

Ann-Sofi Røj-Lindberg

Skolmatematisk praktik i förändring – en fallstudie





Ann-Sofi Røj-Lindberg (1954)

Filosofie magister (matematik, fysik, kemi)
Åbo Akademi, 1979

Ämneslärarexamen (matematik)
Åbo Akademi, 1981

Studier för Professional Development (40 sv)
Fortbildningscentralen vid Österbottens högskola, 2000

Foto: StudioFotocenter

Pärbild: Nette ("Dansande flicka")



Skolmatematisk praktik i förändring – en fallstudie

Ann-Sofi Røj-Lindberg

Fakulteten för pedagogik och välfärdsstudier
Åbo Akademi
Vasa, Finland, 2017

ISBN 978-952-12-3617-4 (print)

ISBN 978-952-12-3618-1 (pdf)

Painosalama Ab, Åbo, Finland, 2017

Abstrakt

Den finländska grundläggande utbildningen har ett gott rykte i världen, delvis tack vare elevernas förhållandevis goda matematikprestationer i internationella komparativa studier. Ändå visar tidigare forskning att finländska högstadieelever uttrycker en mer problematisk relation till skolmatematiskt arbete än motsvarande ungdomar i ett flertal andra länder. Med denna avhandling ökas förståelsen för sådana fenomen som kan bidra till att även prestationsmässigt framgångsrika elever riskerar utveckla negativa förhållningssätt till skolmatematik, främst under sin högstadietid. Ytterligare ökas förståelsen för skolmatematisk praktik i förändring genom tolkningar av elevers och lärares skolmatematiska erfarenheter inom ramen för en aktionsforskningsprocess.

Forskningen som presenteras i avhandlingen och dess fyra artiklar är en fallstudie med emergent design. I sin helhet finns fallstudien inom det kvalitativa/tolkande forskningsparadigmet och dess teoretiska hemvist är det sociokulturella perspektivet. Skolmatematisk praktik och det skolmatematiska arbetets (upplevda) handlingsmönster samt elevers tillhörighet är centrala begrepp i studien.

I avhandlingen dras slutsatser i relation till de övergripande frågorna:

- Vad konstituerar skolmatematisk praktik i förändring i elevers och lärares berättelser?
- Vilka är elevers upplevelser av deltagande i skolmatematiskt arbete?

Fallstudien inleddes i samband med reformprojektet "Processer och utvärdering i matematikundervisningen", som samtidigt utgör fallstudiens kontext. Reformprojektet hade en teoretisk förankring i konstruktivism, lärares förändringsarbete genom aktionsforskning och de finländska nationella läroplansreformerna 1985 och 1994. Riktlinjerna i läroplanen 1994 innebar bland annat att elevers aktiva matematiska tänkande och behovet av att förnya det skolmatematiska arbetets metoder kom i förgrunden för matematiklärares förändringsarbete på skolnivå. Under tre år (1994–1997) gestaltades reformprojektet som en aktionsforskningsprocess. Projektläraarna ställde sig den grundläggande frågan hur de skulle kunna få elever i högstadiet att verkligen vilja lära sig matematik. Väsentliga metoder i förändringsarbetet var bland annat elevförklaringar, problemlösning, projektarbete och en förnyad bedömningspraxis. Jag deltog i reformprojektet i en dubbelroll som fallstudieforskare och medlem i aktionsforskningsgruppen.

Under fallstudien var insamling, analys och tolkning av forskningsmaterial en iterativt framväxande process. I forskningen använde jag främst följande metoder: lärarintervjuer och klassrumsobservationer som genomfördes i början av reformprojektet, upprepade intervjuer med elever under reformprojektet samt retrospektiva samtal med tre av dem (fokuselever), Joakim, Kristina och

Nette, ungefär tio år efter reformprojektets slut. Mötesprotokoll och andra artefakter från aktionsforskningsprocessen har även använts. Avhandlingens slutsatser är huvudsakligen baserade på fokuselevernans och projektlärares berättelser i intervjuer och samtal samt på de insikter jag fick som observatör och medlem i aktionsforskningsprocessen.

I fallstudiens analyser har ett flertal olika tillvägagångssätt tillämpats. Utgående från lärarintervjuerna konstruerade jag fyra grundade teman som visar hur lärarna upplevde reformprojektet samt de två djupmetaforerna *transport-spår* och *saker-behållare* som i fallstudien utgör ett fönster till skolmatematiskt arbete ur projektlärares synvinkel. Särskilt baserade jag konstruktionen på den stora mängd metaforiska uttryck lärarna använde och som jämförde skolmatematiskt arbete med en transport där matematisk kunskap överförs från läraren till eleven och där elever flyttas från en kunskapsnivå till en annan genom undervisning. Lärarna beskrev till exempel hur de inom det skolmatematiska arbetet valde olika slags tillvägagångssätt för att "styra", "lyfta" eller "dra" elever och på så sätt hjälpa eleverna "fylla på" kunskap i form av matematiska "verktyg" och "idéer".

Analysen av elevintervjuer gjordes i flera faser. Under aktionsforskningsprocessen använde jag meningskategoriserande och meningskoncentrerande tillvägagångssätt i syfte att föra in förståelse för reformprojektets metoder ur elevers synvinkel i processen. I det fortsatta analysarbetet använde jag en induktiv ansats för att notera väsentliga budskap i elevers berättelser och övergick sedan till att betrakta varje intervjusamtal med en (fokus)elev som en helhet vid tolkningen av denna elevs upplevda skolmatematiska praktik.

Fallstudien visar att trots att reformprojektet stödde implementeringen av speciella nya tillvägagångssätt i högstadiets matematikundervisning, bibehölls sedvänjor i det skolmatematiska arbetet som förmodligen bidrog till att de prestationsmässigt framgångsrika fokuseleverna Kristina och Nette utvecklade negativa förhållningssätt till skolmatematiskt arbete. Kristina tyckte om matematik, men kom med tiden till insikt om att ämnet inte var något för henne. Nette, som till en början såg positivt på matematiken, blev alltmer avståndstagande och konstaterade som vuxen att hon saknar "mattehuvud".

Under aktionsforskningsprocessen gestaltades det skolmatematiska arbetets handlingsmönster på ett likartat sätt i elevernas berättelser och även i lärarnas berättelser. Berättelserna påvisade handlingsmönstrets stabilitet som ett slags skolmatematikens kulturella manus och inom ramen för en uppgiftsdiskurs. Inom uppgiftsdiskursen bildades det skolmatematiska arbetets handlingsmönster av en linjär steg-för-steg-process med räckor av typexempel och bokuppgifter med fixerade svar. Läroboken, läroboksuppgifterna och läraren tillskrevs av studiens

lärare och elever en kunskapsauktoritet som varken lärare eller elever ifrågasatte. Lektionsaktiviteterna i reformprojektets klassrum fortsatte att följa ett handlingsmönster med genomgång och individuellt arbete. Det skolmatematiska arbetets individualistiska drag visade sig i alla elevberättelser. Med undantag för den bedömande funktionen förblev reformprojektets tillvägagångssätt i marginalen. Eleverna upplevde att dessa inte hade samma giltighet inom det skolmatematiska arbetet som matematiklektionens återkommande aktiviteter. Elevernas berättelser visade också att vissa prestationer inte betraktades som legitima, såsom att famla, att svara fel, att misstolka eller att göra utvidgade tolkningar av matematiken i relation till matematikbokens uppgifter. Berättelserna illustrerade samtidigt begränsningen i begreppet didaktiskt kontrakt. I de situationer som beskrivs av eleverna i denna fallstudie fanns inte nödvändigtvis en sådan ömsesidighet i lärares och elevers föreställningar som begreppet didaktiskt kontrakt utgår ifrån.

Den här fallstudien visar att individuellt ansvar samt tillhörighet i gemenskaper där legitimt kunnande underhandlas tillsammans med läraren är viktigt, men inte tillräckligt, för elevers upplevelser av framgång. Fallstudien betonar, i likhet med annan forskning, att matematiska gemenskaper borde etableras i klassrummet med sedvänjorna att undersöka matematikinnehållet ur olika perspektiv och att ta den andras perspektiv genom respektfullt ömsesidigt lyssnande. Sådana gemenskaper upplevs som inkluderande av dess deltagare, såväl elever som lärare.

Abstract

The Finnish comprehensive education has a good reputation, partly due to the relatively successful performance of students in international mathematics assessments. However, research shows that Finnish lower secondary school students express more problematic relationships towards school mathematical work than their peers in several other countries. The overall purpose of this study is twofold. Firstly, to increase our understanding of the phenomena that may contribute to the risk of high performing lower secondary school students developing negative relationships towards school mathematical work. Secondly, to increase our understanding of school mathematics practices in the process of change. This is done through interpretations of how students and teachers make sense of their school mathematical experiences within the frame of an action research process.

The thesis and its four articles is a case study with an emergent design. As a whole the case study is located in the qualitative/-interpretive research paradigm. Its theoretical home is the sociocultural perspective. Notions of importance are school mathematical practice and the (experienced) action patterns of school mathematical work as well as students' participation in the practice.

In the thesis, conclusions are drawn in relation to the following overall issues:

- What constitutes changing school mathematical practice in the stories of students and teachers?
- What are students' experiences of participation in school mathematical work?

The case study started in conjunction with the reform project "Processes and Assessment in the Teaching of Mathematics", which simultaneously constitutes the context of the case study. The reform project was theoretically connected to constructivism, to the work of mathematics teachers at one school to bring about change through action research and to the Finnish national curriculum reforms of 1985 and 1994. The guidelines of the 1994 national core curriculum foregrounded, among other things, students as active mathematics thinkers and supported the restructuring of methods of teaching and assessment in mathematics on the school level. For three years (1994–1997) the reform project was shaped by the teachers as an action research process which started from the basic question of how to get students in lower secondary school to really want to learn mathematics. Essential approaches in the process of restructuring were explanations by the students, problemsolving and a revised assessment practice. I participated in the reform project in a double role as case study researcher and member of the action research group.

During the case study, collection, analysis and interpretation of the research material was an iteratively emerging process. The main

research methods were teacher interviews and classroom observations at the beginning of the reform project; repeated interviews with students during the reform project and retrospective conversations with three of them (focus students): Joakim, Kristina and Nette about ten years after the end of the reform project. Minutes from meetings and other artifacts from the action research process were used as well. The conclusions drawn in the thesis are mainly based on stories told by the focus students and by project teachers, as well as on the insights I gained as an observer and participator in the action research process.

In the case study, I have applied several different analytical approaches. From the teacher interviews, I constructed four grounded themes and two deep metaphors, to describe how the teachers experienced school mathematics practices in the process of change. I based the construction of the metaphors *transport-track* and *commodity-container* on the multitude of metaphorical expressions, which described school mathematical work as a transport of knowledge represented as "tools" and "ideas" from the teacher to the students. During the transport students are moved from one level of knowledge to the next with the help of various teaching approaches. For instance, in relation to actions on their students, the teachers used expressions such as "guiding students step by step", "lifting students up" and "stopping students from falling behind".

I analyzed the student interviews in several phases. During the reform project I applied meaning categorization and meaning concentration in order to insert a student perspective on methods of teaching and assessment into the action research process. In the further analysis, firstly, I noted essential aspects in the interviews through an inductive approach. Then I analyzed each interview with a (focus)student holistically to understand how the student made sense of his or her school mathematical experiences.

Despite support from the action research process when implementing new approaches to teaching and assessment, the research indicates that certain habits of school mathematical work remained. This phenomenon probably contributed to the development of negative attitudes to school mathematics by the focus students Kristina and Nette. Kristina continued to like school mathematical work, but realized that it was not for her. Initially, Nette expressed a positive relationship, but increasingly over the years she learned to reject the subject, and to blame herself for not having "a head" for mathematical work.

During the action research process, similar stories of action patterns of school mathematical work were told by all the students, and also by teachers. The stories indicated a stability of these patterns similar to a cultural script and within the frame of a task discourse. Within the task discourse, school mathematical work was constituted as a linear step-

by-step process with chains of worked examples and textbook tasks with fixed answers. The knowledge authority attributed to the textbook and its tasks and to the teacher was not questioned by students and teachers in the study. The lesson activities continued to follow a routine with "genomgång"¹, followed by individual work. The individualistic nature of school mathematical work appeared in all the student stories. Except for their assessment function new approaches to teaching, for instance project work, remained marginal. The students considered them as less legitimate within school mathematical work than the recurrent lesson activities. The student stories also showed that tentativeness, wrong answers, misinterpretations or extended interpretations of the textbook tasks were not considered as legitimate accomplishments. The stories also illustrated the limitations of the notion didactical contract. The events described by students did not necessarily show the kind of reciprocity in imaginations of students and teachers on which the theory of didactical contract is based.

The research showed the importance of individual responsibility and a sense of belonging to communities where legitimate knowing is negotiated together with the teacher. These aspects were however not enough for a student to experience success within school mathematical work. The case study stresses the significance of communities where the mathematical content is inquired into from different viewpoints and the perspective of the others is acquired by respectful and mutual listening. Such communities are more likely to be experienced as inclusive by their participants, both students and teachers.

¹ For the Swedish notions "genomgång" or "att gå igenom" there is no English equivalent. The notions refer to a whole class activity during which the teacher goes through or explains something at the board while the students participate by listening.

Förord

Den här avhandlingen är ändpunkten på en lång resa med många uppehåll, krokarna och återvändsgränder på vägen.

Jag blev utexaminerad ämneslärare i matematik, fysik och kemi år 1981. Jag trivdes utmärkt som högstadielärare, men till slut var det ändå lärarutbildningen och forskning inom matematikdidaktik som drog det längre strået. År 1994 blev jag anställd som forskningsassistent inom reformprojektet "Processer och utvärdering i matematikundervisningen" vid den dåvarande pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi. Mitt arbete var först finansierat av Utbildningsstyrelsen, men blev senare en del av ett assistentuppdrag i de matematiska ämnenas didaktik.

Då reformprojektet tog slut efter tre år ställdes jag inför en situation vars utgång på intet sätt var självklar. Genom reformprojektet, och dess lärare och elever, hade jag på nytt lärt känna en skolmatematik jag trodde att jag redan kände – jag hade ju trots allt varit matematiklärare på högstadiet under många år – men vars komplexitet var så oerhört mycket större än jag någonsin hade kunnat ana. Skulle jag klara av att föra alla erfarenheter vidare till en doktorsavhandling?

Det fortsatta forskningsarbetet blev utdraget. Långa perioder gick det helt i stå och jag såg knappt något ljus i tunneln. Utan stöd av inspirerande och kloka vänner skulle den här boken ha förblivit en önskedröm. Men nu är avhandlingen klar och jag vill rikta mitt varma tack till er som på olika sätt bidragit till att göra den möjlig. Jag väljer att inte ens försöka nämna er alla som förtjänar att tackas vid namn. Alla bidrag, stora som små, har varit lika viktiga. Genom otaliga diskussioner kring pedagogisk och matematikdidaktisk teori och praktik har mina tankar klarnat. Tack för all praktisk hjälp med litteratur, språkgranskning och layout.

Särskilt tackar jag de dedikerade lärare och lärarutbildare och elever som jag hade lyckan att samarbeta med inom reformprojektet. Det är tack var er som avhandlingen överhuvudtaget kunde bli till.

De erfarenheter ni lärare och lärarutbildare så frikostigt delade med er av till mig och till andra lärare blev nödvändiga bitar i forskningspusslet. Ni lärde mig att bättre förstå och respektera komplexiteten i allt pedagogiskt förändringsarbete.

Tack Joakim, Kristina och Nette, och alla ni andra elever som så öppenhjärtligt lät mig ta del av era skolmatematiska erfarenheter. Jag hoppas avhandlingens tolkningar gör rättvisa åt era berättelser. Under forskningsarbetets gång känns det som om ni blivit mina vänner.

Ett speciellt tack riktar jag till professor emeritus Ole Björkqvist och professor Kirsti Löfwall Hemmi. Ole, du var min tålmodige handledare under en lång tid. Otaliga är de texter du läst och kommenterat. Du trodde på mig och öppnade dörrarna till det matematikdidaktiska forskningsfältet. Idag är jag glad över den frihet du gav mig att utforska fältet på mitt eget sätt. Kirsti, vi kom varandra nära som doktorander i

den nordiska forskarskolan i matematikdidaktik (NoGSME). I din nya roll som professor i matematiska ämnens didaktik vid fakulteten för pedagogik och välfärdsstudier blev du i fallstudiens slutskede det bollplank och stöd jag behövde för att komma i mål.

Professor emerita Barbro Grevholm och docent Anu Laine, ni tog er an uppdraget att granska avhandlingens manuskript. Era noggranna och konstruktiva iakttagelser hjälpte mig att göra väsentliga förbättringar i texten. Tack! Det gläder mig att just du Barbro även kommer att vara min opponent. Genom möjligheten att ta del i den nordiska forskarskolan i matematikdidaktik, som du ledde, fick jag inspiration att komma vidare då forskningsarbetet hade kört fast.

I am especially grateful to my supportive mentor and friend professor emeritus Shlomo Sharan. I have learned a lot from you about educational research and life.

Avhandlingen skulle inte ha varit möjlig utan det ekonomiska stöd jag gynnats av under åren. Jag vill framföra ett varmt tack till Utbildningsstyrelsen, Svenska Kulturfonden, Oskar Öflunds stiftelse, Magnus Ehrnrooths stiftelse, Högskolestiftelsen i Österbotten, Stiftelsens för Åbo Akademi forskningsinstitut, Rektor för Åbo Akademi, Nordisk Forskerutdanningsakademi NorFA, Svensk-Österbottniska Samfundet, Svenska Folkskolans Vänner, Kulturnämnden i Svenska Österbottens Förbund och Otto A. Malms donationsfond.

Jag har en underbar familj. Anders, min käre make, du har stött mig genom alla faser i forskningsprocessen och påmint mig om att livet är så mycket mera än en doktorsavhandling. Markus och Emma, då forskningsprocessen inleddes var ni skolelever och uttryckte skolmatematiska erfarenheter av liknande slag som fallstudiens elever. Idag är ni framgångsrika vuxna, med egna familjer och föräldrar till våra barnbarn Valter, Signe, Ingrid och Linus. Markus, genom dig har jag lärt mig mycket om engagemangets betydelse, inte bara i skolmatematik utan i livets alla sammanhang. Emma, du har med frågor och funderingar vidgat min förståelse för barns matematiklärande och gett mig insyn i lärarens vardag.

Jag hade så gärna velat ha dig här nu, mamma Gunnel. Du har flyttat till en dimension där du inte längre syns för oss. Men jag vet att du kommer att sitta i främsta raden i Akademisalen och följa med disputationen. Jag känner din glädje över att avhandlingen äntligen är klar. Tack för att du lärde mig och mina syskon Anders, Stefan och Maja bildningens värde och att aldrig ge upp.

Pappa Johan, med avhandlingen vill jag hedra dig och alla veteraner som bidragit till att Finland i år kan fira 100 år av självständighet.

Sundom den 2 november 2017
Ann-Sofi Røj-Lindberg

Ur Little Gidding i *Fyra kvartetter* av T.S. Eliot

V

Det som vi kallar början är ofta slutet
och att avsluta något är att göra början.
Slutet är vår utgångspunkt.

...

varje fras och sats är ett slut och en början,

...

Rosens ögonblick och idegranens ögonblick
är lika långa. Ett folk utan historia
blir inte återlöst från tiden, ty historien är ett mönster
av tidlösa ögonblick.

...

vi skall inte upphöra att forska
och slutet på all vår forskan
blir att finna vår utgångspunkt
och se den för första gången.
Genom den okända port vi minns
när det sista som finns att upptäcka
är det som var alltings början:
vid den längsta flodens källa
vet vi inte av det gömda
vattenfallets röst och rösterna
från barnen i äppelträdet
därför att vi inte söker dem,
men vi hör dem, halvt, i tystnaden
mellan bruset från två vågor i havet.

...

(översättning: Th. Warburton)

Little Gidding ingår i Eliot, T. S. (1948). *Fyra kvartetter*. I svensk tolkning av Artur Lundkvist, Gunnar Ekelöf, Th. Warburton. Stockholm: Artur Bonniers förlag

Innehållsförteckning

1 INTRODUKTION TILL STUDIEN	15
1.1 SYFTE OCH FORSKNINGSFRÅGOR	17
1.2 ÖVERSIKT ÖVER ARTIKLARNAS SOM INGÅR I AVHANDLINGEN	20
2 STUDIENS KONTEXT	23
2.1 NATIONELLA LÄROPLANSREFORMER 1985 OCH 1994.....	23
2.2 REFORMPROJEKTETS MÅL OCH METODER	25
3 CENTRALA BEGREPP, TEORIER OCH TIDIGARE FORSKNING AV BETYDELSE I STUDIEN	29
3.1 CENTRALA BEGREPP	29
3.1.1 Matematikens natur	29
3.1.2 Skolmatematisk praktik.....	30
3.1.3 Upplevd skolmatematisk praktik	32
3.1.4 Matematisk gemenskap.....	33
3.2 WENGER TILLHÖRIGHETSTEORI	34
3.3 IDENTITETSARBETE	36
3.4 SEDVÄNJOR	38
3.4.1 Didaktiskt kontrakt och uppgiftsdiskurs	38
3.4.2 Klassrummets frågepraktik och kommunikationsmönster	41
3.5 SKOLMATEMATISKT ARBETE UR ELEVERS SYNVINKEL – TIDIGARE FORSKNING	43
4 METODOLOGI	46
4.1 VETENSKAPSPPOSITIONERING OCH FORSKNINGSDESIGN	46
4.1.1 Fallstudie	46
4.1.2 Forskningsansats med emergent design.....	46
4.1.3 Fallstudiens lokalisering i forskningsparadigm	47
4.2 ÖVERSIKT ÖVER DET EMPIRISKA MATERIALET	49
4.3 INTERVJUER OCH VUXENSAMTAL MED PROJEKTELEVER	51
4.3.1 Deltagande projektelever	51
4.3.2 Genomförande av elevintervjuer under studiens första skede	53
4.3.3 Genomförande av vuxensamtal under studiens andra skede	56
4.3.4 Hantering, analys och tolkning av det empiriska materialet.....	57
4.4 LÄRARINTERVJUER	61
4.4.1 Deltagande projektlärare.....	61
4.4.2 Genomförande av lärarintervjuer.....	62
4.4.3 Hantering, analys och tolkning av det empiriska materialet.....	62

4.5	PROJEKTANTECKNINGAR	64
4.5.1	<i>Framtagande, hantering, analys och tolkning av det empiriska materialet</i>	64
4.6	FORSKNINGSETISKA ÖVERVÄGANDEN	66
4.6.1	<i>Etiskt ansvar</i>	66
4.6.2	<i>Etiskt ansvar och etiska dilemmor i denna studie</i>	67
4.7	ÖVERVÄGANDEN I RELATION TILL FALLSTUDIENS VETENSKAPLIGA KVALITET ..	71
4.7.1	<i>Intern validitet/Tillförlitlighet</i>	71
4.7.2	<i>Reliabilitet/Överensstämmelse</i>	73
4.7.3	<i>Extern validitet/Överförbarhet</i>	74
5	SAMMANFATTNINGAR AV ARTIKLARN A [A] - [D]	76
5.1	SAMMANFATTNING MED RESULTAT AV [A]	76
5.2	SAMMANFATTNING MED RESULTAT AV [B]	78
5.3	SAMMANFATTNING MED RESULTAT AV [C]	80
5.4	SAMMANFATTNING MED RESULTAT AV [D]	84
6	SLUTSATSER OCH DISKUSSION	89
6.1	FÖRÄNDRINGSARBETE OCH BESTÅENDE SEDVÄNJOR	89
6.2	TILLHÖRIGHET OCH LEGITIMT KUNNANDE – VÄSENTLIGA I ELEVERS UPPLEVELSE AV FRAMGÅNG	94
6.3	LÄRDOMAR FRÅN STUDIEN I FÖRHÅLLANDE TILL DAGENS SITUATION SAMT FÖRSLAG TILL VIDARE FORSKNING	98
	REFERENSER	102
	BILAGOR 1-13	
	ARTIKLARN A [A] - [D]	

Lista på tabeller

Tabell 1. Forskningsparadigm enligt bearbetning från Ernest (1998) och Bassey (1999, s. 42–55).

Tabell 2. Översikt över fallstudiens *case record*

Tabell 3. Sammansättning av kohorten *Elevintervju A*.

Tabell 4. Tidpunkter för elevintervjuer under fallstudiens första skede.

Lista på figurer

Figur 1. Modes of belonging (MoB), bearbetad från Wenger (1998, s. 174).

1 Introduktion till studien

Det vetenskapliga arbete som jag presenterar i denna avhandling sträcker sig över en lång tid. Det har sitt ursprung i början av 1990-talet och i en grupp finlandssvenska matematiklärares känsla av att det måste gå att göra något mera av matematikundervisningen än det som vanligen hände i deras högstadielklassrum. Det var framförallt sådana handlingsmönster lärarna ville förändra som ofta verkade leda till att elevers matematiska tänkande stannade av utan lärarens hjälp och att elever på längre sikt utvecklade passivitet och en ovilja att ta ansvar för sitt matematiklärande (Hagman, 1994). Troligtvis var en likartad situation aktuell även för andra finländska matematiklärare vid samma tid eftersom det pågående läroplansbytet (Skolstyrelsen, 1985; Utbildningsstyrelsen, 1994) på ett helt nytt sätt fokuserade undervisningens innehåll och arbetssätt, bedömningsfrågor och elevers aktivitet. Dessutom betydde läroplansbytet att alla lärare oberoende av undervisningsämne uppmuntrades till förändringsarbete genom att bilda aktiva lärandegemenskaper (jfr Sahlberg, 2011). Idag befinner sig lärare i en liknande situation i och med övergången till en ny läroplan (Utbildningsstyrelsen, 2004; Utbildningsstyrelsen, 2014) med likartade syften att reformera matematikundervisningen.

På 1990-talet hade konstruktivismen en stark ställning inom matematikdidaktiken på nationella och internationella arenor (jfr Davis, Maher & Noddings, 1990; Malinen & Kupari, 2003). I likhet med många andra reformprojekt som syftade till förändringar i matematikundervisning den här tiden (jfr Black & Atkin, 1996), sökte lärargruppen stöd i konstruktivismens grundidé om att kunskap oberoende av undervisningsämne inte erhålls passivt från elevens omgivning utan konstrueras aktivt av den tänkande eleven (jfr von Glasersfeld, 1991). Enligt Cobb (1988) och andra implicerar konstruktivism ändå inte mera för ett förändringsarbete än att läraren blir en pedagogisk problemlösare som börjar granska och reflektera kring sin egen undervisning. Läraren kan starta genom att börja föreställa även sig själv som en aktivt lärande person och bli en "mature, autonomous professional who takes responsibility for the development of own practice" (Cobb, 1988, s. 101). Som teori för kunskapsutveckling säger konstruktivismen ingenting specifikt om hur undervisningen borde försiggå (jfr Kilpatrick, 1997, s. 950; Thompson, 2000). Enligt Thompson kan

/.../ konstruktivismen innebära utlöpare till våra föreställningar om undervisningsåtgärder eller handlingar som kunde vara effektiva för vissa elever, men den föreskriver eller utesluter inte *per se* någon speciell åtgärd eller handling såsom möjligen effektiv. (Thompson, 2000, s. 297, min översättning, kursivering i original)

Lärarna i lärargruppen ställde sig den grundläggande frågan – Hur ska vi få elever i våra klassrum att verkligen vilja lära sig matematik? Kanske finns det sätt att undervisa matematik och bedöma elevers matematikprestationer som medför ett aktivare förhållningssätt till det egna lärandet hos eleverna och utan att det nödvändigtvis innebär några radikala förändringar i matematikklassrummets traditioner? Speciellt riktade reformlärarna sig till elever som ansågs ha kvalifikationer och ett personligt intresse för att studera matematik på en teoretiskt mer avancerad nivå.

Jag såg styrkan i konstruktivismens idé om aktivt lärande (jfr Røj-Lindberg, 2001). Jag tänkte mig att om idén omsätts i handling så skulle den kunna bidra till att reducera såväl improduktiva föreställningar i relation till skolmatematiskt arbete som den ytlighet i lärandet som jag själv hade upplevt ibland i mina egna klassrum. Jag kände som matematiklärare mycket väl igen mig i lärarnas förändringssträvanden och jag delade deras intresse av att utveckla matematikundervisningen på högstadiet. Mot den bakgrunden lämnade jag hösten 1994 mitt eget arbete som matematiklärare i en annan skola. Jag antog utmaningen att ta del i förändringsarbetet och gå in i lärargruppens aktionsforskningsprocess men utan att uppfatta mig som en aktionsforskare. Enligt McNiff och hennes kolleger är en aktionsforskare inriktad mot att utveckla sitt eget handlande, inte andras (McNiff, Lomax & Whitehead, 1996).

Den treåriga aktionsforskningsprocess som följde genererade en central del av det material som ingår i fallstudiens analytiska ram. Processen bildar samtidigt det första skedet i genomförandet av fallstudien och kärnan i dess kontext. Under den här tiden kunde jag på nära håll följa lärarnas grubblerier över såväl aktionsforskningsprocessens kollegiala dimension som undervisnings- och bedömningssituationer i anslutning till förändringsarbetet. Lärarna delade frikostigt med sig av sina erfarenheter och av olika slags skriftliga, projektrelaterade, artefakter. Vidare hade jag deras förtroende att sammankalla till projektmöten, skriva mötesprotokoll och på varierande sätt stötta dem i förändringsarbetet. Genom serier av elevintervjuer fick jag insyn i förändringsarbetet även ur ett elevperspektiv. Allt detta material har ingått i den analytiska ramen för det vetenskapliga arbete som jag presenterar i denna avhandling.

Insikter under aktionsforskningsprocessen visade att kunskapsmässigt framgångsrika elever utvecklade olikartade relationer till skolmatematiskt arbete under högstadiet. Detta bidrog till beslutet att bjuda in tre elever från samma högstadielklassrum till retrospektiva vuxensamtal kring deras skolmatematiska erfarenheter cirka 10 år efter att de hade avslutat högstadiet. Tillsammans erbjöd högstadie-

intervjuerna och vuxensamtalen mig en unik grund för att förstå hur dessa tre elevers upplevelser av skolmatematiskt arbete bildades och kom att divergera över tid mot bakgrund av att de var prestationsmässigt framgångsrika klasskamrater som tog del i samma matematiklektioner under största delen av sin grundskoletid. Genom att i det fortsatta arbetet positionera studiens material i ett sociokulturellt och socialt perspektiv (jfr Lerman, 1998; Rogoff, 2003; Wenger, 1998) kunde jag synliggöra det olikartade deltagande som fokuseleverna trots den gemensamma kulturella bakgrunden hade erfarit under årskurserna 7–9 och relaterar till som vuxna.

När jag nu långt efter att aktionsforskningsprocessen inleddes avslutar denna studie så befinner vi oss i en situation som delvis lyfter fram samma idéer som viktiga för förändringsarbete på skolnivå som i början av 1990-talet: lärarsamarbete och mångsidiga arbetssätt, bedömning och elevers aktivitet i lärprocessen. Vi vet också att många finländska elever under den tid studien pågått har utvecklat alarmerande negativa erfarenheter genom att ta del i skolmatematiskt arbete under sin skoltid, vilket syns som ointresse eller missnöje redan i lågstadiet, medan andra elever inte alls tycks ha gjort det (jfr Brunell, 2007; Kupari, et al., 2013; Kupari, Vettenranta & Nissinen, 2012; Vettenranta, et al., 2016; Välijärvi, et al., 2007). Dessutom vet vi att en negativ relation till skolmatematiskt arbete tycks medverka till att även kunskapsmässigt framgångsrika niondeklassare undviker yrkesval som innebär fördjupade matematikstudier. Det är särskilt oroande att detta speciellt tycks gälla flickor (jfr Metsämuuronen, 2013). Trots att problematiska skolmatematiska erfarenheter har konstaterats gång på gång och fortfarande uttrycks av både yngre och äldre finländska elever och studerande (jfr Tainio & Laine, 2015; Tuohilampi, 2016; Kaasila, 2000; Kaasila, Hannula & Laine, 2012; Pietilä, 2002; Røj-Lindberg, 2012), så saknas långsiktig forskning om hur dessa erfarenheter konstitueras över tid och om vilka fenomen som medverkar till att försök att förändra matematikundervisningen medför så minimala resultat (jfr Hiebert, 2013; Norris, et al., 1996). Föreliggande studie är unik såtillvida att den på grund av sitt långa tidsperspektiv kan bidra till att fylla denna kunskapslucka.

1.1 Syfte och forskningsfrågor

Studien kan karaktäriseras som en *fallstudie* vars teoretiska hemvist finns inom det kvalitativa/tolkande forskningsparadigmet (jfr Basse, 1999, s. 44). Med *fallstudie* avser jag både den slutliga rapporten över det vetenskapliga arbetet – den föreliggande avhandlingen – och arten av det vetenskapliga arbete avhandlingens metodologikapitel beskriver.

Studiens huvudintresse är att förstå skolmatematiskt arbete med hjälp av de erfarenheter som uttrycks av elever och lärare som tar del i ett lokalt reformprojekt vid en bestämd skola. "Reform" avser lärarnas intentioner att förändra sin undervisning, inte nödvändigtvis projektets resultat. Vidare är arbetets syfte att öka förståelsen för fenomen som bidrar till att även prestationsmässigt framgångsrika elever riskerar utveckla en negativ relation till matematik. Med avhandlingen bidrar jag till forskningsfältets kunskap om och förståelse för vad som kännetecknar det skolmatematiska arbetets förgivettagna tänkesätt och förväntade sätt att agera och hur dessa aspekter upplevs av personer som tar del i ett lokalt reformprojekt.

Studiens analytiska fokus (jmf. "unit of analysis", Säljö, 2009) är de *betydelser* lärare och elever som tar del i ett lokalt reformprojekt tillskriver sina skolmatematiska erfarenheter. Även om förändringsarbetet och dess aktionsforskningsprocess i sig var transformativt så är denna fallstudies avsikt inte att avgöra förändringsarbetets effekt på deltagande elevers och lärares lärande över tid. Förändring betraktas i studien som ett tillstånd som kan beskrivas och förstås, inte som något vars existens jag som forskare mäter. Aktionsforskningsprocessen innebar lärarnas strävan efter förändrade metoder och tillvägagångssätt och därmed förändrade möjligheter till deltagande för eleverna.

Det vetenskapliga arbetet har möjliggjort slutsatser i relation till följande två övergripande frågor:

1. Vad konstituerar skolmatematisk praktik i förändring i elevers och lärares berättelser?
2. Vilka är elevers upplevelser av deltagande i skolmatematiskt arbete?

I detta *första kapitel* har jag introducerat läsaren i fallstudiens långsiktiga dimension och redovisat för dess syfte och frågeställningar.

Det *andra kapitlet* och det *tredje kapitlet* samt det metodologiska *fjärde kapitlet* är tätt knutna till varandra. Fokus för avhandlingens *andra kapitel* är det lokala reformprojekt, som utgör fallstudiens kontext. Kapitlet situerar reformprojektet inom aktuella läroplansreformer samt redovisar för förändringsarbetets mål och metoder och tolkar dessa i relation till konstruktivism. Kapitlet redovisar även kortfattat för den treåriga aktionsforskningsprocessen.

Tyngdpunkten i det *tredje kapitlet* ligger på teoretiska begrepp och forskning av betydelse i studien. Det *fjärde kapitlet* redovisar för studiens forskningsansats och dess deltagare. Vidare presenteras

översiktligt det primära och sekundära empiriska material som utgör grunden för studiens slutsatser samt redovisas för hanteringen, analysen och tolkningen av det empiriska materialet. Kapitlet avslutas med en diskussion angående forskningsetiska överväganden av betydelse för studien samt överväganden i relation till dess vetenskapliga kvalitet.

Kapitel fem redovisar för utvidgade sammanfattningar med resultat av artiklarna [a]–[d] som ingår i avhandlingen

I avhandlingens sista och *sjätte kapitel* presenteras och diskuteras fallstudiens huvudsakliga slutsatser och studien sätts i förhållande till dagens situation. Vidare föreslås teman för fortsatt forskning.

1.2 Översikt över artiklarna som ingår i avhandlingen

Till avhandlingen hör fyra artiklar som genomgått peer review. I avhandlingen hänvisar jag till dessa artiklar som [a], [b], [c] och [d]. Artiklarna är återgivna i avhandlingen med tillåtelse av copyright innehavarna.

[a] Røj-Lindberg, A.-S. (2013). Finnish mathematics teachers talk about restructuring practice. *Networks. An On-line Journal for Teacher Research*, 15, 1–17. <https://dx.doi.org/10.4148/2470-6353.1055>

Artikeln anknyter lärarnas förändringssträvanden till den finländska skolmatematiska utbildningspolicyn under 1990-talet. Artikeln redovisar för två djupmetaforer som tillsammans bildar ett fönster till skolmatematikens traditioner och ger en grund för projektlärarnas föreställningar om behov av och hinder för förändring. Ytterligare redovisar artikeln för fyra grundade teman konstruerade ur lärarnas berättelser om skolmatematiskt arbete.

Material som denna artikel bygger på har tidigare blivit publicerat i följande artiklar (Røj-Lindberg, 2003, 2006)

Røj-Lindberg, A.-S. (2003). "I was trapped in a pattern": The dilemma of change. *S MDF Medlemsblad*, 8, 6–23.

Røj-Lindberg, A.-S. (2006). "Jag satt fast i mönster" – Metaforer i lärares berättelser om matematikundervisning i förändring. I L. Häggblom, L. Burman, & A.-S. Røj-Lindberg (red.), *Perspektiv på kunskapens och läradnets villkor. Festskrift tillägnad professor Ole Björkqvist* (s. 113–124). Vasa: Pedagogiska fakulteten.

[b] Røj-Lindberg, A.-S. (2011a). Structure and closure of school mathematical practice – the experiences of Kristina. I P. Ernest (red.), *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 26. Tillgänglig på <http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/> [3.3.2016]

Philosophy of Mathematics Education erbjuder inte peer review. Artikel [b] har emellertid genomgått peer review vid publiceringen som

Røj-Lindberg, A.-S. (2011b). Structure and closure of school mathematical practice – the experiences of Kristina. I L. Burman, O. Björkqvist, & A.-S. Røj-Lindberg (red.), *Long-term research in the didactics of mathematics and science. Proceedings of the FMSERA annual symposium in Vaasa, October 27–28, 2006*, (s. 178–201).

Artikeln återger eleven Kristinas skolmatematiska erfarenheter under och efter högstadiet. Som en röd tråd genom alla intervjuer går Kristinas upplevelse av matematik som ett tråkigt, men viktigt skolämne. En slutsats som dras i artikeln är att Kristina upplevde skolmatematiskt arbete som en sluten praktik vars syfte är att komma ihåg regler och procedurer och typer av uppgifter så väl att korrekt procedur kan kopplas till den aktuella uppgiftstypen för att hitta fram till rätt svar. Det retrospektiva vuxensamtalet med Kristina visade att den upplevda skolmatematikens slutenhet fick en avgörande betydelse för hennes yrkesval.

[c] Røj-Lindberg, A-S. (2010). Varför vänder "framgångsrika" högstadieelever ryggen till matematiska praktiker? I M. Asikainen, P. Hirvonen, & K. Sormunen (red.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa*, (s. 17–37). Joensuu: University of Eastern Finland.

Artikeln fokuserar de tre objektivt sett framgångsrika projekteleverna Kristinas, Nettes och Joakims erfarenheter och lärandebanor från årskurs 7 till vuxen ålder. Artikeln visar att divergerande betydelser av statusen "att vara framgångsrik" över åren formades i de tre elevernas upplevda skolmatematiska praktik. Sammantaget illustrerar de tre elevernas olikartade lärandebanor betydelsen av att elever känner sig delaktiga och engagerade i gemenskaper där socialt accepterat (legitimt) matematiskt kunnande förhandlas fram.

[d] Røj-Lindberg, A-S. (2015). School mathematical practices as experiences of identity work: the learning journeys of three students. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(2), 5–26.

Artikeln, som bygger på artiklarna [b] och [c], använder idén om identitetsarbete för att förstå hur projekteleverna Joakims, Kristinas och Nettes upplevda skolmatematiska praktik och olikartade lärandebanor konstituerades över tid. Upplevd skolmatematisk praktik som identitetsarbete sammanfattar hur projekteleverna identifierade sig själva i relation till lokala lärandegemenskaper i och utanför klassrummet. Joakims identifiering är konstant över åren bland de matematiskt smarta personer som, ofta tillsammans med läraren, bildade lekfulla gemenskaper där alla bidrog till produktionen av viktig matematik. Kristina däremot betraktade skolmatematiskt arbete ur en marginell position inom sådana gemenskaper. De lärandegemenskaper Nette anknöt till ändrade gradvis karaktär över åren och därmed även hennes identitetsarbete. Från medlemskap i gemenskaper av skapare och användare av viktig matematik identifierade hon sig över åren allt starkare med lärandegemenskaper

där medlemmarnas möjligheter till förståelse och engagemang i produktionen av viktig matematik var kringskurna.

