbertmatrisoperatorn opererandes på $H^p,\ p \geq 1$ existerar följande framställningar:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f) &= \int_0^1 \frac{f(x)}{1-zx} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 f(x) x^n dx \right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{1+n+k} z^n,
\end{aligned}$$

där a_k är koefficienterna i Maclaurinutvecklingen till f.

Sats 102.

$$\mathcal{H}(H^1) \not\subseteq H^1$$

Bevis. Lemma 100 ger att $f := f_{\frac{3}{2}}$, definierad genom

$$f_{\frac{3}{2}}(z) := \frac{1}{1-z}\left(\frac{1}{z}\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)^{-\frac{3}{2}},$$

tillhör H^1. Det gäller att

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\int_0^1 f(x)x^n dx\right)}{n+1} &= \int_0^1 f(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}dx \\
&= \int_0^1 f(x)\frac{1}{x}(-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-x)^{n+1}}{n+1}dx \\
&= \int_0^1 f(x)\frac{1}{x}(-1)\ln(1-x)dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}dx\right)dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}dx \\
&\geq \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1-x}\left(\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}dx \\
&= \lim_{b\to 1^-}\left[\left(\ln\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]_{x=\frac{1}{2}}^{b} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Antag att $\mathcal{H}(f) \in H^1$, där

$$\mathcal{H}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 f(x)x^n dx\right)z^n.$$

Nu ger Sats 95 att

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\int_0^1 f(x)x^n dx\right)}{n+1} < \infty,$$

vilket är en motsägelse. □

Sats 103.

$$\mathcal{H}(H^\infty) \not\subseteq H^\infty$$

Bevis. Betrakta funktionen $f \equiv 1 \in H^\infty$. Nu gäller

$$\mathcal{H}(f)(z) = \int_0^1 \frac{1}{1-zx}dx = \frac{1}{z}\left[-\ln(1-zx)\right]_0^1 = \frac{1}{z}\ln\frac{1}{1-z}.$$

Betrakta $z \in]0,1[$ i närheten av 1. För varje $M > 0$ hittas nu ett $R \geq \frac{3}{4}$ så att $z > R$ medför

$$\mathcal{H}(f)(z) > M.$$

Detta medför att $D_\infty(R, \mathcal{H}(f)) > M$, då $\mathcal{H}(f)$ är kontinuerlig. Eftersom $D_\infty(R, \mathcal{H}(f))$ är växande med avseende på R så måste $||\mathcal{H}(f)||_{H^\infty} > M$ för alla $M > 0$, alltså $||\mathcal{H}(f)||_{H^\infty} = \infty$. $\square$

Härnäst introduceras ytterligare en framställning av Hilbertmatrisoperatorn. Från tidigare gäller, för $f \in H^p, 1 \leq p \leq \infty$,

$$\mathcal{H}(f)(z) = \int_0^1 \frac{f(x)}{1-zx}dx = \int_0^1 \frac{f(x_t(z))}{1-zx_t(z)}\left(\frac{\partial}{\partial t}x_t(z)\right)dt,$$

där linjen $x : 0 \to 1, x \in \mathbb{R}$ har transformerats genom $t : x \to \frac{(1-z)x}{1-zx}$. Inversen ges av

$$x_t = x_t(z) = \frac{t}{(t-1)z+1}.$$

Integranden är en funktion $Y_t(f)(z) = \omega_t(z)(f \circ x_t)(z)$, där

$$\omega_t(z) = \frac{\frac{\partial}{\partial t}x_t(z)}{1-zx_t(z)} = \frac{(t-1)z+1-tz}{((t-1)z+1)^2}\frac{(t-1)z+1}{(t-1)z+1-zt} = \frac{1}{(t-1)z+1}.$$

Nu gäller alltså

$$\mathcal{H}(f) = \int_0^1 Y_t(f)dt. \tag{6.6}$$

Lemma 104. Låt

$$x_t(z) = \frac{t}{(t-1)z+1},\ 0 < t < 1.$$

Nu gäller att x_t är analytisk på $\mathbb{D}$ och att

$$x_t(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}. \tag{6.7}$$

Bevis. Notera att (6.7) innebär att $|x_t(z)| < 1$ för varje $z \in \mathbb{D}$. Det gäller att

$$\begin{aligned}|x_t(z)|^{-2} &= \frac{1}{t^2}|(t-1)z+1|^2 = \frac{1}{t^2}|tz+1-z|^2 = \left|\frac{1}{t}(1-\Re z) + \Re z + i\Im z\left(1-\frac{1}{t}\right)\right|^2 \\ &= \left(\frac{1}{t}(1-\Re z)+\Re z\right)^2 + \left(\Im z\left(1-\frac{1}{t}\right)\right)^2.\end{aligned}$$

Om $t, \Re z \in]0,1[$ så gäller $\frac{1}{t}(1-\Re z) > (1-\Re z)$ och därmed

$$\left(\frac{1}{t}(1-\Re z)+\Re z\right)^2 > 1, \tag{6.8}$$

vilket ger att $|x_t(z)|^{-2} > 1$, med andra ord $|x_t(z)| < 1$. Om termerna i (6.8) omgrupperas så erhålls

$$\left(\frac{1}{t} - \Re z\left(\frac{1}{t} - 1\right)\right)^2 \geq \frac{1}{t} > 1, \text{ för } \Re z \leq 0, t \in]0,1[.$$

Eftersom x_t är en Möbiustransformation så är x_t analytisk i sin definitionsmängd.

$\square$

Lemma 105. För $0 \leq r < 1$ gäller

$$P(r,t) \leq \frac{1+r}{1-r}.$$

Bevis. Lemma 8 medför att

$$P(r,t) \leq \left|\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}.$$

$\square$

Sats 106. *Låt $f \in H^p, 1 \leq p < \infty,\ h \in \mathbb{A}(\mathbb{D})$ så att $|h(z)| < 1$ för alla $z \in \mathbb{D}$. Nu gäller*

$$||f \circ h||_{H^p} \leq \left(\frac{1+|h(0)|}{1-|h(0)|}\right)^{\frac{1}{p}} ||f||_{H^p}.$$

Bevis. Sats 67 ger att

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta - t) f(e^{it}) dt.$$

Vidare gäller, enligt Jensens olikhet

$$|f(re^{i\theta})|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)|f(e^{it})|^p dt =: G(f)(r,\theta). \tag{6.9}$$

Sats 13 medför att $G(f)$ är harmonisk i $(r,\theta) \in [0,1[\times[0,2\pi[$. Vidare gäller $G(f)(r,\theta) = G(f)(|re^{i\theta}|, \arg(re^{i\theta})) = \hat{G}(f)(re^{i\theta})$. Vidare så ger Lemma 70 att $\hat{G}(f)\circ h$ är harmonisk. Fixera $\rho e^{i\alpha} \in \mathbb{D}$ och låt $re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ vara sådan att $h(\rho e^{i\alpha}) = re^{i\theta}$, varefter (6.9) kan skrivas som

$$|(f \circ h)(\rho e^{i\alpha})|^p \leq (\hat{G}(f) \circ h)(\rho e^{i\alpha}).$$