Material som artikeln bygger på har tidigare blivit publicerat i

Røj-Lindberg, A.-S. (2009). School mathematical practices as experiences of identity work in relation to problem solving – a critical examination. I L. Burman (red.), *Problem solving in mathematics education. Proceedings of the 10th ProMath conference, August 28–31, 2008*, (s. 107–128). Vasa: Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi

2 Studiens kontext

Den finländska grundskolan påverkades under 1980- och 1990-talen av två nationella läroplansreformer, år 1985 och år 1994, som hade en stor inverkan på undervisningen i matematik på högstadienivå (Skolstyrelsen, 1985; Utbildningsstyrelsen, 1994). I syfte att förankra det skolbaserade reformprojektet "Processer och utvärdering i matematikundervisningen" som utgör fallstudiens kontext, i finländsk utbildningspolicy redovisar jag inledningsvis för dessa läroplansreformer.

Jag sammanfattar och tolkar sedan reformprojektets mål och metoder i relation till en konstruktivistisk syn på hur personer lär sig. (I artikel [a] framkommer reformprojektets mål och metoder ur de deltagande lärarnas synvinkel.)

Reformprojektet antog under läsåren 1994–1997 en formell gestalt i form av en aktionsforskningsprocess där jag själv tog del tillsammans med lärargruppen (se metodologin). Kapitlet redovisar slutligen kortfattat för denna process.

2.1 Nationella läroplansreformer 1985 och 1994

Den nationella läroplansreformen 1985 slog fast att den finländska grundskolan ska vara en skola för alla, medan 1994 års läroplansreform var starkt knuten till att alla elever ska betraktas som aktivt lärande individer. Läroplansreformen 1994 var för matematikens del tydligt influerad av den internationella matematikdidaktiska arenan där intresset för elevtänkande och att se matematikundervisningen ur elevens perspektiv hade funnits redan en längre tid. Det rådde även en stark konsensus om att matematikundervisningens fokus på elevtänkande måste gå hand i hand med utvecklingen av en sådan bedömningspraxis som flyttar bedömningens fokus från korrekta svar till elevens tänkta matematik (Romberg, 1993, s. 107). I det följande redogör jag för några för studien relevanta aspekter av dessa två nationella läroplansreformer.

Läroplansreformen år 1985 som utmynnade i *Grunderna för grundskolans läroplan 1985* (hädanefter Ggl 1985) (Skolstyrelsen, 1985) och den åtföljande lagrevideringen, innebar att alla elever skulle försäkras en generell behörighet till fortsatta studier efter slutförd grundskola. När högstadiets nivåkurser därmed slopades skulle grundskolans matematiklärare anpassa sin undervisning till enskilda elevers behov och hitta sätt att differentiera och individualisera undervisningen i de heterogena elevgrupperna. En elevs matematikbetyg skulle inte längre vara beroende av andra elevers betyg, som varit fallet sedan

grundskolans införande 1972, utan av elevens egna förutsättningar och målen för undervisningen i ämnet.

Ggl 1985 innebar att den statliga styrningen av undervisningsgruppernas storlek slopades. Det blev skolans och lärarnas sak att fatta beslut om hur den tillgängliga undervisningsresursen skulle fördelas mellan skolans läroämnen och, från 1992 då den nationella förhandsgranskningen av läromedel upphörde, om lämpliga läromedel. Skolor och lärargrupper skulle omvandlas till aktiva lärandegemenskaper (Sahlberg, 2011, s. 36).

Både matematikämnet och att se lärandet ur elevens synvinkel steg efter läroplansreformen 1985 fram som viktiga områden vid utvecklingen av matematik-undervisningen (jfr Häggblom, 1990, 1994; Paasonen, Pehkonen & Leino, 1993; Skåtar, 1992). Man lyfte fram att matematikundervisningen borde anpassas på ett bättre sätt till eleverna och att eleverna skulle erbjudas möjlighet att tänka matematiskt och att ta ansvar för sitt matematiska tänkande. Redan i de lägre klasserna i grundskolan började man lyfta fram vikten av att elever erbjuds möjlighet att reflektera över sitt matematiklärande och att ifrågasätta, diskutera i grupp och prata matematik, medan läraren skulle ta rollen av handledare, diskussionsledare och inspiratör som uppmuntrar eleverna till samtal kring matematik och till att skriva ner sina matematiska tankar (Häggblom, 1990, 1994; Skåtar, 1992). Eleverna skulle erbjudas positiva upplevelser genom att se matematiken som en lek, en konst och ett intellektuellt utmanande ämne (Skåtar, 1992). Likartade målsättningar återkom sedan i *Grunderna för grundskolans läroplan 1994* (hädanefter Ggl 1994) (Utbildningsstyrelsen, 1994). Vi kan se många likheter med *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen 2014* (hädanefter Gglu 2014) som trädde i kraft hösten 2016 (Utbildningsstyrelsen, 2014).

Enligt Hansén och Myrskog (1994) uttryckte Ggl 1994 konturerna av en kognitivt inriktad inlärningssyn med inslag även av andra synsätt (s. 20). Inom denna, enligt Ggl 1994, "moderna inlärningssyn" förväntades alla lärare oberoende av undervisningsämne tillämpa metoder som beaktar att elever ska ha en aktiv roll när det gäller att bygga upp kunskapsstrukturer. Elevers uppfattningar och förväntningar är styrande för deras observationer, den information de tar in och de tolkningar de gör (Utbildningsstyrelsen, 1994, s. 10). Ggl 1994 poängterade särskilt att eleverna skulle fostras till insikt om att framgång går hand i hand med ett personligt engagemang och att även annan verksamhet än direkta ämnesstudier kunde uppmuntras. I Ggl 1994 beskrevs läraren som en handledare och den som planerar inlärningsmiljöer (a.a., s. 10).

Varje skola förväntades, på basis av Ggl 1994, utarbeta skolans läroplan och fatta beslut om undervisningens mål, innehåll, metoder och bedömningspraxis inom ramen för kollegiala gemenskaper (Sahlberg, 2011, s. 36). Förbättringar i undervisning och elevers lärande skulle åstadkommas med hjälp av lärarsamarbete och varje lärares självreglerande förändringsarbete ("self-regulated change", Sahlberg, 2011, s. 32).

En ny bedömningspraxis lyftes fram som ett effektivt instrument för lärares förändringsarbete. Bedömningspraxis, både den omedvetna i form av signaler från lärare och kamrater och den medvetna, förväntades stödja elevernas kognitiva utveckling och förmåga till ansvarstagande såsom att ställa upp mål, att planera sitt eget arbete och att bedöma sina egna arbetsinsatser. Elevbedömningen skulle grunda sig på de lokala lösningarna och stå i direkt relation till undervisningens organisering.

Genom att ta del i det skolmatematiska arbetet skulle eleverna tränas i att tänka matematiskt rationellt och exakt och stödjas att se kopplingar mellan det skolmatematiska arbetet, omvärlden och sin framtid. Samtidigt skulle det skolmatematiska arbetet vara fascinerande, spännande och överraskande för eleverna (Utbildningsstyrelsen, 1994, s. 76–79). Den förväntan som uttrycktes i Ggl 1994 var således att elever genom att ta del i skolmatematiskt arbete skulle tillförsäkras positiva upplevelser och, på matematiskt kunnande baserad, långsiktig och personlig nytta. Läroplansgrunderna nämnde även vissa metoder som principiellt viktiga eller lämpliga i det skolmatematiska arbetet (Utbildningsstyrelsen, 1994, s. 78–79), såsom problemlösning och projektarbete, men stipulerade inte närmare hur det vardagliga skolmatematiska arbetets handlingsmönster skulle utformas.

2.2 Reformprojektets mål och metoder

I ovanstående avsnitt har jag lyft fram hur 1994 års läroplansgrunder för grundskolan bland annat innebar att två tydliga intresseområden framträdde för finländska matematiklärare: *elevers aktiva matematiska tänkande* och *förnyelse av det skolmatematiska arbetets metoder*. Ur reformprojektets lärares synvinkel hade särskilt elevtänkande varit ett försummat intresseområde inom den "normala" typ av matematikundervisning som projektlärarna ville förändra. Speciellt viktiga mål för projektlärarna var därför att öka rummet för eleverna att uttrycka sig matematiskt både i tal och i skrift och att göra det skolmatematiska arbetet mera problemlösningbaserat, såsom genom att ge eleverna hemuppgifter i form av projektarbeten. Vidare var projektlärarnas syfte att i linje med Ggl 1994 göra eleverna medvetna om sitt lärandeansvar och att utveckla bedömningspraxisen (jfr [a]; Hagman, 1994).

Mot bakgrund av att lärarna beskrev reformprojektet som *teoretiskt grundat i konstruktivism* (jfr Hagman, 1994), så redovisar jag i den fortsatta framställningen för reformprojektets mål och metoder endast i den utsträckning som behövs för att synliggöra denna koppling. En gemensam utgångspunkt för konstruktivism och för den "moderna" synen på lärande i Ggl 1994 (Utbildningsstyrelsen, 1994, s. 10) är att kunskap är aktivt konstruerad av individen.

Enligt konstruktivismen kan kunskap inte vara resultat av passivt mottagande, eftersom individen konstant försöker begripa sig på erfarna situationer. På så vis är även den lärandes matematiska kunnande erfarenhetsbaserat och varje elevs matematiska verklighet idiosynkratisk. Ur ett konstruktivistiskt perspektiv har elever enligt Steffe och Wiegel, "en egen matematisk verklighet" (Steffe & Wiegel, 1992, s. 447, min översättning; se även till exempel Confrey, 1990, s. 111; Noddings, 1998, s. 115; se även Björkqvist, 1993; von Glasersfeld, 1991, m.fl.).

Det ingår inte i fallstudiens syfte att ta närmare ställning vare sig till i vilken grad de handlingsmönster projektlärarna verkställde i sin matematikundervisning skulle kunna benämnas "konstruktivistiska" eller till den debatt som existerar i relation till konstruktivismens kunskapsteoretiska status (se mera om denna debatt i Lerman, 1996, 2000; Steffe & Thompson, 2000; se även Bruner, 1996; Ernest, 1996; Noddings, 1998, s. 115–120). Ur reformprojektets lärares synvinkel låg det vardagliga skolmatematiska arbetet i förgrunden. Konstruktivismen var för lärarna en förklarande och inspirerande *a priori* teoretisk grund som, i likhet med Ggl 1994, kom utifrån in i reformprojektet och gav lärarna stöd för övertygelsen om att "det måste gå att göra mera av matematikundervisningen" (Hagman, 1994, s. 7). Varken den konstruktivistiska lärandeparadoxen² (jfr Bereiter, 1985; Cobb, Yackel & Wood, 1992, Marton, 1992, s. 37) eller den teoretiska motsättning som finns mellan, å ena sidan, konstruktivism som en teoretisk position där *allt lärande betraktas som aktivt* och, å andra sidan, att söka vissa

² Den konstruktivistiska lärandeparadoxen kan spåras tillbaka ända till Platons dialog "Menon" där Menon frågar Sokrates om hur människan lär sig duglighet (Platon, s. 15). Paradoxen uppstår i frågan hur en människa kan få kunskap om något som hon inte vet existerar och därför rimligen inte heller kan forska i. Platons lösning på paradoxen var att se lärande som erinring av kunskap från människans inre. Lärarens uppgift blir med ett sådant synsätt att såsom en barnmorska "förlösa" elevens slumrande kunskapsreserver.

specifika metoder som skulle kunna kopplas till individers *aktiva* lärande och underförstått *förhindra passivt lärande*, spelade därmed någon explicit roll i reformprojektet.

Projektlärarna talade om konstruktivism i termer av *pedagogisk konstruktivism* (Confrey, 1990, s. 15–18; Noddings, 1998, s. 115) och med en enkel koppling mellan konstruktivismens kognitiva premisser och det vardagliga skolmatematiska arbetets tillvägagångssätt. Lärarna såg till exempel, i linje med Ggl 1994, ett produktivt samband mellan bedömningspraxis och personers lärande. De var förvissade om att elevernas matematiska tänkande och förnyelsen av det skolmatematiska arbetets handlingsmönster på lång sikt skulle kunna styras via förändrade bedömningsrutiner. Synen var förankrad både i en generell övertygelse om att personers lärande är rationellt till sin natur och i erfarenheter från hur elever tar del i klassrumshändelser. Lärarna hade sett hur elever i allmänhet är mer beredda att anstränga sig då de tar del i aktiviteter som upplevs som nyttiga, speciellt om nyttan ger sig till känna i bedömningsituationer. Genom den förnyade bedömningspraxisen ville lärarna stödja elevernas aktiva konstruktion av matematisk kunskap i riktning mot kraftfullare och, ur elevens synvinkel, trovärdigare och livskraftigare matematiska konstruktioner (jfr "strong mathematical acts of construction", Noddings, 1990, s. 17; se även Confrey, 1990, s. 111).

Lärarna strävade efter de kraftfulla kunskapskonstruktionernas livskraft och legitimitet på olika sätt, till exempel genom att *eleven förklarar de procedurer* som behövs i en uppgiftslösning (Hur tänker du?) och genom att *elever belönas* för matematiskt nyttiga resonemang eller för upptäckter av nya viktiga matematiska lagbundenheter (jfr Confrey, 1990, s. 111; Davis, 1990). Eleverna förväntades kunna förklara sitt matematiska tänkande verbalt, såsom i privata samtal med läraren eller vid offentlig kommunikation i klassrummet och i skriftliga produkter, såsom vid *problemlösning* (se exempel i Bilaga 12) och i *projektarbeten* (se exempel i Bilaga 10 och Bilaga 11) eller i provens så kallade *förklaringsuppgifter* (se exempel i Appendix i [c]). Förklaringsuppgifterna förväntades ge lärarna underlag för att bedöma elevernas förståelse av matematiska lagbundenheter och procedurer och förmåga att skriftligt kommunicera denna förståelse. Genom att uppmuntra eleverna till att söka alternativa lösningsstrategier och tillämpningar vid problemlösning och i projektarbeten ville projektlärarna styra elevernas matematiska tänkande mot ett mer kraftfullt matematiskt tänkande; med en lärares formulering: "mot tankefyrar" (jfr "learning through guided discovery processes, meaningful application and problem solving", se Goldin, 1990, s. 31). I likhet med andra (jfr Confrey, 1990; Simon, 1995) såg lärarna som sin uppgift att, i interaktion med eleverna, skapa en väg längs vilken varje elev skulle kunna gå för att konstruera matematiska idéer som

sammanfaller med legitimt matematiskt kunnande. Men till syvende och sist var det, enligt lärarna, eleven själv som skulle hitta motivation att följa vägen och som skulle ta ansvar för att avgöra om hens matematiska tänkande sammanföll med legitimt matematiskt tänkande (jfr Confrey, 1990, s. 112).

Vi försöker ge eleverna större personligt ansvar för inläringen. Eftersom vi tror att ingen egentligen kan lära någon annan någonting, försöker vi på alla sätt få eleven att vilja lära sig, vilket i grunden är det enda som behövs för att inläring skall ske. (Hagman, 1994, s. 7)

Även om reformprojektet uppvisade cykliska drag av aktionsforskning (jfr Björkqvist, 1997; Merriam & Tisdell, 2016, s. 50–53) och lärarna frivilligt valde ett mer forskande förhållningssätt till sin undervisning så identifierade projektlärarna inte sig själva som aktionsforskare. Mot den bakgrunden är det motiverat att i den här fallstudien beskriva förändringsarbetet inom reformprojektet som de deltagande lärarnas *aktionslärande gestaltat som en aktionsforskningsprocess* (jfr Tiller, 1999/2009).

Under de tre år aktionsforskningsprocessen pågick sammankom lärargruppen till ett 40-tal formella och informella projektmöten där förändringsarbetets mål och metoder planerades och diskuterades ur olika synvinklar. En lista på dokument där aspekter av detta arbete finns närmare beskrivna ingår i Bilaga 1.

3 Centrala begrepp, teorier och tidigare forskning av betydelse i studien

Jag har i föregående kapitel redovisat för studiens kontext och där knutit an till *pedagogisk konstruktivism* (Confrey, 1990, s. 15–18; Noddings, 1998, s. 115) som en viktig ingång i aktionsforskningsprocessen för reformprojektets lärare. Studiens ursprungliga syfte var att redogöra för metoder som antogs vara effektivare i relation till reformprojektets mål än den typ av matematikundervisning lärarna beskrev som "normal" eller "traditionell" (jfr [a]). Under den fortsatta forskningsprocessen lämnade jag detta syfte, dels för att konstruktivism som kunskapsteori inte erbjuder några riktlinjer för att inkludera (eller utesluta) metoder som möjligen effektiva (eller inte) i det skolmatematiska arbetet (jfr Thompson, 2000, s. 297). En annan orsak var att mitt forskningsintresse under studiens gång försköts mot skolmatematiskt arbete ur ett deltagarperspektiv, speciellt ur deltagande elevers perspektiv. Inom ramen för sociokulturell teori (jfr Lerman, 1998; Rogoff, 2003; Wenger, 1998) blev det möjligt att beakta den komplexa naturen hos de betydelser som varje deltagare i reformprojektet tillskrev sina skolmatematiska erfarenheter.

I detta kapitel lyfter jag inledningsvis fram centrala begrepp i studien: matematikens natur, skolmatematisk praktik, upplevd skolmatematisk praktik samt matematisk gemenskap. Jag går därefter över till beskrivning av relevanta teorier och tidigare forskning.

3.1 Centrala begrepp

3.1.1 Matematikens natur

I den här studien är frågan om matematikens natur av intresse i relation till vad matematisk praktik och matematiskt tänkande betyder för deltagande personer i reformprojektet.

I *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008) konstaterar författarna att matematik, i likhet med musik, kan betraktas som ett socialt, kulturellt och historiskt fenomen och därför svårligen låter sig definieras. I den definition Kiselman och Mouwitz ändå föreslår beskrivs matematik som "abstrakt och generell" och som en "vetenskap för problemlösning, metodutveckling och teoriuppbyggnad" vars innehåll hämtas från naturen, tekniken och från människans eget tänkande (ibid., s. 16). Definitionen exponerar matematikens natur genom en beskrivning ur två synvinklar.

Å ena sidan lyfter definitionen fram aspekter som Tymoczko (1994) kallar "pure mathematics" (s. 327). I korta ordalag refererar "ren

matematik" till de matematiska strukturer och relationer som växer fram genom debatt och kodifiering under historiens gång och därmed betraktas som delade begrepp i bemärkelsen att de är matematiska objekt som upplevs säkra (jfr Courant & Robbins, 1996; Lakatos, 1976/1990).

Å andra sidan beskriver Kiselmann och Mouwitz i sin definition även en mänsklig sida hos matematiken, och därmed dess icke-formalistiska och osäkra sida. Matematiken har psykologiska rötter i mer eller mindre praktiska behov: matematiska idéer existerar inte i människors medvetanden *a priori*. Matematiken har uppstått och fortsatt att växa och förändras som en följd av människors handlande i varierande sociokulturella sammanhang under historiens gång. Enligt Tymoczko (1994) är "the discipline of pure mathematics" på ett grundläggande sätt knuten till gemenskaper som ägnar sig åt *matematisk praktik* och därmed, som Kisleman och Mouwitz (2008) konstaterar, till människans behov av att lösa matematiska problem framsprungna ur problem i omvärlden eller ur det egna tänkandet. Det matematiska tänkandet kan betraktas som människans kommunikation med sig själv kring dessa problem (jfr Sfard, 2000).

Only by regarding mathematics as the practice of a community of mathematicians, and not as the product of isolated mathematical geniuses, can we arrive at an educationally sound philosophy of mathematics. (Tymoczko, 1994, s. 328)

Vad människan inom den matematiska praktiken tänker på och hur hennes tänkande utvecklas kan således mot den bakgrunden ses som relaterat till såväl det sociokulturella sammanhanget som till människans matematiska erfarenheter. Matematisk praktik innefattar intuition och hypoteser; misstag och framgång; kamp och äventyr; upptäckt och uppfinning (jfr Davis & Hersh, 1981/1998; Lakatos, 1976/1990; Ernest, 1999; Hersh, 1997).

I min studie fokuserar jag elevers och lärares upplevelser av matematiska skolpraktiker. Jag utgår ifrån att dessa upplevelser är relaterade till vad matematisk praktik och matematiskt tänkande betyder för elever och lärare (jfr Thompson, 1992; Kaur, Anthony, Ohtani & Clarke, 2013), men jag analyserar inte på vilket sätt skolmatematiskt arbete i elevers och lärares berättelser reflekterar matematisk praktik så som den beskrivits ovan. Jag omfattar dock Tymoczkos (1994) och andras (jfr Burton, 1994, 1999; Lampert, 1990) synpunkt att matematiska skolpraktiker borde föras närmare matematisk praktik.

3.1.2 Skolmatematisk praktik

Mot bakgrund av sociokulturell teori (jfr Lerman, 1998; Rogoff, 2003; Wenger, 1998) används begreppet *skolmatematisk praktik* i den här

studien för sådana handlingsmönster som personer i varierande roller och situationer och vid olika tidpunkter föreställer sig bildar, eller kunde bilda, skolmatematiskt arbete.

Begreppen skolmatematisk praktik eller skolmatematiska praktiker förekommer i litteraturen (jfr Cobb, 2000; Goodchild, 2001; Goos, Galbraith & Renshaw, 1999; Sfard, 2000; Skott, 2000) men det saknas enhetlighet i begreppsanvändningen i relation till det skolmatematiska arbetets handlingsmönster. Begreppet *handlingsmönster* relaterar i studien till det skolmatematiska arbetets återkommande och därmed förväntade, aktiviteter. Till exempel, att matematiklektioner i årskurs 7 till 9 återkommande kan börja med kontroll av hemuppgifter och att läraren förklarar matematiska metoder och lösningsprocedurer vid tavlan. Matematiklektionen kan sluta med elevernas arbete med matematikuppgifter ur en lärobok medan läraren går runt i klassen, samtalar med elever, kontrollerar deras arbete och delar ut hemuppgifter (jfr Gregg, 1995; [b]). Handlingsmönster används i studien även för att anknyta till hur deltagande i återkommande aktiviteter över tid bildar betydelsebärande mönster ur deltagarnas synvinkel (jfr Lewis, 2016; Nardi & Steward, 2003). För den deltagande personen är det betydelsefullt att ta del oberoende av vilka aktiviteter som än bildar handlingsmönstret (jfr Wenger, 1998). Aktiviteterna influerar de deltagande personernas erfarenheter (jfr Espeland, 2017).

Eftersom studiens fokus är *betydelser* som personer tillskriver sina skolmatematiska erfarenheter så har jag valt begreppet handlingsmönster framom de besläktade begreppen "social norm" och "sociomatematisk norm" (jfr Levenson, Tirosh & Tsamir, 2009; Partanen, 2011; Voigt, 1995; Yackel & Rasmussen, 2002). Till exempel, rutinen att elever förklarar sina strategier för problemlösning är en social norm medan elevens utforskande av matematiska relationer mellan problemlösningstrategierna är en sociomatematisk norm (Levenson, Tirosh & Tsamir, 2009, s. 172). De här begreppen är konstruerade av forskare för att beskriva nätverk av sociala eller matematiska rutiner och skyldigheter och hur dessa nätverk upprätthålls och utvecklas genom personers deltagande i skolmatematiskt arbete. Det som är viktigt i min studie, där erfarenheter studeras ur betydelsesynpunkt, är de *handlingsmönster* som deltagandet bildar över tid ur de personers synvinkel vars deltagande bidrar till att upprätthålla dessa nätverk.

På ytan kan matematikklassrummets handlingsmönster te sig lika eller följa kulturella manuskript (Stigler & Hiebert, 1999) som bildas av återkommande beskrivbara aktiviteter, men trots detta innebära mycket olikartade betydelsebärande mönster ur enskilda deltagares synvinkel (jfr [c], se även Levenson, Tirosh & Tsamir 2009). En tydlig trend är att skolmatematiskt arbete som uppfattas vara ogynnsamt för deltagarna och därför kräver förändring, tilldelas det stående epitetet

”traditionellt” (jfr Boaler, 2002; Cestari, 1998; Gregg, 1995). Det eftersträvade skolmatematiska arbetet är därför ”icke-traditionellt” eller ”reforminriktat” (jfr Boaler, 2002; Grant, Hiebert & Wearne, 1998; Star, Smith III & Jansen, 2008; Wood, 1998). Detta slags ”icke-traditionella” eller ”reformerade” skolmatematiska arbete beskrivs vanligen standardmässigt som gynsammare ur deltagarnas synvinkel. Dess handlingsmönster förväntas tillåta deltagarna att ta del genom aktivitet och att utveckla matematiskt kunnande genom att vara innovativa, utforskande, undersökande, diskuterande och kommunicerande. Det ”traditionella” skolmatematiska arbetets handlingsmönster däremot förväntas innebära att deltagarna utvecklar matematiskt kunnande genom att minnas matematiska fakta och procedurer och i syfte att klara av individuellt arbete med uppgifter, oftast lärobokens uppgifter.

3.1.3 Upplevd skolmatematisk praktik

Den *upplevda skolmatematiska praktiken* fångar in fenomen av kognitiv och känslomässig natur som en person upplever eller förväntar sig i relation till sitt *deltagande* i skolmatematiskt arbete och som med tiden bildar betydelsebärande mönster ur personens synvinkel³. Genom att utgå ifrån *lärande-som-deltagande* kan fokus sättas på för personer betydelsefulla erfarenheter och sociala relationer, såväl konfliktfyllda och harmoniska som tävlingsinriktade och samarbetande. Deltagande är en social och, i sista hand, en betydelseskapande process som alltid pågår, ”even when our engagement with the world does not clearly involve interactions with others” och inom ramen för allt från rutinmässiga aktiviteter till aktiviteter som vi bryr oss om och som utmanar oss (Wenger, 1998, s. 51–57). Med dessa begrepp beaktar studien att *det beskrivna skolmatematiska arbetet och det upplevda skolmatematiska arbetet är reflexivt relaterade* och att en persons yttranden till exempel om vad som händer eller förväntas hända i ett matematikklassrum i grunden är av en sociokulturell natur.

I studien fokuserar jag främst elevers upplevda skolmatematiska praktik. Ur ett deltagandeperspektiv beaktas projektelevernas *upplevda möjligheter till matematiskt engagemang* inom ramen för de handlingsmönster som över tid uppfattas som konstituerande för skolmatematisk praktik.

³ I artikel [c] använder jag uttrycket ”elevers matematiska verksamhet” för att beskriva den upplevda skolmatematiska praktiken

3.1.4 Matematisk gemenskap

Begreppet *matematisk gemenskap* är baserat på Wengers (1998) beskrivning av praxis som en process där vi upplever världen och vårt engagemang i världen som betydelsefullt. Enligt Wenger produceras praxis ständigt av medlemmar i praxisgemenskaper (communities of practice) i betydelskapande processer som pågår i alla slags sammanhang, då vi tänker, iakttar, talar, agerar, löser problem, dagdrömmer och så vidare. I den här studien avses med betydelseunderhandling (eller förhandling) (eng. negotiation of meaning) de betydelskapande processer som pågår i en matematisk gemenskap. Begreppet (*skol*)*matematisk gemenskap* beaktar att de erfarenheter och förväntningar som enskilda personer utvecklar i relation till skolmatematisk praktik inte går att frikoppla från de gemenskaper som bildas genom betydelskapande processer. Dessa processer pågår när personen deltar i skolmatematiskt arbete såväl i klassrumssammanhang som i informella sammanhang, såsom i hemmiljö.

Deltagande kan innebära medverkan i den matematiska gemenskapens betydelseunderhandlingar såväl som att ingå i gemenskapen och ta del som en perifer medlem. Till exempel, en matematisk gemenskap där personer medverkar genom att undersöka, diskutera och utmana varandras matematiska kunskaper ger upphov till andra erfarenheter och förväntningar än då personer tar del i marginalen till denna gemenskap eller då personer står helt utanför genom att medverka i andra slags gemenskaper (jfr [c], [d]). Erfarenheterna approprieras (jfr Rogoff, 2003) och blir *förtingligade* "forms of memory" (Wenger, s. 88) och därmed möjliga att minnas, glömmas eller återskapas inom ramen för betydelseunderhandlingar i matematiska gemenskaper inom eller utom matematikklassrummets ram.

Ur den enskilda personens perspektiv så är hen verksam i den verklighet som hen föreställer sig i relation till sina erfarenheter. Mot den bakgrunden tolkas det som händer inom eller utom matematikklassrummets ram även i relation till de gemenskaper där socialt accepterat (legitimt) matematiskt kunnande förhandlas fram (eller inte). Det betyder att den tillhörighet som en person uttrycker, till exempel genom att förhålla sig positivt till att elever antar den 'lyssnande publikens' roll i matematikklassrummet (jfr Bodin & Capponi, 1996, s. 577) även kan innebära att personen anknyter till matematiska gemenskaper med begränsade möjligheter till medverkan i produktionen av legitimt kunnande för dess medlemmar.

3.2 Wengers tillhörighetsteori

Deltagande är en komplex, personlig och social process som engagerar hela människan med kropp, sinne och känslor och kombinerar göra, tala, tänka, känna och *höra till* (Wenger, 1998, s. 56–57). I sin tillhörighetsteori urskiljer Wenger tre överlappande komponenter eller *modes of belonging* (MoB), engagemang, föreställning⁴ och inordning, som tillsammans bildar ett ramverk för förståelse av hur gemenskaper konstitueras (se Figur 1) (Wenger, 1998, s. 173–174, kursiv i original):

engagement – active involvement in mutual processes of negotiation of meaning

imagination – creating images of the world and seeing connections through time and space by extrapolating from our own experience

alignment – coordinating our energy and activities in order to fit within broader structures and contribute to broader enterprises.

Engagemang innebär betydelseskapande som alltid pågår oberoende av om aktiviteterna vi tar del i är intressanta och utmanande för oss eller om engagemanget är snävt och innebär att vi följer en rutin. Över tid kommer engagemanget därför att bidra till makt över hur gemenskaper bildas och därmed till upplevelsen av kompetens i relation till dessa gemenskaper (a.a. s. 174–175).

Föreställning går utöver ömsesidigt engagemang och knyter an våra tidigare och nuvarande upplevelser till det vi tänker oss i framtiden; föreställningsprocessen lokaliserar oss som tillhörande (eller inte) i en gemenskap eftersom "it plays with participation and non-participation, inside and outside, the actual and the possible, the doable and the unreachable, the meaningful and the meaningless" (a.a. s. 178). Wenger (1998, s. 181–182) belyser begreppet genom två stenhuggares berättelser. Båda tar del i och är lika engagerade i samma aktivitet, att hugga sten, men deras deltagande och därmed deras upplevelser, är olika. Den ene stenhuggaren berättar hur han medverkar till ett katedralbygge. Den andre berättar hur han formar stenar perfekt. I den stund som personen huggar en sten, eller eleven löser ett matematikproblem i ett klassrum, är det inte aktiviteten i sig utan engagemanget i aktiviteten i relation till ett större sammanhang, till en gemenskap, som spelar roll. På grundval av de (matematiska) gemenskaper där personen (eleven) tar del (eller inte) drar hen slutsatser beträffande sina och andras tidigare, aktuella och framtida (matematikrelaterade) möjligheter. Men det behöver ändå inte betyda

⁴ I den danska översättningen av "imagination" används begreppet "fantasi" (Wenger, 2004, s. 203). Jag anser att "föreställning" bättre fångar in vad Wenger vill relatera till ur den deltagande personens synvinkel.

att någon som föreställer sig till exempel vad en framgångsrik problemlösare gör för att vara framgångsrik övertar de handlingsmönster som upplevs karaktärisera framgång.

Inordning är i likhet med föreställning ett sätt att höra till som går utöver ömsesidigt engagemang. Det är en bred, koordinerande verksamhet där vi gör det som förväntas av oss och kan uppleva att vi medverkar i och bidrar till något större genom att arbeta ännu hårdare på att uppfylla denna förväntan. Till exempel, om matematikläraren uttrycker en förväntan om aktivt och ansvarstagande deltagande kan elevens strävan efter förståelse vara ett uttryck för hans anpassning till och lojalitet med idén om ansvarstagande för det egna matematiska tänkandet som en övergripande idé för skolmatematiskt arbete. Inordning kan "amplify our power and our sense of the possible" (Wenger, 1998, s. 180) och således innebära att eleven upplever framgångsrikt skolmatematiskt arbete som möjligt. Men inordning kan också, "be blind and disempowering" (a.a., s. 180–181). I ett matematikklassrum kan inordning till exempel innebära att framgångsrika elever obetingat följer regler och modeller. Därmed riskerar de inskränka sitt skolmatematiska arbete genom att anpassa sig till regelföljande aktiviteter för att nå korrekta svar framom att nå förståelse (jfr Solomon, 2007). 'Inordning' lyfter fram hur lärare och elever knyter an till och anpassar sig till handlingsmönster. Därmed bidrar inordning till att vidmakthålla de handlingsmönster som upprätthåller skolmatematiskt arbete oberoende av vad handlingsmönstren än innebär ur deltagarens synvinkel.



Figur 1. Modes of belonging (MoB), bearbetad från Wenger (1998, s. 174).

Ett sätt att höra till kan inverka på ett annat (a.a., s. 180–183). I föreliggande studie hänvisade projektlärarna exempelvis till föreställningar (om framtida skolval) för att rättfärdiga inordning (i respektive skolval) genom att påstå att det finns gemenskaper för elever som har (eller inte har) kvalifikationer och ett personligt intresse för att studera matematik på en teoretiskt mer avancerad nivå (jfr Reformskolan, 1994).

Ritualer, såsom handuppräkning eller andra gester i klassrummet, är en form av engagemang som kan stödja såväl föreställning som inordning genom att eleven upplever att andra gör eller har gjort samma som hen själv och att eleven kanaliseras mot det brukliga och vanliga inom en gemenskap (Wenger, 1998, s. 183; se s. 23 i [c])

Sammantaget öppnar Wengers MoB-teori upp för förståelse av elevers olikartade upplevelser av skolmatematisk praktik. Då elever tar del i det skolmatematiska arbetets återkommande aktiviteter behöver de inte delta med innebörden att de delar aktiviteternas betydelse. Det här innebär att elevers upplevda skolmatematiska praktik varierar och att elever lär sig olika saker om vad skolmatematiskt arbete är och om sig själva då de utifrån sett ägnar sig åt likartat handlande (Säljö, 2005, s. 69).

3.3 Identitetsarbete

Genom deltagande utvecklar personer över tid en relativt stabil känsla av vem de är i relation till skolmatematiskt arbete, en *matematisk identitet* (Wood, 2013). Begreppet identitet framstår på olika sätt i forskning (George, 2009; Grotenboer, Smith & Lowrie, 2006). I vissa studier definieras identitet som identifiering av sig själv eller bli identifierad av andra som en viss slags person i en viss kontext, såsom en vuxen, en identisk tvilling, en sjundeklassare, en matematiskt smart, framgångsrik eller begåvad person; en som är nöjd med det skolmatematiska arbetets aktiviteter osv. (jfr Gee, 2000; Sfard & Prusak, 2005). I vissa studier betraktas identitet som ett sociokulturellt fenomen och som en ständigt pågående identifieringsprocess konstituerad i/genom personers upplevelser inom kulturer och handlingsmönster inom och utom skolan (jfr Cobb, Gresalfi & Hodge, 2009; Hodgen & Marks, 2009; Langer-Osuna, 2011). Identifieringsprocessen kan vara både positiv och negativ ur den deltagandes synvinkel och framkalla såväl upplevelser av medverkan som dess motsats (Wenger, 1998, s. 191 ff). Vi kan till exempel vara stolta över matematisk framgång eller vara stolta över att inte vara en plugghäst. Vi kan skämmas för att vi inte förstår matematiken eller vi kan lyfta fram att matematik inte behövs i våra liv. Vi föreställer oss inte nödvändigtvis som "smarta" fast vi engagerar oss i krävande aktiviteter såsom matematisk problemlösning. Men genom inordning, till exempel genom att vara koncentrerad på

problemet, kan deltagande i en gemenskap av "smarta" personer leda till att "smarthet" blir en del i vår identitet. Vårt identitetsarbete står i relation till den ständigt pågående betydelseskapande processen inom de gemenskaper vi engagerar eller inte engagerar oss i.

Wenger (1998) beskriver hur deltagande/icke-deltagande konstituerar en persons identitet:

[V]i vet vem vi *är* genom det kända och genom det vi kan underhandla och använda och vi vet vem vi *inte* är genom det okända, genom det besvärliga och genom det som ligger utanför vår horisont /.../ icke-deltagande är i lika hög grad en källa till identitet som deltagande. (Wenger, 1998, s. 191, kursiv i original, min översättning)

Och, enligt Wenger (a.a.), kan forskarens fokus därför flyttas från att se lärande enbart som en kunskapsutvecklingsprocess, med prestationer som mål, till att se lärande som en identitetsupplevelse och en tillblivelseprocess:

Eftersom lärande förändrar vem vi är och vad vi kan göra så är det en identitetsupplevelse. Lärande är inte bara ackumulering av färdigheter och information, utan en tillblivelseprocess – för att bli en viss person eller omvänt för att undgå att bli en viss person. (Wenger, 1998, s. 215, min översättning)

Klassrummens handlingmönster har stor betydelse för vilka slags matematiska identiteter elever utvecklar över tid. Fallstudier av klassrumsinteraktionen har visat att både elevens identifiering av sig själv och lärarens kunskapsmässiga identifiering av eleven som framgångsrik (eller inte) inom en viss matematisk klassrumsgemenskap på ett avgörande sätt bidrar till de matematiska identiteter eleverna utvecklar över tid (Bishop, 2012; Black, 2004; Langer-Osuna, 2011; Yamakawa, Forman & Ansell, 2005). Black (2004) märkte till exempel att vissa elever deltog i produktiv interaktion med läraren oftare än andra och att sådana ojämlika kommunikationsmönster kunde bidra till att elever utvecklar olika typer av matematiska identiteter i samma klassrum.

Mot den här bakgrunden kan en persons upplevda skolmatematiska praktik över tid ses som identitetsarbete, *identity-in-the-making* (George, 2009; se även Solomon, 2007, 2009); att vara – inte vara och att bli – inte bli en person med en viss matematisk identitet i relation till alla de formella och informella sammanhang där personen tagit del i skolmatematiskt arbete.

3.4 Sedvänjor

Klassrummets skolmatematiska arbete är förankrat i seder och bruk beträffande matematiklärande (jfr Andrews, 2011, Hiebert, 2013; McCloskey, 2014; Stigler & Hiebert, 1999; se även Rogoff, 2003; Hemmi & Ryve, 2015). Trots en viss variation ser klassrummens skolmatematiska arbete ut att följa *kulturella manuskript* som deltagarna lärt sig genom att observera och ta del och utan att nödvändigtvis vara medvetna om det (Stigler & Hiebert, 1999). Handlingsmönstren uppstår därför inte som någon snabb process, utan de växer fram under en lång tid och på sätt som gör att de passar in i kulturella antaganden och förväntningar. Detta skapar en implicit kärna av kulturell enighet kring matematikämnet, undervisning och lärande som medför en viss stabilitet över tid och som gör att det skolmatematiska arbetets handlingsmönster sällan ifrågasätts av lärare och elever eftersom "[they] have the same scripts in their heads" (a.a., s. 86–87). Lärare och elever utvecklar ömsesidiga förväntningar på vad som konstituerar legitimt matematiskt kunnande och hur matematiskt kunnande utvecklas i klassrummet.

Den kulturella förankringen gör handlingsmönster i stort sett osynliga för lärare och elever och för andra viktiga deltagare, såsom föräldrar och läroboksförfattare, i och med att personerna samtidigt är handlingsmönstrens upprätthållare (Bauersfeld, 1980; Gregg, 1995; Stigler & Hiebert, 1999). Nya lärare och elever kommer snabbt underfund med vad det är som räknas till legitimt handlande i klassrummet och skolmiljön (jfr Wenger, 1998, s. 156). Elever lär sig vilken slags kunskap som räknas och vilket värde de själva och deras kunskap tillmäts (Reay & Wiliam, 1999).

Två vanliga handlingsmönster för skolmatematiskt arbete är att eleverna i ett matematikklassrum sitter vända mot läraren och mot tavlan och att det är lärarens och lärobokens roll att huvudsakligen avgöra och styra lektionsinnehållet och kunskapsinnehållet i elevernas arbete. Läraren förklarar matematiken för eleverna som tysta lyssnar då läraren pratar, de antecknar, svarar på lärarens frågor och ber om ordet genom att sträcka upp handen (jfr Andrews, 2011; Gregg, 1995; Hiebert, 2013; Sahlström, 2002). Inom sådana handlingsmönster kan elever bilda sig föreställningen om att det inte är lika effektivt att utveckla matematiskt kunnande genom att prata, argumentera eller bli engagerad i grupparbete (jfr Wood, 1998). Lyssnande blir ett slags icke-deltagande som ur elevens synvinkel kan innebära såväl ett meningsfullt engagemang som utanförskap (jfr [d]; Wenger, 1998).