Vidare erhålls

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(f\circ h)(\rho e^{i\alpha})|^p d\alpha &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\hat{G}(f)\circ h)(\rho e^{i\alpha}) d\alpha \\
&= \hat{G}(f)(h(0)) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{P}(|h(0)|, \arg h(0) - t)|f(e^{it})|^p dt \\
&\leq \frac{1+|h(0)|}{1-|h(0)|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt,
\end{aligned}$$

där Lemma 7 ger den första likheten medan Lemma 105 ger den sista olikheten ovan. Således gäller

$$D_p(r, f\circ h) \leq \left(\frac{1+|h(0)|}{1-|h(0)|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1+|h(0)|}{1-|h(0)|}\right)^{\frac{1}{p}} ||f||_{H^p},$$

där Sats 66 ger den sista likheten. Låt $r \to 1^-$ för att erhålla

$$||f\circ h||_{H^p} \leq \left(\frac{1+|h(0)|}{1-|h(0)|}\right)^{\frac{1}{p}} ||f||_{H^p}.$$

□

Lemma 107. Låt $g_t : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ vara definierad genom

$$g_t(z) = \left(t + \frac{(1-t)^2}{1-tz}\right)^{-1}$$

för $t \in]0,1[$. Nu gäller $g \in H^\infty$ och

$$\sup_{t\in]0,1[} ||g_t||_{H^\infty} \leq 9.$$

Bevis. Eftersom $|tz| < t < 1$ för $z \in \mathbb{D}$, så är g_t en väldefinierad sammansättning av analytiska funktioner, vilket medför att g_t är analytisk för varje $t \in]0,1[$. Låt $z = re^{i\theta}$. Nu gäller, för $(z,t) \in \mathbb{D}\times[0,1[$,

$$\begin{aligned}
\left|t + \frac{(1-t)^2}{1-tz}\right| &= \left|t + (1-t)^2\frac{1-tr\cos\theta + itr\sin\theta}{(1-tr\cos\theta)^2 + (tr\sin\theta)^2}\right| \\
&\geq \Re\left(t + (1-t)^2\frac{1-tr\cos\theta + itr\sin\theta}{(1-tr\cos\theta)^2 + tr\sin^2\theta}\right) \\
&= t + (1-t)^2\frac{1-tr\cos\theta}{1-2tr\cos\theta + t^2r^2} \\
&\geq t + (1-t)^2\frac{1-tr}{(1+tr)^2} \\
&\geq t + (1-t)^2\frac{1-t}{(1+t)^2} \\
&= \frac{1-2t+5t^2}{(1+t)^2} \\
&= \left(\frac{2t}{1+t}\right)^2 + \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2 \\
&\geq \min\left\{\min_{t\in[0,\frac{1}{2}]}\frac{1-t}{1+t}, \min_{t\in[\frac{1}{2},1]}\frac{2t}{1+t}\right\}^2 \\
&\geq \min\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}^2 \\
&= \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Således erhålls $|g_t(z)| \leq 9$ för alla $(z,t) \in \mathbb{D}\times[0,1[$ □

Låt $p \in]1, \infty[$ och $f \in H^p$. Notera att $\omega_t(f \circ x_t) = (g_t f) \circ x_t$, där

$$\begin{aligned}
g_t(z) &= \omega_t \circ x_t^{-1}(z) \\
&= \frac{1}{(t-1)\frac{t(1-z)}{1-tz} + 1} \\
&= \frac{1-tz}{(t-1)t(1-z) + 1 - tz} \\
&= \frac{1-tz}{1 - t + t^2 - t^2 z} \\
&= \frac{1-tz}{(1-t)^2 + t(1-tz)} \\
&= \left(t + \frac{(1-t)^2}{1-tz} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Enligt Lemma 107 så gäller $g_t \in H^\infty$, vilket medför att $g_t f \in H^p$. Eftersom x_t är analytisk på $\mathbb{D}$ så ger Lemma 104 och Sats 106, att

$$||(g_t f) \circ x_t||_{H^p} \leq \left(\frac{1 + |x_t(0)|}{1 - |x_t(0)|} \right)^{\frac{1}{p}} ||g_t f||_{H^p}.$$

Vidare gäller

$$\begin{aligned}
||Y_t(f)||_{H^p} = ||(g_t f) \circ x_t||_{H^p} &\leq \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{1}{p}} ||g_t f||_{H^p} \\
&\leq \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{1}{p}} ||g_t||_H^\infty \, ||f||_{H^p} \leq 9 \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{1}{p}} ||f||_{H^p},
\end{aligned}$$

vilket visar att

$$Y_t : H^p \to H^p. \tag{6.10}$$

Vidare gäller, enligt Minkowskis olikhet i integralform, för $p \in]1, \infty[$, att

$$D_p(r, \mathcal{H}(f)) \leq \int_0^1 D_p(r, Y_t(f)) dt \leq \int_0^1 ||Y_t(f)||_{H^p} \, dt,$$

från vilket

$$||\mathcal{H}(f)||_{H^p} \leq \int_0^1 ||Y_t(f)||_{H^p} \, dt \leq 9 \, ||f||_{H^p} \int_0^1 \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{1}{p}} dt \tag{6.11}$$

erhålls då $r \to 1^-$. Integralen kan uppåtskattas enligt

$$\int_0^1 \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^{\frac{1}{p}} dt \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} \right)^{\frac{1}{p}} dt + \int_0^1 t \left(\frac{1}{1-t} \right)^{\frac{1}{p}} dt.$$

Den första integralen evalueras till

$$\int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{p}} \, dt = \left[-\left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} (1-t)^{1-\frac{1}{p}} \right]_0^1 = \frac{p}{p-1}$$

medan den andra integralen ger

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\left(\frac{1}{1-t}\right)^{\frac{1}{p}} dt &= \left[-t\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}(1-t)^{1-\frac{1}{p}}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{p}{p-1}(1-t)^{1-\frac{1}{p}} dt \\ &= \frac{p}{p-1}\left[\left(2-\frac{1}{p}\right)^{-1}(1-t)^{2-\frac{1}{p}}\right]_0^1 = \frac{p^2}{(2p-1)(p-1)},\end{aligned}$$

vilket medför att

$$||\mathcal{H}(f)||_{H^p} \leq 9\,||f||_{H^p}\left(\frac{p}{p-1}\frac{3p-1}{2p-1}\right),$$

alltså $\mathcal{H}(f) \in H^p$ för varje $f \in H^p$ och

$$||\mathcal{H}||_{op} = \sup_{f\in H^p}\frac{||\mathcal{H}(f)||_{H^p}}{||f||_{H^p}} \leq \frac{9p}{p-1}\frac{3p-1}{2p-1},\ p \in]1,\infty[.$$

Detta innebär att Hilbertmatrisoperatorn är begränsad och att $H^p \in LH$ för $p \in]1,\infty[$, eftersom $\mathcal{H}$ är linjär. Härnäst ska en bättre övrebegränsning till $||\mathcal{H}||_{op}$ bestämmas.

Låt $Q = Q_p = U \cdot f \circ T_{1+}$ vara definierad enligt Sats 90, $U(z) = \left(\frac{4}{(1-z)^2}\right)^{\frac{1}{p}}$. På samma sätt skrivs $Q^{-1} = \hat{U} \cdot f \circ T_{+1}$. Nu definieras $\tilde{Y}$ genom $\tilde{Y} = Q^{-1} \circ Y \circ Q$. Notera att

$$x_t \circ T_{+1}(z) = \frac{t}{(t-1)\frac{z-1}{1+z}+1} = \frac{t(1+z)}{1-t+zt-z+1+z} = \frac{t(1+z)}{tz-t+2}. \tag{6.12}$$

Det gäller att $\tilde{Y} : H^p_+ \to H^p_+$, eftersom

$$\begin{aligned} Q &: H^p_+ \to H^p, \\ Y &: H^p \to H^p \text{ och} \\ Q^{-1} &: H^p \to H^p_+, \end{aligned}$$

enligt (6.10) och Sats 90. För $f \in H^p_+$ kan $\tilde{Y}(f)$ explicit uttryckas genom

$$\begin{aligned} Q^{-1}(Y(Q(f))) &= Q^{-1}(Y(U \cdot f \circ T_{1+})) \\ &= Q^{-1}(\omega_t \cdot (U \cdot f \circ T_{1+}) \circ x_t) \\ &= Q^{-1}(\omega_t \cdot (U \circ x_t \cdot f \circ T_{1+} \circ x_t)) \\ &= \hat{U} \cdot (\omega_t \cdot (U \circ x_t \cdot f \circ T_{1+} \circ x_t)) \circ T_{+1} \qquad (6.13) \\ &= \hat{U} \cdot (\omega_t \circ T_{+1} \cdot (U \circ x_t \circ T_{+1} \cdot f \circ T_{1+} \circ x_t \circ T_{+1})) \\ &= (\hat{U} \cdot \omega_t \circ T_{+1} \cdot U \circ x_t \circ T_{+1}) \cdot f \circ T_{1+} \circ x_t \circ T_{+1} \\ &= s_t(f \circ c_t), \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned}
c_t(z) = T_{1+} \circ x_t \circ T_{+1}(z) &= \frac{1+\frac{t(1+z)}{tz-t+2}}{1-\frac{t(1+z)}{tz-t+2}} = \frac{tz-t+2+t(1+z)}{tz-t+2-t(1+z)} \\
&= \frac{2(tz+1)}{2(1-t)} = \frac{t}{1-t}z + \frac{1}{1-t} \text{ och}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_t(z) = s_{t,p}(z) &= \hat{U} \cdot \omega_t \circ T_{+1} \cdot U \circ x_t \circ T_{+1}(z) \\
&= \left(\frac{1}{(1+z)^2}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(t-1)\frac{z-1}{1+z}+1} \left(\frac{4}{(1-x_t \circ T_{+1}(z))^2}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{(1+z)^{-\frac{2}{p}}(1+z)}{(t-1)(z-1)+1+z} \left(\frac{4}{(1-\frac{t(1+z)}{tz-t+2})^2}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{(1+z)^{1-\frac{2}{p}}}{tz-t+2} \left(\frac{4(tz-t+2)^2}{(tz-t+2-t(1+z))^2}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{(1+z)^{1-\frac{2}{p}}}{tz-t+2} \left(\frac{4(tz-t+2)^2}{4(1-t)^2}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1+z}{tz-t+2}\right)^{1-\frac{2}{p}} (1-t)^{-\frac{2}{p}}.
\end{aligned}$$

Andra likheten nedan gäller, eftersom Q är en bijektion, medan den tredje likheten är en följd av att Q är en isometri:

$$\begin{aligned}
||Y||_{op} &= \sup_{g \in H^p} \frac{||Y(g)||_{H^p}}{||g||_{H^p}} \\
&= \sup_{f \in H^p_+} \frac{||Y(Q(f))||_{H^p}}{||Q(f)||_{H^p}} \\
&= \sup_{f \in H^p_+} \frac{\left|\left|Q^{-1}Y(Q(f))\right|\right|_{H^p_+}}{||Q^{-1}Q(f)||_{H^p_+}} \\
&= \sup_{f \in H^p_+} \frac{\left|\left|\tilde{Y}(f)\right|\right|_{H^p_+}}{||f||_{H^p_+}} \\
&= \left|\left|\tilde{Y}\right|\right|_{op}.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Lemma 108. Låt $f \in H^p_+,\ p \in]1,\infty[,\ t \in]0,1[$ och låt

$$c_t(z) = \frac{t}{1-t}z + \frac{1}{1-t}.$$

Då gäller

$$||f \circ c_t||_{H^p_+} \leq \left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{p}} ||f||_{H^p_+}.$$

Bevis. Notera att $f \circ c_t$ är väldefinierad på $\mathbb{C}_+$, eftersom $c_t(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$. Vidare gäller

$$\begin{aligned}||f \circ c_t||_{H^p_+} &= \sup_{0<x<\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{t}{1-t}(x+iy) + \frac{1}{1-t} \right) \right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{0<x<\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(c_t(x) + \frac{ity}{1-t} \right) \right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Låt nu $b := b_t(y) = \frac{ty}{1-t}$ och notera att $c_t(]0,\infty[) =]\frac{1}{1-t}, \infty[$ för $t \in]0,1[$. Vidare gäller $dy(b) = \frac{1-t}{t} db$ varefter ovanstående uttryck skrivs som

$$\begin{aligned}&\sup_{\frac{1}{1-t}<c<\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(c+ib)|^p \frac{1-t}{t} db \right)^{\frac{1}{p}} \\ \leq &\left(\frac{1-t}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{0<c<\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(c+ib)|^p \, db \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

□

Lemma 109. Låt $p \geq 2,\ t \in]0,1[$ och $f \in H^p_+$. Nu gäller

$$\left|\left| \tilde{Y}_t(f) \right|\right|_{H^p_+} \leq t^{\frac{1}{p}-1} (1-t)^{-\frac{1}{p}} \, ||f||_{H^p_+},$$

där

$$\tilde{Y}_t(f)(z) = s_t(f \circ c_t),$$

$$s_t(z) = \left(\frac{1+z}{tz-t+2} \right)^{1-\frac{2}{p}} (1-t)^{-\frac{2}{p}}$$

och

$$c_t(z) = \frac{t}{1-t} z + \frac{1}{1-t}.$$

Bevis. Då $p \geq 2, t \in]0,1[$ så gäller

$$\begin{aligned}|s_t(z)| &= \left(\frac{|1+z|}{|tz-t+2|} \right)^{1-\frac{2}{p}} (1-t)^{-\frac{2}{p}} \\ &= \left(\frac{|1+z|}{\sqrt{(t\Re z - t + 2)^2 + (t\Im z)^2}} \right)^{1-\frac{2}{p}} (1-t)^{-\frac{2}{p}} \\ &\leq \left(\frac{|1+z|}{\sqrt{(t\Re z - t + 2t)^2 + (t\Im z)^2}} \right)^{1-\frac{2}{p}} (1-t)^{-\frac{2}{p}} \qquad (6.15) \\ &= \left(\frac{\sqrt{(1+\Re z)^2 + (\Im z)^2}}{\sqrt{(t\Re z + t)^2 + (t\Im z)^2}} \right)^{1-\frac{2}{p}} (1-t)^{-\frac{2}{p}} \\ &= \left(\frac{1}{t} \right)^{1-\frac{2}{p}} (1-t)^{-\frac{2}{p}}.\end{aligned}$$