3.4.1 Didaktiskt kontrakt och uppgiftsdiskurs

Teorin om *didaktiskt kontrakt* från den franska matematikdidaktiska forskningstraditionen (Brousseau, 1984) beskriver hur de didaktiska situationer jag här kallar det skolmatematiska arbetets

handlingsmönster med en utomstående ögon kan te sig som om lärare och elever är lojala mot och följer "regler" i ett spel där elevens medverkan möjliggörs endast genom att bryta mot regler i spelet (Brousseau & Otte, 1991, s. 18–22; se även Brousseau, 1997, s. 31–27). Då lärare vill göra förändringar, till exempel introducera nya bedömningsformer, så uppstår samtidigt ett behov att förändra spelreglerna i klassrummet i linje med nya förväntade sätt att agera inom det skolmatematiska arbetet (Clarke & Stephens, 1996, s. 5).

Om spelreglerna till exempel betyder att läraren förväntas demonstrera problemens lösningsprocedurer, som eleverna sedan ska öva, så riskerar eleverna berövas möjligheter att utveckla sitt matematiska kunnande genom att själva ta ansvar för problemet och dess möjliga lösningsprocedurer. Med Mellin-Olsens (1990, 1991, 2009) tolkning är det först då eleven tagit kunskapen ombord och går *oväntade* vägar med den som kunskapen blivit elevens egendom. Ett brott mot det didaktiska kontraktet medför i så fall att eleven tar kontroll över sin kunskapsveckling och inte längre är beroende av läraren.

Lärobokens och dess övningsuppgifters kraftigt kulturellt rotade roll i skolmatematiskt arbete (jfr Johansson, 2006; Lepik, Grevholm & Viholainen, 2015; Røj-Lindberg, 1999) har medverkat till handlingsmönster beskrivna som skolmatematikens *uppgiftsdiskurs* (Mellin-Olsen, 1990, 1991, 2009). Elevers informella utbyte av förklaringar och uppgiftslösningar, *hur man räknar*, är ett typiskt uttryck för handlingsmönster inom uppgiftsdiskursens didaktiska kontrakt. Andra uttryck är att elever förväntar sig snabbt arbete med uppgifter, tävlan och rangordning elever emellan, individuellt arbete och snabbt erkännande om att svaret är korrekt från lärobokens facit eller från läraren. Läraren förväntas gå runt i klassen och godkänna elevernas arbete med uppgifterna. Orienteringen mot rätta svar inom uppgiftsdiskursens didaktiska kontrakt innebär frustration inför en öppenhet som skulle möjliggöra att elever går *oväntade* vägar med sin kunskap. Eleverna är ovana vid samtal och problematisering i matematikämnet och känner sig osäkra inför frågor av typen Vad händer om?, Varför? och Hur kommer det sig att?.

Uppgiftsdiskursens handlingsmönster är typiska uttryck för *uppgiftsparadigmet* (Skovsmose, 2003). Inom uppgiftsparadigmet "former sig matematiktimen ofta således: Laerern indleder med at gennemgå nyt stof, derefter gennemgås udvalgte opgaver, hvorefter eleverne regner opgaver, enten individuelt eller i grupper" (a.a., s. 148). En vanlig, men inte nödvändig, premis inom uppgiftsparadigmet är att det finns endast ett korrekt svar till de uppgifter som förelagts eleverna. Det korrekta svaret är bekant för läraren och/eller finns i lärobokens facit (vanligen utan beaktande av eventuella ekvivalenta former). Inom uppgiftsparadigmet upplevs lärarens och lärobokens

modeller och uppgifter som en kunskapsauktoritet som vanligen inte ifrågasätts (Boaler & Greeno, 2000, s. 181). Kunskapsauktoriteten syns till exempel i att textens och uppgifternas ordning samtidigt upplevs uttrycka att elevers matematiska kunnande utvecklas bäst sekventiellt i små, väldefinierade, steg med hjälp av handlingsmönstret 'lärarens förklaring -> modellexempel -> individuell övning'.

Uppiftsparadigmet och uppgiftsdiskursen ställs av Skovsmose (2003) i kontrast till *undersökningslandskapets* handlingsmönster där elevernas förundran och varför-frågor driver det skolmatematiska arbetet och utvecklingen av det matematiska kunnandet vidare. Inom undersökningslandskapet erbjuds således eleverna en annan slags kunskapsauktoritet än inom uppgiftsdiskursen. Som följd får 'att vara framgångrik' en annan innebörd än inom uppgiftsparadigmet. Elever som är inordnade i uppgiftsdiskursens didaktiska kontrakt kan dock reagera avvisande då de ställs inför undersökningslandskap inom det skolmatematiska arbetet (Wedege, 2008).

Lärobokens starka förankring inom skolmatematiskt arbete i Finland har visats i ett flertal studier (se till exempel Lepik, Grevholm & Viholainen, 2015; Niemi, 2004; Røj-Lindberg 1999; Törnroos, 2005). Törnroos (2005) uppger att 99 % av Finlands sjundeklassare år 1999 tog del i skolmatematiskt arbete som följde en lärobok. Studien visade att läroboken användes i stort sett varje matematiklektion. En enkät till finlandssvenska högstadielärare samma år visade liknande resultat (Røj-Lindberg, 1999, s. 42). Även komparativa studier pekar i samma riktning (Lepik, Grevholm & Viholainen, 2015; Savola, 2010). Genom att jämföra finländska (finskspråkiga), estländska och norska matematiklärares i årskurs 7 till 9 egna rapporter kunde Lepik, Grevholm och Viholainen (2015) visa att skolmatematiskt arbete i Finland fortfarande våren 2012 föreföll vara starkt styrt av läroboken. I regel valde lärarna elevernas övningsuppgifter ur läroboken. Likartade insikter kommer från analyser av matematiklektioner i VIDEOMAT-projektets finlandssvenska klassrum i årskurs 7 (Kilhamn & Røj-Lindberg, 2013; Lillqvist, 2016).

Läroboksrelaterade handlingsmönster överlappar de frågerelaterade handlingsmönstren i klassrummet. Studier av skolmatematiskt arbete i en engelsk skolkontext gav Goodchild (2001) anledning att hävda "evidence that the students view the text as the sources of questions, it is where their 'work' originates" (Goodchild, 2001, s. 175). I föreliggande studie var projektlärares explicita syfte att påverka de frågerelaterade handlingsmönstren i klassrummet, bland annat skulle elever förklara matematiken som behövs i en uppgiftslösning med hjälp av den specifika frågan "Hur tänkte du?" (se kontextbeskrivningen ovan, jfr även Hagman, 1994, s. 7). Frågerelaterade handlingsmönster förväntades rikta elevens uppmärksamhet mot både det egna matematiska tänkandet och elevens ansvar för det egna lärandet.

3.4.2 Klassrummets frågepraktik och kommunikationsmönster

Med *klassrummets frågepraktik* avses här sådana handlingsmönster som uppfattas vara konstituerande, eller potentiellt konstituerande, för frågande inom skolmatematiskt arbete. Frågepraktik är alltså ett vidare begrepp än *frågeteknik* (jfr Ellis, 1993). I fokus för frågeteknik är till exempel hur frågor formuleras, väntetid efter ställd fråga och frågors typ, t.ex. att frågor kan vara reproducerande, konvergenta, divergenta och bedömande (a.a.).

Hur frågepraktiken upplevs av elever och lärare är nära anknutet till frågandets syfte. Mason (2000, s. 106–107) särskiljer tre syften för frågor i matematikklassrummet: (1) att *bedöma elevers kunskande* med frågor vars svar läraren eller läroboken redan känner till; (2) att elever och lärare ställer *genuina frågor till varandra* och i relation till problem och uppgifter som inte har redan kända svar. Det tredje syftet, (3) att *fokusera elevernas uppmärksamhet*, är anknutet till vad elevers och lärares uppmärksamhet förväntas vara fokuserad på och till de *kommunikationsmönster* som därmed uppstår. Enligt Mason (2000) och andra (jfr Boylan, 2004; Ellis, 1993; Wood, 1998) erbjuder frågor som växer fram inom ramen för att matematiska idéer bearbetas i relation till för eleverna meningsfulla problem mer produktiva möjligheter. Orsaken är att eleverna samtidigt medverkar till att utveckla och bearbeta det matematiska kunskapsinnehållet.

Utgående från en karaktärisering av klassrummets kommunikationsmönster som antingen enstämiga eller flerstämiga beskriver Wood (1998) en dikotomi av kommunikationsmönster: ett *kanaliserande kommunikationsmönster* (Wood, 1998, s. 170–172; se även Bauersfeld, 1980) respektive ett *fokuserande kommunikationsmönster* (Wood, 1998, s. 172–175). Wood (a.a.) anknyter båda dessa mönster till "reform-oriented mathematics instruction" och ställer dem i kontrast till kommunikationsmönstret *initiering-respons-evaluering* (hädanefter IRE) (Mehan, 1979). Inom IRE-mönstret bemöts elevsvar med lärarens bedömning av svaret som korrekt eller inte, ofta via nya frågor eller omformuleringar och upprepningar av elevens svar (jfr Tainio & Laine, 2015). Om elever ställer motfrågor inom IRE-mönstret avslöjas att eleverna ännu inte lyckats utveckla det säkra matematiska kunskande som förväntas av dem. Det fokuserande kommunikationsmönstret skiljer sig från det kanaliserande kommunikationsmönstret på en väsentlig punkt: inom en fokuserande kommunikation riktas såväl lärarens som elevernas uppmärksamhet samtidigt mot väsentligheter i de matematiska idéer kommunikationen berör och i elevernas matematiska resonemang (Wood, 1998). Inom en kanaliserande kommunikation, däremot, leds eleverna i riktning mot de matematiska idéer (sätt att resonera, svar, regler, lösningsmetoder etc.) som *läraren* har i åtanke. Läraren ger kanske eleven vissa ledtrådar eller formulerar om sin fråga tills elevens svar är tillfredsställande för läraren. Ifall

läraren ställer upprepade frågor ser elever ofta kommunikationen som ett led i lärarens bedömning och som en indikation på att deras första svar har brister i relation till det som läraren önskar (Mercer, 1995).

Det kanaliserande kommunikationsmönstret kan stödja och uppmuntra elevers matematiska resonemang. Detta gäller speciellt då läraren tydligt uttrycker en förväntan om att elever ska kunna argumentera för sina resonemang (Dance, 1997) och att elevers bidrag *inte* behöver återspegla det svar eller den metod som läraren känner till. Men om mönstret konstituerar det kulturella manuskriptet kan effekten även bli den motsatta (Mason, 2000) och riskera innefatta en implicit motsägelse (Mellin-Olsen, 1991). En sådan motsägelse uppstår då eleven betraktar sitt tankeansvar som viktigt, men uppfattar att tänkandet inte får bli fritt och gå utanför lärarens förutbestämda svar på frågan. I värsta fall innebär kanaliseringen att lärarens kognitiva engagemang är högt medan eleven koncentrerar sig på att komma underfund med svaret läraren vill höra i stället för självständigt matematiskt tänkande (jfr [c]). Kanaliseringsmönstrets negativa inverkan på elevens deltagande riskerar ytterligare förstärkas ifall eleven samtidigt nås av budskapet att bristfälliga svar eller misstag egentligen saknar legitimitet inom skolmatematiskt arbete (Tainio & Laine, 2015). En negativ inverkan kan även uppstå mot bakgrund av reflexiviteten i elevers tankeengagemang och lärarens förväntningar. Brousseau (1984) använder begreppet *Jourdain-effekten* för att beskriva den negativa effekt på elevens deltagande som uppstår då läraren för att komma vidare i sin undervisning accepterar även triviala elevsvar som matematisk kunskap.

In order to avoid the debate about a particular knowledge with the pupil and eventually the confession of a defeat, [the teacher] acts as if he recognized evidence of scientific knowledge in the pupil's behavior or answer, despite the fact that these responses were actually motivated by very trivial or even banal causes or meanings (Brousseau, 1984, s. 115).

Mot den här bakgrunden kan förändringar i klassrummets kommunikationsmönster och frågepraktik betraktas som en väsentlig plattform för förändringar i det skolmatematiska arbetet. Klassrummets kommunikationsmönster och frågepraktik *kan* erbjuda elever möjlighet att uttrycka tentativa, men rimliga, matematiska argument och att utsätta dessa argument för kollaborativ, men kritisk, granskning baserad på ömsesidig respekt för varandras kunnande och bidrag. Detta är aspekter av matematikklassrummet som studier av klassrumskultur och matematiska diskussioner i klassrummet hävdar som väsentliga i en matematiskt utmanande deltagandemiljö (jfr Dance, 1997; Lampert; 1990).

3.5 Skolmatematiskt arbete ur elevers synvinkel – tidigare forskning

I detta kapitel har jag hittills behandlat centrala begrepp, teorier och tidigare forskning som ansluter sig till skolmatematisk praktik och personers upplevda skolmatematiska praktik på ett generellt plan. I och med att studiens huvudfokus ligger på *elevers* erfarenheter av att ta del i skolmatematiskt arbete över tid så avslutar jag med en kort redogörelse över forskning som ansluter sig till detta. Jag behandlar endast summariskt några studier av ett synkront slag baserad på enkäter till elever eller på intervjuer med elever vid en enda tidpunkt (jfr Boaler & Greeno, 2000; Ewing, 2004; Kislenko, 2011; Lewis, 2016; Nardi & Steward, 2003; Reay & Wiliam, 1997; Sullivan, Tobias & McDonough, 2006 m.fl.). Sådana studier ger intressanta inblickar i omständigheter som konstituerar elevers positiva och negativa erfarenheter av att ta del i skolmatematiskt arbete. Men de har inte elevers upplevda skolmatematiska praktik *över tid* som sitt primära fokus.

Elever ogillar då matematiken presenteras som en mängd regler att memorera. Elever arbetar hellre med matematiskt rika, lekfulla, aktiviteter (Lewis, 2016) och uppskattar lärarens hjälp med att förstå och få uppleva framgång i det skolmatematiska arbetet (Kislenko, 2011). Elever kan uppleva rädsla för att svara fel offentligt. Kunskap om klassrumskulturen behövs för att förstå varför eftersom rädslan riskerar begränsa dessa elevers engagemang (Nardi & Steward, 2003). Sullivan, Tobias och McDonough (2006) hävdar på basis av intervjuer med 50 trettonåringar från fyra australienska skolor att klassrumskulturen mer än något annat förklarar varför prestationsmässigt framgångsrika elever inte upplever långsiktigt engagemang i sitt matematiklärande.

/.../ classroom culture may be a more important determinant of participation than the curriculum, methods of teaching, modes of assessment, teacher experience, level of resources, or anything else. (Sullivan, Tobias & McDonough, 2006, s. 97)

Rosalyn Dance (1997) hade märkt att eleverna från ett visst amerikanskt matematikklassrum på gymnasienivå var anmärkningsvärt intresserade av att fortsätta studera matematik. I syfte att förstå vilka aspekter av klassrumskulturen som gjorde den framgångsrik ur elevernas perspektiv tog hon som etnograf del i klassens arbete under ett helt år och pratade med både elever och lärare. Hon noterade att eleverna i stort sett alltid arbetade tillsammans, att de uppskattade detta och att det fanns en stark gemenskapskänsla bland eleverna. De utmanade varandras matematiska tänkande på ett lekfullt sätt samtidigt som det fanns en öppenhet och respektfullhet i deras sätt att bemöta varandra som gjorde att enskilda elever upplevde ansvar för kvaliteten på sina matematiska bidrag. En liknande slutsats om aspekter som upplevs

positivt ur elevers synvinkel dras av Goos och hennes kolleger (1999), som under två år granskade interaktionen i gymnasieklassrum där alla deltagare, lärare och elever, betraktade varandra som lika viktiga bidragsgivare i det matematiska samtalet. Även Waege (2007) och andra (Angier & Povey, 1999; Boylan, Lawton & Povey, 2001) har visat hur samarbete elever emellan och friheten att dela idéer med andra i klassrummet kan få en positiv inverkan på elevers motivation att lära sig och på deras upplevelse av matematiskt kunnande. Klassrumsmiljöns stora betydelse för deltagarnas erfarenheter noterades även av Kaasila (2000) och Pietilä (2002). Kaasilas fallstudie av 60 finska klasslärarstuderandes berättelser om sina skoltida upplevelser visade att minnen från matematikklassrummet var centrala i de studerandes beskrivningar av matematikens natur och av sig själva som matematikkunniga eller inte. Medan vissa studerande beskrev hur skolmatematiskt arbete varit tråkigt eller krävt memorering, lyfte andra fram hur skolmatematiken gett dem möjlighet till aha-upplevelser och att vara snabba räknare. I Pietiläs studie beskrev närmare en tredjedel av 80 finska klasslärarstuderande matematiken som svår och otrevlig medan ungefär lika många ansåg att matematiken var ett viktigt och oftast angenämt skolämne (Pietilä, 2002).

Genom en tre år lång etnografisk fallstudie av två skolor med helt olika handlingsmönster kunde Boaler (1997) visa att öppenhet i kommunikationen och öppna, projektbaserade, diskussionsorienterade och tankeuppmuntrande aktiviteter ledde till bättre prestationer, större förståelse och en större uppskattning av matematiken än en sluten, läroboks- och uppgiftsstyrd typ av matematikundervisning där fokus låg på överföring av formaliserad lärobokskunskap till eleverna. I den ena skolan följdes ett slutet handlingsmönster. Detta betydde att eleverna individuellt "rehearsed content through short questions, practiced methods they had been shown by their teacher, and used cues from questions to know which method to use" (Boaler & Selling, 2017, s. 82). I den andra skolan förverkligades ett öppet handlingsmönster som betydde att eleverna hade frihet att undersöka matematikinnehållet. Eleverna i den här skolan utvecklade de sätt att arbeta som undersökningarna krävde, såsom att arbeta individuellt eller tillsammans, att ställa frågor, förklara, argumentera, planera och dra matematiskt grundade slutsatser (ibid.).

Nyss nämnda studie (Boaler, 1997) följde inte *enskilda* elever över tid. Studien kunde därför inte förklara varför vissa elever som tog del i det öppna handlingsmönstret föreföll hålla fast vid den snäva föreställningen att de behövde lära sig procedurer och metoder först, medan andra elever blommade ut som matematiker oberoende av handlingsmönster. Men studien pekade på relationen mellan klassrummets handlingsmönster och de matematiska identiteter eleverna utvecklar över tid. Intervjuer med elever från båda skolorna

åtta år efter de slutat skolan bekräftade att elever som ingått i de olika handlingsmönstren hade utvecklat olika slags matematisk expertis (Boaler & Selling, 2017). Studien visade också att de här skillnaderna inte kunde förklaras med elevernas socioekonomiska bakgrund eller karaktärsdrag, utan var ett resultat av att eleverna utvecklat olika matematiska identiteter i de två skolornas matematikklassrum. Elever från skolan med det öppna handlingsmönstret hade fått en bättre start på sina professionella liv på grund av att deras erfarenheter av och förväntningar på skolmatematiskt arbete var av ett mer produktivt slag än elevers från skolan med det slutna handlingsmönstret.

Studierna som har berörts här visar att klassrummets handlingsmönster spelar en uppenbar roll i elevers upplevda skolmatematiska praktik. Studierna visar också på komplexiteten i vad det betyder att ta del i skolmatematiskt arbete ur elevers synvinkel och att komplexiteten inte går att reducera till att ett bestämt handlingsmönster skulle vara självklart bättre eller jämligare än någon annat ur en enskild elevs synvinkel. Skillnaderna hittas, konstaterar Boaler, "*within the methods commonly discussed by researchers*" (Boaler, 2002, s. 240, kursiv i original), dvs. genom att granska *hur* det skolmatematiska arbetet utförs och upplevs oberoende av handlingsmönster. Det är därför synnerligen viktigt att zooma in elevers upplevda skolmatematiska praktik över tid för att förstå vad som konstituerar denna komplexitet.

4 Metodologi

I detta kapitel kastar jag ljus över studiens forskningsansats. Vidare beskriver jag studiens medverkande personer, metoder och empiriska material samt redogör för hanteringen av det empiriska materialet. Kapitlet avslutas med en diskussion angående forskningsetiska överväganden av betydelse för studien samt överväganden i relation till dess vetenskapliga kvalitet.

4.1 Vetenskapspositionering och forskningsdesign

4.1.1 Fallstudie

Med begreppet *fallstudie* avser jag både den slutliga rapporten över det vetenskapliga arbetet, dvs. föreliggande avhandling och det vetenskapliga arbetets art (Basse, 1999; Merriam, 1994; Merriam & Tisdell, 2016; Pring, 2000; Wellington, 2000). Basse (1999) sammanfattar en fallstudies art som "study of singularity conducted *in depth* in natural settings" (s. 47, min kursivering).

I detta arbete är studiens *fall* och dess gränser uppenbara (Merriam & Tisdell, 2016, s. 37; Merriam, 1994, s. 24). Det är bestämda lärarutbildare och lärare som tillsammans med bestämda elever deltar i ett lokalt reformprojekt i bestämda klassrum i en bestämd skola. Studiens fall inkluderar deltagarna i reformprojektet och i matematikundervisningen i de klasser som berördes av reformprojektet. Fallstudien är lämplig för att karaktärisera mitt arbete även eftersom mina och de andra deltagarnas föreställningar är så intimt sammanlänkade med den kontext som lärarnas fortgående arbete för att förändra skolmatematisk praktik utgör. Studiens fall är inte en statisk företeelse utan stadd i förändring (Merriam, 1994)

4.1.2 Forskningsansats med emergent design

Den aktuella forskningsansatsen har en *emergent design*, vilket betyder att oförutsägbara händelser påverkade studiens fokus (Merriam & Tisdell, 2016, s. 18). I arbetet var insamling samt analys och tolkning av fallstudiens *case record* (se Tabell 2, s. 50) en iterativt framväxande process som startade då reformprojektets aktionsforskningsprocess inleddes och som fortsatte i två skeden (jfr Gallos Cronberg & Emanuelsson, 2013, som exempel på en icke-emergent fallstudie). *Det första skedet i fallstudien* innebar produktion och insamling av material i relation till aktionsforskningsprocessen samt ett fokus på deltagande elevers föreställningar om reformprojektets matematikundervisning och specifika metoder. Föreställningarna framkom genom semi-strukturerade intervjusamtal med samma elever vid vissa tidpunkter under flera år. *Det andra skedet i fallstudien* växte fram inifrån, ur de teoretiska insikter jag fick som deltagare i reformprojektet och genom

att problematisera skolmatematisk praktik sedd ur deltagarnas, främst de deltagande elevernas perspektiv, dvs. elevernas upplevda skolmatematiska praktik.

4.1.3 Fallstudiens lokalisering i forskningsparadigm

Med forskningsparadigm (se Lincoln & Guba, 1985, s. 15) avser jag, kort sagt, min teoretiska inriktning, mitt sätt att tänka som forskare om denna studies fall.

Som utgångspunkt för mitt fortsatta resonemang använder jag följande modell för att knyta samman min teoretiska inriktning med studiens forsknings- och kunskapsintressen, se tabell 1. Modellen är en tolkning från dels Ernests (1998) gestaltning av tre pedagogiska forskningsparadigm: naturvetenskapligt, kvalitativt och kritiskt-teoretiskt forskningsparadigm, dels Basseys (1999) anknytning av forskarens tänkande om världen till ett positivistiskt eller tolkande paradigm och hur tänkandet påverkar pedagogiska fallstudier (s. 42–47). Kunskapsintresset avspeglar vilka aspekter av en verklighet forskningen riktar sig mot och i vilket syfte kunskapen ska användas.

Tabell 1: Forskningsparadigm enligt bearbetning från Ernest (1998) och Bassey (1999, s. 42–55).

<i>Teoretisk inriktning</i>	<i>Forskningsintresse</i>	<i>Kunskapsintresse</i>
Naturvetenskapligt ("scientific")/positivistiskt forskningsparadigm; Språket ett "agreed symbolic system" för att beskriva verkligheten som den är; Kvantitativ metodologi	Förstå, förklara och beskriva pedagogiska fenomen för att förutsäga framtida resultat	Objektiv kunskap Generell sanning
Kvalitativt/tolkande forskningsparadigm; Språket ett "more or less agreed symbolic system" för att beskriva betydelser; Kvalitativ metodologi	Beskriva, förstå och tolka pedagogiska fenomen ur individens synvinkel; strävan till delad förståelse ("shared meanings")	Subjektiv betydelse Personlig sanning Belysa det generella genom det unika ("fuzzy generalisation")
Kritiskt-teoretiskt forskningsparadigm	Förstå, bedöma och förändra pedagogiska fenomen och maktrelationer inom dessa	Förbättra en kontext, situation eller institution

Den emergenta designen innebar glidningar mellan faser som i teoretiskt hänseende gör att fallstudien retrospektivt kan anknytas till modellens alla tre forskningsparadigm (jfr Bassey, 1999, s. 47; Merriam & Tisdell, 2016, s. 39, 60).

I *fallstudien som helhet* gick jag likt en detektiv på djupet för att förstå deltagarnas perspektiv på skolmatematisk praktik och, mot bakgrund av reformprojektet, hur deltagarnas perspektiv flätades in i varandra (Merriam & Tisdell, 2016, s. 37; Pring, 2000, s. 41). Jag använde en blandning av metoder för insamling och analys för att göra plausibla tolkningar av till övervägande del kvalitativ information i form av intervjusamtal och insikter från reformprojektet (Merriam, 1994, s. 24; Bassey, 1999, s. 69). Jag utgick ifrån att fallet jag studerar har en unik karaktär på grund av att det växte fram ur deltagarnas erfarenheter, vilkas betydelser trots språkliga likheter i till exempel ett intervjusamtal, kunde skilja sig från deltagare till deltagare (Pring, 2000, s. 42). Jag var själv en deltagare i reformprojektet. Mina observationer och samtal med de deltagande lärarna och eleverna har givetvis påverkat den information som utgör grunden för mina tolkningar. Men min medverkan i aktionsforskningsprocessen har knappast förändrat de skolmatematiska sedvänjor där fallet är lokaliserat och som är grundläggande för deltagarnas erfarenheter och föreställningar (Pring, 2000, s. 110).

Mot ovanstående bakgrund kan jag hävda att mitt tänkande om fallstudien som helhet retrospektivt betraktat faller inom det *kvalitativa/tolkande forskningsparadigmet* (jfr Bassey, 1999, s. 44). Då det första och andra skedet i fallstudien zoomas in för sig blir bilden däremot mer lik ett *pussel* av teoretiska inriktningar.

Vid inledningen till fallstudiens första skede betraktade jag min forskaruppgift ur praktikerns, matematiklärarens, synvinkel och med ett objektivtets- och neutralitetstänkande typiskt för det *naturvetenskapliga/positivistiska forskningsparadigmet*. Relationen mellan skolmatematisk praktik och elevuppfattningar skulle därmed kunna valideras empiriskt och stödja rekommendationer om en effektivare (jfr Grows & Coney, 1988) och på konstruktivistisk teori baserad skolmatematisk praktik för ett aktivare matematiklärande. Inom det positivistiska paradigmet är det oproblematiskt att förstå den sociala världen i termer av generella påståenden och att betrakta forskaren som ett objektivt instrument avskilt från de personer som deltar i forskningen. Det är också typiskt att anta att deltagande personer innehar attribut såsom kunskap, förståelse, färdigheter, förmågor etc. som kan upptäckas och mätas (Morgan, 2000).

Vartefter tiden gick förändrades proportionen mellan observation och deltagande. Ett distanserat förhållningssätt som forskare blev i praktiken omöjligt. Jag blev gradvis allt mer engagerad i

reformprojektets aktionsforskningsprocess och lärde känna forskningsansatsens teoretiska grund som lokaliserad i det *kritiskt-teoretiska forskningsparadigmet*. Genom att analysera texter producerade av projektlärarna och samtala med lärarna vid intervjuer och möten inom aktionsforskningsprocessen, fördjupade jag mitt kunnande om lärarnas reformintentioner. Jag fungerade som mellanhand mellan eleverna och lärarna genom samtalen med respektive grupp (Wenger, 1998, s. 108 f).

I fallstudiens andra skede bildade den konstruktivistiska lärandeparadoxen en språngbräda över till att betrakta skolmatematisk praktik som ett sociokulturellt fenomen samt utvecklingen av matematiskt kunnande som oskiljaktigt från de skolmatematiska gemenskaper där den lärande ingår. Mitt teoretiska tänkande gick i riktning mot att se den sociala världen som en underhandlad värld (Pring, 2000, s. 90 ff.) vilket betydde att jag även omvärderade min syn på lärares och elevers roller i diskussioner och intervjusamtal. Projektlärarna och intervju eleverna var inte att betrakta som mina informanter, vi var alla deltagare med olika roller i sociala praktiker. Det var i reformprojektets diskussioner och i samspelet mellan mig och läraren/eleven som det sagda (eller osagda) och dess omedelbara betydelser producerades. Tolkningsprocessen började med nödvändighet redan vid diskussioner och samtal och fortsatte vid överföringen av tal till text i form av projektanteckningar och transkripter. Ställd inför komplexiteten i elevernas upplevda skolmatematiska praktik utvecklade jag ett alltmer kritiskt förhållningssätt till skolmatematisk praktik och dess sedvänjor. För att kunna hantera denna komplexitet knöt jag an till matematikdidaktisk forskning och teorier enligt vad som framkommer i Kapitel 3 samt i artiklarna [b], [c] och [d]. Jag gjorde detta dels genom att zooma in (Lerman, 1998) skolmatematiskt arbete, dels genom elevernas erfarenheter och förväntningar. Samtidigt betraktade jag skolmatematisk praktik utifrån, men genom elevernas perspektiv. Dels zoomade jag ut för att betrakta varje elevs upplevda skolmatematiska praktik över tid utan att tappa kontakten med den skolmatematiska praktik där eleven tagit del och som hen bidragit till att upprätthålla (jfr Lerman, 1998; Rogoff, 2003; Wenger, 1998).

4.2 Översikt över det empiriska materialet

I Tabell 2 presenterar jag materialet som ingår i fallstudiens *case record*, dvs. allt empiriskt material som ingår i analys- och tolkningsprocessen och som kan citeras i fallstudiens argumentation (Bassey, 1999, s. 69; Wellington, 2000, s. 94–96). Tillsammans med "impression and intuition" (Wellington, 1999, s. 94) bildar detta material samtidigt den analytiska ramen för att välja ut och tolka avhandlingens belägg.

Tabell 2: Översikt över fallstudiens *case record*

	<i>Fallstudiens första skede Reformprojekt med pilotförsök 1992–94 och aktionsforskning 1994–97</i>	<i>Fallstudiens andra skede</i>
<i>Primärt material</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Ljudbandade intervjuer med grupp <i>Elevintervju A</i>, åk 7, åk 8, åk 9 (13–14 elever, 5 intervjuerier), samt transkriberingar, 1994–97 • Ljudbandade intervjuer med kohort <i>Elevintervju B</i>, åk 8, åk 9 (14 elever, 4 intervjuerier), samt transkriberingar, 1994–96 • Ljudbandade lärarintervjuer, 6 projektlärare, samt transkriberingar, 1994 • Anteckningar från 7 klassrumsobservationer, 1994 • Projektanteckningar: publicerat och opublicerat projektmaterial, 1994–1997 	<ul style="list-style-type: none"> • Ljudbandade retrospektiva vuxensamtal med 3 projektelever ur kohort <i>Elevintervju A</i>: Kristina, 2006, Nette, 2008, Joakim, 2009 och transkriberingar • Urval av primärt material från fallstudiens första skede för återanalys
<i>Sekundärt material</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Enkätresultat, samarbetsinläring, åk 8, 1995, (60 elever) • Testresultat, matematikprestation, åk 7 (44 elever), åk 8 (62 elever), 1994 • Enkätresultat, självuppfattning, åk 7 (44 elever), åk 9 (18 elever) • Enkätresultat, 6 projektlärare, 1997 • Anteckningar från samtal i fokusgrupp med 4 projektlärare, 2000 	

Det projektmaterial som utgör den huvudsakliga grunden för avhandlingen är elev- och lärarintervjuer. Övrigt projektmaterial, som använts till exempel i samband med kontextbeskrivningar, bildas huvudsakligen av protokoll, anteckningar och mötesbilagor från såväl formella som informella projektmöten och planeringsdiskussioner; enkät och fokusgruppsamtal med projektlärare; undervisningsmaterial såsom prov, månadsproblem, klassproblem och projekt; projektlärares sammanställningar över elevbedömningar och betygsvitsord; kopior av elevers inlämnade projektarbeten; information till projektlärare, skollledning och föräldrar; elevsynpunkter insamlade av projektlärarna. En lista på publikationer av mig och av projektlärare publicerade under fallstudiens första skede ingår i Bilaga 1. Resultat från enkäten om samarbetsinläring, som gjordes bland projekteleverna i årskurs 8 på våren 1995, behandlas inte i fallstudien men påverkade de frågor jag ställde till eleverna.

4.3 Intervjuer och vuxensamtal med projektelever

I fallstudiens *case record* ingår två typer av ljudbandade intervjusamtal med projektelever: högstadieintervjuer genomförda under reformprojektet och tillbakablickande vuxensamtal med tre fokuselever. I följande avsnitt presenterar jag först de deltagande projekteleverna och redogör sedan för hur intervjusamtalen genomfördes under studiens första och andra skede. Till sist beskriver jag hur intervjusamtalen har hanterats och analyserats.

4.3.1 Deltagande projektelever

Med *deltagande projektelever* avser jag de totalt 27 projektelever i årskurs 7 och årskurs 8 som jag i september 1994 valde ut för att ingå i kohorten *Elevinterview A* (årskurs 7, 13–14 elever) respektive kohorten *Elevinterview B* (årskurs 8, 14 elever). Härnäst ger jag en kort översikt över principerna för *elevurvalet* till respektive grupp.

De deltagande projekteleverna valdes genom korstabulering av självuppfattning (Linnanmäki, 1995) och matematikprestation. Vid tidpunkten för *elevurvalet* eftersträvade jag att säkerställa representativitet i elevers föreställningar och förväntningar på skolmatematiken genom att skapa kohorter (*Elevinterview A*, *Elevinterview B*) av elever med så varierande bakgrund som möjligt, samt så att varje reformklass representerades av åtminstone fyra elever.

Jag kartlade projektelevernas självuppfattning i september 1994 med en bearbetad version av det test som ursprungligen utarbetats av Skaalvik (Linnanmäki, 1995). Självuppfattningstestets 40 påståenden fördelas på 20 påståenden relaterade till upplevd skolmatematisk praktik, 8 skolrelaterade påståenden och 12 påståenden relaterade till elevens självacceptering (se Bilaga 6). Varje projektelev tilldelades på basis av totalpoäng en självuppfattningskategori, Låg, Mellan eller Hög.

I årskurs 7 använde skolans speciallärare den svenska Skolöverstyrelsens diagnostiska uppgifter, det så kallade SÖ-provet, för att vid skolstart identifiera elever med låga matematikprestationer. Jag fick tillgång till resultatet och använde det som grund för urval av elever till *Elevinterview A*. SÖ-provet gav en mycket dålig spridning av eleverna, halva elevgruppen hade över 90 % rätt. Jag kontrollerade därför det korstabulerade *elevurvalet* även mot ett så kallat MAKEKO-prov, MAKEKO 6/7 (Ikäheimo, m.fl, 1988). Resultatet i MAKEKO 6/7 visade en stor resultatspridning på både elevnivå och klassnivå, men det ursprungliga urvalet av intervjeelever behövde inte ändras. På klassnivå varierade andelen rätt räknade uppgifter i MAKEKO 6/7 från 56 % till 85 %. För gruppen *Elevinterview A* valdes 13 elever enligt Tabell 3.

I årskurs 8, för urvalet av de 14 eleverna till kohorten *Elevintervju B*, gick jag tillväga på liknande sätt, men använde enbart provet MAKEKO 7/8. På klassnivå varierande andelen rätt räknade uppgifter i MAKEKO 7/8 från 58 % till 69 %.

Tabell 3. Sammansättning av kohorten *Elevintervju A*.

	<i>Låg matematikprestation</i>	<i>Mellan matematikprestation</i>	<i>Hög Matematikprestation</i>
<i>Låg självuppfattning</i>	Marit (klass 1) Jan (klass 1)	Ulla (klass 2) Axel (klass 3)	
<i>Mellan självuppfattning</i>	Jarl (klass 2)		Martin (klass 1) Maria (klass 2) Kristina (klass 3)
<i>Hög självuppfattning</i>		Alf (klass 1)	Helena (klass 1) Måns (klass 2) Nette (klass 3) Joakim (klass 3)

Tabell 3 visar hur de 13 eleverna i kohorten *Elevintervju A*, 7 flickor och 6 pojkar, fördelade sig enligt reformklass (klass 1, klass 2, klass 3), matematikprestation samt självuppfattning relaterad till upplevd skolmatematisk praktik vid skolstart i årskurs 7.

I tabellen ingår klasskamraterna Joakim, Kristina och Nette som jag senare valde till fokuselever i studiens andra skede och bjöd in till retrospektiva vuxensamtal kring skolmatematisk praktik (se avsnitt 4.3.3, s. 56). De tre fokuselevernans lågstadiebetyg i matematik var utmärkt (Joakim) respektive gott (Kristina, Nette) och deras prestationer i MAKEKO 6/7 var höga med 98 % (Joakim), 77 % (Kristina) respektive 84 % (Nette) korrekta lösningar.

Under studiens andra skede beräknade jag ett "positionsindex" *Själv* för självuppfattning för reformklasser och elever i kohorten *Elevintervju A*. Jag hade i samband med den begynnande analysen av intervjusamtalen noterat en stor variation i elevernas upplevda skolmatematiska praktiker och antog att variationen skulle synas som skillnader i hur eleverna positionerade sig i självuppfattningstestet både på klassnivå och elevnivå i början av årskurs 7. Jag gjorde därför en ny granskning av elevernas svar i självuppfattningstestet. Genom att Likertskalans neutrala alternativ *Ibland rätt/Ibland fel* fick anta värdet 0 så kunde positionsindex anta värden $-1 \leq Själv \leq 1$. Jag bestämde positionsindex för varje påstående och per grupp påståenden (upplevd skolmatematisk praktik, skola, självacceptering). På klassnivå visade positionsindex för upplevd skolmatematisk praktik följande fördelning:

-0,1 (klass 1); 0,0 (klass 2); 0,3 (klass 3), dvs. i början av årskurs 7 uppvisade eleverna i fokuselevernans klassrum sammantaget en positivare relation till skolmatematiskt arbete än i de två andra projektklassrummen.

För kohorten *Elevintervju A* var positionsindex 0,0, dvs. neutralt. Det personliga positionsindexet för upplevd skolmatematisk praktik för fokuseleverna Kristina, Nette och Joakim, som alla tillhörde samma reformklass (klass 3), varierade enligt följande: Kristina -0,3; Nette 0,3 och Joakim 0,8.

Genom projektlärares försorg besvarade 18 projektelever enkäten för självuppfattning igen i maj 1997, nu som niondeklassare. Positionsindex för självuppfattning beräknades på nytt för dessa elever, bland dem fem deltagande projektelever ur kohorten *Elevintervju A*: Maria, Ulla, Jarl, Kristina och Nette. För alla dessa fem elever visar positionsindex för upplevd skolmatematisk praktik en nedgång från skolstart i årskurs 7 till utgången av årskurs 9. Nedgången varierar dock betydligt: Maria från -0,1 till -0,7, Ulla från -0,7 till -0,8, Jarl från 0,0 till -0,3, Kristina från -0,3 till -0,4 och Nette från 0,3 till -0,5.

Den stora skillnaden i nedgång i positionsindex och därmed i relationen till skolmatematiskt arbete, mellan Kristina och Nette kom sedan att få en speciell betydelse för det analytiska arbetet under fallstudiens andra skede.

4.3.2 Genomförande av elevintervjuer under studiens första skede

Det ursprungliga forskningsuppdraget, att beskriva föränderliga elevuppfattningar när lärare på ett medvetet sätt arbetar med sina personliga versioner av beskrivbara undervisningsmetoder, utgör bakomliggande motiv till de inledande elevintervjuerna med båda kohorterna hösten 1994. Vidare hade projektlärarna ett behov av att få återkoppling från eleverna om reformprojektets metoder. Jag genomförde intervjuerna under studiens första skede mot bakgrund av dessa omständigheter.

Jag intervjuade eleverna i kohorterna *Elevintervju A* och *Elevintervju B* individuellt fem respektive fyra gånger under högstadiet vid de tidpunkter som visas i Tabell 4.

Alla utvalda elever ville delta i den första intervjuerien och alla förhöll sig positiva till att ställa upp vid ytterligare intervjuer. Totalt genomförde jag 120 elevintervjuer, av 125 inplanerade, under studiens första skede.