Nu kan $|\tilde{Y}|$ uppåtskattas med

$$|\tilde{Y}_t(f)(z)| = |s_t(z)||f \circ c_t(z)| \leq t^{\frac{2}{p}-1} (1-t)^{-\frac{2}{p}} |f \circ c_t(z)|$$

för varje $z \in \mathbb{C}_+$. Med hjälp av Lemma 108 erhålls nu följande uppåtskattning för normen

$$\begin{aligned}\left|\left|\tilde{Y}_t(f)\right|\right|_{H^p_+} &= |||s_t| \cdot |f \circ c_t|||_{H^p_+} \\ &=\leq t^{\frac{2}{p}-1}(1-t)^{-\frac{2}{p}} ||f \circ c_t||_{H^p_+} \\ &\leq t^{\frac{2}{p}-1}(1-t)^{-\frac{2}{p}} \left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{p}} ||f||_{H^p_+} \\ &= t^{\frac{1}{p}-1}(1-t)^{-\frac{1}{p}} ||f||_{H^p_+}.\end{aligned}$$

□

Sats 110. *Låt* $\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ *vara den klassiska beta-funktionen. För* $0 < a < 1$ *gäller nu*

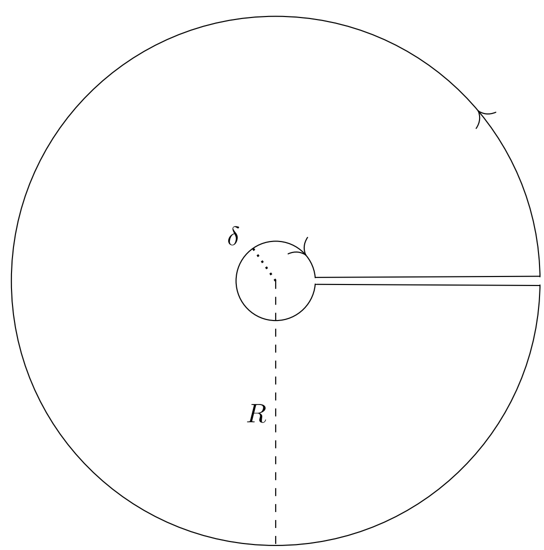
$$\beta(a, 1-a) = \pi \sin(\pi a)^{-1}.$$

Bevis. En omskrivning av betafunktionen ger

$$\beta(a, 1-a) = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^a \frac{1}{x} dx = \int_0^\infty t^a \frac{t+1}{t} \frac{dt}{(1+t)^2} = \int_0^\infty t^{a-1} \frac{1}{1+t} dt.$$

Låt $0 < \delta < 1 < R$ och tillämpa residysatsen på ”nyckelhålet” $C_{\delta,R}$ för att erhålla

Figur 6.1: Kurva $C_{\delta,R}$



$$
\begin{aligned}
2\pi i \mathrm{Res}\left(\mathrm{id}^{a-1}\frac{1}{1+\mathrm{id}}\right)(-1) &= \oint_{C_{\delta,R}} \frac{z^{a-1}}{1+z}dz \\
&= \int_{\delta}^{R} \frac{r^{a-1}}{1+r}dr + \int_0^{2\pi} \frac{R^{a-1}e^{i\theta(a-1)}}{1+Re^{i\theta}}Rie^{i\theta}d\theta \\
&\quad + \int_R^{\delta} \frac{r^{a-1}e^{i2\pi(a-1)}}{1+r}dr + \int_0^{2\pi} \frac{\delta^{a-1}e^{i\theta(a-1)}}{1+\delta e^{i\theta}}\delta i e^{i\theta}d\theta,
\end{aligned}
$$

där följande gren av potensfunktionen z^{a-1} används: $z^{a-1}|_{z=Re^{i\theta}} = R^{a-1}e^{i\theta(a-1)}$. För integralen längs cirkeln med radien R erhålls följande uppåtskattningar

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^{2\pi} \frac{R^{a-1}e^{i\theta(a-1)}}{1+Re^{i\theta}}Rie^{i\theta}d\theta\right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{R^{\Re(a)}e^{-\theta\Im(a)}d\theta}{|1-|Re^{i\theta}||} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{R^{\Re(a)}e^{-\theta\Im(a)}d\theta}{R-1} \leq \frac{R^{\Re(a)}}{R-1}\int_0^{2\pi} e^{-\theta\Im(a)}d\theta < \infty,
\end{aligned}
$$

där $\frac{R^{\Re(a)}}{R-1} \to 0$, då $R \to \infty$, om $\Re(a) < 1$. För integralen längs med den andra cirkeln erhålls analogt

$$
\left|\int_0^{2\pi} \frac{\delta^{a-1}e^{i\theta(a-1)}}{1+\delta e^{i\theta}}\delta ie^{i\theta}d\theta\right| \leq \frac{\delta^{\Re(a)}}{1-\delta}\int_0^{2\pi} e^{-\theta\Im(a)}d\theta < \infty,
$$

där $\frac{\delta^{\Re(a)}}{1-\delta} \to 0$, då $\delta \to 0^+$, om $\Re(a) > 0$.

Integrandens singulariteter inträffar i $z = -1$ och $z = 0$, varav 0 ligger utanför det område som kurvan $C_{\delta,R}$ innesluter, $0 < \delta < 1 < R$. Residyn ges därför av

$$
\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{id}^{a-1}}{1+\mathrm{id}}\right)(-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^{a-1}}{1+z} = \lim_{z\to e^{i\pi}}\frac{z^a}{z} = -e^{i\pi a}.
$$

För varje $a \in \mathbb{C}$ med $\Re(a) \in]0,1[$ och för varje R, δ med $0 < \delta < 1 < R$ gäller

$$
-2\pi i e^{i\pi a} = \oint_{C_{\delta,R}} \frac{z^{a-1}}{1+z}dz.
$$

För $a \in]0,1[$ erhålls, då $R \to \infty$ och $\delta \to 0^+$, att

$$
\begin{aligned}
-2\pi i e^{i\pi a} &= \int_0^{\infty} \frac{r^{a-1}}{1+r} - \frac{r^{a-1}e^{i2\pi(a-1)}}{1+r}dr \Leftrightarrow \\
-2\pi i e^{i\pi a} &= \left(1 - e^{i2\pi(a-1)}\right)\int_0^{\infty}\frac{r^{a-1}}{1+r}dr \Leftrightarrow \\
\int_0^{\infty}\frac{r^{a-1}}{1+r}dr &= 2\pi i\frac{-e^{i\pi a}}{\left(1-e^{i2\pi(a-1)}\right)} \\
&= \frac{2\pi i}{e^{i\pi a}e^{-i2\pi} - e^{-i\pi a}} \\
&= \frac{\pi}{\frac{e^{i\pi a}-e^{-i\pi a}}{2i}} \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Definition 28. För $p \in]1, \infty[$ definieras följande mängder

$$H_0^p := \{f \in H^p : f(0) = 0\} \text{ och } H_1^p := \{f \in H_+^p : f(1) = 0\}$$

Lemma 111. $Q : H_1^p \to H_0^p$ är en isometrisk isomorfism, där Q är operatorn given i Sats 90.

Bevis. Eftersom $H_1^p \subset H_+^p$ och $H_0^p \subset H^p$ och $T_{1+}(0) = 1$, samt $T_{+1}(1) = 0$ så har Q alla nämnda egenskaper, förutom eventuellt homomorfiegenskapen. Eftersom H_1^p är sluten med avseende på addition så följer denna egenskap från att Q:s utvidgning till H_+^p är en homomorfi. □

Lemma 112. Låt $p \in]1, 2[, t \in]0, 1[$ och $f \in H_1^p$. Då gäller

$$\left|\left|\tilde{Y}_t(f)\right|\right|_{H_+^p} \leq t^{\frac{1}{p}-1}(1-t)^{-\frac{1}{p}} \left|\left|f\right|\right|_{H_+^p},$$

där

$$\tilde{Y}_t(f)(z) = s_t(f \circ c_t),$$
$$s_t(z) = \left(\frac{1+z}{tz - t + 2}\right)^{1-\frac{2}{p}} (1-t)^{-\frac{2}{p}}$$

och

$$c_t(z) = (T_{1+} \circ x_t \circ T_{+1})(z) = \frac{t}{1-t}z + \frac{1}{1-t}.$$

Bevis. Låt $f \in H_1^p$. Enligt Lemma 111 så gäller $Q(f) \in H_0^p$, vilket leder till att det existerar ett $\tau \in H^p$ med $Q(f) = \mathrm{id} \cdot \tau$. Låt nu $g = Q^{-1}(\tau) \in H_+^p$. För $r > 0$ gäller

$$\int_0^{2\pi} \frac{|Q(f)(re^{it})|^p}{r^p} dt = \int_0^{2\pi} |\tau(re^{it})|^p dt,$$

vilket meed hjälp av Sats 90 medför att

$$\left|\left|f\right|\right|_{H_+^p} = \left|\left|Q(f)\right|\right|_{H^p} = \left|\left|\tau\right|\right|_{H^p} = \left|\left|g\right|\right|_{H_+^p}. \tag{6.16}$$

Vidare gäller att

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_t(f) &= \tilde{Y}_t(Q^{-1}Q(f)) \\
&= \tilde{Y}_t(Q^{-1}(\mathrm{id} \cdot Q(g))) \\
&= \tilde{Y}_t(\hat{U} \cdot (\mathrm{id} \cdot Q(g)) \circ T_{+1}) \\
&= \tilde{Y}_t(\hat{U} \cdot \mathrm{id} \circ T_{+1} \cdot Q(g) \circ T_{+1}) \\
&= \tilde{Y}_t(T_{+1} \cdot Q^{-1}(Q(g))) \\
&= s_t \cdot (T_{+1} \cdot g) \circ c_t \\
&= s_t \cdot T_{+1} \circ c_t \cdot g \circ c_t \\
&= (s_t \cdot T_{+1} \circ c_t) \cdot g \circ c_t \\
&= s_t \cdot x_t \circ T_{+1} \cdot g \circ c_t \\
&= \sigma_t \cdot g \circ c_t,
\end{aligned}$$

där

$$\sigma_t(z) = (s_t \cdot x_t \circ T_{+1})(z).$$

Med hjälp av (6.12) erhålls

$$\sigma_t(z) = t(1-t)^{-\frac{2}{p}} \left(\frac{1+z}{tz - t + 2} \right)^{2-\frac{2}{p}}.$$

Eftersom exponenten $2 - \frac{2}{p} > 0$, då $p > 1$ så kan approximationen som använts i (6.15) även tillämpas här, vilket ger följande uppåtskattning:

$$|\sigma_t(z)| \leq t(1-t)^{-\frac{2}{p}} \left(\frac{1}{t} \right)^{2-\frac{2}{p}} = t^{\frac{2}{p}-1}(1-t)^{-\frac{2}{p}}.$$

Nu kan $|\tilde{Y}(f)|$ approximeras med

$$|\tilde{Y}_t(f)(z)| = |\sigma_t(z)||g \circ c_t(z)| \leq t^{\frac{2}{p}-1}(1-t)^{-\frac{2}{p}}|g \circ c_t(z)|.$$

Med hjälp av Lemma 108 ehålls följande approximation:

$$\begin{aligned}
\left|\left|\tilde{Y}_t(f)\right|\right|_{H^p_+} &= |||\sigma_t| \cdot |g \circ c_t|||_{H^p_+} \\
&=\leq t^{\frac{2}{p}-1}(1-t)^{-\frac{2}{p}} \, ||g \circ c_t||_{H^p_+} \\
&\leq t^{\frac{2}{p}-1}(1-t)^{-\frac{2}{p}} \left(\frac{1-t}{t} \right)^{\frac{1}{p}} ||g||_{H^p_+} \\
&= t^{\frac{1}{p}-1}(1-t)^{-\frac{1}{p}} \, ||f||_{H^p_+},
\end{aligned}$$

där den sista likheten ges av (6.16). □

Sats 113. *För $2 \leq p < \infty$ gäller*

$$||\mathcal{H}(f)||_{op} \leq \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}.$$

För $p \in]1,2[$ gäller samma övrebegränsning för normen av $\mathcal{H}|_{H^p_0}$, dvs. restriktionen av $\mathcal{H}$ till funktioner med 0 som fixpunkt.

Bevis. För varje $f \in H^p, \ p \in [2, \infty[$ gäller

$$\begin{aligned}
\frac{||\mathcal{H}(f)||_{H^p}}{||f||_{H^p}} &\leq \int_0^1 \frac{||Y_t(f)||_{H^p}}{||f||_{H^p}} dt \\
&\leq \int_0^1 ||Y_t||_{op} \, dt \\
&= \int_0^1 \left|\left|\tilde{Y}_t\right|\right|_{op} dt \qquad (6.17) \\
&\leq \int_0^1 t^{\frac{1}{p}} (1-t)^{-\frac{1}{p}} dt \\
&= \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)},
\end{aligned}$$

där första olikheten ges av (6.11) och integralens linearitet, medan första likheten erhålls av (6.14). Tredje olikheten ges av Lemma 109, varefter Sats 110 ger därpåföljande likhet med $a = \frac{1}{p}$.