Intervjuerna genomfördes i skolan under lektionstid, i allmänhet under matematiklektioner. Jag gjorde för varje intervjuerie upp ett schema där jag strävade efter att lägga ut intervjuer med elever ur samma reformklass efter varandra. Alla intervjuer ljudbandades. En intervjus omfattning varierade från knappt 15 minuter till närmare 40 minuter

som längst. Särskilt en del av de första intervjuerna med sjundeklassarna blev relativt korta. Senare intervjuer tog i allmänhet längre tid.

Tabell 4. Tidpunkter för elevintervjuer under fallstudiens första skede.

	<i>Interöju- serie 1</i>	<i>Interöju- serie 2</i>	<i>Interöju- serie 3</i>	<i>Interöju- serie 4</i>	<i>Interöju- serie 5</i>
<i>Kohort Elev- intervju A 13–14 elever</i>	Åk 7 sep.-okt. 1994	Åk 7 december 1994	Åk 8 december 1995	Åk 9 december 1996	Åk 9 maj 1997
<i>Kohort Elev- intervju B 14 elever</i>	Åk 8 novemb. 1994	Åk 8 maj 1995	Åk 9 december 1995	Åk 9 maj 1996	

Syftet med den första intervjuerien med kohorten *Elevintervju A* var att få en grundläggande inblick i vad som konstituerar skolmatematiskt arbete ur elevers perspektiv, i elevers upplevelser av detta arbete och i hur elever ser på behovet av förändringar i det skolmatematiska arbetet. Med min egen lärarerfarenhet som grund antecknade jag möjliga intervjufrågor vid de diskussioner som fördes i projektgruppen inför läsårsstarten. Tillsammans med medlemmar ur projektgruppen sammanställde jag sedan en förhållandevis detaljerad intervjuguide med olika typer av frågor för att få tillgång till så rikhaltig information som möjligt om varje elevs perspektiv och upplevelser (Kvale, 1997, s. 121–121; Merriam & Tisdell, 2016, s. 124–125). Temat matematiklektionens handlingsmönster belystes då eleverna berättade om en vanlig matematiklektion, då de uttryckte sig värderande om matematiklektionen och då de gav förslag till förändringar. Intervjuguidens frågor presenteras i sin helhet i Bilaga 2.

Under intervjun anpassade jag frågor och frågeföljd till elevens svar och berättelser och jag tog fasta på sådana aspekter som eleven själv förde in i intervjun (se utdrag ut intervjuer i Bilaga 3 och Bilaga 4). Min omedelbara tolkning av en elevs svar avgjorde om jag försökte hitta nya ingångar till ett frågetema eller lämna temat helt och hållet (Kvale, 1997, s. 124–125). Jag började även tydligt märka att skolmatematiken för vissa elever var förenad med problematiska erfarenheter, vilket ledde till att jag var mer försiktig i mina frågeställningar. I enlighet med min övertygelse om lyhördhet och respektfullt bemötande som intervjuare ville jag inte med mina frågor åstadkomma att eleven skulle börja känna sig ännu mer illa till mods.

I takt med att jag lärde mig något från varje elevintervju under intervjuerien och min egen erfarenhetsbakgrund och grund för tolkning av elevers svar därmed förändrades minskade intervjuguidens strukturerande roll. Intervjuguidens frågor blev mer som ett stöd för minnet allt eftersom min förmåga att "go with the flow of the

interview” ökade (Merriam & Tisdell, 2016, s. 125). Även frågeställningar utanför intervjuguiden aktualiserades, speciellt i intervjuer med mer kommunikativa elever.

Inför de följande intervjuerierna med kohorten *Elevinterview A* avstod jag från intervjuguiden och formulerade endast övergripande temaområden som anknöt till reformprojektet och dess metoder (se Bilaga 2). Den första intervjun vid respektive intervjuerie fungerade även nu som pilotintervju för de övriga intervjuerna. För varje intervjuerie blev intervjuerna alltmer flexibla och samtalslika (Kvale, 1997; Merriam & Tisdell, 2016). Liknande öppningsfrågor ställdes igen till alla elever vid respektive intervjuerie. Vanligen berättade eleverna om vad som hänt inom skolmatematiken sedan vi sågs senast och om en vanlig matematiklektion eller om den senaste matematiklektionen. Temat matematiklektionens handlingsmönster belystes även då eleverna uttryckte sig värderande om matematiklektionen och då de gav förslag till förändringar i matematikundervisningen. Jag gick sedan över till att ställa frågor kring sådant som anknöt till reformprojektet och dess aktuella metoder vid just den tidpunkt då den specifika intervjuerien genomfördes.

Den första intervjuerien med åttondeklassarna i kohorten *Elevinterview B* var inriktad mot elevernas föreställningar om skolmatematiskt arbete inom reformprojektet med dess speciella metoder. Utgående från diskussioner i projektgruppen formulerade jag följande fem temaområden som sedan bildade stomme för intervjuernas innehåll: matematiklektionen, elevernas lärandeansvar, förklaringsuppgifter i prov, projektarbeten och månadsproblem. Jag hade ingen intervjuguide med färdigt formulerade frågor (Merriam & Tisdell, 2016, s. Kvale, 1997, s. 121–125) utan lät den första elevintervjun fungera som en pilotintervju inför de övriga intervjuerna. Mot bakgrund av projektlärares information vid aktionsforskningsmöten och från mina klassrumsobservationer kunde jag även utgå ifrån att åtminstone en del av eleverna vid den första intervjun kände till reformprojektet och att matematikundervisningen på något sätt var påverkad av reformprojektet. Reformprojektets pilotförsök pågick redan då dessa elever inledde högstadiet. Jag lyssnade noga igenom den första elevintervjun med åttondeklassarna och antecknade frågor och kommentarer om intervjuens kvalitet. Anteckningarna fungerade sedan som stöd inför följande intervjuer inom intervjuerien.

Den första intervjuerien med båda elevgrupperna fungerade som bakgrundsmaterial för därpå följande intervjuer och som plattform för en god relation mellan mig och de deltagande projekteleverna. Vid i stort sett varje intervju i en intervjuerie bad jag eleven berätta om eller beskriva en vanlig matematiklektion eller den senaste

matematiklektionen eftersom jag antog att lärarnas förändringsarbete så småningom skulle börja synas i elevernas berättelser om händelserna under en matematiklektion.

4.3.3 Genomförande av vuxensamtal under studiens andra skede

Under fallstudiens andra skede avgränsade jag de deltagande projekteleverna till tre klasskamrater ur klass 3, Joakim, Kristina och Nette av följande orsaker. De hade en lång gemensam skolmatematisk historia som elever i samma skola under årskurs 1–6. Som klasskamrater i årskurs 7–9 hade de samma matematiklärare fram till differentieringen av matematikundervisningen i oktober i årskurs 9. De hade alla tre varit mångordiga deltagare i alla fem intervjusamtalen under högstadiet. Valet styrktes också av att deras matematiklärare var en aktiv medlem i aktionsforskningsprocessen under reformprojektet, till exempel bidrog läraren kontinuerligt med fakta om elevernas prestationer i prov och projektarbeten. Utöver insikterna från självuppfattningstestet och intervjusamtalen i högstadiet hade jag således en bra bild av de tre fokuselevernas matematiska framgångar genom lärarens bedömningar av prov, problemlösningar och projektarbeten och i form av betygsvitsord. I fortsättningen kommer jag att referera till de tillbakablickande intervjuerna som *vuxensamtal* och använda begreppet *fokuselev* då jag refererar till dessa tre elevinformanter.

Jag bjöd via e-post eller telefon in fokuseleverna till vuxensamtalen (jfr Bilaga 9). Alla tre accepterade inbjudan omedelbart. De kom alla ihåg reformprojektets namn och att deras högstadielärare under matematiklektioner ibland hade hänvisat till reformprojektet. Deras spontana svar på frågan om de mindes sin medverkan som intervju elev under högstadiet varierade från uppfattningen att alla elever blivit intervjuade (Kristina) till ingen minnesbild alls (Nette). De verkade alla vara uppriktigt glada över möjligheten att reflektera över sin upplevda skolmatematiska praktik. Vuxensamtalen ägde rum i fakultetens utrymmen. Samtalen ljudbandades och pågick mellan 70 och 90 minuter.

Fokus för vuxensamtalen var skolmatematisk praktik i allmänhet och fokuselevernas högstadierelaterade upplevda skolmatematiska praktik i synnerhet. Samtalens syfte var att förstå hur fokuseleven relaterar till skolmatematik ur ett vuxenperspektiv. Jag förberedde varje samtal genom att fördjupa mig i mångfalden av uppgifter jag hade att tillgå om fokuseleven samt reflektera över mina preliminära analyser och tolkningar av fokuselevens budskap i högstadieintervjuerna. Jag lyssnade med "jämnt svävande uppmärksamhet" (Kvale, 1997, s. 138) till vilka aspekter som föreföll viktiga för fokuseleven och jag var

öppen för nya aspekter som kom fram under samtalets gång. Vuxensamtalen saknade således inte struktur, men präglades ändå av livsvärldsintervjuns öppenhet, lättsamma spontanitet och inbjudan till rika beskrivningar (a.a., s. 119–123). Jag litade på att den övergripande frågeställningen, varför matematikundervisningen är så stabil och variationslös ur elevernas synvinkel, skulle räcka till för att starta samtalet och att de erfarenheter jag delade med fokuseleverna från reformprojektet och högstadieintervjuerna sedan skulle bära samtalet vidare. Jag lyfte fram sådant som hade förbryllat mig vid tolkningen av högstadieintervjuerna och jag var känslig inför budskap som bekräftade eller motsade mina preliminära tolkningar. Jag var även känslig inför tysta budskap, såsom ett förändrat tonläge eller kroppsspråk. Kristina, till exempel, slog med handen i bordet upprepade gånger för att förstärka rigiditeten i det skolmatematiska arbetet. Nu går vi igenom det här (slår) sedan går vi igenom det här (slår) sedan ska dom göra bra i det provet, sedan går vi igenom det här (slår) sedan går vi igenom det här (slår) så ska dom göra bra i det provet. Genom sin kropp förstärkte hon budskapet att skolmatematiken struktureras av inrutade och inrotade tänkesätt och sin upplevelse av skolmatematisk praktik som en sluten praktik. Detta budskap fick sedan under fallstudiens andra skede en stor betydelse för min tolkning av Kristinas upplevda skolmatematiska praktik (jfr [b])

4.3.4 Hantering, analys och tolkning av det empiriska materialet

Av främst tidsmässiga skäl anställdes tre utomstående personer vid olika tidpunkter för att göra transkriberingarna av intervjuerierna 1–5 med *Elevintervju A* samt de flesta intervjuer med *Elevintervju B*. De utomstående personerna instruerades att skriva ut ljudbandningarna ordagrant så att den muntliga diskursens betydelser skulle synas i den skrivna texten, men utan omformuleringar och utan angivelser av röstläge eller emotionella uttryck som skratt och suckar. Långa pauser i intervjusamtalet skulle noteras. Jag skrev själv ut övriga högstadieintervjuer enligt samma riktlinjer. De skrivna texterna inom en enskild intervjuserie varierar mycket i omfattning. Till exempel är utskriften av den första intervjun med Maria i *Elevintervju A* dubbelt så omfattningsrik som utskriften av den första intervjun med Jan i samma grupp, 1115 respektive 2511 ord. De transkriberade intervjuerna från den första intervjuerien omfattar i genomsnitt 1362 ord för pojkarna och 1902 ord för flickorna. Utskrifterna av intervjuerna i den sista och femte intervjuerien var i flera fall dubbelt så omfattningsrika som från den första, i genomsnitt 2629 ord för pojkarna och 3782 ord för flickorna.

För att försäkra mig om kvaliteten på de andra personernas transkriberingar lyssnade jag kritiskt igenom ljudbanden parallellt med läsning av den skrivna texten. Ifall betydelsen i den muntliga diskursen

så som jag tolkade den inte kom fram i den skrivna texten så gjorde jag nödvändiga textkorrigeringar. Överföringen av vuxensamtalen till skriven text gjorde jag själv i två steg. Först lyssnade jag på ljudbandningen och sammanfattade samtals teman med stickord och kortfattade kommentarer. Sedan skrev jag ordagrant ut de partier av samtalen som jag tolkade som viktiga i relation till skolmatematisk praktik och till fokuselevernas högstadierrelaterade upplevda skolmatematiska praktik.

Under studiens första skede analyserade och tolkade jag elevintervjuerna i två faser på sätt som tidsmässigt sammanfaller med den treåriga aktionsforskningsprocessen.

På grund av projektlärares intresse av att få information om elevers syn på reformprojektets metoder var det övergripande syftet i den första analysfasen att föra in ett rekonstruerat elevperspektiv i reformprojektets aktionsforskningsprocess. Inför aktionsforskningsprocessens formella projektmöten lyssnade jag därför i mån av möjlighet till aktuella intervjuer. Vid projektmöten redogjorde jag sedan muntligt för de sätt att tänka om reformprojektets metoder jag preliminärt kunnat tolka ur elevernas intervjuer. Återkopplingen från intervjuerna gav mig impulser att justera de tolkningar jag gjort och att fördjupa min förståelse av skolmatematisk praktik ur elevernas perspektiv.

I följande analysfas gjorde jag en holistisk analys och tolkning baserad på utskriften från den första intervjuerien med båda kohorterna. Utskrifterna omfattar totalt cirka 160 A4-sidor. Jag gjorde analysen och tolkningen av varje elevs budskap parallellt med en kategoriserande analys av varje frågetema. Jag följde såväl meningskategoriserande som meningskoncentrerande tillvägagångssätt för att formulera betydelser ur elevernas uttalanden om skolmatematikens aktiviteter (Kvale, 1997, s. 170–189). Resultatet presenterades inom reformprojektet, rapporterades till den externa finansören Utbildningsstyrelsen och låg till grund för fortsatt analys och tolkning under studiens andra skede.

Under studiens andra skede zoomade jag in analysen och tolkningen på ett begränsat antal intervjusamtal. Dels fördjupade jag analysen av den första intervjuerien, men nu enbart med kohorten *Elevanalys A*. De 13 ljudbandade intervjusamtalen omfattar totalt cirka 4 timmar. Dels gjorde jag en uppföljning över tid av elevers upplevda skolmatematiska praktik så som den framkommer i intervjusamtalen med de tre klasskamraterna Joakim, Kristina och Nette. Uppföljningen över tid inkluderar de tillbakablickande vuxensamtalen med dessa tre fokuselever. Intervjusamtalen under högstadiet med Joakim, Kristina och Nette samt vuxensamtalen med dem omfattar sammanlagt 10 timmar och 22 minuter (Joakim 206 min, Kristina 217 min, Nette 199 min).

Ytterligare importerade jag utskrifterna av dessa intervjusamtal, allt som allt cirka 320 sidor skriven text, till ett dataprogram för kvalitativ analys, QSR Nvivo 2.0. Dataprogrammet underlättade hanteringen av den skrivna texten under den fördjupade analys- och tolkningsprocessen.

Den fördjupade analysansatsen var inledningsvis induktiv (se Merriam, 1994, s. 72f). Det betydde att jag lyssnade på de 13 ljudbandade intervjusamtalen med kohorten *Eleveanalys A* och samtidigt märkte ut, eller kodade, väsentliga budskap i vart och ett av intervjusamtalen. Jag noterade till exempel att eleverna i alla beskrivningar av en matematiklektion återkom till aktiviteter som jag sedan kom att benämna: *tillägna och tillämpa, gå igenom något på tavlan, läraren frågar – eleverna svarar rätt, arbete i matematikboken, arbete med hemuppgifter*. Dessa var återkommande aktiviteter vars betydelser i det stora hela delades av eleverna, till exempel att uppmärksamt *lyssnande* till läraren är den effektivaste aktiviteten för att lära sig matematik. Jag återkom även till aspekter som jag hade noterat som väsentliga redan under intervjusamtalen. Vid intervjun med Marit hade jag till exempel fört in *nytta* som ett betydelsebärande begrepp då jag tolkade hennes förklaring matematiken är viktig för att den behövs när man far ut och handlar. Som matematiklärare hade jag otaliga gånger mött elevfrågor i stil med "Vilken är nyttan med att lära detta?". Jag hade också funderat på nyttobegreppet i relation till förändringar i undervisningen. I intervjusamtalet förde jag in begreppet nytta i min tolkande följdfråga: "Du tycker att man har nytta av [matematiken]? Det är det du menar?", Marits svar var bekräftande. I Wellingtons (2000, s. 87) mening fungerade begreppet *nytta* inte som en teori utan som ett sätt att lagra en idé (unit of data) (Merriam & Tisdell, 2016, s. 203), som visade sig bli viktig för min förståelse av hur skolmatematisk praktik är konstituerad ur elevers synvinkel. Eftersom andra elever senare under intervjuerien spontant använde begreppen *nytta* eller *nyttigt* för att motivera varför matematiken är ett viktigt skolämne, så bekräftades nyttobegreppets relevans i sjundeklassarnas upplevda skolmatematiska praktik ytterligare.

I denna fas av processen underlättade dataprogrammet Nvivo analysen och tolkningen, främst för att det möjliggjorde en snabb jämförelse av och åtkomst till väsentliga budskap i elevernas intervjusvar och mina egna lagrade idéer i relation till intervjusvaren. Jag märkte dock att kodningsprocessen hade oönskade effekter beträffande enskilda elevers röster och budskap. Jag riskerade, som Merriam (1994) påpekar, "förlora något av den rikedom som kvalitativ information rymmer, om man börjar ersätta beskrivningar och metaforer med ett tekniskt språk och kvantifieringar" (s. 171). Ytterligare hade jag redan under intervjusamtalen observerat elevbudskapens situerade karaktär

(Mercer, 1995). Det var i samspelet mellan mig och den intervjuade eleven som det sagda och dess omedelbara betydelse, så som jag tolkade den, producerades. Dessutom förundrades jag över hur väldigt olikartade betydelser liknande intervjusvar föreföll bära med sig för elever. Till exempel, mot bakgrund av min lärarerfarenhet, trodde jag mig förstå varför elever anknöt negativa upplevelser av det skolmatematiska arbetet till klassrummets sociala miljö, till exempel till rädslan för att svara fel då andra i klassen hör på, men varför föreföll vissa av eleverna ändå uppleva tillhörighet i enlighet med Wengers MoB-teori och inte anse sig själva som exkluderade? En elev kunde uttrycka missnöje med en viss aktivitet i klassrummet för att den förhindrade eleven att ta ett personligt lärandeansvar, medan en annan elev i samma klassrum överhuvudtaget inte noterade aktiviteten i sina intervjusvar. Mot den här bakgrunden övergick jag till att betrakta varje intervjusamtal med en elev som en helhet vid tolkningen av denna elevs upplevda skolmatematiska praktik. För att återfå kontakten med elevers mångfacetterade, ibland motstridiga, upplevelser av skolmatematisk praktik redan vid inledningen av högstadiet konstruerade jag vinjetter och kritiska berättelser (jfr Barone, 1992) som sammanfattade hur skolmatematisk praktik konstituerades ur elevers synvinkel i början av högstadiet. Jag sammanfattar nedan åtta sjundeklasselävers kritiska berättelser i början av högstadiet.

Marias berättelse: Hur kan matematiklärande och handlingsfrihet balanseras?

Ullas berättelse: Hur nå kunskap i en tävlingsinriktad miljö utan att bli stämplad som plugghäst?

Marits berättelse: En ond cirkel av självvald osynlighet och osynliggörande.

Helenas berättelse: Hur få utmaningar och synlighet för sitt lärande?

Axels berättelse: Hurdant kan skolmatematiskt arbete där elever engageras och inkluderas vara?

Kristinas berättelse: Hur upprätthålla engagemang då säkerhet i det egna matematiska tänkandet är det centrala deltagandemålet?

Nettes berättelse: Hur få den matematiska kunskapen bättre tillgänglig och mer begriplig?

Joakims berättelse: Tillhörighet och acceptans.

Konstruktionen av de kritiska berättelserna hjälpte mig att sätta ord på elevers olikartade relationer till skolmatematiskt arbete i början av högstadiet och bidrar därmed till de slutsatser som denna studie lägger fram.

Fallstudiens andra skede betydde även uppföljning över tid av fokuseleverna Joakims, Kristinas och Nettes upplevda skolmatematiska praktiker så som de framkommer i de fem intervjusamtalen under

högstadietiden och i det tillbakablickande vuxensamtalet. Jag presenterar härnäst kortfattat den fortsatta analys och tolkning som ledde till artiklarna [b], [c] och [d]. För artiklarna [b] och [d] har resultat och stödjande utdrag ur samtal och projektanteckningar översatts till engelska.

Med start från Kristina lyssnade jag i studiens andra skede igen på ljudbanden med varje fokuselev. Jag läste upprepade gånger intervju-utskriften samt noterade tolkningsidéer och möjliga framväxande teman (se exempel i Bilaga 7). Jag återkom även gång på gång till projektanteckningar som innehöll fakta om de tre fokuseleverna, såsom deras provvitsord och projektarbeten. Jag speglade min framväxande förståelse för skolmatematiskt arbete ur varje fokuselevs synvinkel i matematikdidaktisk teori och tidigare forskning. Jag antecknade noggrant mina tolkningar och jag nyanserade tolkningarna vartefter analysprocessen fortgick. Konstruktionen av innehållsanalyser ur varje högstadieintervju med de tre fokuseleverna blev ett viktigt analysredskap. Innehållsanalyserna hade såväl en sammanfattande som en expanderande karaktär. Genom att jag interfolierade innehållsanalyserna med möjliga teoretiska anknytningar skärptes min teoretiska förståelse (Kvale, 1997, s. 194–195) ytterligare i relation till de tolkningsidéer och teman som växte fram ur elevernas berättelser.

Enligt lärarens betygssättning hade de tre fokuseleverna betraktats som framgångsrika elever under högstadiet, men vuxensamtalen bekräftade att deras relationer till skolmatematiskt arbete och därmed deras lärandebanor med tiden utvecklades på olikartade sätt. I nästa analys- och tolkningssteg och mot bakgrund av de tre fokuselevernas divergerande lärandebanor, fokuserade jag särdrag i det skolmatematiska arbetet som verkade ha bidragit till upprätthållandet av potentiellt exkluderande/inkluderande strukturer under de år reformprojektet pågick. Uppgiftsdiskursens fortsatta starka status inom skolmatematiskt arbete steg fram som ett sådant särdrag (se [c]). Men oberoende av dessa särdrag i det skolmatematiska arbetet så visade analysen att en elevs upplevelse av tillhörighet i de gemenskaper där socialt accepterat (legitimt) matematiskt kunnande underhandlas var av avgörande betydelse för vilken slags matematisk identitet eleven utvecklade över tid (se [d]).

4.4 Lärarintervjuer

4.4.1 Deltagande projektlärare

Med projektlärare avser jag de 10 matematiklärare som i något avseende deltog i reformprojektet under dess olika skeden (pilotförsök, aktionsforskning). I gruppen projektlärare ingår något fler än hälften av de lärare som undervisade i matematik på högstadiet och gymnasiet vid fallstudieskolan. Alla skolans matematiklärare var vid tiden för

studien behöriga för sina undervisningsuppdrag. Den yngsta projektläraren kom med i reformprojektet direkt från lärarutbildningen, medan de två äldsta hade arbetat som matematiklärare i mer än 20 år då reformprojektets aktionsforskningsprocess inleddes.

4.4.2 Genomförande av lärarintervjuer

Ett halvår in i aktionsforskningsprocessen intervjuade jag sex projektlärare, Arn, Kaj, Ove, Per, Tom och Åke. Vid intervjuerna pratade vi om deras lärarroller, om deras förväntningar och syn på matematikundervisning och lärande och om förändringsarbete genom aktionsforskning. Intervjun med Tom innehöll inga aktionsforskningsrelaterade frågor eftersom han hade övergått till andra arbetsuppgifter och inte längre deltog aktivt i förändringsarbetet och aktionsforskningsprocessen.

Jag hade en intervjuguide som grund, men intervjuerna var öppna, relativt ostrukturerade, med både explorativa och hypotesprövande inslag, se Bilaga 5. (Kvale, 1997, s. 94; Merriam, 1994, s. 86–100; Tisdell, 2016 107–136). Jag kände till lärarnas arbetsarenor. Intervjuerna kan därför bäst beskrivas som samtal där två lärarkolleger fokuserade och begrundade ett gemensamt intresseområde, skolmatematisk praktik i förändring, samtidigt medvetna om bådadas speciella roller som intervjuare respektive intervjuad. Lärarna var mycket väl medvetna om varför jag var intresserad av deras syn på förändringsarbetet och de var införstådda med min dubbelroll som medlem i aktionsforskningsgruppen och som forskare.

Samtalen ägde rum i lärarnas arbetsrum med bandspelaren placerad mittemellan oss för bästa möjliga kvalitet på bandningen. Samtalen tog ungefär en timme. Alla lärare svarade lugnt, eftertänksamt och oftast värtaligt på alla de frågor jag ställde. Som intervjuare var jag känslig inför både det direkt uttalade och det som sades så att säga mellan raderna, till exempel i form av tveksamhet och pauser. Jag strävade även efter att ständigt pröva mina tolkningar av framväxande budskap.

4.4.3 Hantering, analys och tolkning av det empiriska materialet

De ljudbandade intervjuerna skrevs först ut av en person som var anställd för ändamålet. Överföringen av de muntliga förlagorna till skriven text visade sig dock innehålla många oklarheter och jag gjorde om den, nu i en litterär stil som bättre förmedlade meningen i projektlärarnas berättelser (Kvale, 1997, s. 152). Sammanlagt omfattar intervjuerna ca 80 sidor utskrivna text. Utskrifterna saknar noteringar om pausers längd, röstläge, hummanden, skratt etc. Dessa kontextuella aspekter av samtalen har jag i stället beaktat vid analys- och tolkningsprocessen.

Hantering av samtalen har gjorts på svenska, resultat och stödande utdrag ur projektanteckningar och samtal har sedan översatts

till engelska. Vid analysen använde jag lärarnas förnamn parallellt med de pseudonymer som förekommer i avhandlingen. I korthet inkluderade analysen och tolkningen som ligger till grund för artikel [b] följande fyra faser.

Fas 1: Jag lyssnade på intervjuerna och läste igenom utskrifterna upprepade gånger för att skapa mening ad hoc (se Kvale, 1997, s. 184–185).

Fas 2: Jag märkte samtidigt ut och begrundade citat som visade lärarnas skäl till sin medverkan i reformprojektet samt deras syn på eleverna och på undervisningen i matematik. Citaten, cirka 230 stycken, skrevs ut och jämfördes för att skapa kontraster och se vad som hörde ihop med vad. Preliminära teman började utkristallisera sig: Det kändas otillräcklighet, Det kändas trygghet, Min egen otillräcklighet, Jag vill för att kunna, Mitt ansvar, Det nya som fenomen, Det nyas livskraft.

Fas 3: Under fas 2 hade jag noterat att alla lärare använde metaforiska uttryck för att beskriva handlingsmönster relaterade till förändringsarbetet. Jag samlade alla uttryck som jag kunde definiera som metaforiska och kunde efter tolkning formulera två sammanlänkade djupmetaforer.

Med djupmetaforen *transport längs spår* kunde jag knyta samman lärarnas metaforiska uttryck för förändringsprocessens möjligheter/dilemman och deras elevrelaterade handlande. Förändringsprocessens dilemman uttrycktes exempelvis som "inte gå i samma hjulspår", "ta den enklare vägen", "köra fast", "köra enligt det man tror på", "köra en bättre grej", "stampa på stället", "pröva sig fram i blindo", "vilja ha teoretisk vägkost", "hoppa med på något som redan startat". Lärarnas elevrelaterade handlande beskrevs med uttryck som "bädda för eleverna", "styra in eleverna", "lyfta upp elever", "ha en annan fart på elever", "föra eleverna till en punkt", "inte dra eleverna framåt utan gå bakom och pusha", "elever går fram i olika takt", "de svaga kommer på efterkälken".

Med djupmetaforen *matematiska idéer är saker som lagras upp i behållare*, kunde jag beskriva hur lärarna framställde den lärande som utrustad med ett medvetande som på olika sätt kan fyllas med matematisk kunskap. Kunskapen är matematiska objekt utanför eller innanför den lärandes medvetande. Exempel på metaforiska uttryck med vars hjälp djupmetaforen kunde gestaltas är "projekt som tillskott", "ge elever ett rikt förråd av verktyg", "ge eleverna vägkost", "elever med luckor", "fylla på luckor", "matematik som inbyggd i elever", "procentbegreppet var en vit fläck", "hitta sätt att ge mer (kunskap) åt eleverna".

Fas 4: Då djupmetaforerna hade formulerats återvände jag till de preliminära teman som utkristalliserats i fas 2. Jag betraktade nu dessa teman genom de två djupmetaforerna och kunde sammanfatta min analys och tolkning av lärarnas budskap om skolmatematisk praktik i

förändring under fyra övergripande teman som finns presenterade i artikel [a]: *Det kändas otillräcklighet och säkerhet, Hopp och misstro i relation till en elevcentrerad praktik, Hopp och misstro i relation till bedömning och Konsekvenser av forskning och samarbete.*

4.5 Projektanteckningar

Med projektanteckningar avser jag allt det organiserade, opublicerade och publicerade, projektmaterial som jag har haft tillgång till under fallstudien. Projektanteckningarna utgör en del av fallstudiens *case record* (se Tabell 2, s. 50).

4.5.1 Framtagande, hantering, analys och tolkning av det empiriska materialet

Här presenterar jag de huvudsakliga projektanteckningar jag använder med syftet att etablera trovärdighet (Merriam, 1994, s. 179; Merriam & Tisdell, 2016, s. 259) vid konstruktionen av avhandlingens kontextbeskrivningar och för avhandlingens slutsatser. De projektanteckningar jag beskriver är skriftliga dokument från klassrumsobservationer och från reformprojektets aktionsforskning. Dessa dokument är utförliga anteckningar från sju observerade matematiklektioner, anteckningar från 21 informella planeringsmöten samt mötesagendor och diskussionsprotokoll från 18 aktionsforskningsmöten.

I november och december 1994 gjorde jag *enkla observationer* (Wellington, 2000, s. 95) av sju matematiklektioner i årskurserna 7 och 8. Den övergripande avsikten var att skapa en känsla för omständigheterna under en vanlig matematiklektion inför de elevintervjuer jag genomförde kort efteråt. Ett specifikt syfte, som även delgavs projektlärarna, var att observera "hur lärarna uppmanar eleverna till processtänkande samt samla observerbara tecken på informell utvärdering" (Protokoll från aktionsforskningsmöte 2). I årskurs 7 observerade jag en lektion i Åkes klass samt fyra konsekutiva lektioner i Pers klass. I årskurs 8 observerade jag en lektion i Arns klass samt en lektion i Oves klass. På grund av skolans speciella roll inom lärarutbildningen var lärare och elever vana med utomstående åhörare i klassrummet och stördes inte av min närvaro.

Som fullständig observatör riktade jag mitt fokus främst mot den offentliga interaktionen och klassrummets kommunikationsmönster som jag dels antecknade ordagrant, till exempel,

Elev, flicka, frågar: Vad gör man när man är klar?

Läraren svarar: Sitter och väntar snällt, det tar inte så länge.

dels antecknade i form av sammandrag av sociala situationer och lektionsaktiviteter. Exempel på sådana sammandrag är "korta svar från eleverna", "läraren berättar om projektbedömningen och skriver på tavlan: resultat, utförande, presentation" och "läraren säger att det kan

vara plus att visa sitt engagemang genom att komma och fråga och hänvisar till att onödiga frågor kan vara minus”.

Jag skrev också korta analytiska kommentarer till lektionshändelser såsom ”eleverna tar fram sina teorihäften”, ”läraren går runt i klassen, ljudnivån stiger så småningom”, ”eleverna verkar inte hänga med riktigt”, ”tyst räknande parvis”. Vidare noterade jag så mycket som möjligt om den privata interaktionen mellan elever och mellan lärare och elev, dels i form av sammandrag till exempel ”pardiskussioner, elever jämför svar med varandra”, dels ordagrant. De renskrivna observationsdokumenten omfattar sammanlagt 34 sidor.

Anteckningarna från klassrumsobservationerna återgav klassrumsepisoder och blev viktiga belägg för min framväxande idé om hur legitimt matematiskt kunnande etablerades och bekräftades inom ramen för klassrummets kommunikationsmönster. I Bilaga 13 återberättas anteckningar från två klassrumsepisoder: *Att ta ansvar för sitt lärande är att komma ihåg regler* och *Den som inte vet skall vara tyst*.

Projektlärarna sammankom regelbundet under skoltid till *informella planeringsmöten* i mindre grupper, oftast årskursvis och utan min kännedom. Som deltagande observatör (Wellington, 2000, s. 95) vid 21 av dessa möten skrev jag korta protokoll. Protokollen utgörs, på några undantag när, av mina handskrivna anteckningar. Anteckningarna delades inte med projektlärarna. Vid ett tillfälle ljudbandades planeringsdiskussionen och jag skrev senare ut den ordagrant. Jag fortsatte dock inte med detta förfarande av tidsmässiga skäl. Protokollen omfattar totalt cirka 25 sidor text med mina sammanfattande kommentarer kring de teman som behandlades vid varje möte, såsom att lärarna planerade undervisningen genom att granska läroboken sida för sida och ”fördela stoffet under veckorna fram till provet”.

Under fallstudiens första skede sammankallade jag projektlärarna till 18 *formella möten* inom aktionsforskningsprocessens ram. Dessa möten skedde utom skoltid, oftast på kvällstid i fakultetens rum, men ibland på dagtid och utanför fakulteten. Jag sände kallelser i god tid på förhand till alla deltagare i reformprojektet. I de fall aktionsforskningsmöten ordnades under den övergripande rubriken ”postgradualt seminarium” gick kallelser ut även till lärare utanför reformprojektet. Strukturen och innehållet för aktionsforskningsmötena varierade från relativt ostrukturerade diskussioner till förberedda presentationer kring aktuella teman. Protokoll skrevs vid varje möte. Totalt omfattar de 18 protokollen cirka 65 sidor renskriven text.

I protokollen sammanfattas deltagarnas yttranden och slutsatser om klassrumshändelser och förändringsarbetets specifika metoder (se Kapitel 2). I protokollen listas även beslut gällande reformprojektets fortsatta verksamhet. Alla protokoll sändes ut till projektlärarna och de

godkändes utan kommentarer. Jag kan därför hävda att de tolkningar av lärarnas erfarenheter jag hade skrivit ner under mötena var rimliga även ur projektlärarnas synvinkel.

För att kunna konstruera avhandlingens kontextbeskrivningar läste jag de projektanteckningar som berörde reformprojektet, främst mötesprotokoll, upprepade gånger. Läsningens syfte var att utveckla och fördjupa de preliminära tolkningar som växte fram under fallstudiens första skede och att skapa en holistisk förståelse av reformprojektet, dess skolmatematiska aktiviteter och specifika metoder. Jag relaterade enskilda fenomen till varandra och sökte övergripande mönster bortom alla reformprojektets detaljer. Under läsningen gjorde jag spekulativa och analytiska kommentarer i de utskrivna texterna och jag jämförde mina preliminära slutsatser med lärarnas budskap i intervjuer och i annat projektmaterial, såsom opublicerade och publicerade texter av projektlärarna (se lista över publicerade texter i Bilaga 1).

4.6 Forskningsetiska överväganden

Etisk forskningspraktik är inom kvalitativ forskningsmetodologi ett brett begrepp som anknyter såväl till kvalitet och jämlikhet inom den praktik forskningen berör som till forskningsstudiens metodologiska överväganden, till exempel vem som drar nytta av forskningen, vems angelägenheter som forskningen fokuserar och vilken roll deltagarna spelar i forskningsprocessen (se Atweh, 2011; Bassey, 1999; Merriam & Tisdell, 2016; se även Forskningsetiska delegationen, 2009, 2013).

4.6.1 Etiskt ansvar

I likhet med andra (se Atweh, 2011; Wellington, 2000) hävdar jag att mitt *etiska ansvar* som forskare handlar om mera än att följa forskningsetiska regler. Etiska överväganden har kontinuerligt stått i förgrunden genom hela forskningsprocessen. Det etiska ansvaret handlar om att jag som forskare varit "intrinsically an ethical being who acts for good and does not need rules and codes to act responsibly" (Atweh, 2011, s. 69). Det är ett situationsbaserat omdöme och upplevda skyldigheter som varit avgörande då jag ställts inför etiska dilemman (Pring, 2000). Atweh (2011) konstaterar att de etiska beslut forskaren måste fatta ofta är komplexa och att forskarens etiska ansvar behöver bli reglerat av forskarens känsla för rättvisa. Bassey (1999) knyter ytterligare an etiskt ansvar till att forskaren har makt och frihet, men inom ramen för ärlighet och med beaktande av deltagarnas bästa. Den värdegrund jag har strävat efter att följa i mitt etiska ansvarstagande är baserad på respekt för de personers integritet som ingår i eller berörs av fallstudien; ett empatiskt och lyhört förhållningssätt, ärlighet och öppenhet utan att skada någon.

Den fallstudie som skildras i avhandlingen har inget linjärt förlopp och den sträcker sig dessutom över en lång tid. Någon möjlighet att vid dess inledning vara medveten om vidden av alla etiska avgöranden fanns inte. Många av de dilemman av etisk karaktär som jag ställdes inför finns invävda i den metodologiska redovisningen i detta kapitel, men utan att vara explicit utpekade som uttryck för fallstudiens etiska praktik. För att ytterligare synliggöra fallstudiens etiska praktik lyfter jag i det följande fram några överväganden som illustrerar hur jag axlat mitt etiska ansvar i relation till fallstudiens deltagare och intressenter, under fallstudiens förlopp och vid publikationen av fallstudiens resultat.

4.6.2 Etiskt ansvar och etiska dilemman i denna studie

Att få tillgång till fallet var i denna fallstudie inget problem eftersom jag kom med som utomstående forskare i ett reformprojekt där fallskolan och de deltagande lärarna och eleverna redan ingick (Wellington, 2000). Lärarna var bekanta för mig från tidigare både som privatpersoner och från tidigare kollegialt samarbete. Jag hade därför goda möjligheter att vara lyhörd för sådana aspekter i deras professionella och privata liv som kunde ha en inverkan på reformprojektet. Närheten mellan en forskare och informanter i ett forskningsprojekt kan vara både till fördel och till nackdel. I denna fallstudie fanns en ömsesidig öppenhet mellan mig och de deltagande lärarna redan från studiens inledning som annars kan vara mödosam att etablera (Wellington, 2000). Det fanns också samtidigt en större risk för att jag oavsiktligt överförde mina egna värderingar beträffande skolmatematikens utveckling på lärarna. Under utvecklingsprojektets gång växte jag allt mer ifrån mitt praktiskt inriktade lärartänkande och in i en form av teoretiskt och reflektivt tänkande som gjorde mig i ökande grad medveten om hur mina och lärarnas tolkningar av matematikens och det skolmatematiska arbetets natur kunde variera (jfr Atkinson, 1994).

Min roll i reformprojektet var inte entydig och därmed anknuten till varierande etiska dilemman under fallstudien. Ibland var min roll den formella observatörens; jag intervjuade lärarna och deras elever, jag observerade deras lektioner. Ibland gled jag mellan en fullständig observatörsroll och en fullständig deltagarroll, vilket var speciellt tydligt under aktionsforskningsprocessen. Denna kameleontsituation med ständiga perspektivbyten kunde vara förvirrande för både mig själv och de deltagande lärarna. Det var inte alltid klart ens för mig själv när jag talade med den tolkande forskarens röst och när jag talade som en medmänniska, kollega och matematiklärare. Samtidigt var glidningar mellan inifrånposition och utifrånposition inte heller ett obekant fenomen för lärarna själva eftersom de under

aktionsforskningsprocessen förväntades agera som forskare i sina egna klassrum. Min identitet och lärarnas identiteter som forskare konstituerades i utmaningen att kombinera tillhörighet och observation för att kunna skapa en förståelse av förändringsarbetet som en insider, samtidigt som vi förväntades beskriva reformprojektet för utomstående. Enligt Merriam (1994) är detta fenomen inte ovanligt i fallstudieforskning. De etiska dilemman som rollförskjutningarna medförde lyftes inte upp till någon explicit diskussion inom fallstudien, däremot i samband med informella samtal mellan mig och de deltagande lärarna.

I fallstudien är mina samtal och intervjuer med lärare och elever en viktig informationskälla. De etiska dilemman jag mötte i fallstudien var därför i hög grad situationsbundna och relaterade till konkreta intervjusituationer och till det förändringsarbete som utgör fallstudiens kontext. Vissa var förutsägbara, som till exempel dilemman att kunna balansera en nära och vänskaplig relation till projektlärarna med forskarrollen. Andra var helt oförutsägbara. Kvale (1997) fångar på ett bra sätt in den balansgång jag gick.

Intervjuaren måste bygga upp en atmosfär där den intervjuade känner sig trygg nog för att tala fritt om sina upplevelser och känslor. Detta innebär att inta en ömtålig balans mellan det kognitiva kunskapssökandet och den mänskliga interaktionens etiska aspekter. (Kvale, 1997, s. 118)

Det fanns situationer under aktionsforskningsprocessen där ärlighet utgjorde ett etiskt dilemma. I elevers yttranden under intervjuer kunde det framkomma skolrelaterade erfarenheter som var av kontroversiell eller känslig natur. Jag försökte lösa dilemman genom att i aktionsforskningsprocessen lyfta fram enbart sådana insikter från elevintervjuerna som jag bedömde vara av specifik betydelse för den fortsatta utvecklingen av förändringsarbetet och som inte var relaterade till vare sig enskilda klasser eller elever.

En etisk regel som "undvik psykiska olägenheter" (Forskningsetiska delegationen, 2009, s. 8) kunde inte lösa dilemman att skolmatematiskt arbete för vissa elever helt uppenbart var känslomässigt negativt laddat samtidigt som jag som forskare även var intresserad av just den dimensionen av deras upplevda skolmatematiska praktiker. Skulle jag fortsätta fråga och därmed kanske riskera att en uppenbart ängslig elev skulle börja känna sig ännu mer illa till mods, eller skulle jag lämna frågan och därmed riskera att gå miste om viktig information? Även i situationer där intervju eleven var mycket fåordig balanserade jag mellan min strävan att få till stånd en intervju och att respektera elevens integritet. Ett jag-vet-inte-svar kunde ju lika gärna betyda att eleven av någon anledning saknade lust eller möjlighet att svara, som att eleven inte hade någon information att ge. I situationer av det här slaget var min lärarerfarenhet ofta till god hjälp. Men jag var

medveten om att lärarerfarenheten också kunde vara till nackdel eftersom det är svårt att koppla bort sitt lärarjag i ett forskningssamtal med en elev. Samtalet glider lätt över i ett undervisningssamtal där intervjuaren talar med institutionens röst.

Studier har visat på skillnader i interaktionen mellan elev och lärare beroende på lärarens kön (jfr Jungwirth, 1991) och att kvinnor kan vara mer villiga än män att tala med en förstående lyssnare i en intervjusituation (jfr May, 2001). I en skolkontext riskerar elevens yttranden i en intervju även vara ett tecken på den så kallade Topaze-mekanismen (jfr Brousseau, 1984). Med den tolkningen kunde elevens svar på en intervjufråga uttrycka elevens föreställning om vad jag ville höra och därför trodde att hen borde säga i intervjusituationen. Fokuseleven Nette konstaterar som niondeklassare, att det var ganska svårt att veta vad man skulle svara på de där frågorna vid den första intervjun. Nette och andra deltagande projektelever kom till en intervju i kraft av sina roller som elever – en viktig dimension i den rollen är att svara på frågor, men inte nödvändigtvis att själv ställa motfrågor eller lägga fram sina förtroliga eller kritiska funderingar. Det går således inte att bortse ifrån att eleverna i intervjusituationen positionerade sig på ett liknande sätt till mig som till någon av sina lärare. Eftersom elevintervjuerna var flera till antalet och sträckte sig över en lång tid så fördjupades relationen mellan mig och en intervju elev över tid. Det är därför troligt att jag i de deltagande projektelevernas ögon med tiden blev allt mindre lärare och allt mer en förstående lyssnare och medmänniska.

Inom projektelevernas skolmatematiska gemenskaper var jag perifer, främst på grund av att jag inte var deras lärare. Men projekteleverna var medvetna om min lärarroll vilket innebar att de identifierade mig i relation till sin upplevda skolmatematiska praktik via alla de sammanhang där de tagit del i skolmatematiskt arbete under en matematiklärarens ledning. Jag var inte lärare i projektskolan och kunde därför inte heller ingå annat än indirekt i de skolmatematiska gemenskaper där projektlärarna var medlemmar. Mot bakgrund av min långa karriär som matematiklärare i högstadiet hade jag den erfarenhet som behövdes från deltagande i likartade gemenskaper, för att förmå skapa perspektivavstånd och legitimitet i relationen till både projektelevernas och projektlärarnas skolmatematiska verksamhet.

Etiskt ansvar kan även handla om att jag som forskare har gett deltagarna möjlighet att samtycka till/avstå från att ingå i fallstudien och att jag, med deltagarnas bästa i åtanke, säkerställt fallets anonymitet i avhandlingen (Merriam & Tisdell, 2016). Merriam och Tisdell (2016) konstaterar dock att det är problematiskt att trygga fallets anonymitet i kvalitativa fallstudier, som per definition innebär att forskaren går på djupet i sin undersökning. Därmed finns det alltid en risk att läsare av avhandlingen som känner till fallet lätt kan lokalisera

de personer som berörs, eller i värsta fall påstå att de känner igen personerna även om de har fel (Merriam & Tisdell, 2016, s. 264). I den här fallstudien är de deltagande lärarna och studiens tre fokuselever medvetna om denna risk av följande orsaker.

Forskningsinitiativet växte från första början fram i dialog med fakulteten och de deltagande lärarna. Projektlärarna hade frivilligt valt ett mer forskande förhållningssätt till sin undervisning och de bidrog frivilligt inom ramen för aktionsforskningsprocessen med material till fallstudiens analyser. Under reformprojektet berättade de öppet om sitt deltagande, också i form av publicerade texter (se Bilaga 1). Lärarna axlade även det etiska ansvaret att vid behov, muntligt eller skriftligt, berätta för kolleger och för sina elever och deras vårdnadshavare om reformprojektets metoder och om aktionsforskningsprocessen. Projektlärarna gav skriftliga bifall (se Bilaga 8) och fallstudiens tre fokuselever gav i samband med vuxensamtalen sina muntliga bifall, till att fingerade uppgifter om deras identiteter och utdrag ur intervjuer och andra texter kan publiceras i avhandlingen. Från föräldrahåll nåddes jag under reformprojektet av enbart accepterande kommentarer vilket å andra sidan kan vara en avspegling av skolans speciella status: föräldrarna var införstådda med att ämnesrelaterade utvecklingsprojekt hörde till skolkulturen. Mot den här bakgrunden kan jag utgå ifrån att alla berörda, såväl projektlärare och skolan i gemen som deltagande projektelever och deras vårdnadshavare, är medvetna om det omöjliga i att garantera fallets anonymitet i avhandlingen.

Valen av utdrag ur intervjuer, klassrumsobservationer och projektanteckningar har jag gjort i syfte att förstå skolmatematisk praktik inifrån med hjälp av de föreställningar som deltagarna uttrycker. Citat som redovisas i fallstudien har jag av etiska skäl valt att uttrycka på standardsvenska och därmed befria dem från "muntliga fingeravtryck". Även mitt beslut att betrakta varje intervjusamtal som en helhet vid tolkningen av en elevs upplevda skolmatematiska praktik var ett etiskt beslut som visar mitt respektfulla ansvar inför eleverna och elevernas budskap. Jag har strävat efter att arbeta på ett omsorgsfullt och systematiskt sätt och att publicera de resultat jag fått fram med en saklig argumentering och på ett rättvist sätt ur olika synvinklar (Forskningsetiska delegationen, 2009, s. 9). Med en annan vetenskapspositionering och forskningsdesign, med ett annat teoretiskt fokus skulle andra val ha gjorts och en annan berättelse ha blivit berättad.

Slutligen ska jag beröra fallstudiens ansvar gentemot Utbildningsstyrelsen, som var intressent i reformprojektet genom att delta i finansieringen av fallstudiens första skede. Wellington (2000, s. 57) konstaterar att forskarens skyldighet gentemot "the sponsoring body or council" ibland kan vara svår att balansera mot övriga skyldigheter och

förväntningar. Fallstudien finansierades inledningsvis med utgångspunkt i en föreställning om forskningens art som "aktionsforskning" i syfte att göra en "noggrann rapportering av undervisningsmetodernas särdrag och av de sätt på vilka dessa uppfattas av eleverna" (Citat ur av Utbildningsstyrelsen godkänd forskningsplan). Som framkommer ovan rekonstruerades dock designen successivt under fallstudien. Utvärderingskomponenten som ingår i en aktionsforskningsstrategi blev alltmer problematisk ur såväl forskningsetisk som teoretisk synvinkel: den tvingade in mig i en besvärlig dubbelroll att samtidigt vara utvärderare (utifrånperspektiv) och deltagare (inifrånperspektiv) (Bassegy, 2000). Ytterligare innebar det ett teoretiskt dilemma att betrakta elevernas kontextberoende yttranden som dekontextualiserade kategorier av uppfattningar (Säljö, 2009). Forskningens allt tydligare inifrånperspektiv innebar att den ursprungliga forskningsdesignen slutligen blev oacceptabel. Den slutliga metodologiska förskjutningen till en fallstudiedesign inom ett tolkande paradigm gjordes efter publiceringen av artiklarna Røj-Lindberg (1996, 1997, 2000). I dessa diskuteras resultat baserade på preliminära analyser enligt den ursprungliga forskningsdesignen. Jag hävdar därför att fallstudien inte längre binds av de skyldigheter som ursprungligen ålåg forskningsstudien.

4.7 Överväganden i relation till fallstudiens vetenskapliga kvalitet

I det följande dryftar jag strategier för att främja forskningsprocessens och rapportens och därmed min egen *trovärdighet*. En trovärdig (fall)studie övertygar läsaren om att den i alla avseenden är genomsyrad av forskarens omsorgsfullhet, pålitlighet och uppriktighet (jfr Bassegy, 1999, s. 74–77). Jag placerar resonemanget inom Merriams och Tisdells (2016) tre motpoler: *intern validitet/tillförlitlighet*, *reliabilitet/överensstämmelse* och *extern validitet/överförbarhet*.

4.7.1 Intern validitet/Tillförlitlighet

En studies *validitet* handlar om hur forskaren rättfärdigar de slutsatser som dras (Kilpatrick, 1993); dess *interna* validitet om hur väl dessa slutsatser stämmer överens med verkligheten, dvs. med det som forskaren studerar (Merriam & Tisdell, 2016). Validitetskriteriets betydelse är paradigmberoende (Ernest, 1998): validitet inom det kvalitativa/tolkande forskningsparadigmet, där den här fallstudien är lokaliserad, har en annan betydelse än inom det naturvetenskapliga/positivistiska forskningsparadigmet där forskaren kanske vill påvisa en orsak–verkan-relation.

I denna fallstudie är studiens fall (en skolas matematiklärare, som tillsammans med forskaren deltar i ett flerårigt reformprojekt och deras

elever) inte en statisk företeelse, *en* verklighet, som slutsatserna skulle kunna jämföras med. Studiens huvudsakliga syfte var att förstå skolmatematisk praktik med hjälp av de (föränderliga) föreställningar som fallets elever och lärare uttryckte över tid i samtal och intervjuer. Även om elever och lärare ofta tillskrev sina skolmatematiska erfarenheter likartade betydelser, så var de ändå inte nödvändigtvis lika och de förändrades under fallstudiens gång. En elevs upplevda skolmatematiska praktik, elevens verklighet, var likartad men inte lika en annan elevs. Det innebär att fallstudiens validitet måste granskas i relation till något annat än fallet och de multipla och föränderliga deltagarverkligheter som studerats. Flera författare föreslår, med hänvisning till Lincoln och Guba (1985), att detta "något annat" är *tillförlitlighet* (jfr "*credibility*", Merriam & Tisdell, 2016). Merriam (1994) konstaterar att validiteten i fallstudier bedöms "via tolkningar av forskarens erfarenheter i stället för i termer av verkligheten" (s. 177). Frågan som kan ställas är således om fallstudien är tillförlitlig mot bakgrund av dess *case record*, dvs. det empiriska material som tillsammans med forskarens "*impression and intuition*" (Wellington, 1999, s. 94) bildar fallstudiens analytiska ram. Jag granskar i följande avsnitt, enligt Bassey (1999), fallstudiens tillförlitlighet i relation till följande: insamlingen och analysen av det empiriska materialet, tolkningen av analytiska påståenden och rapporteringen av studien.

Fallstudiens *case record* har bildats över tid: under aktionsforskningsprocessen som pågick i tre år och vid retrospektiva vuxensamtal med fallstudiens tre fokuselever. Det betyder att tillförlitlighetskriteriet "*prolonged engagement with data sources*" (ibid., s. 76) har blivit uppfyllt. Jag hade tillräckligt med tid att lära känna fallet. Jag byggde upp en förtroendefull relation till dess lärare och deltagande elever. Och tiden medgav att jag kunde utveckla ett alltmer kritiskt förhållningssätt till skolmatematikens förgivettagna tänkesätt och förväntade sätt att agera. Även fallstudiens emergenta karaktär och deltagande tillvägagångssätt (Merriam, 1994, s. 180) ökar dess tillförlitlighet eftersom jag kontinuerligt tog fasta på och försökte förstå aspekter av skolmatematisk praktik som var viktiga för projekteleverna och deras lärare. Till exempel bidrog projektläraerna till studiens projektanteckningar, även genom möjligheten att kommentera aktionsforskningsprotokollen och fokuseleverna inbjöds till "*member checks*" i de tillbakablickande vuxensamtalen (Merriam & Tisdell, 2016, s. 246). I någon mån fungerade projektläraerna även som "*djävulens advokater*" (Bassey, 1999, s. 76) för fallstudien i och med att preliminära insikter från elevintervjuerna blev föremål för diskussion under aktionsforskningsprocessen.

Merriam och Tisdell (2016, s. 244) menar att triangulering är det vanligaste sättet att öka en studies interna validitet eller tillförlitlighet. Här tolkar jag betydelsen av begreppet triangulering enligt Bassey

(1999) "trying to strengthen confidence in a statement" (s. 76). Förtroendet för fallstudiens analytiska påståenden och därmed fallstudiens tillförlitlighet, har stärkts genom två trianguleringsmetoder: att föra samman flera informationskällor och att undersöka samma typ av projektmaterial på olika sätt (ibid., s. 76). Den första trianguleringsmetoden syns till exempel genom att material från elevintervjuer och klassrumsobservationer samt annat projektmaterial fördes samman under den analytiska processen. Den andra trianguleringsmetoden syns till exempel i att både synkront och diakront perspektiv använts vid analys och tolkning av elevintervjuerna. Insikter från de retrospektiva vuxensamtalen ökade stabiliteten i avhandlingens resultat (Wellington, 2000) eftersom jag kunde bryta mina preliminära tolkningar av fokuselevernas budskap i högstadieintervjuerna mot deras egna erfarenhetsanknutna tolkningar.

Slutligen kan påpekas att tilltron till avhandlingens resultat har stärkts genom att dess artiklar genomgått *peer review*, att fallstudiens *case record* är välordnat och att dess metodologikapitel tydligt redovisar för hur min teoretiska inriktning, mitt sätt att tänka som forskare om fallet, har inverkat på forskningsprocessen och därmed på dess slutsatser. Genom att vara tydlig och tillräckligt detaljerad i fallstudiens kontextuella, metodologiska och teoretiska redovisningar har jag gett läsaren en grund för att bedöma om studien i sin helhet är trovärdig.

4.7.2 Reliabilitet/Överensstämmelse

Reliabilitet som kvalitetskriterium är oupplösligt förknippat med validitet och därmed paradigberoende: det utgår ifrån möjligheten att forskare upprepade gånger kan studera en verklighet med bestämda metoder och dra samma slutsatser. Grundantagandet är att repetitionen ska visa slutsatsernas sanningshalt. Ett vanligt sätt att påvisa reliabiliteten för en intervjuundersökning är att återge procentandelar för den intersubjektiva överensstämmelsen mellan två kodare (Kvale, 1997, s. 213). För den här fallstudien, vars tillvägagångssätt utvecklades över tid i syfte att förstå skolmatematisk praktik ur deltagarnas perspektiv, är reliabilitet i ovanstående tekniska bemärkelse, med Merriams och Tisdells (2016) ord, "både inbillning och en omöjlighet" (s. 251). Det finns ingen standardmetod som skulle ha kunnat avslöja den inneboende betydelsen i eller de djupare implikationerna av det som sades vid ett aktionsforskningsmöte eller en intervju (Kvale, 1997, s. 164). De slutsatser som presenteras i avhandlingen är kontextuella och har vuxit fram inifrån på sätt som tidigare presenterats i detta kapitel. I sin helhet var fallstudien, som Simons beskriver (1996, s. 226), "a social process leading to a social product". Andra tolkningar och slutsatser är möjliga på basis av fallstudiens *case record*. Merriam och Tisdell (2016) menar, med hänvisning till Lincoln och Guba (1985), att man i stället för att fråga om en utomstående får samma resultat då hon

genomför forskningen på samma sätt, ska fråga om slutsatserna är meningsfulla mot bakgrund av studiens material och tolkningar (Merriam & Tisdell, 2016, s. 251). Står slutsatserna i överensstämmelse med de data som presenteras? Är fallstudien autentisk? Det bästa man kan göra som forskare för att hjälpa en utomstående besvara frågan om överensstämmelse är, enligt flera författare (Bassey, 1999; Merriam & Tisdell, 2016) att påvisa studiens tillförlitlighet och att tydligt förklara hur slutsatserna vuxit fram så som jag har gjort tidigare i detta kapitel.

4.7.3 Extern validitet/Överförbarhet

Att bedöma extern validitet handlar om att överväga i vilken utsträckning en studies resultat kan generaliseras till andra situationer. Även det här begreppet är paradigmberoende. Ovan har jag, med hänvisning till att undersökningen är lokaliserad inom det kvalitativa/tolkande paradigmet, klarlagt fallstudiens interna validitet i termer av tillförlitlighet.

Generaliserbarhet förutsätter tillförlitlighet. Det är inte någon idé att överväga om meningslös information kan generaliseras. I fallstudien fokuserar jag på ett unikt fall, men i likhet med Pring (2000) anser jag att det vore en villfarelse att påstå att fallets unikheter, på grund av att det växer fram ur deltagarnas erfarenheter, skulle betyda att fallet är unikt i alla avseenden (jmf "uniqueness fallacy") (ibid., s. 109). Det finns, hävdar jag, grundläggande likheter i skolmatematisk praktik mellan fallskolan och andra (finlandssvenska) skolor och mellan projektelevnas och andra elevers upplevda skolmatematiska praktiker. Generalisering till andra skolmatematiska praktiker och upplevelser är möjlig. I den här studien innebär generaliserbarhet *generaliserbarhet beträffande läsaren eller användaren* (Merriam, 1994, s. 187; Merriam & Tisdell, 2016, s. 256), dvs. att frågan om i vilken utsträckning resultaten är *överförbara* till andra skolmatematiska praktiker lämnas åt de personer som befinner sig i dem. Wellington (2000), som utgår från att fallstudiers unikheter ofta betraktas som en brist i forskningsansatsen, konstaterar att "ability to relate to a case and learn from it is perhaps more important than being able to generalize from it" (s. 96). Simons (1996) beskriver möjligheten att lära sig något generellt av det unika fallets komplexitet som en paradox "by studying the uniqueness of the particular, we come to understand the universal" (s. 231). Kilpatrick (1993) lyfter fram att studiens *originalitet* kan överraska och bidra till nya insikter hos läsaren även om situationen som studeras kan vara bekant (s. 25). Merriam (1994) använder begreppet *naturalistisk generalisering* för den generalisering som avhandlingens läsare erbjuds. Mot bakgrund av läsarens egen erfarenhet och genom att ta del av avhandlingens beskrivningar, berättelser och slutsatser får läsaren nya insikter om skolmatematisk praktik och elevers upplevelser.

Avhandlingen ger läsaren möjlighet till naturalistisk generalisering genom *ställföreträdande erfarenhet* (Bassey, 1999, s. 33): att lära sig något nytt genom att leva sig in i de erfarenheter som deltagarna i fallstudien uttrycker. Avhandlingens beskrivningar, berättelser och slutsatser kan generaliseras genom att läsaren blir överraskad, drar paralleller till andra, likartade, situationer och aktiviteter eller knyter an till sin egen eller andras skolmatematiska praktik. Därmed sporras läsaren till förändringar i de situationer där läsaren befinner sig. Till skillnad från experimentella studier har fallstudien en hög ekologisk validitet eftersom matematiklärare som läser avhandlingen kan förstå resultaten mot bakgrund av sina egna strävanden till förändring. Detta är en förståelse som kan ingjuta både moraliskt och kreativt mod (May, 1994) i deras fortsatta strävanden till förändringar i matematikundervisningen. Läsarna kan själva avgöra tillämpligheten av resultaten i sina egna klassrum, mot bakgrund av sina egna erfarenheter och utan att känna sig kraftlösa inför en teoretisk idealmodell av skolmatematisk praktik (Elliott, 1991, s. 47). I så fall kan avhandlingen utgöra ett bidrag till etableringen av en annorlunda och inkluderande skolmatematik.

5 Sammanfattningar av artiklarna [a] – [d]

För att ge läsaren en inblick i studiens långsiktiga dimension presenterar jag här utvidgade sammanfattningar med resultat av artiklarna [a]–[d]. Endast ett fåtal citat ur fallstudiens case record används i sammanfattningarna. För en bedömning av sammanfattningarnas tillförlitlighet hänvisar jag till originalartiklarna [a], [b], [c] och [d] samt till fallstudiens metodologikapitel, Kapitel 4.

5.1 Sammanfattning med resultat av [a]

Røj-Lindberg, A.-S. (2013). Finnish mathematics teachers talk about restructuring practice. *Networks. An On-line Journal for Teacher Research*, 15, 1–17. <https://dx.doi.org/10.4148/2470-6353.1055>

Ett stort internationellt och nationellt intresse har riktats mot finländska 15-åringars goda matematikprestationer i internationella utvärderingar såsom PISA (jfr Andrews, 2011; Brunell, 2007; Välijärvi et al., 2007; Simola, 2005). I artikeln anknyter jag de kunskapsmässiga framgångarna till finländsk utbildningspolicy under 1990-talet och till reformprojektet med dess aktionsforskningsprocess som en exempelarena för lärares läroplansanknutna förväntningar på och möjligheter till förändring av skolmatematisk praktik med elevens bästa för ögonen.

Artikeln bygger på sex lärarintervjuer vid fallstudiens inledning då lärarna gav sin syn på skolmatematisk praktik i förändring genom aktionsforskning. Artikeln belyser förändringsarbetet med hjälp av epistemologiska djupmetaforer och grundade teman konstruerade ur lärarnas berättelser, särskilt ur den stora mängd metaforiska uttryck med vars hjälp lärarna beskrev detta arbete. Allegoriskt utgör de två djupmetaforerna *transport-spår* och *saker-behållare* ett fönster till hur lärarna gestaltade de handlingsmönster som bildade eller kunde bilda skolmatematiskt arbete. Metaforer i språket säger enligt Lakoff och Johnson (1980) något om verkligheten personer föreställer sig genom de bilder som metaforerna innehåller. De metaforiska uttrycken i lärarnas berättelser belyser därför förgivettagna tänkesätt och förväntade sätt att agera inom skolmatematiskt arbete. (I texten anges utdrag ur lärarnas berättelser inom anföringstecken).

Skolmatematiskt arbete gestaltades av lärarna som en transport där matematiskt kunnande flyttas genom undervisning från läraren till eleven och där elever flyttas från en kunskapsnivå till en annan (jfr Mellin-Olsen, 1990). Också elevrelaterade handlingar framkom i lärarnas berättelser i form av transport/behållare metaforer. Lärarna beskrev hur de inom det skolmatematiska arbetet valde olika slags

tillvägagångssätt för att "ge" eller hjälpa elever "fylla på" kunskap i form av matematiska "verktyg" och "idéer". Lärarna beskrev hur den skolmatematiska praktikens elevrelaterade deltagandevillkor kan förändras genom att man varierar det skolmatematiska arbetets "tempo", genom att låta kunskapsöverföringen till elever gå "i olika takt", genom att "koppla på elevers hjärnor" och fylla i "luckor" eller tydliggöra "gap" i elevernas kunskaper, genom att "styra", "lyfta", "dra" och "puscha" elever "steg för steg" till större ansvarstagande och nya kunskapsnivåer under det skolmatematiska arbetet och genom att göra det möjligt för elever att själva "bestämma takten" för sitt deltagande i detta arbete.

Sedvänjors konserverande effekt (jfr Gregg, 1995) syns tydligt i lärarnas transportrelaterade metaforiska uttryck som även gestaltar det reflexiva i lärarens och elevernas handlande.

När eleverna fick bestämma hur det skulle vara så blev det lärarcentrerat för det var det de ville ha och det var ju förstås för att det var ju det jag var bra på. (Lärare Tom)

Lärarna berättade hur de "sitter fast i [den lärarcentrerade undervisningens] handlingsmönster", "kör fast", "stammar på stället" och kanske fortsätter följa den "enkla väg" som sedvänjorna tillhandahåller och därmed tillfredsställer elevernas förväntningar. Orsaken var att lärarna upplevde trygghet i att följa det kulturella manuskriptets sedvänjor (Stigler & Hiebert, 1997). De talade om det "normala" skolmatematiska arbetets "gamla hjulspår" och den lärarledda "frontala undervisningens" handlingsmönster som alla, lärare såväl som elever, var bekanta med. Samtidigt syntes i lärarnas berättelser en frustration över att otillfredsställande handlingsmönster, med ett snävt rum för eleverna att medverka, återkom under matematiklektionerna. Helst skulle lärare "köra en bättre grej" och få alla elever att "spela med" i nya handlingsmönster. Berättelserna belyste också en oro för att "svaga" elever med behov av "lotsning" riskerade komma att "hamna på efterkälken" på grund av förändringsarbetets metoder och bedömningspraxis, medan "starka" elever kunde bli "vinnare".

Under förutsättning att en lärare på ett medvetet sätt går in för att undersöka ifall den egna undervisningen är förvrängd på något sätt så kan aktionsforskning vara ett medel för förändring (Carr & Kemmis, 1986/1994). Carr och Kemmis beskriver hur det förvrängda kan ta sig uttryck i "taken-for-granted assumptions, habits, custom, precedent, coercion or ideology" (s. 192). Lärarna berättade om det kollegiala samarbetet som en värdefull dimension i aktionsforskningsprocessen och om nödvändigheten att ta del i förändringsarbete för att inte fastna i sådana otillfredsställande handlingsmönster. Men i deras berättelser syntes även en avigsida i aktionsforskningsprocessen. Det fanns ett

kollegialt tryck på inordning i metoder som man trodde skulle komma att stödja tanke- och förståelseutveckling speciellt hos "högpresterande" elever och hos de elever som "spelar med" i de nya handlingsmönstren. Samtidigt uttryckte lärarnas berättelse en lojalitetskonflikt och en oro över att dessa metoder kanske inte skulle erbjuda tillräckligt med rum för de "svaga" och "omotiverade" elevernas behov. Likartade iakttagelser gjorde Hundeland (2010) som i norsk skolkontext intervjuade matematiklärare om vad de lägger vikt vid i sitt förändringsarbete. Lärarna i Hundelands studie var i likhet med lärarna i denna studie angelägna om att stödja utvecklingen av alla elevers förståelse. Samtidigt kände de ett tryck på att följa ett visst tempo i undervisningen för att hinna gå igenom allt matematikinnehåll.

Ett centralt resultat i artikeln är den egna reflektionens roll för en lärares förändringsarbete. Aktionsforskningsprocessen medförde sannolikt en *inzoomningseffekt* som samtidigt stödde förändringsarbetet: vetskapen om att aktionsforskningsträffar med förbestämda teman fanns inbokade och där lärarna förväntades redogöra för sina erfarenheter gjorde sannolikt lärarna känsligare och mer medvetna om vad som hände i deras klassrum. Lärarnas berättelser visade också att lärares klassrumsanknutna förändringsarbete är så komplext att aktionsforskningens idé om förändring genom rationella och cykliska processer av typen planera, agera, reflektera och förändra (jfr Carr & Kemmis, 1983/1994; Elliott, 1991) förmodligen inte räcker till som modell för detta arbete.

5.2 Sammanfattning med resultat av [b]

Røj-Lindberg, A-S. (2011). Structure and closure of school mathematical practice – the experiences of Kristina. I P. Ernest (red.) *Philosophy of Mathematics Education Journal*, No 26 (December 2011). Tillgänglig på <http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/> [3.3.2016]

Artikeln redovisar hur projekteleven Kristina gestaltade skolmatematisk praktik vid fem intervjuer som omspannar hela hennes högstadietid.

Kristina hade ett bra betyg i matematik från lågstadiet, hon presterade på en hög nivå i matematikprovet MAKEKO 6/7 i början av årskurs 7. Under högstadiet bedömdes hennes matematikprestationer nästan uteslutande med goda vitsord. Hon beskrev sin matematiklärare som en utmärkt lärare och tillhörde den grupp elever i klassen som matematikläraren tilldelade omdömet "högpresterande". Som en röd tråd genom alla högstadieintervjuer går hennes upplevelse av matematik som ett skolämne man engagerar sig i därför att det är

viktigt för elever i det långa loppet att lära sig matematik, även om hon i likhet med många andra elever i samma ålder (jfr t.ex. Boaler, 1997; Nardi & Steward, 2003) beskriver matematik som ett tråkigt skolämne – tråkigare, osynligare och mer svårförståeligt än många andra skolämnena. Hon hade en stark tilltro till sin akademiska förmåga både i början och slutet av högstadiet. Men hennes positionsindex för upplevd skolmatematisk praktik var negativt ($-0,3$) vid inledningen till högstadiet och låg på ungefär samma nivå även i slutet av årskurs 9. Detta gör hennes erfarenheter speciellt betydelsefulla för föreliggande studie. Kristina började under högstadiet tvivla alltmer på det skolmatematiska arbetets relevans. I vuxensamtalet ungefär nio år efter hon slutat högstadiet hänvisade hon till speciella drag i skolmatematisk praktik som hade resulterat i att hon utslöt matematik ur sitt yrkesval trots att hon var motiverad och hade presterat väl under gymnasiet. I artikeln redovisas under temat *struktur och slutenhet* vissa av de drag i skolmatematisk praktik som för Kristina bidrog till upplevelsen av skolmatematisk praktik som en sluten och utestängande praktik. I det följande sammanfattar jag översiktligt dessa drag.

I Kristinas berättelse bildade skolmatematiskt arbete samma slags stabila ström av lektionsaktiviteter som även syntes i andra projektelevens berättelser. Det stabila handlingsmönstret betydde samtidigt att en vanlig matematiklektion alltid gick framåt linjärt, först den aktiviteten, sedan den aktiviteten osv., i ett tempo som upprepades lektion efter lektion. För Kristina bildade det återkommande handlingsmönstret och lektionstempot, med dess lärobok och teoriehäfte, en tydlig och trygg ram och en känsla av möjlig ordning på all den matematiska kunskap som hon hade ansvar för att erinra sig som resultat av att ta del i det skolmatematiska arbetet. Ur Kristinas synvinkel låg det på hennes ansvar att upptäcka logiken i och minnas den växande mängd regler och system, formler och räknesätt hon mötte. På lärarens ansvar låg att ange vilken matematisk kunskap som var legitim och att ge tydliga förklaringar till de exempeluppgifter som läraren skrev på tavlan. Läraren förväntades säga vilka exempeluppgifter och teoretiska aspekter eleverna skulle skriva ner i sina häften, medan det låg på elevernas ansvar att medverka i lektionens frågepraktik som kanaliserade deras svar mot lärarens tankeinnehåll. Under högstadiets sista termin betydde bytet av lärare att ännu mera lärandeansvar överfördes till eleverna. Enligt Kristina förväntades eleverna nu i högre grad än förr självständigt lista ut logiken bakom modelluppgifterna som läraren hade valt ut och sedan presenterat vid tavlan.

Kristinas skolmatematiska erfarenheter har en tydlig koppling till lärare och elever förväntade sätt att agera inom ramen för en uppgiftsdiskurs (jfr Mellin-Olsen, 1990, 1991, 2009). I Kristinas

berättelse trängde uppgiftsdiskursen igenom alla aspekter av det skolmatematiska arbetet. Uppgiftsdiskursen reglerade lektionens tempo och styrde elevernas kognitiva utmaningar. Den styrde vilket slags kunnande Kristina upplevde sig ha möjlighet att utveckla och visa fram genom att ta del i klassrummets skolmatematiska arbete. Den styrde eleverna till meningsskapande genom uppmärksamt lyssnande under offentlig, lärarledd interaktion i klassrummet (jfr Säljö, 2011) och, huvudsakligen, genom individuellt arbete oberoende av om uppgifterna fanns i läroboken eller i problemlösning och projektarbeten. Den bestämde takten för lärarens förklaringar som vanligen slutade förekomma då läraren ansåg att tillräckligt många elever hade löst en tillräcklig mängd med läroboksuppgifter.

Genomgående i den skolmatematiska praktik Kristina beskrev är dess individualistiska drag, vilket betydde att elevsamverkan med ett matematiskt innehåll under lektionstid för det mesta inskränkte sig till att jämföra uppgiftslösningar och svar. Kristina bidrog ibland offentligt med lösningar och idéer då läraren frågade efter sådana, eftersom det var ett självklart sätt för henne att visa att hon förstätt matematiken, men beskrivningar av regelrätta diskussioner kring ett matematiskt innehåll saknas i alla intervjuer. Under högstadiet framstår det allt tydligare att det matematiska innehållet utvecklades offentligt i interaktion med läraren. För Kristina växte därmed ett dilemma fram: hon medverkade endast perifert i detta offentliga samtal med läraren vilket innebar att känslan av utanförskap och bristande förståelse växte. Samtidigt som Kristinas känsla av att kunna och förstå minskade så blev hon alltmer övertygad om att hennes negativa upplevelser var en nödvändig del av just skolmatematiskt arbete och i kontrast till sådana skolämnen där hon kunde medverka i produktionen av ämnens handlingsmönster. En central slutsats som hävdas i artikeln är att Kristina upplevde skolmatematisk praktik som en sluten praktik och att praktiken stängde henne ute genom det upplevda kravet på att elever ska komma ihåg regler, procedurer och typer av uppgifter så väl att korrekta procedurer ska kunna kopplas till uppgiftstyper för att hitta fram till rätt svar på varje uppgift.

5.3 Sammanfattning med resultat av [c]

Røj-Lindberg, A-S. (2010). Varför vänder "framgångsrika" högstadieelever ryggen till matematiska praktiker? I M. Asiakainen, P. Hirvonen, K. Sormunen (red.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa* (s. 17–37). Joensuu: University of Eastern Finland.

Den finländska grundläggande matematikutbildningen har sedan år 2000, då Organisation for Economic Cooperation and Development

(OECD) inledde de s.k. PISA-undersökningarna (Programme for International Student Achievement), tillskrivits metaforer som framgångssaga och mirakel (jfr Simola, 2005; Välijärvi et al., 2007). Samtidigt visar PISA-undersökningar (jfr Brunell, 2007, Kupari, et al., 2013; Välijärvi, et al., 2007) och andra internationella jämförelser (jfr Kupari, Vettenranta & Nissinen, 2012) att finländska elever inom sina lärandebanor uttrycker större negativitet än elever i många andra länder. Kupari, Vettenranta och Nissinen (2012) som jämfört åttondeklasselävers attityder i 45 länder inom ramen för TIMSS 2011 (Trends in International Mathematics and Science Study) konstaterar att endast en tiondel av de finländska eleverna sade sig tycka om matematik. Andelen elever som tyckte om matematik var högre i de flesta andra länder som deltog i undersökningen. Brunell (2007) fann en liknande trend bland de finlandssvenska 15-åringar som tog del i PISA-undersökningen år 2003. Genom att ta del i skolmatematiskt arbete lär sig finländska elever prestera och att betrakta matematik som ett viktigt skolämne, men paradoxalt nog riskerar många elever med goda prestationer samtidigt utveckla negativa upplevelser. I värsta fall leder situationen till att prestationsmässigt framgångsrika elever aktivt väljer bort matematiken ur sitt liv på grund av det skolmatematiska arbetets natur (jfr Kristina i [b]) eller av en framväxande övertygelse om att inte vara skapt för medverkan i matematiska aktiviteter.

I det följande sammanfattar jag först kort tidigare forskning för att belysa komplexiteten i begreppet skolmatematisk praktik. Med hjälp av inblickar i de tre framgångsrika fokuseleverna Joakims, Kristinas, Nettes lärandebanor illustrerar jag sedan särdrag i skolmatematisk praktik som hjälper oss att förstå ovanstående paradox. Dessa tre elever började över åren forma olika betydelser av statusen "att vara framgångsrik". För närmare inblick i teoriram och metodologi hänvisar jag läsaren till den ursprungliga artikeln och till fallstudiens metodologikapitel.

Studier har visat att det finns kopplingar mellan skolmatematiskt arbete och en deltagares upplevelser, bland annat i relation till bedömningspraxis (Boaler, 1997; Reay & Wiliam, 1997), lärobokens och uppgifters position (Boaler, 1997; Ewing, 2004; Mellin-Olsen, 1990), klassrummets gemenskap, sociala rymlighet och mänskliga relationer (Angier & Povey, 1999; Boaler, 1997; Boaler & Greeno, 2000; Dance, 1997) och till lärandets och lärandeuppgifternas art (Boaler, 1997; Nardi, Steward, 2003). Även myter, som studier visat existerar, är möjliga källor till negativitet. Sådana myter är att legitimt skolmatematiskt handlande inte tillåter kreativitet utan består av memorering av regler och ledtrådar och att framgångsrik matematisk verksamhet kräver en viss sorts personlig disposition eller medfödd förmåga (jfr Nardi & Steward, 2003; Solomon, 2007). Kaasila (2000) och Pietilä (2002) hittade likartade upplevda myter hos finländska

klasslärarstuderande vid övergången från gymnasiet. I Kaasilas fallstudie berättar studerande bland annat om snabbt räknande och memorering som framgångsfaktorer under deras skoltid (Kaasila, 2000). I Pietiläs studie beskrev närmare en tredjedel matematiken som svår och otrevlig och nästan alla hade ytliga kunskaper i matematik (Pietilä, 2002).

Både ur reformprojektets synvinkel och ur akademisk synvinkel var de tre fokuseleverna framgångsrika under och efter den grundläggande utbildningen. I linje med reformprojektets målsättningar fortsatte de under de tre år aktionsforskningsprocessen pågick vara inställda på aktiv medverkan i skolmatematiskt arbete genom att ta ansvar och engagera sig för att lära, förstå och prestera. Alla tre fortsatte efter studentexamen sina akademiska karriärer med framgångsrika universitetsstudier. Kort sagt, de var, som artikelrubriken säger, framgångsrika. Reformarbetet kan de facto betraktas som en framgångssaga i relation till dess avsikter. Men samtidigt visar elevernas berättelser att framgången grumlades av långsiktiga förluster, vilket speciellt tydligt syns i Kristinas berättelse (se även [b]) och i Nettes berättelse. Både Kristina och Nette tog som vuxna avstånd från den skolmatematiska praktik de erfarit, men på något olika grunder. Joakim tog däremot inte något explicit avstånd från skolmatematisk praktik; tvärtom ser han som vuxen tillbaka på ett viktigt och relevant skolämne som han alltid hade tyckt om och som aldrig blev problematiskt för honom. Hans personliga förlust var av en helt annan karaktär än de förluster som uttrycktes i Kristinas och Nettes berättelser, men den fanns där och syntes till exempel som skam (jfr Bibby, 2002) inför risken att göra misstag då teoretiskt matematiskt kunnande skulle omsättas i praktisk handling.

Det finns många likheter i de tre elevernas berättelser och det är tydligt hur likheterna knyter an till ett skolmatematikens kulturella manus (Stigler & Hiebert, 1997). Alla tre beskrev som självklara och stabila särdrag i skolmatematisk praktik dess bok/uppgiftsstyrning, dess tempo/linjäritet och dess begränsade rum för elever att utforska det matematiska kunnandets sociala nytta. Skolmatematiskt arbete var i elevernas berättelser lika linjärt och förutsägbart som att lärobokens uppgifter i andan av ett uppgiftsparadigm (Skovmose, 2000) följer på varandra i räckor av uppgifter som har med just det avsnitt i boken att göra som behandlas under matematiklektionen. Nästa lektion kommer nya räckor av uppgifter emot och rummet för att avvika från handlingsmönstret och bokens uppgifter är litet. Kristinas och Nettes avståndstaganden var tydligt sammankopplade med dessa särdrag i skolmatematisk praktik som även kom att påverka deras vuxenliv på avgörande sätt.

Både under högstadietiden och som vuxen förklarade Kristina att matematik är ganska tråkigt, men viktigt och att hon tyckte om

matematikboken med alla dess uppgifter. Hennes erfarenhet var att matematiska ämnen kunde höras till skolans roligaste ämnen i situationer då hon presterade det som förväntades av henne inom ramen för det skolmatematiska arbetets tempo. Det gällde att lyckas, hinna med och kunna räkna. Ändå fattade hon till slut ett aktivt beslut att välja bort de matematiska ämnena för att i stället gå in i ett yrkesområde hon beskrev som diskussionsinriktat och som saknade den skolmatematiska praktikens slutna karaktär (jfr [b]).