Lemma 111 ger att (6.14) gäller även då H^p och H^p_+ är utbytta mot H^p_0 respektive H^p_1. Därmed gäller (6.17) även för $f \in H^p_0$, där sista olikheten fås av Lemma 112 samt Sats 110. Operatornormerna ges i detta fall av supremum över H^p_0 respektive H^p_1. $\square$

Bilaga A

Några satser

Sats A.1. *Låt M vara en öppen mängd och $f : M \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vara en analytisk funktion. Då är f konstant eller så är funktionens nollställen isolerade från varandra, dvs.*

$$\forall z_0 \in Zero(f)\ \exists \delta > 0 \text{ så att } B := B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\} \subset M \text{ och } B \cap Zero(f) = \emptyset.$$

Bevis. Om f är analytisk så kan f uttryckas lokalt som en taylorserie kring något $z_0 \in M$. Låt $z_0 \in Zero(f)$ och

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Om $a_n = 0$ för alla $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ så erhålls $f \equiv a_0$. Annars existerar, enligt välordningsprincipen, ett minsta $n =: n_0$ sådant att $a_n \neq 0$. Observera att eftersom $f(z_0) = 0$ så bör $a_0 = 0$, där n_0 är graden på nollstället z_0. f kan alltså uttryckas som

$$f(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{n_0} \sum_{n \geq 0} a_{n+n_0} (z - z_0)^n.$$

Låt $F(z) := \sum_{n \geq 0} a_{n+n_0} (z - z_0)^n$. $F(z_0) = a_{n_0} \neq 0$. F är givetvis en taylorserie till en analytisk funktion som då också är kontinuerlig. Detta medför att det existerar ett $\delta > 0$ sådant att

$$z \in B(z_0, \delta) \subseteq M \Rightarrow |F(z) - F(z_0)| < \frac{|F(z_0)|}{2},$$

vilket i sin tur medför att

$$z \in B(z_0, \delta) \Rightarrow 0 < \frac{|F(z_0)|}{2} < |F(z)|.$$

$\square$

Sats A.2. *Låt $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vara en följd Reella tal med $0 < a_n < 1$. Produkten*

$$\prod_{n=1}^{N} a_n$$

konvergerar mot $P > 0$ om och endast om

$$\sum_{n=1}^{N}(1-a_n)$$

konvergerar, då $N \to \infty$.

Bevis. Antag att produkten konvergerar. Nu gäller $\ln a_n < a_n - 1$, för varje n, vilket medför att

$$\sum_{n=1}^{N}(1-a_n) = -\sum_{n=1}^{N}(a_n-1) \leq -\sum_{n=1}^{N}\ln a_n = -\ln\prod_{n=1}^{N} a_n$$
$$= \ln\frac{1}{\prod_{n=1}^{N} a_n} \leq \frac{1}{P} < \infty$$

För varje N. Låt $N \to \infty$ för att erhålla det önskade resultatet. Antag nu att summan konvergerar. Då gäller $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$. Således hittas ett K så att $a_k > \frac{1}{e}$, för $k \geq K$. Låt $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ och $g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$. Nu gäller, för $x \in]0,1[$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(\ln x)^2} \text{ och } g'(x) = \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right) \leq 0.$$

g är således avtagande, vilket ger att $g(x) \geq g(1) = 0$. Detta medför att f är icke-avtagande, vilket i sin tur leder till att $1 - \frac{1}{e} \leq f(x) < 1$ för $x \in [\frac{1}{e}, 1[$. Således gäller för dessa x att (observera att $\ln x < 0$)

$$x - 1 \leq \frac{e-1}{e}\ln x \text{ eller ekvivalent} \frac{e}{e-1}(1-x) \geq -\ln x.$$

Nu gäller för $N > K$ att

$$\ln\frac{1}{\prod_{n=K}^{N} a_n} = -\sum_{n=K}^{N}\ln a_n \leq \frac{e}{e-1}\sum_{n=K}^{N}(1-a_n) \leq \frac{e}{e-1}\sum_{n=K}^{\infty}(1-a_n) < \infty. \quad \text{(A.1)}$$

Eftersom ln, $\frac{1}{\mathrm{id}}$ är kontinuerliga funktioner så erhålls, då $N \to \infty$, att

$$\ln\frac{1}{\prod_{n=K}^{\infty} a_n} < \infty,$$

vilket är ekvivalent med

$$\prod_{n=K}^{\infty} a_n > 0,$$

då $a_n > 0$ för alla n. Produkten av de första K termerna är större än noll varför den totala produkten är större än noll och därmed är satsen bevisad. □

Sats A.3. *Låt M vara en domän och $f_n : M \to \mathbb{C}, f_n \in \mathbb{A}(M)$. Om $f_n \to f$ likformigt på alla kompakta mängder $G \subset M$, så är $f : M \to \mathbb{C}$ analytisk.*

Bevis. Eftersom M är öppen så kan man till varje $m \in M$ skapa en öppen boll $B(m, \delta) \subseteq \overline{B}(m, \delta) \subseteq M$ för något $\delta > 0$. Således räcker det att visa påståendet för dessa bollar. Betrakta en av dessa bollar $B_\delta = B(m, \delta)$. Eftersom f_n är kontinuerlig på den kompakta mängden $\overline{B}_\delta$ så är även f kontinuerlig på $\overline{B}_\delta$ på grund av den likformiga konvergensen. Detta medför att $g(t) = g_{m,\delta}(t) := f(m + \delta e^{it})$ är begränsad och att $g \in L^1([0, 2\pi[)$. Vidare så ger Riemann-Lebesgues lemma att $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-itk}dt \to 0$, då $k \to \infty$. Välj nu ett $R < \delta$, vilket medför att $\overline{B}_R = \overline{B}(m, R) \subset B(m, \delta)$ är kompakt. Notera att

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_\delta} \frac{f(w)dw}{(w-m)^{k+1}} &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(m+\delta e^{it})\delta i e^{it}\delta^{-(k+1)}e^{-it(k+1)}dt \\ &= \delta^{-k}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-itk}dt, \end{aligned}$$

vilket medför, att för $z \in \overline{B}_R$ gäller

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\left|(z-m)^k \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_\delta}\frac{f(w)dw}{(w-m)^{k+1}}\right| &\le \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|z-m|}{\delta}\right)^k \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-itk}dt\right| \\ &\le \frac{A}{1-\frac{R}{\delta}} < \infty \end{aligned}$$

för något $A \in \mathbb{Z}_{>0}$ oberoende av R. Detta visar att

$$\sum_{k=0}^{\infty}(z-m)^k \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_\delta}\frac{f(w)dw}{(w-m)^{k+1}}$$

är väldefinierad och konvergerar absolut på $\overline{B}_R$. Eftersom f_n är analytisk så gäller, för $z \in \overline{B}_R$, att

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(z-m)^k \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_\delta}\frac{f_n(w)dw}{(w-m)^{k+1}}. \tag{A.2}$$

För $z \in \overline{B}_R$ gäller även

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=0}^{\infty}(z-m)^k \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_\delta}\frac{f(w)-f_n(w)}{(w-m)^{k+1}}dw\right| &\le \sum_{k=0}^{\infty} R^k \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial B_\delta}\left|\frac{f(w)-f_n(w)}{(w-m)^{k+1}}\right||dw| \\ &\le \sum_{k=0}^{\infty} R^k \frac{1}{2\pi}2\pi\delta \max_{w\in\overline{B}_\delta}|f(w)-f_n(w)|\frac{1}{\delta^{k+1}} \\ &= \max_{w\in\overline{B}_\delta}|f_n(w)-f(w)|\frac{\delta}{\delta-R}. \end{aligned}$$