Nettes berättelse var inledningsvis i början av årskurs sju en fullständig framgångsberättelse såväl akademiskt som i termer av acceptans av reformprojektets målsättning om att elever skulle tänka självständigt och matematiskt korrekt. Precis som Kristina konstaterade Nette att matematiken i skolan kan vara rolig då man kan den. Men under högstadiet ändrade hennes berättelse ton och kulminerade i ett desillusionerat budskap om matematikämnets brist på variation och med kritik av en undervisning där hon avkrävdes inordning utan förståelse under regler och modeller skapade av andra. Den vuxna Nettes besvikelse över ett onyttigt och obegripligt kunskapsinnehåll och oinspirerande läroböcker var total. Hon ville få möjlighet att fördjupa sig i områden utanför en matematik som består av [bara] siffror och formler och att uttrycka egna åsikter via matematiskt kunnande. Detta slags rum förblev dock starkt begränsat i en skolmatematik där eleverna förväntades sitta och räkna uppgifter hit och dit i matteböcker där alla uppgifter [såg] likadana ut och där kunskapens legitimitet, enligt Kristina, bestämdes av sådant som vi håller på med i teorihäftet. Projektarbeten, som alla tre ansåg vara intressanta, omväxlande och annorlunda, låg ur Kristinas och Nettes synvinkel tydligt utanför denna legitima kunskapsfär medan projektarbete ur Joakims synvinkel hade inneburit tillhörighet i en gemenskap för privilegierade elever.

Varför uppstod då ovanstående skillnader i elevernas upplevda skolmatematiska praktik? Och varför vände inte Joakim ryggen till skolmatematisk praktik på samma tydliga vis som Kristina och Nette? Svaret på frågorna står att finna i att de tre eleverna betraktade den skolmatematiska praktikens särdrag ur olika positioner i relation till de gemenskaper där det legitima matematiska kunnandet underhandlades och där läraren tog del. Joakim och Nette fanns båda inledningsvis i kärnan för dessa gemenskaper, som under högstadiet ur Joakims synvinkel upprätthölls såväl av deltagarnas acceptans och tillit till läraren som av en belönande lekfullhet och extraordinära matematiska utmaningar. Tack vare reformprojektet kände sig Joakim som en privilegierad elev. Nettes berättelse, som började i en gemenskap där legitim matematik konstruerades, framskrevs under högstadiet i växande grad ur en position i gemenskaper där tillhörigheten formades

av oss–som–aldrig–tycktt–om–matte och där läroboken bildade ett allt tydligare fönster mot de gemenskaper där legitim matematik konstruerades och som hon började relatera alltmer negativt till. Iögonenfallande i Kristinas berättelser under hela högstadiet var hennes konstant starka acceptans, tillit och lojalitet gentemot gemenskaper där läraren ingår. Hennes deltagande i de gemenskaper där det legitima matematiska kunnande underhandlades var marginellt under hela högstadiet och betydde en samtidig tillhörighet i matematiska gemenskaper som bildades av personer som accepterar regler och modeller som givna av andra.

Sammantaget illustrerar de tre elevernas olikartade lärandebanor betydelsen av att elever känner sig delaktiga och engagerade i gemenskaper där legitimt matematiskt kunnande underhandlas.

5.4 Sammanfattning med resultat av [d]

Røj-Lindberg, A.-S. (2015). School mathematical practices as experiences of identity work: the learning journeys of three students. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(2), 5–26.

Under fallstudiens andra skede försköts forskningsprocessens fokus från lärarnas förändringsarbete ur elevperspektiv till att förstå projektelevers gestaltning av skolmatematisk praktik i förändring och hur deras upplevda skolmatematiska praktik konstituerades över tid (se fallstudiens metodologi). Artikeln är ett slutligt resultat av detta emergenta perspektivbyte i forskningsprocessen och den relaterar till och överlappar artiklarna [b] och [c]. I artikeln illustrerar jag med hjälp av konstruerade berättelser det olikartade deltagande som de kunskapsmässigt framgångsrika fokuseleverna Joakim, Kristina och Nette erfor under årskurserna 7–9 och relaterar till som vuxna.

Under tiden efter fallstudiens inledning har intresset för elevers deltagande och identitet i relation till matematik ökat (jfr Black, Mendick & Solomon, 2009). Till skillnad från många andra studier är artikelns konstruerade berättelser inte baserade på matematisk identitet eller identitetsarbete som en teoretisk konstruktion *a priori* (se till exempel Hossain, Mendick & Adler, 2013; Lutovac, 2014; Lutovac & Kaasila, 2011; Sfard & Prusak, 2005). Begreppsliggörandet av elevers upplevda skolmatematiska praktik som *identitetsarbete* kom in i ett sent skede av analysarbetet för att gripa tag i subtila processer som föreföll medverka till att elevernas relationer till skolmatematiskt arbete med tiden utvecklades åt olika håll.

Grovt taget beskriver begreppet *matematisk identitet* en persons identifikation av sig själv i relation till (skol)matematiskt arbete (i vilken utsträckning personen ser sig själv som smart, engagerad, svag i matematik etc.) och hur andra identifierar personen i relation till detta

arbete (i vilken utsträckning personen av andra betraktas som högpresterande, tyst, intresserad, bråkstake etc.) (jfr Boaler & Greeno, 2000; Grootenboer, Smith & Lowrie, 2006). *Erfaret identitetsarbete* utgår i artikeln från lärande som deltagande och elevernas upplevda möjligheter att engagera sig matematiskt inom ramen för de handlingsmönster som över tid uppfattades som konstituerande för skolmatematiskt arbete. Inom den upplevda skolmatematiska praktiken växte fokuselevernas matematiska identiteter fram som en ständigt pågående process. Artikelns konstruerade berättelser är därför berättelser om elevernas "identity-in-the-making" (George, 2009, s. 202; jfr även Wenger, 1998).

Härnäst återkommer jag först till artikelns bakgrund och till tidigare forskning av särskild betydelse för artikeln. Eftersom elevers identitetsarbete så som det framkommer i den här studien anknyter till reformprojektet flikar jag sedan in en påminnelse om reformprojektets syften. Artikelns konstruerade berättelser utgör *i sin helhet* en väsentlig del av fallstudiens resultat och bildar en central grund för fallstudiens slutsatser. En sammanfattad version gör inte elevernas identitetsarbete rättvisa. Jag uppmanar därför läsaren att ta del av originalartikeln.

Under det analytiska arbetets förlopp hade jag blivit alltmer övertygad om att olikheterna i elevernas lärandebanor var beroende av den skolmatematiska praktik de upplevt. Så småningom kunde jag dra följande slutsats: *inom ramen för förgivettagna tänkesätt, tillvägagångsätt och sätt att agera inom skolmatematiskt arbete fullföljdes processer av en subtil natur som ur elevernas synvinkel var oupplösligt förenade med hur de identifierade sig själva och sina matematiska möjligheter. De identitetsskapande processernas subtilitet och natur började över tid växa fram ur elevsamtalen som olikheter (och likheter) i elevernas upplevelse av tillhörighet i matematiska gemenskaper där socialt accepterat matematiskt kunnande underhandlades. Elevsamtalen visade på existensen av olika typer av matematiska gemenskaper, men fallstudiens syfte var inte att beforska dylika. Dess case record saknar material över tid, såsom videobandningar av klassrumssamtal, som skulle göra det möjligt att illustrera fallstudieelevernas faktiska medverkan och engagemang i lärandegemenskaper där socialt accepterat matematiskt kunnande underhandlades. Det är dock en entydig insikt från annan forskning att skolmatematikens handlingsmönster och elevers föreställningar om sig själva och sina matematiska möjligheter är reflexivt relaterade fenomen. Studier har visat att elever och lärare gemensamt upprätthåller de processer som konstruerar elevers matematiska identiteter i klassrummet, såsom inom ramen för klassrummets bedömningspraxis (jfr Reay & Wiliam, 1999), lärobokens användning (jfr Ewing, 2004), olika typer av elevgrupperingar och klassrumssamtal (jfr Bishop, 2012; Black, 2004; Boaler, 1997; Hodgen & Marks, 2009; Langer-Osuna, 2011; Wood, 2013).*

Med tiden kan elevers upplevda skolmatematiska praktik förtingligas till förhållandevis stabila identitetskonstruktioner i relation till skolmatematiskt arbete (jfr Kaasila, 2000; Langer-Osuna, 2011; Sfard & Prusak, 2005).

Lärarna formulerade tydliga mål för reformprojektet. Lärarna skulle genomföra en matematikundervisning som erbjuder elever möjlighet att vara aktiva genom att ta ansvar för och medverka till att identifiera legitimt matematiskt kunnande, även genom problemlösning och projektarbeten och genom helklassdiskussioner. Syftet var att låta eleverna själva upptäcka viktiga matematiska strukturer ur exempel och samla dessa som regler och modeller i ett teorihäfte. Elevbedömningen skulle breddas, såsom genom elevernas skriftliga prestationer: via förklaringsuppgifter i prov, projektarbeten som hemuppgifter och självständig problemlösning hemma eller i klassen; och lärarna skulle visa större känslighet inför hur elevernas matematiska tänkande utvecklades. Förutom dessa mer eller mindre explicita metoder och tillvägagångssätt ger de djupmetaforer och grundade teman som presenteras i artikel [a] ytterligare fingervisningar om vilka handlingar lärarna tänkte sig kunna agera ut i klassrummet i syfte att förverkliga reformprojektets mål och för att beakta förväntningarna i den nationella läroplanen Ggl 1994 och i skolans läroplan.

I alla högstadieintervjuer uttalade de tre fokuseleverna en delad strävan att ta ansvar och engagera sig för att lära, förstå och prestera matematisk kunskap. Elevernas strävan var att medverka i gemenskaper där socialt accepterat matematiskt kunnande underhandlades. Detta konvergerar mot reformprojektets mål. Men i det långa loppet och uttryckt med hjälp av den transportmetafor som projektlärarna själva använde (se [a]) så divergerade elevernas resor för lärande och med stora skillnader i slutdestination som följd.

Som vuxen och relativt ny inom en teknisk bransch såg Joakim tillbaka på skolmatematisk praktik med en identitet som vuxit fram i gemenskaper för *oss-som-kommer-fram-till-regler* eller som han också säger, för *oss-skärpta*. Redan den första högstadieintervjun med Joakim innehöll budskap om hans identifiering med denna gemenskap, då beskriven som *[oss]-som-kommit-underfund-med-hur-viska-räkna*. Hans fortsatta upplevelser visade hur han konstant över åren identifierade sig inom en gemenskap av matematiskt smarta personer som, ofta tillsammans med läraren, bildade lekfulla gemenskaper där alla bidrog till produktionen av viktig – och därmed legitim – matematik och där medlemmarnas kunnande synliggjordes. Ur Joakims synvinkel betydde leken inom dessa matematiska gemenskaper spänning och matematiska utmaningar. Den betydde att kunna föreställa sig ett riktigt behov för det skolmatematiska arbetets

regler och modeller och möjlighet att medverka i ett stimulerande framgångsspel som han kunde kontrollera, där han var säker på att bli belönad och aldrig skulle behöva känna någon verklig risk att uteslutas. Belöningen kom såväl i form av små gester och verbala markeringar från lärarens sida som i form av legitima prestationer och höga vitsord och stöd hemifrån. Det stöd Joakim fick i skolan och i hemmiljön bekräftade kontinuerligt hans identifiering med och medlemskap i en matematisk gemenskap för dem som aldrig upplevt matematik som ett problematiskt ämne.

Högstadietintervjuerna med Kristina visade att hennes upplevda skolmatematiska praktik i hög grad betydde identifiering med matematiska gemenskaper där personer kopierar och på rätt sätt använder den viktiga matematik andra har producerat (se även [b]) Hennes identitetsarbete under högstadiet har negativa drag, men betydde främst tillit, lojalt engagemang och inordning i aktiviteter kantade av prestationspress och risk att inte hinna greppa förståelsen av ett kunskapsinnehåll hon inte hade medverkat till. Hon identifierar sig själv som kunnig i relation till hemmets matematiska gemenskap, men den kedja av identifikationer som växte fram över åren formades främst genom hennes marginella deltagande i klassrummets gemenskap för *oss-som-kommer-fram-till-regler* och av en känsla av gemenskap med personer som inte klarar av att internalisera och tillämpa dessa regler i den takt och med den säkerhet som krävs. Den lekfullhet som Joakim beskriver som karaktäristisk för en gemenskap av matematiskt smarta personer är synlig i klassrummet, men Kristina medverkar inte i leken. I retrospekt och ur pedagogens synvinkel betraktar hon sitt deltagande i regelaktiviteter i gemenskapen för matematiskt smarta personer som icke önskvärt på grund av aktiviteternas bristande kreativa och sociala rymlighet (jfr Angier & Povey, 1999) och uttrycker sin matematiska identitet som *Jag tyckte om matematik, men det var inte för mig*.

De lärandegemenskaper Nette anknöt till ändrade gradvis karaktär över åren och därmed även hennes identitetsarbete. Kontrasten mellan sjundeklassarens identifiering med gemenskaper för självständiga tänkare befriade från lågstadiets räkna-sidor-deltagande och den vuxna utvecklingspsykologens beskrivning av sig själv som en *person-utan-mattehuvud* är markant, men ändå inte överraskande. Från medlemskap i gemenskaper för skapare och användare av viktig matematik – personer som förstår de matematiska idéer de tillämpar – identifierar hon sig över åren allt starkare med gemenskaper där hennes möjlighet till förståelse och engagemang i produktionen och tillämpningen av viktig matematik är kringskuren av flera skäl, varav lärarens bristande deltagande är ett. Med lärarens makt över skolmatematikens regler och modeller följer, enligt Nette, en självklar skyldighet att överföra reglernas och modellernas betydelse till eleverna med hjälp av tydliga förklaringar. Ett annat skäl är det

legitima skolmatematiska arbetets befängda, monotona och tråkiga natur. Nette lärde sig med tiden se en gräns mellan de matematiska gemenskaper för exkluderade personer hon allt starkare identifierade sig med och sådana lekfulla gemenskaper där deltagarna medverkar till produktionen av viktig, legitim, matematisk kunskap och där medlemmarnas kunnande synliggörs. Hon såg denna gräns förtingligas i klassrummet genom lärarens och elevers handlande. Men hon såg gränsen förtingligas även genom att det legitima skolmatematiska arbetet inte tillät henne samma slags tankeengagemang och förståelsemöjligheter som reformprojektets projektarbeten.

Tillsammans med artiklarna [b] och [c] ger de tre konstruerade berättelserna i artikel [d] läsaren en förståelse för hur projektelevens upplevda skolmatematiska praktik bildades över tid. Speciellt belyser artikel [d] varför vissa prestationsmässigt framgångsrika högstadiel elever över tid kan börja beskriva sin relation till matematik i form av avståndstaganden medan andra knyter an till skolmatematiskt arbete i mer inkluderande termer. Det mest avgörande förefaller vara elevens och lärarens ömsesidiga och tillitsfulla medverkan (eller inte) i lekfulla och matematiskt utmanande gemenskaper där legitima skolmatematiska kunskaper och förståelse växer fram. Joakim, som berättade att matematik aldrig blev ett problematiskt ämne för honom, talade med värme om en gemenskap, där även läraren hade ingått, för de som kommit fram till regler för hur man ska göra, för de skickliga, för de smarta, för de som kan. Även det legitima skolmatematiska kunnandets natur spelar roll. Kristina berättade att hon hade valt bort en matematik som kännetecknades av rätta svar och ingen möjlighet att diskutera sig fram. Nette beskrev hur motivet att ta del i de gemenskaper där matematikens regler och modeller formuleras och används hade försvunnit över åren främst för att dessa gemenskaper inte samtidigt erbjöd henne rum att utforska det matematiska kunnandets sociala nytta. Ytterligare innebar skolmatematikens starka uppgiftsdiskurs och linjära natur, för vilken läroboken var en stark symbol, såväl trygghet som exkludering. Nette tog avstånd från uppgiftsdiskursens läroboksdrivna arbete. Kristina beskrev tryggheten i en lärobok där uppgifterna kom den ena efter den andra, samtidigt som hennes beslut att exkludera matematik ur sitt yrkesliv var grundat i uppgiftsdiskursens typiska kännetecken: modellexempel, uppgifter och rätta svar.

6 Slutsatser och diskussion

I detta avslutande kapitel presenterar jag två slutsatser som samtidigt utgör studiens huvudsakliga bidrag till forskningsfältet. Kapitlet avslutas med en kort reflektion kring lärdomar från studien i förhållande till dagens situation samt förslag till vidare forskning

6.1 Förändringsarbete och bestående sedvänjor

Reformspecifika metoder förblev i marginalen till skolmatematiska handlingsmönster med en anmärkningsvärt bestående natur. Via reformprojektets metoder såsom projektarbeten och problemlösning erbjöds eleverna en uppskattad möjlighet till engagemang utöver lärobokens uppgifter. Särskilt projektarbeten upplevdes av eleverna som intressanta och erbjöd rum för egna synpunkter. Högstadiesberättelserna och vuxensamtalen med fokuseleverna Joakim, Kristina och Nette visade dock att reformprojektets tillvägagångssätt, inte upplevdes ha samma giltighet inom det skolmatematiska arbetet som matematiklektionens återkommande aktiviteter. Detta gällde ändå inte den bedömande funktionen i reformprojektets tillvägagångssätt. I likhet med elever i andra studier så upplevde Joakim, Kristina och Nette under sin högstadietid deltagandet i det skolmatematiska arbetets aktiviteter som viktigt, men även med tråkiga inslag (Kislenko, Grevholm & Lepik, 2007; Lewis, 2016). Deras berättelser beskrev en relevansparadox (Niss & Jensen, 2002, s. 154) i form av ett upplevt gap mellan matematiken i skolan, som de kunde betrakta som nyttig men subjektivt irrelevant och matematiken på ett samfundsmässigt plan, där matematikkunskaper föreställdes vara både viktiga och personligt nyttiga.

Under de tre år aktionsforskningsprocessen pågick gestaltades det skolmatematiska arbetets handlingsmönster på ett likartat sätt i elevernas berättelser och även i lärarnas berättelser. Berättelserna påvisade handlingsmönstrets stabilitet på flera sätt och inom ramen för en uppgiftsdiskurs (Mellin-Olsen, 1990, 1991).

Handlingsmönstrets stabilitet garanterades av fem typer av *återkommande lektionsaktiviteter* typiska för matematikundervisning även i andra finländska högstadier (jfr Savola, 2010; Røj-Lindberg, 1999) och i andra länder (jfr Bodin & Cappioni, 1996; Boaler, 1997; Stigler & Hiebert, 1997, 1999; Johansson, 2006):

1. att läraren klarlägger lektionens kunskapsinnehåll genom att gå igenom det vid tavlan,
2. att kommunikationen mellan lärare och elev främst sker så att läraren förklarar och ställer frågor, eleverna lyssnar och svarar,
3. att elever tillägnar sig och tillämpar lektionens kunskapsinnehåll,

4. att eleverna arbetar individuellt med uppgifter ur matematikboken,
5. att elevernas arbete fortsätter med hemuppgifter. Hemuppgifterna kan granskas muntligt eller skriftligt följande lektion ifall eleverna inte befinner sig på olika ställen i kunskapsinnehållet.

Ett stort antal studier har visat hur samarbete elever emellan och möjligheten att dela matematikrelaterade idéer med andra i klassrummet kan få en positiv inverkan på elevers motivation att lära sig och på deras upplevelse av matematiskt kunnande (jfr Angier & Povey, 1999; Boaler, 1997, Boaler & Selling, 2017, Boylan, Lawton & Povey, 2001; Dance, 1997; Waege, 2007). Lektionsaktiviteterna i de reformklassrum som jag studerat saknade vanligen samarbete elever emellan, förutom informellt utbyte av uppgiftslösningar. Det skolmatematiska arbetets individualistiska drag visade sig också i alla elevberättelser (jfr Nardi & Steward, 2003). Berättelserna saknade även belegg för förekomsten under lektionerna av en kommunikation med upprepade växlingar mellan klarläggande, tillägnande och tillämpande eller på den blandade typ av kommunikation mellan lärare och elever som uppstår då en elev tar lärarens roll genom att till exempel presentera något vid tavlan som diskuteras gemensamt i klassen. I [c] beskriver Nette som niondeklassare bara att räkna hela tiden som ett typiskt drag i högstadiets matematiklektioner oberoende av deras kunskapsinnehåll. Mot den bakgrunden innebar deltagande för fallstudiens elever i högre grad elevers lyssnande på lärarens förklaringar av kunskapsinnehållet än det slag av elevers och lärares ömsesidiga och respektfulla lyssnande på varandra som Dance (1997) fann vara typiskt för en framgångsrik klassrumskultur.

Fallstudiens elever var mycket tydliga med att det är läraren som har huvudansvaret för att förklara och argumentera för de matematiska idéer och det kunskapsinnehåll elever förväntas ta över. Ansvar för att bedöma kunskapens legitimitet förväntades således ligga utanför eleven, hos läraren och den som formulerade frågan och/eller uppgiften. I elevernas upplevda skolmatematiska praktik var lärare och elever inte jämlika kunskapsauktoriteter i bemärkelsen att alla kollektivt skulle ha förväntats medverka genom att dela och granska framväxande matematiska idéer och bidra till ett pågående matematiskt (problemlösnings)-samtal i klassen (Lampert, 2001). Ur elevernas synvinkel var inte ens kunskapsauktoritet genom kollektivt ansvar för att bedöma kunskapens legitimitet aktuell eftersom det individuella tänkandet tillsammans med lyssnande och lärarens förklaringar i princip förväntades bidra till exakt all kunskap elever förväntades ta över. Eleverna såg som ett primärt och individuellt ansvar att lyssna och därmed delta i det skolmatematiska arbetet. Lyssnande och enskild koncentration kunde, enligt eleverna, ge eleven tillgång till de matematiska idéerna och deras betydelse. Att utföra hemuppgifter var

även ett sätt för elever att individuellt visa sitt ansvarsfulla deltagande. Det fanns inget legitimt socialt rum inom skolmatematiskt arbete för osäkert individuellt kunnande att växa till säker kunskap för alla elever (jfr Angier & Povey, 1999). Det fanns heller ingen förväntan om att alla elever skulle gå oväntade vägar med kunskapen för att göra den till sin (Mellin-Olsen, 1991). Eleverna saknade därmed behov av medverkan genom att dela med sig av, argumentera kring och utveckla det matematiska kunskapsinnehållet med andra elever eftersom de var vana med att det var läraren som vid behov skulle hjälpa dem att komma underfund med hur uppgifter skulle lösas.

Elevernas berättelser i denna studie visar hur deltagande i klassrumskommunikationen genom tystnad i stället för att svara på lärarens frågor kan vara en elevs sätt att etablera en kunskapsauktoritet som annars var förbehållen läraren. En elev som är säker på sin kunskap kan sakna behov av att besvara lärarfrågor vars upplevda avsikt är att bedöma existensen av denna säkerhet. För en elev som inte är säker på sin kunskap kan tystnad däremot vara ett sätt att skydda sitt egenvärde i ett klassrum där säker kunskap upplevs vara norm (jfr Boylan, 2004; Yackel & Rasmussen, 2002).

Läroboken, läroboksuppgifterna och läraren tillskrevs av studiens lärare och elever en kunskapsauktoritet som varken lärare eller elever ifrågasatte. Uppgiftsdiskursen (Mellin-Olsen, 1990, 1991) bildade en tydlig ram för skolmatematiskt handlande i samtliga projektdeltagares berättelser. Detta är typiskt för skolmatematiskt arbete inom ett uppgiftsparadigm (Boaler & Greeno, 2000; Skovsmose, 2000).

I projektlärarnas planeringsarbete strukturerades det skolmatematiska arbetet inom ramen för uppgiftsdiskursen så att bokens matematikinnehåll och övningsuppgifter fördelades på de lektioner som föll mellan två provtillfällen. I likhet med lärarna i Mellin-Olsens studie (1991) beskrev projektlärarna skolmatematiskt arbete som en transport där lärobokens matematikinnehåll och övningsuppgifter fungerade som en garant för att transportens mål skulle kunna nås och för att elever skulle tillägna sig sådana matematiska redskap och ett sådant matematiskt tänkande som lärarna antog att eleverna skulle behöva för att klara sig framåt i livet. Inom uppgiftsdiskursen bildades det skolmatematiska arbetet som en linjär steg-för-steg-process med räckor av typexempel och bokuppgifter med förbestämda svar. Matematiskt tänkande framställdes av studiens elever främst som en färdighet att tolka de externt givna uppgifterna inom denna linjära process och att kunna välja de rätta lösningsmetoderna. Elevernas generella förväntan var att deras deltagande stöds inom uppgiftsdiskursen så att förståelse för ett gammalt kunskapsinnehåll hinner etableras innan de möter ett nytt kunskapsinnehåll.

Inom ett handlingsmönster som avviker från uppgiftsdiskursen har elever frihet att undersöka kunskapsinnehållet (jfr Skovsmose, 2003; Boaler, 1997). Studiens elever upplevde att handlingsfrihet fanns inom uppgiftsdiskursen även om den var begränsad. Handlingsfrihet kunde betyda att avstå från att bidra till frågepraktiken eller frihet att räkna framåt i boken eller frihet att själva hitta på uppgifter att räkna, såsom i vissa projektarbeten. Men handlingsfriheten var vanligen begränsad till lärarens frågor och till de uppgifter som läraren hade pekat ut eller formulerat och elevernas frihet att ta ansvar för sitt eget tänkande blev därmed en pseudofrihet.

Elevernas berättelser visade också att famlande, felsvar, misstolkningar eller utvidgade tolkningar av matematiken i relation till uppgifter ur matematikboken inte betraktades som legitima prestationer. Berättelserna illustrerar samtidigt begränsningen i begreppet didaktiskt kontrakt (Brousseau, 1984). I de situationer som beskrivs av eleverna finns inte nödvändigtvis en sådan ömsesidighet i lärares och elevers föreställningar som begreppet utgår ifrån. Begreppet *matematisk gemenskap* så som det används i denna studie ger större möjligheter att att förstå klassrumssituationer som arenor för deltagande ur elevers (och lärares) synvinkel.

Uppgiftsdiskursen betydde ett tempo med ett nytt kunskapsinnehåll de flesta lektioner. För att lyckas som elev och få positiva erfarenheter gällde det att hinna med och upptäcka det avsedda svaret eller den avsedda regeln innan eleven mötte nästa fråga eller uppgift (jfr [d], s. 16). Ur elevers synvinkel bidrog tempot till upplevelsen av skolmatematiskt arbete som en koncentrationskrävande tävlingsarena där det pågick en tävlan om lärarens uppmärksamhet. På denna arena upplevdes ibland den sociala situationen i klassen som ett hinder för deltagande. Detta gällde främst för de elever som upplevde rädsla eller skam över felaktiga svar (jfr Bibby, 2002). Den kognitiva utmaningen förväntades vara reglerad med "enkla" uppgifter före "svåra" uppgifter, så att alla elever skulle ha en chans att få tillräcklig kunskap och färdighet att snabbt lösa anvisade uppgifter innan nya uppgifter delades ut. För vissa elever var tempot för högt, vilket ledde till en ängslan att inte hinna med. För andra elever däremot begränsades deltagandet av att tempot upplevdes vara för långsamt.

Som tidigare nämnts förekom samarbete elever emellan sparsamt. När samarbete förekom gestaltades det inom uppgiftsdiskursen (Mellin-Olsen, 1990) som informellt utbyte av förklaringar och uppgiftslösningar, hur man räknar. Ett sådant samarbete ligger långt ifrån den kollektiva argumentation kring frågor av typen Vad händer om? eller Varför/Hur kommer det sig att? som är typiska för undersökningslandskapets öppna handlingsmönster (Skovsmose, 2000,

se även Boaler, 1997) och det fokuserande kommunikationsmönster som skulle kunna kallas "matematiskt" (Wood, 1998). Elever i fallstudien såg ett behov av att ställa "varför"-frågor, men upplevde att det sociala rummet för sådana frågor ofta saknades inom uppgiftsdiskursen. Dessutom visar studien att undervisningens fokus låg på att upptäcka och använda regler och lösningsmodeller medan eleverna själva förväntades ta individuellt ansvar för att den egna begreppsbyggnaden. Espelands (2017) studie av norska klassrum på gymnasienivå visade liknande resultat.

Deltagande typiskt för ett uppgiftsparadigm (Skovsmose, 2000) syntes även i elevers kontrastering av två slags projektarbeten som annars bröt det vanliga aktivitetsmönstret med hemuppgifter ur läroboken. Eleverna upplevde en skillnad mellan, å ena sidan, projektarbeten som tillskrevs uppgiftsdiskursens karaktäristika – direkt då man ser [ett sådant projekt] så vet man att det är skolarbete (se [b]) – och, å andra sidan, projektarbeten som tillskrevs handlingsfrihet och rum för egna åsikter och eget intresse (se [c], s. 31–34). Den senare typen av projektarbeten hade likheter med undersökningslandskapets öppna skolmatematiska arbete. Arbetet betydde ett visst rum för eleverna att ställa egna frågor, formulera egna uppgifter och gå oväntade kunskapsvägar genom att driva sitt deltagande vidare (Boaler, 1998; Mellin-Olsen, 1991; Skovsmose, 2000). Dessa projektarbeten kunde således uppfylla läroplanens Ggl 1994 förväntan om att matematiken i skolan skulle vara "mera fascinerande, spännande och överraskande" för eleverna (Utbildningsstyrelsen, 1994, s. 78). Således erbjöds eleverna genom sådana projektarbeten som hade drag av undersökningslandskapets öppna skolmatematiska arbete och rum för egna åsikter och ett mer varierat och fördjupat kunskapsengagemang, en annan slags kunskapsauktoritet genom individuellt ansvar för att bedöma kunskapens legitimitet än vad skolmatematiskt arbete inom uppgiftsdiskursen erbjöd (se [c], s. 31–34; [d], s. 15).

Projektdeltagarnas berättelser, både elevers och lärares, visar att projektarbeten inom reformprojektet förblev i marginalen för de matematiska gemenskaper där legitimt matematiskt kunnande underhandlades. Detta kan ha understött en framväxande dikotomisering i elevers upplevda skolmatematiska praktik. Å ena sidan en *modeller-och-regler*-praktik där medverkan föreställdes vara en nödvändig förutsättning för framgång. Å andra sidan en *ingenting-med-matte-att-göra*-praktik, som kunde innebära engagemang, men där *matematiken* upplevdes som *en bisak* [jfr Nettes lärandebana i [c]) och där medverkan – till exempel genom att ägna mycket egen tid åt projektarbetet och att presentera projektarbetet på ett estetiskt tilltalande sätt – inte nödvändigtvis bidrog till skolmatematiska prestationer som upplevdes vara legitima.

Vissa elevers motivation att göra projektarbeten påverkades negativt av att den för uppgiftsdiskursen typiska tävlingen saknades i och med att projektarbeten utfördes utanför skoltid och inte heller behandlades desto mer i klassrummet. Vissa projektarbetens kunskapskrav upplevdes även som irrelevanta, såsom att söka information eller att producera ett så snyggt projektarbete som möjligt med så hög arbetsinsats som möjligt inom utsatt tid. Dessa aspekter var lika vägande som "projektredovisningens matematiska kvalitet" då lärarnas bedömde elevers prestationer (Burman & Røj, 1997).

6.2 Tillhörighet och legitimt kunnande – väsentliga i elevers upplevelse av framgång

Den här fallstudien visar att individuellt ansvar samt tillhörighet i gemenskaper där legitimt kunnande underhandlas tillsammans med läraren är viktigt, men inte tillräckligt, för elevers upplevelser av framgång.

Boalers studie (1997) kunde inte förklara varför elever även inom ett öppet handlingsmönster höll fast vid föreställningen att de behövde lära sig matematikens regelmässigheter först. Boalers studie kunde inte heller belysa närmare varför endast vissa elever utvecklade identiteter av utanförskap och kände press och ångslan inom ramen för ett slutet handlingsmönster. Mot bakgrund av den här fallstudiens resultat kan orsaken kanske sökas i den utsträckning en elevs upplevda skolmatematiska praktik, oberoende av handlingsmönster, innebar känslor av tillhörighet och utanförskap i relation till gemenskaper som utövade legitim kontroll över och utvecklade den matematik som producerades i klassrummet.

I det matematikklassrum som jag har undersökt genom elevers berättelser fanns, enligt projektlärarnas bedömning, anmärkningsvärt många "högpresterande" elever (jfr [a]). Studien visar dock att elevers möjligheter att i klassrummet medverka i produktionen av den legitima matematiken varierade och därmed även deras upplevelser av framgång (jfr Boaler, 1997; Nardi & Steward, 2003; Solomon, 2007). Medverkan i produktionen av matematiskt kunnande kopplades till aktiviteter med mätbara karaktärsdrag som vissa deltagare hade i högre grad än andra, såsom matematisk kompetens eller "smarthet". Alla studiens elever identifierade sig själva som tillhörande en matematisk gemenskap på basis av matematikförmåga. Föreställningen om att vissa elever tillhör gruppen *inte-bra-i-matte* identifierade samtidigt andra som tillhörande gruppen *bra-i-matte* och bidrog till att

upprätthålla myten om "smarthet" som nödvändig för framgång. Även skolans läroplan upprätthöll denna myt⁵ och myten är också synlig i lärarnas berättelser (jfr [a], s. 12–13). Studiens tre fokuselever Joakim, Kristina och Nette fortsatte under högstadiet att tillhöra den grupp elever i klassrummet som läraren identifierade som "högpresterande" och de uppfyllde troligtvis kriterierna för sådana elever som projektlärarna skulle räkna till reformprojektets "vinnande" elever: de var ansvarsfulla och aktivt deltagande i det skolmatematiska arbetet (jfr [a], s. 11; [c]). Vidare var högstadiets matematikklassrum på flera sätt ett "mönster"-klassrum⁶ ur dessa tre elevers perspektiv (jfr Brunell, 2007). De nådde under högstadietiden kunskapsmässiga framgångar i matematik på basis av olika typer av formella utvärderingar och de valde studier på gymnasienivå i matematik efter årskurs nio (jfr [c]).

Till skillnad från elever i flera andra studier (Ewing, 2004; Nardi & Steward, 2003) uttryckte alla tre under högstadietiden en fortsatt stark vilja att delta framgångsrikt i det skolmatematiska arbetet och de beskrev en god relation till sin matematiklärare i form av lojala, tillitsfulla och allmänt taget positiva omdömen i början av årskurs 7 (jfr Kislenko, 2011).

Fokuseleverna var också medvetna om och uppskattade klassrummet som arena för speciella reformer (se till exempel Joakims kommentar om reformprojektet som bättre matematikundervisning i [d], s. 28). De var även relativt ense om hur en framgångsrik elev förväntades agera inom ramen för dessa metoder, såsom att kunna förklara sitt matematiska tänkande både verbalt och skriftligt och att kunna producera problemlösningar, projektarbeten och andra bidrag på sätt som uppfyllde projektlärarnas krav. De föreställde sig att lärarens agerande skulle stödja elever att producera sådana *förklaringar-av-tänkande* och andra bidrag som läraren bedömde vara

⁵ Enligt reformskolans läroplan vid tiden för aktionsforskningsprocessen måste skolans matematikundervisning "för att ge elever med personliga förutsättningar och intresse den praktiska beredskap som krävs för vidare studier även av matematikens teoretiska del, ge eleverna möjlighet att upptäcka de strukturella lagbundenheter som utgör skelettet i den matematiska kunskapen. Denna strävan till strukturell tydlighet bör känneteckna matematikundervisningen på skolans alla nivåer. /.../ Eleverna skall behärska grundtekniker och inhämta kunskap /.../ som utnyttjar deras förmåga" (Reformskolan, 1994).

⁶ Fokuseleverna deltog i samma matematikklassrum och undervisades av samma lärare fram till mitten av årskurs 9 då klassen splittrades och det skolmatematiska arbetet differentierades enligt elevernas kommande skolval.

legitima. Kort sagt var eleverna eniga med projektlärarna om lärarens uppdrag att styra, lyfta, dra och pusha alla elever till framgång [jfr [a)]. Reformprojektets och läroplanens (Utbildningsstyrelsen, 1994) idé om *elevers ansvarsfulla deltagande* upplevdes av de tre fokuseleverna som en självklarhet. Deras berättelser är tydliga bevis på att de alla tre kunde ställa upp mål, planera sitt eget arbete och bedöma sina egna arbetsinsatser (a.a.). Studien visar de tre fokuselevernans inordning i reformprojektets idé om ansvarsfullt deltagande elever som självständiga, rationellt och exakt matematiskt tänkande personer med en "matematisk blick" (jfr [a]). Deras upplevelser av det skolmatematiska arbetets återkommande aktiviteter divergerade dock med tiden. Till exempel tråkighet och avsaknad av relevans och kreativitet tillskrevs matematik och skolmatematiskt arbete av Nette och Kristina.

Reformprojektet hade en stark betoning på framgång som anknuten till elevens förmåga att ansvarsfullt och självständigt komma fram till matematiska lagbundenheter vars legitimitet läraren förväntades bekräfta. Legitimt matematiskt kunnande bestod ur elevernas synvinkel, i tillägg till att kunna producera korrekta svar på lärarens eller lärobokens frågor, främst av att förstå det så kallade "teorihäftets" kunskapsinnehåll, dvs. modeller (modellösningar för uppgifter) och de lagbundenheter som modellösningarna exemplifierade ([b], [c], [d]). En framgångsrik elev förväntades upptäcka, förstå och minnas dessa lagbundenheter och kunna tillämpa dem på nya uppgifter. Svårigheter upplevdes därför främst som en bekräftelse på att förståelse saknades, eller att eleven inte kunde komma ihåg vilka lagbundenheter som skulle tillämpas på olika typer av uppgifter. Inom uppgiftsdiskursen gick elevens väg till framgång sällan via att ställa egna frågor och formulera egna uppgifter (jfr Mellin-Olsen, 1991; Skovsmose, 2000).

Det fanns alltså en förväntan om att ansvarsfulla elever skulle upptäcka lagbundenheterna inom ramen för uppgiftsdiskursen. Joakims framgångsberättelse (jfr [c], [d]) visar på nödvändigheten för en elev att medverka i gemenskaper där matematikens lagbundenheter producerades genom upptäckt tillsammans med läraren (jfr Davis, 1990; Utbildningsstyrelsen, 1994; Goldin, 1990). Samtidigt hade fokuseleverna uppfattat projektlärarnas budskap om att det inte hör till legitimt kunnande att producera okunskap, osäkerhet eller misstag i matematikklassrummet (jfr [b], [c], [d]). I klassrummet kan detta ha lett till elevers val av tystnad framom att exponera osäkert kunnande i klassrumskommunikationen.

Elevberättelserna visar att lärarens feedback i hög grad bidrog till fokuselevernans föreställning om att vara lokaliserad som tillhörande (eller inte) i de gemenskaper där legitimt kunnande underhandlades och därmed till deras identitetsarbete och upplevelse av sig själva som

framgångsrika eller inte. Studien stöder därmed annan forskning inom området feedback (Hattie & Timperley, 2007).

För en elev som inte hade medverkat i gemenskaper där legitimt matematiskt kunnande underhandlades så anknöt "vi" i högre grad till en "done to us"-aktivitet i klassrummet än till en "done by us"-aktivitet (Solomon, 2007, s. 17). Det betyder att den tillhörighet som en projektelev kunde uttrycka i en intervju genom att till exempel uttrycka sig positivt om elevens lyssnarroll kunde innebära att eleven i och för sig tog del i gemenskaper där legitimt kunnande underhandlades, men att eleven, i likhet med fokuseleven Kristina, inte nödvändigtvis aktivt medverkade till denna underhandling.

För att relatera till framgångsrikt skolmatematiskt arbete måste känslan av tillhörighet samgå med ömsesidigt engagemang och en inordning i det skolmatematiska arbetets deltagandevillkor (Dance, 2007). Fallstudiens tre fokuselevs upplevda skolmatematiska praktik visar dock att inordning i skolmatematiskt arbete genom en *modeller-och-regler*-praktik och uppgiftsdiskurs inte nödvändigtvis ledde till en föreställning om framgång, trots prestationsmässiga framgångar (jfr Salomon, 2007). För Nette utgjorde till exempel det självständiga arbetet med att utföra bokuppgifter en väsentlig bekräftelse på framgångsrikt skolmatematiskt arbete, men utgjorde samtidigt ett motiv för henne till att lämna skolmatematiskt arbete för att hon inte kunde föreställa sig fortsatt framgång inom ramen för detta handlingsmönster (se [c]). För Joakim fortsatte *modeller-och-regler*-praktikens och uppgiftsdiskursens deltagandevillkor att relatera till inordning genom ömsesidigt engagemang i skolmatematiska gemenskaper för smarta personer där han ingick, ofta tillsammans med läraren. Joakim utvecklade därför en positivare identifiering med skolmatematiskt arbete än Kristina. Kristinas berättelser över tid uttrycker att hon tog del i likartade gemenskaper som Joakim. Men Kristina tog del ur en marginell position och medverkade inte fullt ut i dessa gemenskaper för underhandling av legitimt kunnande. Joakims berättelse kunde till exempel hänvisa till gemenskapen *vi-som-kommer-fram-till-en-regel* medan Kristinas berättelse kunde hänvisa till gemenskapen *vi-som-kopierar-regler*. I Kristinas och Nettes berättelser förtingligade *modeller-och-regler*-praktiken och uppgiftsdiskursens deltagandevillkor i olika grad dels en gräns mellan dem själva och skolmatematiska gemenskaper för smarta personer, dels tillhörighet i andra, såsom i gemenskapen *vi-som-kopierar-regler*. Nette medverkade inledningsvis, i likhet med Joakim, fullt ut i gemenskaper där legitimt kunnande underhandlades, men över tid började hon betrakta dessa gemenskaper ur en utifrånposition och i allt högre grad ta del i gemenskaper av personer med en negativ identifikation gentemot skolmatematiskt arbete.

Den här fallstudien stöder annan forskning som visar att matematiska gemenskaper där matematikinnehållet undersöks ur olika perspektiv och där respektfullt ömsesidigt lyssnande, att ta den andras perspektiv, är en etablerad sedvänja, upplevs som inkluderande av dess deltagare, såväl elever som lärare (jfr Angier & Povey, 1999; Boaler, 1997; Dance, 1997; Boylan, Lawton & Povey, 2001). Att enbart lyssna på varandras bidrag är otillräckligt i en miljö där deltagarna är införstådda med att andras perspektiv på matematikinnehållet stöder det egna lärandet (Boaler & Greeno, 2000; Burton, 1994). En matematisk gemenskap där alla deltagare, lärare och elever, betraktar varandra som lika viktiga bidragsgivare i det matematiska samtalet öppnar för möjligheten att bedöma bidrag på ett annorlunda sätt. Inte enbart som tecken på individuellt tänkande och på grundval av hur korrekta bidragen är i sig, utan framför allt på grundval av hur bidragen kan hjälpa hela gruppen att gå framåt i sitt gemensamma samtal om och med matematik (Burton, 1994; Boylan, 2004; Dance, 1997; Goos, Gilbraith & Renshaw, 1999).

Både den som lyssnar och den som talar bidrar till den framväxande förståelsen; de samverkar, granskar det sagda ur olika perspektiv; de fokuserar framväxande matematiska idéer och, som resultat, de utvecklar varandras tänkande. I en sådan matematisk gemenskap kan elevers uppfattning om matematikens natur och om sin egen lärandepotential förändras i en positiv riktning. Effekten kan bli ökad tillhörighet i det skolmatematiska arbetet genom större glädje och förståelse (Burton, 1994, s. 79; Waege, 2007, s. 209). Flera av fallstudiens elever efterlyste en sådan ökad tillhörighet, i synnerhet de elever som fanns i marginalen till eller utanför de gemenskaper där det kunnande som uppfattades vara legitimt underhandlades.

6.3 Lärdomar från studien i förhållande till dagens situation samt förslag till vidare forskning

Det vetenskapliga arbete som jag presenterar i studien är unikt eftersom det har sträckt sig över en lång tid. Det fokuserar ett fall vars upprinnelse finns under en tidsperiod då det skolmatematiska arbetets villkor på många sätt såg annorlunda än de gör idag, dvs. andra resurser, en annan läroplan Glgu 2014 (Utbildningsstyrelsen, 2014), andra läroböcker etc. Diskussionen kring de digitala verktygens roll i undervisning och bedömning hade till exempel knappt tagit fart och det fanns inga PISA-undersökningar som applåderade finländska skolframgångar i matematik eller riktade samhällets finger mot eventuella svagheter. Det är ett faktum att eleverna som ingår i studien tillhör en annan generation än dagens högstadieelever. Det kan till och med vara så att någon av dem just nu, 2017, själv axlar rollen av matematiklärare på högstadiet eller är förälder till en högstadielev.

Det är också ett faktum att dagens matematiklärare står inför många utmaningar som jag och reformprojektets lärare överhuvudtaget inte kunde föreställa oss medan reformprojektet och dess aktionsforskningsprocess pågick. Men samtidigt tror jag att matematiklärare och andra som läser denna studie känner igen sig. Mycket är sig likt. Idag är det en ny läroplansreform som upptar lärarnas tankar (Utbildningsstyrelsen, 2014). Men samma intresseområden som var viktiga för reformprojektets lärare i och med Ggl 1994 är precis lika aktuella i Gglu 2014, såsom elevers ansvar för sitt lärande, mångsidiga arbetssätt och en mångsidig bedömningspraxis. Gglu 2014 uttrycker i likhet med Ggl 1994 en syn på lärande där eleven har en aktiv roll (a.a., s. 14). Jag hävdar att dagens matematiklärare står mitt uppe i ett likartat reformarbete och brottas med likartade dilemman som lärarna i denna studie (jfr [a]). Mot bakgrund av studiens resultat hoppas jag att lärarna i dagens reformarbete är känsliga inför att även oavsiktliga budskap kan nå eleverna genom att ta del i matematikklassrummets handlingsmönster.

Skolmatematisk praktik i förändring innebär att "gamla" (handlings)mönster och den trygghet dessa ger ska lämnas för det osäkra och det okända (jfr [a]). Lärare med elevernas bästa för ögonen vill att de sedvänjor som "nya" handlingsmönster innebär ska betyda möjlighet till medverkan i skolmatematiskt arbete för alla elever och i alla skeden av livet, inte enbart i matematikklassrummet utan också i vardagen, i studielivet och i arbetslivet. Min studies diakrona dimension lyfter fram betydelsen av att betrakta tidigare reformarbete som en arena för lärande för alla dagens matematiklärare och andra involverade i nya reformprojekt. Att inte ta hänsyn till historien genom att lära av tidigare skolbaserade reformprojekt innebär risk för att deltagarna upprepar just de metaforer, myter och värderingar som upprätthåller och bildar de sedvänjor som man vill påverka genom den nya reformen (jfr Gregg, 1995). Vilka lärdomar kan vi då dra av den här studiens resultat med tanke på dagens situation? Vad är viktigt för att dagens reformprojekt ska undvika sådana pyrrhussegrar som framträder i den upplevda skolmatematiska praktik studiens elever beskriver?

Min studie visar att reformer kräver att det skolmatematiska arbetets förgivettagna tänkesätt och förväntade sätt att agera synliggörs och att det är reformprojektets deltagare som själva bör åstadkomma denna transparens genom att medverka i en kollegial och kritisk gemenskap. Den internationella grupp som utvärderade implementeringen av Ggl 1994 ifrågasatte mycket som de såg hända i de finländska matematikklassrummen. Gruppen lyfte fram just "peer appraisal" som en möjlighet att åstadkomma förändring (Norris, et al., 1996, s. 74). Den här studiens resultat stöder gruppens slutsats och liknande slutsatser som har lyfts fram i andra studier beträffande betydelsen av lärares

samarbete (jfr Amit & Fried, 2001; Fennema & Nelson Scott, 1997; Hannula & Oksanen, 2013; Raymond & Leinenbach, 2000). Men resultatet visar också att lärares kollegiala samverkan med upprepade bedömningsinriktade åtgärder och diskussioner inte räcker till för att åstadkomma en förändrad *och* gynnsam skolmatematisk praktik ur deltagandesynvinkel för alla elever på lång sikt. Genom aktionsforskning strävade projektlärarna efter elevers växande kognitiva medvetenhet som i sin tur skulle stödja speciellt de intresserade elevernas förmåga att identifiera legitimt kunnande. Därmed förväntades eleven bli motiverad att agera ansvarsfullt och att vilja lära sig. Studiens tre fokuselever uppfyllde denna förväntan. Förändringsarbetet uppmuntrade ändå inte explicit förändrade sedvänjor för att stödja *alla* elevers deltagande.

Sedvänjor är djupgående i personers språk, tänkande och handlande (Lakoff & Johnson, 1980). Inte ens en medveten ansträngning hjälper nödvändigtvis oss att bli varse sedvänjor (Pring, 2000). Som lärare och forskare måste vi studera själva undervisningen (Hiebert, 2013). Gemenskapen bör därför vara en *kritisk* gemenskap som även ifrågasätter de metaforer lärarna själva och forskare använder för att ge struktur åt det skolmatematiska arbetet (jfr [a]). Precis som ett fönster kan metaforer både skydda och avslöja sedvänjor. Metaforer skyddar därför att de är så rotade i språkbruket. En lärare blir förstörd om hen till exempel säger att det är lärarens uppgift att koppla på elevers hjärnor eller att det är eleverna som ska bestämma takten för undervisningen (jfr [a]). Men förändring kräver att läraren även blir medveten om metaforerna och börjar granska deras roll i det vardagliga skolmatematiska arbetet. Hur gör en lärare i matematikklassrummet som kopplar på en elevs hjärna och vilka kan effekterna vara av lärarens beslut i klassrummet (jfr Bishop, 2008) för elevers möjligheter att medverka i produktionen av legitimt kunnande? Och "vad" är matematik och legitimt kunnande i det skolmatematiska arbetet? Över vad ska elever bestämma takten? Kan det skolmatematiska arbetet konstitueras av något annat än uppgiftsdiskursens räcker med uppgifter och rätta svar? Vilka handlingsmönster och vilket matematiskt kunnande kan lärare och elever utveckla om "vad" skulle bestå av uppmaningen att undersöka – till exempel att undersöka formen för volymen 216 (Boaler, 1997, s. 16–18) – tillsammans med elevernas frihet att föra undersökningen vidare och gå *oväntade* vägar med sin kunskap (jfr Mellin-Olsen, 1991)? Vilken betydelse skulle det få för det skolmatematiska arbetet om vi börjar betrakta elevers (begränsade) matematiska framgångar som tecken på (bristande) tillhörighet i gemenskaper där legitimt kunnande underhandlas i stället för tecken på (bristande) förmåga, personliga förutsättningar och intresse?

Studier har visat att lärares och forskares intensiva samarbete och kollaborativa undersökningar av klassrummets skolmatematiska arbete

– till exempel genom att göra så kallade "learning studies" (Kullberg, 2010; Maunula, Magnusson & Echevarria, 2011) – kan förbättra elevers deltagande och få lärare att börja ifrågasätta sedvänjor (jfr Cobb, Wood & Yackel, 1990; Grant, Hiebert & Wearne, 1998). Men bestående förändringar i sedvänjor kräver långsiktighet i lärarnas och forskarnas samarbete. Att forskare demonstrerar, diskuterar med lärare och berättar om gynnsam skolmatematisk praktik ur deltagandesynvinkel eller att forskaren och läraren byter roller i klassrummet under kortvariga perioder räcker förmodligen inte till för att bryta förgivettagna tänkesätt och få andra förväntningar och sätt att agera inom skolmatematiskt arbete att växa fram som legitima (jfr Grant, Hiebert & Wearne, 1998; Thompson, 1992). Den här studien stöder denna slutsats. Som lärarutbildare är jag nu ännu mer övertygad om att blivande matematiklärare borde dras in i trygga matematiska gemenskaper där deras skolmatematiska erfarenheter synliggörs och utmanas på sätt som respekterar komplexiteten i dessa erfarenheter och beaktar att egna erfarenheter är den enda tolkningsram vi alla har.

Bodin och Cappioni (1996) skriver om hur mycket lättare det är att bli medveten om innovativa sätt att undervisa matematik i skolan och att formulera hur matematikundervisning borde ske och förändras, än att tydligt redovisa för vad som sker i klassrummen inom ramen för det vardagliga arbetet. Efter att ha avslutat den här studien är det enkelt att vara av samma åsikt. Det matematikdidaktiska forskningsfältet har producerat oerhört många studier av det förra slaget. Men eftersom den kulturella förankringen gör matematikklassrummets handlingsmönster i stort sett osynliga för dess deltagare är att *tala om* handlingsmönster något alldeles annat än att *agera i klassrummet och producera* handlingsmönster. Den här studien har gett en inblick i matematikundervisningen vid en finlandsvensk skola genom elevers och lärares berättelser. Vi vet nu mycket mera om hur komplexa elevers upplevelser kan vara och om hur avgörande betydelse en elevs position i matematiska gemenskaper och typen av kunnande som betraktas som legitimt i dessa gemenskaper kan ha för elevens framtid. Men vi vet överlag väldigt lite om hur handlingsmönster produceras i de finlandssvenska matematikklassrummen. Fortsatt forskning borde därför öppna dörren till de finlandssvenska matematikklassrummen, vistas i klassrummen under en längre tid, samtala med lärare och elever och iaktta hur elever och lärare identifierar och positionerar varandra som kunniga partners (eller inte) i det dagliga skolmatematiska arbetet. Forskningen borde fokusera hur matematiska gemenskaper bildas, vad som konstituerar legitimt kunnande och hur legitimt kunnande produceras inom dessa gemenskaper. Men forskningen borde också följa eleven utanför skolan och gå in i hemmets och arbetslivets domäner. Det saknas kunskap om hur framgångsrikhet konstitueras och matematiska gemenskaper växer fram inom dessa områden.

Referenser

Amit, M., & Fried, M. N. (2001). Research, reform, and times of change. I L. English (red.), *Handbook of international research in mathematics education* (s. 355–381). London: Lawrence Erlbaum.

Andrews, P. (2011). Finnish mathematics teaching: a case of uniquely implicit didactics. I T. Dooley, D. Corcoran, & M. Ryan (red.), *Mathematics teaching matters. Proceedings from the 4th conference on research in mathematics education, MEI4* (s. 3–18). Ireland: St. Patrick's College.

Angier, C., & Povey, H. (1999). One teacher and a class of school students: their perception of the culture of their mathematics classroom and its construction. *Educational Review*, 51(2), 147–160.

Atkinson, S. (1994). Rethinking the Principles and Practice of Action research: the tension for the teacher-researcher. *Educational Action Research*, 2(3), 383–401.

Atweh, B. (2011). Quality and equity in mathematics education as ethical issues. I B. Atweh, M. Graven, W. Secada, & P. Valero (red.), *Mapping equity and quality in mathematics education* (s. 63–75). London: Springer.

Barone, T. E. (1992). Beyond theory and method: a case of critical storytelling. *Theory Into Practice*, 31(2), 142–146.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Maidenhead: Open University Press.

Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 23–41.

Bereiter, C. (1985). Towards a solution of the learning paradox. *Review of Educational Research*, 55(2), 201–226

Bibby, T. (2002). Shame: an emotional response to doing mathematics as an adult and a teacher. *British Educational Research Journal* 28(5), 705–722.

Bishop, A. J. (2008). Decision-making, the intervening variable. I P. Clarkson, & N. Presmeg (red.), *Critical issues in mathematics education. Major contributions of Alan Bishop* (s. 29–35). New York: Springer.

- Bishop, J. (2012). "She's always been the smart one. I've always been the dumb one": Identities in the mathematics classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(1), 34–74.
- Björkqvist, O. (1993). Social konstruktivism som grund för matematikundervisning. *Nordisk Matematikdidaktik*, 1(1), 8–17.
- Björkqvist, O. (1997). Aktionsforskning. I J. Lithner & H. Wallin (red.), *Research reports in mathematics education, No 1* (s. 1–17). Umeå: Department of Mathematics, Umeå University.
- Black, L. (2004). Differential participation in whole-class discussions and the construction of marginalised identities. *Journal of Educational Enquiry*, 5(1), 34–54.
- Black, L., Mendick, H., & Solomon, Y. (red.), (2009). *Mathematical relationships in education. Identities and participation*. London: Routledge.
- Black, P., & Atkin, J. M. (red.), (1996). *Changing the subject. Innovations in science, mathematics and technology education*. London: Routledge.
- Boaler, J. (1997). *Experiencing school mathematics. Teaching styles, sex and setting*. Buckingham: Open University Press.
- Boaler, J. (2002). Learning from teaching: Exploring the relationship between reform curriculum and equity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(4), 239–258.
- Boaler, J., & Greeno, J. G. (2000). Identity, agency, and knowing in mathematics worlds. I J. Boaler (red.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (s. 171–200). London: Ablex Publishing.
- Boaler, J., & Selling, S. K. (2017). Psychological imprisonment or intellectual freedom? A longitudinal study of contrasting school mathematics approaches and their impact on adults' lives. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(1), 78–105.
- Bodin, A., & Capponi, B. (1996). Junior secondary school practices. I A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (red.), *International handbook of mathematics education, Part 1* (s. 565–614). London: Kluwer.
- Boylan, M. (2004). *Questioning (in) school mathematics: lifeworlds and ecologies of practice*. Sheffield Hallam University.

Boylan, M., Lawton, P., & Povey, H. (2001). "I'd be more likely to talk in class if ...": Some students' ideas about strategies to increase mathematical participation in whole class interactions. I M. van den Heuvel-Panhuizen (red.), *Proceedings from PME25* (Vol. 2, s. 201–208). Nottingham: School of Education, University of Nottingham.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning of mathematics. I H. G. Steiner, N. Balacheff, J. Mason, H. Steinbring, L. P. Steffe, G. Brousseau, T. Cooney, & B. Christiansen (red.), *Theory of mathematics education. Occasional paper 54*. (s. 110–119). Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. London: Kluwer.

Brousseau, G., & Otte, M. (1991). The fragility of knowledge. I A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (red.), *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (s. 13–36). London: Kluwer.

Brunell, V. (2007). *Klimat och resultat i den finlandssvenska grundskolan – en fördjupad analys av PISA 2003*. Helsingfors: Svenska Kulturfonden.

Bruner, J. (1996). *Celebrating divergence: Piaget and Vygotsky. Plenarlecture at Second Congress of Socio-Cultural Research. 15.9.1996*. Geneve.

Burman, L., & Røj, S. (1997). *Matematikprojekt i högstadiet. Tips och underlag för genomförande av matematikprojekt i högstadiet*. Vasa: Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi.

Burton, L. (1994). Whose culture includes mathematics? I S. Lerman (red.), *Cultural perspectives on the mathematics classroom* (s. 69–83). Dordrecht: Kluwer.

Burton, L. (1999). The practices of mathematicians: What do they tell us about coming to know mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 37, 121–143.

Carr, W., & Kemmis, S. (1983/1994). *Becoming critical. Education, knowledge and action research*. Geelong: Deakin University Press.

Cestari, M. L. (1998). Teacher–student communication in traditional and constructivist approaches to teaching. I H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi & A. Sierpiska (red.), *Language and Communication in the mathematics classroom*. Reston: NCTM

Clarke, D., & Stephens, W. M. (1996). The Ripple Effect: The instructional impact of the systemic introduction of performance assessment in mathematics. I M. Birenbaum, & F. Dochy (red.), *Alternatives in assessment of achievements, learning processes and prior knowledge* (s. 63–92). Dordrecht: Kluwer.

Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist*, 23(2), 87–103.

Cobb, P. (2000). Constructivism in social context. I L. P. Steffe, & P. W. Thompson (red.), *Radical constructivism in action. Building on the pioneering work of Ernst von Glasersfeld*. London: RoutledgeFalmer.

Cobb, P., Gresalfi, M., & Hodge, L. L. (2009). An interpretive scheme for analyzing the identities that students develop in mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(1), 40–68.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1990). Classrooms as learning environments for teachers and researchers. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 4*, 125–146.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 2–33.

Confrey, J. (1990). What constructivism implies for teaching. I R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (red.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics* (s. 107–124). Reston, VA: NCTM.

Courant, R., & Robbins, H. (1996). *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. Oxford: Oxford University Press.

Dance, R. (1997). *A characterization of aspects of the culture of a successful mathematics classroom in an inner city school*. Michigan: UMI Dissertation Services.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981/1998). *The mathematical experience*. Boston: Birkhäuser.

Davis, R. B. (1990). Discovery learning and constructivism. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph No. 4*, 93–106. Reston, VA: NCTM.

Davis, R. B., Maher, C. A., & Noddings, N. (1990). Suggestions for the improvement of mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph No. 4*, 187–191. Reston, VA: NCTM.

Elliott, J. (1991). *Action research for educational change*. Milton Keynes: Open University Press.

Ellis, K. (1993). *Teacher questioning behaviour and student learning: what research says to teachers*. Paper presented at the annual meeting of the Western States Communication Association, Albuquerque, NM, February 12–16, 1993.

Ernest, P. (1996). Varieties of constructivism: A framework for comparison. I L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (red.), *Theories of mathematical learning* (s. 335–350). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Ernest, P. (1998) A postmodern perspective on research in mathematics education. I J. Kilpatrick, & A. Sierpiska (red.), *Mathematics Education as a Research Domain*, (s. 71–85). Dordrecht: Kluwer.

Ernest, P. (1999). Is mathematics discovered or invented? *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 12. Hämtad 1.9.2017 <http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome12/default.htm>

Espeland, H. (2017) *Algebra at the start of Upper Secondary School : A case study of a Norwegian mathematics classroom with emphasis on the relationship between the mathematics offered and students' responses*. Hämtad 15.9.2017 <http://hdl.handle.net/11250/2435518>

Ewing, B. (2004). "Open your textbooks to page blah, blah, blah": "So I just blocked off!" . I I. Putt, R. Faragher & M. McLean (red.), *MERGA 27: Mathematics education for the third millennium: Towards 2010* (Vol. 1, s. 231–238).

Fennema, E., & Nelson Scott, B. (1997). *Mathematics teachers in transition*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Forskningssetiska delegationen (2009). *Etiska principer för humanistisk, samhällsvetenskaplig och beteendevetenskaplig forskning och förslag om ordnande av etikprövning*. Hämtad 21.6.2016 <http://www.tenk.fi/sv/tenks-anvisningar>

Forskningssetiska delegationen (2013). *God vetenskaplig praxis och handläggning av misstankar om avvikelser från den i Finland*. Helsingfors: Forskningssetiska delegationen.

Gallos Cronberg, F., & Emanuelsson, J. (2013). Marina's voice. I B. Kaur, G. Anthony, M. Ohtani, & D. Clarke (red.), *Student voice in mathematics classrooms around the world* (s. 89–112). Rotterdam: Sense Publishers.

Gee, J. P. (2000). Identity as an analytic lens for research in education. *Review of Educational Research*, 25, 99–125.

George, P. (2009). Identity in mathematics. Perspectives on identity, relationships, and participation. I L. Black, H. Mendick, & Y. Solomon (red.), *Mathematical relationships in education. Identities and participation* (s. 201–212). London: Routledge.

Glaserfeld, E. von (red.), (1991). *Radical constructivism in mathematics education*. London: Kluwer.

Goldin, G. (1990). Epistemology, constructivism and discovery learning mathematics. I R. Davis, C. Maher, & N. Noddings (red.), *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph number 4* (s. 31–50). Reston: NCTM.

Goodchild, S. (2001). *Students' goals. A case study of activity in a mathematics classroom*. Oslo: Caspar Forlag.

Goos, M., Galbraith, P., & Renshaw, P. (1999). Establishing a community of practice in a secondary mathematics classroom. I L. Burton (red.), *Learning mathematics. From hierarchies to networks* (s. 36–61). London: Falmer Press.

Grant, T. J., Hiebert, J., & Wearne, D. (1998). Observing and teaching reform-minded lessons: what do teachers see? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 217–236.

Gregg, J. (1995). The tensions and contradictions of the school mathematics tradition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(5), 442–465.

Grootenboer, P., Smith, T., & Lowrie, T. (2006). Researching identity in mathematics education: The lay of the land. I P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (red.), *Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australia*, (s. 612–615). Adelaide SA: MERGA Inc.

Grows, D. A., & Cooney, T. J. (1988). *Effective mathematics teaching*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Hagman, E. (1994). PUMA-projektet vid Vasa övningsskola. *LIInjalen*, 4.

Hannula, M. S., & Oksanen, S. (2013). Opettajamuuttujien yhteys osaamisen muutokseen [Lärarvariablers samband med förändring i kunnandet]. I J. Metsämuuronen (red.), *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012 [Longitudinell utvärdering av inlärningsresultat i matematik åren 2005–2012]*, s. 255–291. Helsingfors: Utbildningsstyrelsen.

Hansén, S.-E., & Myrskog, G. (1994). Läroplansreform och inläringssyn. I A. Wickman-Skult (red.), *Grundskolan förändras. Läroplansarbetet i blickpunkten*. Helsingfors: Utbildningsstyrelsen.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 811–12.

Hemmi, K., & Ryve, A. (2015). The culture of the mathematics classroom during the first school years in Finland and Sweden. I B. Perry, A. MacDonald, & A. Gervasoni (red.), *Mathematics and transition to school – International perspectives* (s. 185–198). Singapore: Springer.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* Oxford: Oxford University Press.

Hiebert, J. (2013). The constantly underestimated challenge of improving mathematics instruction. I K. R. Leatham (red.), *Vital directions for mathematics education research*, s. 45–56. London: Springer.

Hodgen, J., & Marks, R. (2009). Mathematical "ability" and identity: a sociocultural perspective on assessment and selection. I L. Black, H. Mendick & Y. Solomon (red.), *Mathematical relationships in education. Identities and participation* (s. 31–42). London: Routledge.

Hossain, S., Mendick, H., & Adler, J. (2013). Troubling "understanding mathematics in-depth": Its role in the identity work of student-teachers in England. *Educational Studies in Mathematics*, 82(3).

Hundeland, P. S. (2010). *Matematikk lærerens kompetanse. En studie av hva lærerne på videregående trinn vektlegger i sin matematikkundervisning*. Kristiansand: Universitetet i Agder. Hämtad 14.9.2017 från <http://hdl.handle.net/11250/2393979>

Hägglblom, L. (1990). *Matematik på barnens villkor – bakgrund och visioner för utveckling av matematikundervisningen inom ELMA-projektet*. Vasa: Pedagogiska fakulteten.

Hägglblom, L. (1994). *Matematik på barnets villkor. Opublicerad avhandling för licentiatexamen*. Vasa: Pedagogiska fakulteten.

Ikäheimo, H., Putkonen, H., & Voutilainen, E. (1988). *MAKEKO. Matematiikan keskeisen oppiainekesän kokeet luokille 1–9*. Helsinki: Opperi.

Johansson, M. (2006). Textbooks as instruments. Three teachers' way to organize their mathematics lessons. *Nordisk Matematikk Didaktikk*, 11(3), 5–30.

Jungwirth, H. (1991). Interaction and gender. Findings of a microethnographical approach to classroom discourse. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), 263–284.

Kaasila, R. (2000). *Eläydyin oppilaiden asemaan. Luokanopettajaksi opiskelevien kouluaikaisten muistikuvien merkitys matematiikkaa koskevien käsityksien ja opetuskäytäntöjen muotoutumisessa [Jag levde mig in i elevernas situation. Klasslärarstuderandes skolminnen och deras betydelse vid bildandet av matematikrelaterade uppfattningar och undervisningsätt]*. Rovaniemi: Lapplands universitet.

Kaasila, R., Hannula, M., & Laine, A. (2012). "My personal relationship towards mathematics has necessarily not changed but ..." Analyzing preservice teachers' mathematical identity talk. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10, 975–995.

Kaur, B., Anthony, G., Ohtani, M., & Clarke, D. (red.), *Student voice in mathematics classrooms around the world*. Rotterdam: Sense Publishers.

Kilhamn, C., & Røj-Lindberg, A.-S. (2013). Seeking hidden dimensions of algebra teaching through video analysis. I B. Grevholm, P. S. Hundeland, K. Juter, K. Kislenko, & P.-E. Persson (red.), *Nordic research in mathematics education, past, present and future* (s. 299–328). Oslo: Cappelen Damm.

Kilpatrick, J. (1993). Beyond face value: assessing research in mathematics education. I G. Nissen, & M. Blomhøj (red.), *Criteria for scientific quality and relevance in the didactics of mathematics* (s. 15–34). Roskilde: Roskilde University, IMFUFA.

Kilpatrick, J. (1997). Confronting reform. *The American Mathematical Monthly*, 104, 955–962.

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: NCM, Göteborgs universitet.

Kislenko, K. (2011). What makes learning mathematics an enjoyable experience: listening to Estonian pupils' voices. *International Journal for Studies in Mathematics Education*, 4(1), 31–61.

Kislenko, K., Grevholm, B., & Lepik, M. (2007). Mathematics is important but boring: students' beliefs and attitudes towards mathematics. I C. Bergsten, B. Grevholm, H. Strømskag Måsoval, & F. Rønning (red.), *Relating practice and research in mathematics education: NORMA05* (s. 349–360). Trondheim: Tapir Academic Press.

Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned. Professional insights gained and shared by teachers of mathematics*. Göteborg: Göteborgs universitet.

Kupari, P., Vettenranta, J., & Nissinen, K. (2012) *Oppijälhtöistä pedagogiikka etsimässä. Kahdeksannen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen. Kansainvälinen TIMSS-tutkimus Suomessa*. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, Koulutuksen tutkimuslaitos.

Kupari, P. Välijärvi, J., Andersson, L., Arffman, I., Nissinen, K., Puhakka, E., & Vettenranta, J. (2013). *PISA12 ensituloksia [De första resultaten från PISA12]*. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, Koulutuksen tutkimuslaitos.

Kvale, S. (1997). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur.

Lakatos, I. (1976/1990). *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching, *American Educational Research Journal*, 27(1), 29–63.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. London: Yale University Press.

Langer-Osuna, J. M. (2011). How Brianna became bossy and Kofi came out smart: Understanding the trajectories of identity and engagement for two group leaders in a project-based mathematics classroom.

Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 11(3), 207–225.

Lepik, M., Grevholm, B., & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom – the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3–4), 129–156.

Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 133–150.

Lerman, S. (1998). A moment in the zoom of a lens: towards a discursive psychology of mathematics teaching and learning. I A. Olivier, & K. Newstead (red.), *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 22). Proceedings.* (Vol. 1, s. 66–81). Stellenbosch: University of Stellenbosch.

Lerman, S. (2000). A case of interpretations of social: A response to Steffe and Thompson. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 210–227.

Levenson E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2009). Students' perceived sociomathematical norms: the missing paradigm. *Journal of Mathematical Behavior*, 28, 171–187.

Lewis, G. (2016). *Disaffection with school mathematics*. Rotterdam: Sense Publishers.

Lillqvist, S. (2016). *"Finns det några frågor?": en fallstudie av lärares frågeställningar och elevernas svar vid algebra i årskurs 7*. Vasa: Fakulteten för pedagogik och välfärd, Åbo Akademi.

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *The naturalistic inquiry*. London: Sage.

Linnanmäki, K. (1995). *Matematikprestationer och självuppfattning hos flickor och pojkar i grundskolan*. Opublicerad avhandling för licentiatexamen. Vasa: Pedagogiska fakulteten.

Lutovac, S. (2014). *From memories of the past to anticipations of the future: pre-service elementary teachers' mathematical identity work*. Uleåborg: Uleåborgs universitet. Hämtad 15.9.2017 från urn.fi/urn:isbn:9789526205540

- Lutovac, S., & Kaasila, R. (2011). Beginning a pre-service teacher's mathematical identity work through narrative rehabilitation and bibliotherapy. *Teaching in Higher Education*, 16(2), 225–236.
- Malinen, P., & Kupari, P. (2003). *Miten kognitiivista prosesseista kehiteltiin konstruktivisminä 1983–2003 [Hur man utvecklade konstruktivism ur kognitiva prosesser]*. Jyväskylä: Jyväskylä universitet.
- Marton, F. (1992). På spaning efter medvetandets pedagogik. *Forskning om utbildning*, 4, 28–40.
- Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education, Science and Technology*, 31(1), 97–111.
- Maunula, T., Magnusson, J., & Echevarria, C. (red.). (2011). *Learning study – undervisning gör skillnad*. Lund: Studentlitteratur.
- May, R. (1994). *The courage to create*. London: WW Norton Co.
- May, T. (2001). *Samhällsvetenskaplig forskning*. Lund: Studentlitteratur.
- McCloskey, A. (2014). The promise of ritual: a lens for understanding persistent practices in mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 86, 19–38.
- McNiff, J., Lomax, P., & Whitehead, J. (1996). *You and your action research project*. London: Routledge.
- Mehan, H. (1979). "What time is it Denise?": Asking known information questions in classroom discourse. *Theory into Practice*, 28(4), 285–294
- Mellin-Olsen, S. (1990). *Hvordan tenker lærere om matematikundervisning?* Landås: Bergen Lærerhøgskole.
- Mellin-Olsen, S. (1991). The double bind as a didactical trap. I A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. von Dormolen (red.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (s. 39–59). Dordrecht: Kluwer.
- Mellin-Olsen, S. (2009). Oppgavediskursen i matematikk. *Tangenten*, 2, 2–7.
- Mercer, N. (1995). *The guided construction of knowledge*. Clevedon: Multilingual Matters Ltd.

Merriam, S. (1994). *Fallstudien som forskningsmetod*. Lund: Studentlitteratur.

Merriam, S., & Tisdell, E. (2016). *Qualitative research: a guide to design and implementation*. San Fransisco: Jossey-Bass.

Metsämuuronen, J. (red.), (2013). *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012 [Longitudinell utvärdering av inlärningsresultat i matematik åren 2005–2012]*. Helsingfors: Utbildningsstyrelsen.

Morgan, C. (2000). Better assessment in mathematics education? A social perspective. I J. Boaler (red.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (s. 225–242). London: ABLEX Publishing.

Nardi, E., & Steward, S. (2003). Is mathematics T.I.R.E.D? A profile of quiet disaffection in the secondary mathematics classroom. *British Educational Research Journal*, 29(3), 345–367.

Niemi, E. K. (2004). *Perusopetuksen oppimistulosten kansallinen arviointi ja tulosten hyödyntäminen koulutuspoliittisessa kontekstissa. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2000. [Nationell utvärdering av den grundläggande utbildningens inlärningsresultat och utnyttjandet av resultaten i en utbildningspolitisk kontext. Nationell utvärdering av inlärningsresultat i årskurs 6 år 2000]*. Turku: Turun Yliopisto.

Niss, M., & Hojgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklaering. Ideer og inspiration til udvikling av matematikundervisning i Danmark*. Köpenhamn: Undervisningsministeriets forlag.

Noddings, N. (1990). Constructivism in mathematics education. I R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (red.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics* (s. 7–18). Reston VA: NCTM.

Noddings, N. (1998). *Philosophy of Education*. Oxford: Westview Press.

Norris, N., Aspland, R., MacDonald, B., Schostak, J., & Zamorski, B. (1996). *An independent evaluation of comprehensive curriculum reform in Finland*. Helsinki: National Board of Education.

Paasonen, J., Pehkonen, E., & Leino, J. (1993). *Matematiikan opetus ja konstruktivismi – teoria ja käytäntöä [Matematikundervisningen och konstruktivism – teori och praktik]*. Helsinki: Helsingin Yliopisto.

Partanen, A.-M. (2011). *Challenging the school mathematics culture: an investigative small-group approach. Ethnographic teacher research on social and sociomathematical norms*. Rovaniemi: Lapplands universitet.

Pietilä, A. (2002). *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkakuva. Matematiikkakokemukset matematiikkakuvan muodostajina [Klasslärarstuderandes bild av matematiken. Matematikerfarenheter som konstitutiva för bilden av matematik]*. Helsingfors: Helsingfors universitet. Hämtad 15.9.2017 från <http://ethesis.helsinki.fi/julkaisut/kas/opett/vk/pietila/>

Platon. (2001). *Skrifter, bok 2*. Stockholm: Atlantis.

Pring, R. (2000). *Philosophy of educational research*. London: Continuum.

Raymond, A. M., & Leinenbach, M. (2000). Collaborative action research on the learning and teaching of algebra: A story of one mathematics teacher's development. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 283–307.

Reay, D., & Wiliam, D. (1999). I'll be a nothing: Structure, agency and the construction of identity through assessment. *British Educational Research Journal*, 25(3), 343–354.

Reformskolan (1994). *Opublicerad läroplan*.

Rogoff, B. (2003). *The cultural nature of human development*. New York: Oxford University Press.

Romberg, T. A. (1993). How one comes to know: Models and theories of the learning of mathematics. I M. Niss (red.), *Investigations into assesement in mathematics education*. London: Springer (s. 97–111). London: Springer.

Røj-Lindberg, A.-S. (1996). Ett försök med undervisning i heterogena smågrupper under en geometrisekvans i åk 8 inom ramen för PUMA-projektet vid Vasa övningsskola. I L. Lindberg, & B. Grevholm (red.), *Kvinnor och matematik. Konferensrapport* (s. 72–76). Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.

Røj-Lindberg, A.-S. (1997). PUMA-projektet och högstadieelevers uppfattningar av matematikundervisningen. I J. Lithner, & H. Wallin (red.), *Research reports in mathematics education, No 1* (s. 75–80). Umeå: Department of Mathematics, Umeå University.

Røj-Lindberg, A.-S. (1999). *Läromedel och undervisning i matematik på högstadiet. En kartläggning av läget i Svenskfinland*. Vasa: Svenskfinlands läromedelscenter.

Røj-Lindberg, A.-S. (2000). Skolbaserad utveckling och forskning – exemplen PEEL och PUMA. I A.-S. Røj-Lindberg, G. Bernas, O. Björkqvist, L. Burman, L. Häggblom, & B. Kurtén-Finnäs (red.), *LInjalen, Jubileumsnummer 10* (s. 35–45). Vasa: Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi.

Røj-Lindberg, A.-S. (2001). Active learning of mathematics. I N. Benton, & R. Benton (red.), *Te Rito o the Matauranga. Experiential learning for the third millenium, Vol 2*. (s. 159–168). Auckland, New Zealand: University of Auckland.

Røj-Lindberg, A.-S. (2012). Newcomer teacher students' relation to school mathematics. Preliminary results from a long term study. I G. H. Gunnarsdottir, F. Hreinsdóttir, G. Pálsdóttir, M. Hannula, M. Hannula-Sormunen, E. Jablonka, ... K. Waege (red.), *Proceedings of NORMA 11*, s. 709. Reykjavik: University of Iceland Press.

Sahlberg, P. (2011). *Finnish lessons. What can the world learn from educational change in Finland?* London: Teachers College Press.

Sahlström, F. (2002). The interactional organization of hand rising in classroom interaction. *Journal of Classroom Interaction*, 37(2), 47–57.

Savola, L. (2010). Structures of Finnish and Icelandic mathematics lessons. I B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Pálsdóttir, B. Dahl, & L. Haapasalo (red.), *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education. Norway, Sweden, Iceland, Denmark, and contributions from Finland* (s. 519–538). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Sfard, A. (2000). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(3), 157–189.

Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, May(34), 14–22.

Simola, H. (2005). The Finnish miracle of PISA: historical and sociological remarks on teaching and teacher education. *Comparative Education*, 41(4), 455–470.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114–154.

Simons, H. (1996). The paradox of case study. *Cambridge Journal of Education*, 26(2), 225–240.

Skolstyrelsen (1985). *Grunderna för grundskolans läroplan*. Helsingfors: Statens tryckericentral.

Skott, J. (2000). *The images and practice of mathematics teachers*. The Royal Danish School of Educational Studies.

Skovsmose, O. (2000). *Lanscapes of investigation*. Roskilde, Denmark: Centre for Research in Learning

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I O. Skovsmose, & M. Blomhøj (red.), *Kan det virkelig passe? – om matematiklæring* (s. 143–157). Köpenhamn: LR Uddannelse.

Skåtar, G. (1992). *Tänk och räkna 3 och 4. En studie ur konstruktivistisk synvinkel*. Vasa: Vasa Övningskola.

Solomon, Y. (2007). Not belonging? What makes a functional learner identity in undergraduate mathematics? *Studies in Higher Education*, 32(1), 79–96.

Solomon, Y. (2009). *Mathematical literacy. Developing identities of inclusion*. London: Routledge.

Star, Smith III., & Jansen, A. (2008). What students notice as different between reform and traditional mathematics programs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(1), 9–32.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Interaction or intersubjectivity? A reply to Leman. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 191–209.

Steffe, L. P., & Wiegel, H. G. (1992). On reforming practice in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 23(5), 445–465.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1997). *Understanding and improving classroom mathematics instruction: An overview of the TIMSS video study*. Phi Delta Kappan, 79(1), 14–22.

- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: The Free Press.
- Sullivan, P., Tobias, S., & McDonough, A. (2006). Perhaps the decision of some students not to engage in learning mathematics in school is deliberate. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 81–99.
- Säljö, R. (2005). *Lärande & kulturella redskap. Om läroprocesser och det kollektiva minnet*. Falun: Norstedts Akademiska Förlag.
- Säljö, R. (2009). Learning, theories of learning, and units of analysis in research. *Educational Psychologist*, 44(3), 202–208.
- Säljö, R. (2011). *Lärande och minnande som sociala praktiker*. Stockholm: Norstedts
- Tainio, L., & Laine, A. (2015). Emotion work and affective stance in the mathematics classroom: the case of IRE sequences in Finnish classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 89(1), 67–87.
- Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. I D. A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 127–146). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Thompson, P. W. (2000). Radical constructivism: Reflections and directions. I L. P. Steffe, & P. W. Thompson (red.), *Radical Constructivism in Action*. London: RoutledgeFalmer.
- Tiller, T. (1999/2009). *Aktionslärande*. Stockholm: Liber.
- Tuohilampi, L. (2016). *Deepening mathematics related affect research into social and cultural. Decline, measurement and the significance of students' multilevel affect in Finland and Chile*. Helsingfors: Helsingfors universitet.
- Tymoczko, T. (1994). Humanistic and utilitarian aspects of mathematics. I D. F. Robitaille, & D. H. Wheeler (red.), *ICME-7 Selected lectures* (s. 327–339). Sainte-Foy: Les Presses de l'université Laval.
- Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation*, 31(4), 315–327.
- Utbildningsstyrelsen (1994). *Grunderna för läroplanen för grundskolan*. Helsingfors: Utbildningsstyrelsen.