(A.2) ger nu

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{\infty}(z-m)^k \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_\delta}\frac{f(w)dw}{(w-m)^{k+1}} - f(z)\right| \\
&\le |f_n(z)-f(z)| + \left|\sum_{k=0}^{\infty}(z-m)^k \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_\delta}\frac{f(w)-f_n(w)}{(w-m)^{k+1}}dw\right| \\
&\le |f_n(z)-f(z)| + \max_{w\in\overline{B}_\delta}|f_n(w)-f(w)|\frac{\delta}{\delta-R} \\
&\le \max_{w\in\overline{B}_\delta}|f_n(w)-f(w)|\left(1+\frac{\delta}{\delta-R}\right).
\end{aligned}$$

och då även

$$\begin{aligned}
&\max_{z\in\overline{B}_R}\left|\sum_{k=0}^{\infty}(z-m)^k \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_\delta}\frac{f(w)dw}{(w-m)^{k+1}} - f(z)\right| \\
&\le \max_{w\in\overline{B}_\delta}|f_n(w)-f(w)|\left(1+\frac{\delta}{\delta-R}\right).
\end{aligned}$$

för varje n. Eftersom $f_n \to f$ likformigt på varje kompakt delmängd av M så kan denna övrebegränsning göras godtyckligt liten, vilket medför att

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(z-m)^k \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_\delta}\frac{f(w)dw}{(w-m)^{k+1}} \tag{A.3}$$

för $z \in B_R$. Eftersom $R < \delta$ är godtyckligt vald så gäller framställningen i hela B_δ. Högerled i (A.3) representerar en analytisk funktion, vilket medför att f är analytisk i B_δ. Eftersom, det för varje $m \in M$ existerar en omgivning B_δ där f har en dylik representation så är f analytisk i hela M. □

Avslutningsvis presenteras några kända satser.

Sats A.4 (Hölders olikhet)**.** *Låt $f, g : M \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ och $1 < p < \infty$, där M är en mätbar mängd. Nu gäller*

$$\int_M |f(t)g(t)|dt \le \left(\int_M |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_M |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

där $q = \frac{p}{p-1}$.

Bevis. Se [11]. □

Sats A.5 (Minkowskis olikhet)**.** *Låt $f, g : M \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ och $1 \le p$, där M är en mätbar mängd. Nu gäller*

$$\left(\int_M |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_M |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_M |g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bevis. Se [11]. □

Sats A.6 (Minkowskis integralolikhet)**.** *Låt X, Y vara två mätbara mängder, $F : X \times Y \to \mathbb{C}$ och $1 < p < \infty$. Nu gäller*

$$\left(\int_X \left| \int_Y F(x, y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X |F(x, y)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

Bevis. Se [11]. $\square$

Sats A.7 (Jensens olikhet)**.** *Låt $a < b$ och $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ vara konvex. Låt $I \subseteq \mathbb{R}$ vara ett öppet intervall. Låt vidare $f, h, fh \in PL^1(I)$, $f(I \setminus M_0) \subseteq]a, b[$, där M_0 är en mängd med måttet noll, och*

$$\int_I h(t)dt = 1. \tag{A.4}$$

Nu gäller

$$g(\int_I f(t)h(t)dt) \leq \int_I (g \circ f)(t)h(t)dt.$$

Bevis. Fixera $e \in]a, b[$. Låt $x \in]a, e[$ och $y \in]e, b[$. Nu gäller $0 \leq \frac{e-x}{y-x} \leq 1$, vilket medför att

$$\begin{aligned} g\left(e\right) &= g\left((y - x)\frac{e - x}{y - x} + x\right) = g\left(y\frac{e - x}{y - x} + x\left(1 - \frac{e - x}{y - x}\right)\right) \\ &\leq \frac{e - x}{y - x}g(y) + \left(1 - \frac{e - x}{y - x}\right)g(x) = \frac{e - x}{y - x}(g(y) - g(x)) + g(x) \end{aligned}$$

för en konvex funktion $g :]a, b[\to \mathbb{R}$. Detta kan skrivas om som

$$f_e(x) := \frac{g(e) - g(x)}{e - x} \leq \frac{g(y) - g(x)}{y - x}.$$

Eftersom $1 - \frac{e-x}{y-x} = \frac{y-e}{y-x}$, så gäller även

$$g\left(e\right) \leq \left(1 - \frac{y - e}{y - x}\right)(g(y) - g(x)) + g(x) = \frac{y - e}{y - x}(g(x) - g(y)) + g(y),$$

vilket ger

$$\frac{g(y) - g(x)}{y - x} \leq \frac{g(y) - g(e)}{y - e}.$$

Nu gäller alltså

$$\frac{g(e) - g(x)}{e - x} \leq \frac{g(y) - g(e)}{y - e}$$

för alla x, y med $a < x < e < y < b$. Definiera nu $C_e := \sup_{x \in]a,e[} f_e(x) \in \mathbb{R}$ för vilken

$$\frac{g(e) - g(x)}{e - x} \leq C_e \leq \frac{g(y) - g(e)}{y - e} \tag{A.5}$$

gäller för varje x, y. Vidare så gäller följande olikheter då x, y uppfyller $a < x < e < y < b$:

$$\begin{aligned}\frac{g(e)-g(x)}{e-x} \leq C_e &\Leftrightarrow g(e)-g(x) \leq C_e(e-x)\\ &\Leftrightarrow g(e) \leq C_e(e-x)+g(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_e \leq \frac{g(y)-g(e)}{y-e} &\Leftrightarrow C_e(y-e) \leq g(y)-g(e)\\ &\Leftrightarrow g(e) \leq C_e(e-y)+g(y).\end{aligned}$$

Notera att för e och därmed för alla $x \in]a, b[$ så gäller

$$g(e) \leq C_e(e-x)+g(x). \tag{A.6}$$

Observera att (A.4) medför att $h > 0$ på en mängd med positivt mått. Således hittas en mängd M och ett $\delta > 0$ sådant att $h > \delta$ på M. Nu gäller

$$\int_I (b-f(t))h(t)dt \geq \int_M (b-f(t))h(t)dt \geq \delta \int_M (b-f(t))dt.$$

Eftersom f inte kan vara större än eller lika med b på en mängd med positivt mått så måste $\int_M (b-f(t))dt > 0$, vilket medför att

$$\int_I f(t)h(t)dt < \int_I bh(t)dt = b.$$

Med liknanade resonemang erhålls att $\int_I f(t)h(t)dt > a$. Notera att $b = \infty$ och $a = .-\infty$ tillåts. Sätt $e = \int_I f(t)h(t)dt$ och betrakta (A.6) med $x = f(t)$, för $t \in I \setminus M_0$. Nu erhålls, då $h \geq 0$ och $t \in I \setminus M_0 =: I_0$

$$\begin{aligned}&g(e) \leq C_e(e-f(t))+g(f(t))\\ &\Rightarrow g(e)h(t) \leq C_e(e-f(t))h(t)+g(f(t))h(t)\\ &\Rightarrow g(e)\int_{I_0} h(t)dt \leq C_e \int_{I_0}(e-f(t))h(t)dt + \int_{I_0} g(f(t))h(t)dt\\ &\Rightarrow g(e)\int_I h(t)dt \leq C_e\left(e\int_I h(t)dt - \int_I f(t)h(t)dt\right) + \int_I g(f(t))h(t)dt\\ &\Rightarrow g(e) \leq \int_I g(f(t))h(t)dt.\end{aligned}$$

□

Sats A.8 (Fubini-Tonellis sats)**.** *Låt $E, F \subseteq \mathbb{R}$ vara mätbara mängder och låt $f : E \times F \to \overline{\mathbb{C}}$. Om f är reell och $f(x,y) \geq 0$ för varje $(x,y) \in E \times F$ så gäller*

$$\int_{E\times F} f(x,y)dA(x,y) = \int_E \int_F f(x,y)dydx = \int_F \int_E f(x,y)dxdy.$$

där dA är Lebesgues ytmått. Ovanstående likheter gäller även för en komplexvärd funktion f om en av följande tre integraler existerar:

$$\int_{E\times F}|f(x,y)|dA(x,y),\ \int_E\int_F|f(x,y)|dydx \text{ och } \int_F\int_E|f(x,y)|dxdy.$$

Bevis. Se [6]. □

Sats A.9 (Fatous lemma). *Låt $M\subseteq\mathbb{R}$ vara en mätbar mängd och antag att $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ är en följd av mätbara funktioner $f_n : M\to\mathbb{R}$ sådana att $0\le f_n(x)$, för varje n, nästan överallt $x\in M$. Nu gäller*

$$\int_M \liminf_{n\to\infty} f_n(t)dt \le \liminf_{n\to\infty}\int_M f_n(t)dt.$$

Bevis. Se [3]. □

Sats A.10 (Monotona konvergenssatsen). *Låt $M\subseteq\mathbb{R}$ vara en mätbar mängd och antag att $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ är en följd av mätbara funktioner $f_n : M\to\mathbb{R}$ sådana att $0\le f_n(x)\le f_{n+1}(x)$, för varje n, nästan överallt $x\in M$. Nu gäller*

$$\int_M \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_M f_n(t)dt.$$

Bevis. Se [3]. □

Sats A.11 (Lebesgues dominerade konvergenssats). *Låt $M\subseteq\mathbb{R}$ vara en mätbar mängd och antag att $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ är en följd av mätbara funktioner $f_n : M\to\mathbb{R}$. Antag vidare att $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existerar för nästan varje $x\in M$ samt att det existerar en funktion $g\in L^1(M)$ sådana att $|f_n(x)|\le g(x)$, för varje n, nästan överallt $x\in M$. Nu gäller*

$$\int_M \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_M f_n(t)dt.$$

Bevis. Se [3]. □

Sats A.12 (Egoroffs sats). *Låt $M\subseteq\mathbb{R}$ vara en mätbar mängd med $m(M)<\infty$ och låt*

$$(g_k)_{k=1}^{\infty},\ \text{där } g_k : M\to\mathbb{R},$$

vara en följd av mätbara funktioner. Låt även $g_k\to g$ nästan överallt i M, då $k\to\infty$. Då hittas, för varje $\epsilon>0$, en mätbar mängd $M_\epsilon\subseteq M$ sådan att $m(M_\epsilon)<\epsilon$ och $g_k\to g$ likformigt på $M\setminus M_\epsilon$, då $k\to\infty$.

Bevis. Se [2]. □

Sats A.13 (Cauchy-Schwarz olikhet). *Låt H vara ett inre produktrum försett med inre produkten $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Nu gäller*

$$|\langle f,g\rangle|^2\le\langle f,f\rangle\langle g,g\rangle,$$

där $f,g\in H$.

Bevis. Se [14]. □

Sats A.14 (Riemann-Lebesgues lemma)**.** *Låt $f \in L^1([0, 2\pi[)$ vara begränsad. Nu gäller*

$$\lim_{k \to \pm\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-itk} dt = 0.$$

Bevis. Se [10] □

Litteraturförteckning

[1] J. Belk (26.01.2008) *Convergence of Infinite Products*. URL: `https://cornellmath.wordpress.com/2008/01/26/convergence-of-infinite-products/` (01.01.2018)

[2] V.I.Bogachev (2007) *Measure Theory, I* Springer-Verlag, Heidelberg

[3] N.L.Carothers (2000) *Real Analysis*, Cambridge University Press

[4] E. Diamantopoulos och A. G. Siskakis (2000) Composition Operators and the Hilbert Matrix. *Studia Mathematica 140*, 191-198. doi: 10.4064/sm-140-2-191-198

[5] P. L. Duren (1970) *Theory of Hp Spaces* Academic Press, Inc

[6] D. H. Fremlin (2010 andra upplagan) *Measure Theory, 2*, Torres Fremlin

[7] C. Glader och M. Lindström (2008) *Analytiska funktioner* (föreläsningsanteckningar). URL: `http://web.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/analytiska/AFkap2.pdf` (05.11.2017)

[8] C. Glader och M. Lindström (2008) *Analytiska funktioner* (föreläsningsanteckningar). URL: `http://web.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/analytiska/AFkap4.pdf` (05.11.2017)

[9] C. Glader och M. Lindström (2008) *Analytiska funktioner* (föreläsningsanteckningar). URL: `http://web.abo.fi/fak/mnf/mate/kurser/analytiska/AFkap6.pdf` (19.06.2018)

[10] H. Hanche-Olsen *The Riemann–Lebesgue lemma* (föreläsningsanteckningar). URL: `https://folk.ntnu.no/hanche/kurs/diffkomp/2006h/rieleb-a4.pdf` (23.11.2018)

[11] G.H.Hardy, J.E.Littlewood och G.Pólya (1934) *Inequalities* Cambridge University Press

[12] K. Hoffman (1962) *Banach Spaces of Analytic Functions* Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J.

[13] J. K. Hunter (2011) *Measure Theory* (anteckningar). URL: `https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/measure_theory/measure_notes.pdf` (10.08.2018)

[14] J. K. Hunter och B. Nachtergaele (2001) *Applied Analysis*, World Scientific

[15] P. Koosis (1998 andra upplagan) *Introduction to H_p Spaces* Cambridge university press

[16] I. J. Maddox (1970) *Elements of functional analysis.* Cambridge University Press

[17] J. Oosthuizen (2011) *The Mellin Transform.* URL: `http://math.sun.ac.za/wp-content/uploads/2013/02/Hons-Projek.pdf` (14.11.2017)

[18] N. Saito (2011) *Laplace's equation in the Polar Coordinate System.* URL: `https://www.math.ucdavis.edu/~saito/courses/21C.w11/polar-lap.pdf` (08.03.2018)

[19] `http://mathonline.wikidot.com/the-vitali-covering-lemma-part-1` (10.06.2018)

[20] `http://mathonline.wikidot.com/the-vitali-covering-lemma-part-2` (10.06.2018)