Utbildningsstyrelsen (2004). *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen*. Helsingfors: Utbildningsstyrelsen

Utbildningsstyrelsen (2014). *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen*. Helsingfors: Utbildningsstyrelsen.

Vettenranta, J., Hiltunen, J., Nissinen, K., Puhakka, E., & Rautopuro, J. (2016). *Lapsuudesta eväät oppimiseen. Neljännen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen. Kansainvälinen TIMSS-tutkimus Suomessa [Väggkost för lärandet från barndomen. Kunnande i matematik och naturvetenskaper i årskurs fyra. Internationell TIMSS-forskning i Finland]*. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. I P. Cobb, & H. Bauersfeld (red.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (s. 163–201). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Väljjarvi, J., Kupari, P., Linnakylä, P., Reinikainen, P., Sulkunen, S., Törnroos, J., & Arffman, I. (2007). *The Finnish success in PISA and some reasons behind it 2. PISA 2003*. Jyväskylä: Institute for Educational Research, University of Jyväskylä.

Waage, K. (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning*. Trondheim: Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet.

Wedeg, T. (2008). Varför misslyckas det? *Nämnamn*, 3/2008, 43–47.

Wellington, J. (2000). *Educational research*. London: Continuum.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wenger, E. (2004). *Praksisfællesskaber – læring, mening og identitet*. Köpenhamn: Hans Reitzels Forlag.

Wood, M. B. (2013). Mathematical micro-identities: Moment-to-moment positioning and learning in a fourth-grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(5), 775–808.

Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: funneling or focusing? I H. Steinbring, M. G. Bartolini-Bussi, & A. Sierpinska (red.), *Language and communication in the mathematics classroom* (s. 167–178). Reston, Va.: NCTM.

Yackel, E., & Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. I G. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (red.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* London: Kluwer.

Yamakawa, Y., Forman, E., & Ansell, E. (2009). The role of positioning in constructing an identity in a 3rd grade mathematics classroom. I K. Kumpulainen, C. Hmelo-Silver, & M. César (red.), *Investigating classroom interaction: Methodologies in action* (s. 179–202). Rotterdam: Sense Publishers.

Bilagor 1–13

Bilaga 1. Publicerat projektmateriel från fallstudiens första skede

Burman, L. (1994). Nya trender inom utvärderingen i matematik vid Vasa övningsskola. I D.-C. Blusi, E. Hagman, B. Lerbacka, & M. Morgan (red.), *Utvärdering så klart* (s. 63–70). Vasa: Vasa övningsskola.

Burman, L. (1996). *Individuell problemlösning i klassen. Matematikproblem för systematisk övning av problemlösning i högstadiet*. Vasa: Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi.

Burman, L. (1997). *Mera problemlösning i klassen. Matematikproblem för systematisk övning av problemlösning i högstadiet*. Vasa: Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi.

Burman, L., & Røj, S. (1997). *Matematikprojekt i högstadiet. Tips och underlag för genomförande av matematikprojekt i högstadiet*. Vasa: Pedagogiska fakulteten.

Hagman, E. (1994). PUMA-projektet vid Vasa övningsskola. *Linjalen*, 4 (s. 7–8). Vasa: Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi.

Røj-Lindberg, A.-S. (1996a). PUMA-projektet vid Vasa övningsskola. *Linjalen*, 6 (s. 8–9). Vasa: Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi.

Røj-Lindberg, A.-S. (1996b). Ett försök med undervisning i heterogena smågrupper under en geometrisekvens i åk 8 inom ramen för PUMA-projektet vid Vasa övningsskola. I L. Lindberg, & B. Grevholm (red.) *Kvinnor och matematik* (s. 72–76). Göteborg: Göteborgs universitet.

Røj-Lindberg, A.-S., & Björkqvist O. (1996c). *The PUMA Project*. Poster presentation vid kongressen ICME-8, Sevilla, Spanien, 14–21.7.1996.

Røj-Lindberg, A.-S. (1997a). PUMA-projektet och högstadieelevers uppfattningar av matematikundervisningen. I J. Lithner, & H. Wallin (red.) *Research reports in mathematics education* (s. 75–80). Umeå: Umeå universitet.

Røj-Lindberg, A.-S. (1997b). Matematikundervisningen i blickpunkten: högstadieelevers uppfattning. *SPEKTRI*, 1 (s. 2–3). Helsingfors: Utbildnings-styrelsen.

Røj-Lindberg, A.-S. (1997c). PUMA-projektet vid Vasa övningsskola. *Linjalen*, 7 (s. 5–6). Vasa: Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi.

Røj-Lindberg, A.-S. (2000). Skolbaserad utveckling och forskning – exemplen PEEL och PUMA. I A.-S. Røj-Lindberg, G. Bernas, O. Björkqvist, L. Burman, L. Häggblom, & B. Kurtén-Finnäs (red.), *Linjalen, Jubileumsnummer 10* (s. 35–45). Vasa: Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi.

Bilaga 2: Intervjuguide och temaområden för elevintervjuer med kohorten Elevintervju A samt temaområden för Intervju 1 med kohorten Elevintervju B

Intervjuguide och temaområden för elevintervjuer med gruppen Elevintervju A

Intervjuguide, Intervju 1

1. Om du får i uppgift att ordna skolans ämnen i viktighetsordning på så sätt att du ger en 1 åt de viktigaste, en 2 åt de nästviktigaste och en 3 åt de minst viktiga. Vilken siffra skulle du då ge åt matematiken? Varför?
2. Berätta något om senaste matematiklektion/om en matematiklektion.
3. Vad lärde du dig? Lärde du dig något annat?
4. Vad var det viktigaste du lärde dig?
5. Brukar du känna att du vill lära dig mera än det ni behandlat på lektionerna?
6. Hur brukar du känna dig inför en matematiklektion? (exempelvis nyfiken/rädd/likgiltig/glad)
7. Hur brukar du känna dig under matematiklektionerna?
8. Brukar du på lektionerna få tillfälle att förklara hur du hade tänkt?
9. Varför tror du läraren ställer frågan "hur tänkte du"?
10. Vad tycker du är viktigare: att man tänker rätt eller att man får rätt svar?
11. Tycker du om när läraren frågar efter hur du har tänkt?
12. Tycker du att du får tillräckligt svåra frågor?
13. Hur gör du då du tycker att du inte förstår något i matematiken?
14. Hur vet du när du förstått?
15. Brukar du få den hjälp du behöver? (Om inte, vad gör du? Hur gör du för att få hjälpen?)
16. Då du skall lära dig något nytt i matematiken, hur vill du helst jobba då? Brukar ni få jobba på det sättet?
17. Känner du lust att jobba vidare hemma med sådant ni jobbat med i klassen?
18. Tycker du att ni får lämpligt med hemuppgifter? (gör du hemuppgifterna tillsammans med kamrat; hjälper dina föräldrar dig med hemuppgifter?)
19. Vad önskar du dig av matematikundervisningen?
20. Tycker du att antalet matematiklektioner är tillräckligt?

21. Vad är bäst/sämst under matematiklektionerna?
22. Tänk dig att du får tillfälle att vara lärare under några matematiklektioner. Skulle du då göra något som skiljer sig från de matematiklektioner du hittills upplevt i högstadiet?

Temaområden, Intervju 2

- a) matematiklektionen; handlande och aktiviteter
- b) projektarbete
- c) bedömning
- d) kopplingar mellan bedömning (prov, lappskrivning) och handlande under matematiklektionen
- e) behov av förändring

Temaområden, Intervju 3

- a) bedömning
- b) matematiklektionens handlande och aktiviteter
- c) projektarbete
- d) matematikens natur
- e) lärarens roll för lärandet av matematik
- f) behov av förändring

Temaområden, Intervju 4

- a) lärarbytet och eventuella förändringar i matematiklektionens handlande och aktiviteter
- b) lärarens roll för lärandet av matematik
- c) behov av förändring och elevens möjligheter att påverka
- d) bedömning
- e) projektarbete

Temaområden, Intervju 5

- a) den vanliga matematiklektionen med speciellt fokus på förändringar i elevernas och lärarnas handlande under högstadiet
- b) högstadietidens projektarbeten, klassproblem/månadsproblem och prov
- c) framtidsplaner
- d) intryck från positionen som intervjuad

Temaområden för Intervju 1 med gruppen Elevintervju B

- a) den vanliga matematiklektionen; handlande och aktiviteter
- b) projektarbete, månadsproblem
- c) bedömning
- d) provets uppgifter
- e) behov av förändring

BILAGA 3. Utdrag ur intervju 1 med eleverna Maria, Kristina och Axel i gruppen Elevintervju A. Utdragen belyser temat lärande och kunnande i matematik

Ur intervju 1 med Maria

14-16 Maria: Förra timmen /.../ vi har prov nästa gång så vi skulle öva till nåt prov /.../ Vi fick uppgifter som man ska göra i häftet.

17 A-S: Om vi tänker på en alldeles vanlig matematiklektion, alltså en sådan där ni inte övar till prov eller gör något annat speciellt, **brukar du känna att du skulle vilja lära dig mera än det ni tar upp under lektionerna?**

18 Maria: No way. Nä alltså inte är det nåt roligt matematik, det är slött. Det är bara att sitta där. Så klart man liksom lyssnar på så där och man måste ju göra det och skriver upp vad de säger där och man lagar sina läxor. Men inte gör jag ju det som det skulle vara något nöje inte. /.../

41A-S: **Varför tror du att läraren är intresserad av att få reda på hur man tänker?**

42 Maria: Nå, att hon vill veta att det är rätt, granska att det är rätt, att man vet precis hur man liksom, att hon vet att man tänker rätt hur man ska göra det här liksom.

43 A-S: Vad tycker du är viktigare: att tänka rätt eller att få rätt svar?

44 Maria: Att tänka rätt.

45 A-S: Varför?

46 Maria: Nå, om man får rätt svar så kan man få fel svar på andra, men om man tänker rätt så kan man få fler rätt svar (skrattar nöjt)

47 A-S: Kan du säga en gång till, jag vet inte om jag förstod?

48 Maria: Alltså. Tänka rätt då, så då kan man få rätt på många svar, medan ett rätt svar, så då kan man liksom få fel på många andra. /.../

58 A-S: **De gånger du märker att du inte har förstått hur brukar du göra då?**

59 Maria: Nå, när han har berättat färdigt så räcker jag upp handen Fast jag brukar lyssna ganska noga på så slipper man fortare och så får man mindre läxor.

60 A-S: Hur vet du att du har förstått?

61 Maria: Inte tänker jag på sånt, bara när jag vet att jag är säker på det. Om det är nånting jag vet att jag är osäker på markerar jag bara.

Ur intervju 1 med Kristina

19 A-S: **Brukar du känna att du vill lära dig mera än det som ni har behandlat på lektionerna?**

20 Kristina: Nä. Nog lär jag mig nog, men ibland förstår inte jag, men det kommer nog sen efter nån tid. Förklarar nån, till exempel jag sitter bredvid (flicknamn), om hon kan och inte jag kan så förklarar hon åt mig. Och om inte hon kan och jag kan så förklarar jag åt henne hur jag tänker. /.../

24 A-S: Brukar du få berätta hur du har tänkt?

25-27 Kristina: Jo, ibland nog. Om han går igenom och säger att Karolina ska ta uppgift nånting och så ska jag säga vad svaret blir och så kan han fråga att hur har du tänkt och så förklarar jag hur jag har tänkt. /.../ Jag bara berättar hur jag har tänkt

28 A-S: **Varför tror du att läraren är intresserad av att få reda på hur du har tänkt?**

29 Kristina: Nu måst jag fundera ... han måste liksom få veta hur man gör det, för att han ska sen kunna lära en på ett sätt så att man förstår.

30 A-S: Vad tycker du är viktigare. Att man har tänkt rätt eller får rätt svar?

31 Kristina: Att man har tänkt rätt. Eller nog är det viktigt att man har fått rätt svar också, men jag tror nog att det är viktigare att man har tänkt rätt. För att matte går nog ut på att tänka. Så för om man har fått rätt svar så är det nu bara att se i facit och så skriver man svaret dit. /.../

36 A-S: Hur vet du när du har förstått?

37 Kristina: Jag bara känner det på mig att nu förstår jag. Eller, då han förklarar hör jag på och sen så tänker jag att det där förstod jag eller sen så förstod jag inte. Men sen så lär jag mej det någon gång. Jag bara känner det på mig att jag förstår.

38 A-S: **Hur gör du då när du tycker att du inte har förstått?**

39 Kristina: Då frågar jag. Men fast jag får en förklaring så kan det hända att jag ändå inte heller förstår det, men så

Ur intervju 1 med Axel

10 Axel: Jag var borta på den (förra mattelektionen).

11 A-S: /.../ närmast föregående?

12 Axel: Vi räknade lite, skrev i teorihäftet, tog exempel. Inte minns jag vad det handlade om inte /.../

15-16 Axel: (Viktigaste i höst) har lärt mig riktigt hur man ställer upp med multiplikation och division. Jag kan det flytande det där nu.

17 A-S: Är det nånting som du har känt dig osäker på?

18 Axel: Det var multiplikation och division, som jag kände mig osäker på förr, men inte mera.

19 A-S: **Brukar du känna att du vill lära dig mera än det som ni har tagit upp på lektionerna?**

20 Axel: Nä.

29 A-S: Kan du berätta om något sånt tillfälle (då du berättat hur du tänkt)?

30 Axel: Inte kommer jag ihåg något nu.

31 A-S: När är det som du brukar få berätta?

32 Axel: Det är när vi har haft nån uppgift, som står i boken och ska räkna det i huvudet, så när man har räknat och kommit upp så då frågar han hur jag har tänkt.

33 A-S: Vad tycker du om det att läraren frågar hur du har tänkt?

34 Axel: Det är svårt att förklara ibland. Och onödigt.

35 A-S: **Varför tror du att läraren är intresserad av hur man har tänkt då?**

36 Axel: Jag vet inte. Om man tänker på snabbaste sättet eller långsammare.

37 A-S: Hur brukar du känna dig då när du får den där frågan hur du har tänkt?

38 Axel: Inte känner jag mig för nåt. Om den är svår så är det lite så här, men det är så för många andra också, så sitter man där och inte vet vad man ska göra. Säger man "att inte kan jag räkna det där". Jo, "någon hjälper", så räknar någon annan det. /.../

43 A-S: Vad tycker du är viktigast: att man får rätt svar på en uppgift eller att man har tänkt rätt?

44-46 Axel: Att man får rätt svar. /.../ Det är ju bäst om man har rätt, så har

/.../

112 A-S: Vad önskar du dig av matteundervisningen?

113 Maria: /.../ lite mera frihet på timmarna.

114 A-S: Vad betyder det?

115 Maria: Att liksom det som jag sa man skulle få välja själva vissa uppgifter som ska göras i stället för att få ungefär likadana uppgifter. För, för en elev är det liksom lite svårare och för andra är det (enklare), då är det fusk då om det är samma uppgift då. Så tycker nån att det är jätteenkelt, nån tycker ganska svåra så skulle det vara roligare för dem om de skulle få välja lite, och sen liksom plugga lite så skulle de kunna räkna de svårare.

118 A-S: Hur känner du dig inför det där provet?

119 Maria: Jag vill inte ha nåt prov.

120 A-S: Vill du inte ha nåt prov?

121 Maria: Nä.

122 A-S: Men du måste ha ett prov?

123 Maria: Inte är jag nu nervös eller sånt där. Läser lite sen när jag kommer hem. Det är bara till prov man gör genast.

124 A-S: Hur mycket läser du till ett matteprov?

125 Maria: Det beror lite på liksom, till ett matteprov brukar jag inte läsa så mycket. För det är liksom så där, som till hissa (historia) eller rella (religion) eller sånt där, så läser jag mycket mera, bigga (biologi) och geografi. Men till matte och modde (modersmål) läser jag ingenting nästan. Matte det är liksom bara en massa tal, som liksom om man följer med på undervisningen så behöver man inte läsa så mycket.

frågar jag på nytt eller så måste jag fundera och tänka igenom det själv och till sist så lär jag mig liksom. Och börjar förstå det på nåt vis

/.../

50 A-S: Är det nånting speciellt med matematiken då jämfört med andra läxor?

51 Kristina: Nä, nå ibland kan ju nog andra läxor vara roligare än matte förstås, men om det är nånting man inte förstår och sen så måste man sitta och tänka på samma uppgift jättelänge och sen så måste man ta nästa och så har man hur många som helst och så räcker det hela kvällen och du hinner inte göra nånting annat då och då är det inte nåt roligt att göra matte.

/.../

70 A-S: Vad tror du att de skulle tycka att är kul? (...) Låt oss säga att det är en annan sjua du skulle få bestämma hur undervisningen ska se ut för?

71 Kristina: Det finns väl många sjuor som inte alls skulle vilja ha matte, som tycker att det är jättetråkigt. Men inte man kan väl bara låt dem far. Inte vet jag om de kan tycka om matteundervisningen fast hur man skulle göra. Men de måste ju ändå lära sig någonting. Jag vet inte jag. Jag skulle väl ha någorlunda likadant, man skulle måsta räkna i böckerna hemma. Men oftast så gör inte, en del på vår klass, så gör inte läxorna fastän de skulle måsta göra det. De bryr sig inte fast läraren blir arg. Hemuppgifter vet jag inte någonting om de är, inte de bästa inte. Inte hinner man ju annars få allt färdigt inte, om man inte gör något hemma.

man inte fel.

47 A-S: **Hur vet du när du har förstått nånting? En ganska svår fråga, men försök tänka. Hur vet du när du har förstått?**

48 Axel: Jag ser det, när man har skrivit upp på tavlan så tänker jag igenom det, fast med nåt annat tal. Så frågar jag ibland. Om jag inte har förstått så frågar jag genast. Nog brukar jag oftast förstå det, eller så förstår jag inte.

/.../

92 A-S: Hur skulle eleverna jobba under dina lektioner? Ensamma eller i par?

Skulde de ha lärobok?

93 Axel: De skulle nog ha lärobok för det mesta. Det är ju kul också för eleverna mer när man får lära sig sådana här uppgifter och flera stycken.

94 A-S: Hur skulle de jobba då?

95 Axel: Fast med sådana här rebusar som man får lösa och sådant här ganska roligt nån gång.

96 A-S: Tycker du att det behövs mera sådant?

97 Axel: Det blir nog roligare, fast inte kan man ju ha det så många gånger. Man lär ju sig inte alltid så mycket av det heller.

98 A-S: Nå sen ska vi ställa sista frågan och den lyder så här: vad önskar du dig av matematikundervisningen på högstadiet?

99 Axel: Att de ska döma snällt sen när vi har prov, att de inte ska vara så hårda. Det är så stor skillnad på somliga på matte. Somliga är bra och somliga är mindre bra. Så de skulle kunna ta bedömningen lite efter det också.

BILAGA 4. Utdrag ur intervju 1 med eleverna Jan, Kristina och Ulla ur gruppen Elevintervju A. Utdragen belyser temat En vanlig matematiklektion

Tema: En vanlig matematiklektion
Utdrag ur intervju 1 med Jan

9 A-S: Sedan skulle jag vilja att du berättade lite om den senaste matematiklektionen ni hade. Bara någonting som du kommer på.

10 Jan: Nå vi räknade såna där potenser och exponenter.

11 A-S: Mmm. Minns du något annat?

12 Jan: Nä.

13 A-S: Vad lärde du dig den timmen?

14 Jan: Hur man skulle räkna det.

15 A-S: Lärde ni er någon regel?

16 Jan: Nog var det väl, vi skrev nog upp nåt.

17 A-S: Ni skrev upp en regel?

18 Jan: Mmm.

19 A-S: Skrev ni den i häftet?

20 Jan: Jo.

21 A-S: Lärde du dig något annat än regeln?

22 Jan: Ja, hur man skulle räkna det.

23 A-S: Vad var det viktigaste du lärde dig då? Var det just den här regeln det?

24 Jan: Nä, kanske inte.

25 A-S: Om du tänker på matematiklektionerna. Brukar du ibland känna att du skulle vilja lära dig mera än det som ni lär er under timmarna?

26 Jan: Jag vet inte jag.

Tema: En vanlig matematiklektion
Utdrag ur intervju 1 med Kristina

5 A-S: Kan du berätta för mig någonting om förra mattelektionen ni hade.

6 Kristina: Alltså den som vi haft sist nu?

7 A-S: Mmm. Var det en vanlig mattelektion det?

8 Kristina: Jo nog var den vanlig nog. Vad gjorde vi? Vi lärde oss om potenser. Visst heter det så? Jag tror det. Inte vet jag nu om det var nåt speciellt, en vanlig mattelektion.

9 A-S: På vilket sätt jobbade ni under den timmen?

10 Kristina: Vi skrev i våra teorihäften det som (läraren) skrev då på tavlan. Och sen så skrev vi av det då. Och sen så fick vi liksom se i böckerna och så frågade han av oss. Så frågade han då hur vi räknat eller hur man tänkt och hur vi klarat av det allihopa.

11 A-S: Vad lärde du dig den timmen?

12 Kristina: Jag lärde mig att såna här potenser måste ha samma, eller vi liksom lärde oss att de måste ha samma bas. Eller det lärde vi oss den dagen då. Hur man multiplicerade med samma bas.

13 A-S: Lärde du dig något annat?

14 Kristina: Det här med hur man liksom ska addera ihop dom här, vad heter det nu? Vad heter dom nu?

15 A-S: Exponenter.

16 Kristina: Exponenterna, just det, dom skulle man addera ihop.

17 A-S: Nä, vad var det viktigaste du lärde då?

18 Kristina: Det viktigaste? ... Inte vet jag.

19 A-S: Brukar du känna att du vill lära dig mera än det som ni har behandlat på lektionerna?

20 Kristina: Nä. Nog lär jag mig nog. Nä, men ibland förstår inte jag, men det kommer nog sen efter någon tid. Förklarar någon, som tex. jag sitter bredvid (bankkamraten), som om hon kan och inte jag kan så förklarar hon åt mig. Och om inte hon kan och jag kan så förklarar jag åt henne hur jag tänker.

Tema: En vanlig matematiklektion
Utdrag ur intervju 1 med Ulla

7 A-S: Ska du berätta lite om förra matematiklektionen?

8 Ulla: Vi hade nåt slags test och jag tyckte det var ganska svårt för att, nå inte vet jag, jag tyckte bara det var svårt. Det var kort det där testet, men det var svårt som jag sa.

9 A-S: Var det, det var ett prov?

10 Ulla: Det var något sånt här test inför provet som vi kommer att ha den (datum).

11 A-S: Minns du varför du tyckte att det var svårt?

12 Ulla: Det var en uppgift, som jag inte visste riktigt hur jag skulle räkna. Så.

13 A-S: Kan du också berätta någonting om en helt vanlig matematiklektion?

14 Ulla: Först brukar vi ta lite teori. Och sen brukar vi börja räkna. Och det är ganska lätt oftast. Och sen får vi hemläxor.

15 A-S: Kommer du ihåg vad du lärde dig just då den senaste så att säga vanliga mattelektionen?

16 Ulla: Nä, jag kommer inte ihåg. Jag tror det var nånting med (...) jag minns inte faktiskt.

17 A-S: Brukar du tycka att du skulle vilja lära dig mera än det som ni tar upp på lektionerna?

18 Ulla: Nä, inte så speciellt nä.

19 A-S: Kan du säga hur du brukar känna dig före en matematiklektion?

20 Ulla: Ifall vi haft nån svår läxa så tycker jag det är ganska pirrigt och så där, men... Jag är inte så värst bra i matte så, det är svårt för mig.

...

26 Ulla: Jag tycker att liksom jag känner mig osäker ganska ofta. Och det är svårt. Sen brukar jag börja tänka att jag inte är så bra på det här, så jag får nog säkert dåligt i det här. Och så där.

Bilaga 5. Utdrag ur samtal med en projektlärare

Som exempel på hur samtalet med en lärare flöt fram presenterar jag en bearbetning i berättelseform av innehållet i samtalet med projektläraren Per. Berättelsen täcker ungefär en fjärdedel av samtalet. I samtalet använder vi begreppet "projekt" i två betydelser, dels för att beskriva lärarnas förändringsarbete, dels elevernas projektarbeten. Samtalet ägde rum i Pers arbetsrum. Det tog ungefär en timme och omfattar 6.417 ord varav 5.584 ord (87%) yttrades av Per.

Samtalet inleds med att Per redogör för sin utbildning och sin arbetserfarenhet. Sedan kommer det snabbt in på reformprojektet genom att Per delger sin syn på vilka förändringsmotiv som kan ligga i bakgrunden för en projektlärare. Per inleder med att beskriva sitt behov av att utvecklas och **inte gå i gamla hjulspår**. Han hänvisar sedan till att det finns en allmän acceptans för att något måste göras med matematikundervisningen på högstadiet och konstaterar att motiv även kan sökas i att alla elever undervisas i samma grupp.

Vi borde kunna ge våra elever mera än vad vi har gett och då har ju tankar kring det här kommit. Och en sak som ytterligare liksom tillspetsar situationen är ju det att nivågrupperna togs bort och man måste integrera liksom en massa olika, eller elever med olika bakgrund och förutsättningar i samma klass.

Innehållet i **hjulspårsmetaforen väcker min nyfikenhet**. Jag uppmuntrar därför i min följande fråga Per till att berätta mera om varför han vill utvecklas som lärare. Per tänker efter en stund, och lyfter sedan fram den känsla av tillfredställelse han upplever då han förberett något nytt och under lektionen sedan får det positiva gensvar av eleverna han hoppats på. Han säger: "Den lektionen är trevligare än en som man går och river av nånting som man gjort fem gånger tidigare." Samtalet återknyter sedan till Pers tidigare resonemang om elevernas behov varpå han introducerar begreppet **traditionell matematikundervisning**. Han menar att en sådan undervisning har lett till elevernas passivitet, bristande kunskapsansvar och, som han speciellt betonar, elevernas svaga förmåga att föra matematiska samtal.

Med traditionell matematikundervisning så har de inte lärt sig att ta ansvar för vad de kan så hemskt bra ... de kan inte läsa, läsa läroböckerna riktigt och de kan inte riktigt prata matematik, i synnerhet det här sista tycker jag har varit en svaghet.

Jag väljer att inte ännu gå vidare på resonemanget kring lärandeeffekter av traditionell undervisning utan riktar igen fokus på undervisningen i reformprojektet vars akronym står för såväl process som utvärdering och på att processer i lärandet ofta stått i brännpunkten för lärarnas diskussioner. Vad anser Per som mest väsentligt i begreppet process, undrar jag sedan. Per konstaterar utan att tveka att han ser process från

två synvinklar, lärarens och elevens. Han redogör först för dessa och kommer sedan att tänka på att elevernas projekt också på sätt och vis hör ihop med begreppet process eftersom de är "ett medel i den här undervisningen". Ur lärarens synvinkel handlar processen enligt Per om att "ta i bruk vissa metoder som man annars inte skulle göra" medan han ur elevens synvinkel betonar elevens aktivitet och att se lärande som en process där det "ingår mera aktivitet och mera eget prat som samtidigt då avslöjar om de har uppfattat rätt och som läraren kan **gå in och lite justera** vid behov". Per använder induktiv metod som exempel på vad han avser med lärarens metoder.

Att man ser till att eleverna får liksom upptäcka det nya, att man resonerar fram det så att säga, men det är **eleverna som kläcker det hela**. Och samtidigt förstås också att man undervisar så att eleverna förklarar för varandra och ... och (tyst) ännu så försöker ju läraren strukturera det stoff som man har gått igenom så läraren blir en sån här som **bäddar för att eleverna ska få hitta på saker** och sedan samtidigt hjälper till att strukturera liksom matematiken för eleven.

Samtalet går sedan över till utvecklingsarbetets bedömningspraxis via ett kort inledande resonemang. I sin respons på en fråga gällande relationen mellan undervisning och elevernas matematikkunskaper uttrycker Per en förväntan att reformprojektet skall leda till att eleverna "har mera aktiv kunskap" eftersom de dels "skall ha tillägnat sig mera kunskap" och dels "pratad mera om den på egen hand". Jag har under samtalets gång noterat att dimensionen aktiv-passiv verkar vara betydelsefull och uppmuntrar därför Per att utveckla denna vidare genom att ställa följdfrågan: Hur syns en aktiv kunskap? I sitt eftertänksamma svar betonar Per att den syns både i att fler elever kan mer matematik och att de har större nytta av vad de kan. Han talar om att aktiv kunskap syns som en färdighet att tolka den matematik som presenteras till exempel i dagstidningar. Per benämner färdigheten en matematisk blick, en färdighet som han konstaterar vara svår att mäta. Han säger:

Vi ska ha lite färre elever som, som, som säger sedan att de inte kommer ihåg någonting från matematiken och vi ska ha elever i gymnasiet som har, **har mindre luckor**, till exempel. Och sedan kanske lite en matematisk blick hos alla som gått ur skolan, att de kan tillgodogöra sig matematik i till exempel dagstidningar. Men det är ju förstås inte så lätt att mäta.

Bilaga 6. Självuppfattningstestets påståenden

Svarsalternativen är:

Rätt; Ibland rätt; Ibland rätt/Ibland fel; Ibland fel; Fel.

Påståenden märkta # är negativt formulerade. Vid kodning har jag därför använt motsatt värde. Till exempel svarsalternativet Rätt på påstående #21 "Jag skulle gärna slippa matematiklektionerna" har kodats som -2 för att indikera elevens negativa positionering.

Påståenden relaterade till skolmatematisk verksamhet

Matematikrelaterade påståenden

- 1 # Jag är bättre i många andra ämnen än i matematik
- 9 Jag är bättre i matematik än i de flesta andra ämnen
- 29 Matematik är ett av mina bästa ämnen
- 35 # Matematik är ett av mina svagaste ämnen

Grupprelaterade påståenden

- 3 Jag är lika bra i matematik som de flesta andra i klassen
- 13 Jag är bland de bästa i matematik i klassen
- 25 # Många i klassen är duktigare än jag i matematik
- 39 # Jag klarar mig sämre i matematik än i de flesta i klassen

Generellt

- 7 # Jag är dålig i matematik
- 15 # Jag tycker att matematik är svårt
- 23 Jag har lätt att lära mig matematik
- 33 Jag klarar mig alltid bra i matematik

Förväntningar:

- 5 Jag tror att jag alltid kommer att klara mig bra i matematik
- 17 Jag tror att jag kommer att få ett bra vitsord i matematik i högstadiet
- 27 # När jag fortsätter min skolgång kommer matematik att bli ett problem för mig
- 37 # Jag tror att jag alltid kommer att ha problem i matematik

Emotionellt relaterade påståenden, matematik

- 11 Jag gillar matematik
- 19 # Jag hatar matematik
- 21 # Jag skulle gärna slippa matematiklektionerna
- 31 Jag ser fram emot matematiklektionerna

Påståenden relaterade till skola

- 6 Jag är bra i de flesta ämnen i skolan
- 10 Jag lär mig lätt i skolan
- 30 # Skolämnena är inte min starka sida
- 36 # Jag känner mig ofta dum i skolan
- 12 # Jag önskar jag slapp gå i skolan
- 16 Jag gillar alla skolämnen
- 20 Jag är intresserad av alla skolämnen
- 24 # Jag hatar skolan

Påståenden relaterade till självacceptering

- 2 Jag känner att jag har mycket att vara stolt över
- 4 Jag klarar av det mesta om jag försöker
- 8 # Jag är ofta missnöjd med mig själv
- 14 # Jag tycker ofta att jag gör någonting dumt
- 18 # Allting som jag gör går galet
- 22 Jag godtar mig själv sådan jag är
- 26 # Jag känner mig ofta osäker
- 28 # Jag har ofta lite förtroende till mig själv
- 32 # Jag önskar att jag vore annorlunda än jag är
- 34 Jag vill helst vara sådan som jag är
- 38 Jag klarar det mesta lika bra som andra
- 40 Jag gillar mig själv sådan som jag är

Bilaga 7. Exempel på analys och tolkning under fallstudiens andra skede. Intervju 3 med Kristina.

Den tredje intervjun med Kristina skedde i december då Kristina var åttondeklassare. Kristina har beskrivit en vanlig matematiklektion under höstterminen och i utdraget besvarar Kristina min uppföljningsfråga (Kvale, 1997, s. 124) om sitt sätt att vara under en sådan lektion. I hennes svar har jag märkt ut intressanta begrepp och påståenden som jag sedan följde upp i den fortsatta tolkningsprocessen.

Ann-Sofi: Hur brukar du vara på en vanlig lektion?

Kristina: Nå inte brukar jag väl ... jag brukar väl var ganska ... Det beror på om jag är trött eller om jag är pigg. Emellanåt så tycker man bara att matte är tråkigt. Om man inte förstår vad man ska räkna då orkar man inte göra någonting, så då bara sitter man där och man gör ingenting. Om man ska räkna till exempel sådana där uppgifter, så förstår man inte dem, så har man fått ett papper då så har man klarat att räkna en uppgift, eller en och en halv ungefär. Och så har någon annan gjort hela pappret färdigt. Och sedan tänker [lärarens namn], okej, så skriver han upp på tavlan, börjar gå igenom alla [uppgifter] så har man inte alls [hunnit] lika långt som då han börjar räkna, så då blir det så där att det här förstår jag inte alls, så blir allt riktigt hasåt [dialektalt ord för bråttom] man förstår ingenting. Men om jag har gjort läxorna och fortsätter med samma sak som läxan så då förstår man mycket bättre direkt då man liksom har fattat vad man har gjort. Då är det roligt att vara på matte om man förstår vad de har om [vad de behandlar?], och det går fort att räkna. Jag tycker inte om att hålla på med samma uppgift i flera...

Här beskriver Kristina strukturen för vanliga lektionsaktiviteter som uppgiftsdominerad och som orienterad mot självständigt räknande. Hon beskriver lektionens tempo, skolmatematikens tråkiga natur, lärarens framträdande roll och sin egen nedtonade roll som intellektuell resurs. Varför saknar hon energi att fortsätta delta och försöka tolka vad hon skall göra eftersom det är viktigt för henne? Hon talar om att vara uttråkad, kraftlös, övergiven och att hon har begränsad tillgång till den slags förståelse hon strävar efter. Hon borde vara engagerad, men beskriver en situation där hon stängs ute. Är det här ett exempel på en alienerande erfarenhet på grund av lektionens tempo? Hon söker efter en lösningsmodell för att komma bort från sin omedelbara känsla av bristande förståelse i en situation då hon möter en tilldelad uppgift. Är det att hon sitter och gör ingenting ett tecken på att hon ger upp? Eller på acceptans? Eller bara ett socialt tecken på att hon behöver lärarens hjälp? Läraren ser att hon sitter och gör ingenting. Boaler (1998) märkte samma slags beteende i en av de två skolor hon studerade.

Det finns en intressant spänning här som relaterar till lektionens tempo. Kristina berättar om hur hon identifierar positivt med

matematiklärande som en process där hon förstår hur hon snabbt skall tillämpa bekanta procedurer. Hon knyter an till källor för lärande, kunnande och motivation som är lokaliserade i och beroende av auktoriteter utanför henne själv. Betraktar hon inte sig själv som en som 'upptäcker strukturer' i den mening som projektlärarna avser? Hon talar om att skolmatematiken är rolig då hon förstår 'medan hon gör' och blir belönad med framgång då hon gör nästa, liknande, uppgift. Är det så att hennes känsla av förståelse ofta kommer först efteråt?

Utdraget berättar också om deltagandestrukturen och om det slags offentliga interaktion som tycks vara en social norm i klassrummet: det implicita kunnande, för-givet-tagande, som styr lärare och elever och som "berättar" när de skall göra vad och hur det skall göra det utan att någon nödvändigtvis explicit har påpekat eller lyft fram detta. Bauersfeld kallar fenomenet för ett språkspel (language game); Brousseau använder begreppet didaktiskt kontrakt; Stigler och Hiebert använder begreppet kulturellt manus (cultural script). Något som tas för givet i Kristinas klassrum tycks vara att läraren är ansvarig för att starta den offentliga interaktion som förklarar uppgifter vid tavlan då han anser att tillräckligt många elever är klara med en viss mängd uppgifter. Detta skapar ett dilemma för Kristina eftersom hon upplever en bristande möjlighet att förstå och kanske att läraren ignorerar henne. Jag får en känsla av hon ser sig som ganska sekundär i klassrumsgemenskapen. Är det här en orsak till att hon förefaller undvika matematiska utmaningar, hon lokaliserar sig själv i marginalen och betraktar inte sig själv som en som upptäcker strukturer? Men hon är ju en elev som får fina vitsord! Hon vill absolut förändra sitt sätt att delta, men ur hennes synvinkel är det inte möjligt. Vad är det som förhindrar henne?

Bilaga 8. Brev för informerat samtycke

Hej!

Kommer Du ihåg PUMA-projektet?

På något sätt var Du involverad i PUMA-projektet under åren 1994 till 1997. Under samma tid deltog jag i PUMA – projektet som forskare och observatör. Jag dokumenterade projektet på olika sätt, bland annat genom att samtala med Dig och de andra lärarna, med vissa utvalda elever och med skolledningen. Du var en av de lärare som gav mig den värdefulla information på vilken min doktorsavhandling delvis kommer att vara baserad. Nu ber jag att Du skriftligen ger Ditt medgivande till att den information Du gav mig kan publiceras i denna vetenskapliga form. I mitt forskningsarbete följer jag de etiska principer som gäller för god forskning och publicering av forskningsresultat.

Material samlades huvudsakligen in inom ramen för ett samarbetsprojekt mellan Åbo Akademis pedagogiska fakultet och Din skola. Eftersom Din skola även axlar ett speciellt ansvar för lärarutbildning på svenska, är det inte möjligt för mig att garantera skolans anonymitet. Men alla lärar- och elevinformeranter framträder naturligtvis i avhandlingen under pseudonym. Jag vill även betona att Du har Din fulla rätt att meddela mig om Du inte vill framträda i avhandlingen på annat sätt än som en i gruppen projektlärare.

Var vänlig underteckna och returnera Ditt medgivande i det bifogade svarskuvertet inom maj månad.

Tack på förhand.

Med vänlig hälsning
Ann-Sofi Røj-Lindberg

Medgivande

Jag ger härmed mitt medgivande till att den information jag bidrog med inom ramen för PUMA-projektet kan användas i forskningssyfte och att min person får omnämnas under pseudonym vid presentation av forskningsresultaten under förutsättning att detta sker på ett konfidentiellt sätt.

Bilaga 9: E-post kommunikation med Kristina inför vuxensamtalet

Hej!

Det kan hända att du är en annan person än jag förmodar men jag dristar mig ändå till att framföra mitt ärende till den person jag söker. Då du gick i högstadiet blev du intervjuad fem gånger av mig som då forskade inom ett projekt som matematiklärarna var engagerade i. Nu funderar jag på en uppföljningsintervju med några av er och hoppas att du därför kunde meddela mig om du är intresserad av att bli intervjuad om dina erfarenheter av skolmatematik och hur jag kan nå dig, epost, telefon och var du i så fall kunde tänka dig att intervjun skulle kunna genomföras. Det är också i undantagsfall möjligt att genomföra intervjun per telefon. Jag ber om ursäkt ifall du är en annan person än den jag söker. Hoppas i varje fall att du hör av dej!

med vänliga hälsningar Ann-Sofi Røj-Lindberg

Hejsan!

Det är nog den rätta personen du fått tag på! Jag har gått i Skolan och kommer ihåg att du intervjuat mig då för flera år sedan. Jag tar gärna del av projektet och ställer upp på intervju! Jag bor nuförtiden i (ort) men besöker Vasa nu och då. Jag kommer t.ex att vara i Vasa veckoslutet 14-15.10. Har du möjlighet att intervju mig då? Annars kan vi också ta det per telefon om du inte råkar vara i (ort) nån dag. Min dagliga arbetstid är 13-17, så före eller efter det kan jag bli intervjuad. Maila eller ring mig så kommer vi överens om hur vi gör!

Mvh, Kristina

Hej Kristina!

Oj så roligt att höra av dej! Jag sitter som bäst och lyssnar igen på de gamla banden med dej. Som det ser ut nu kommer det att passa alldeles förträffligt för mig med en intervju någon gång under lördag eller söndag den 14-15. Ett möjligt ställe att träffas på är till exempel vid Academill där vi kan sitta i lugn och ro i något utrymme. Du kan föreslå en plats och en tid! Reservera gärna minst en timme. Det är de

facto ganska svårt att säga hur lång tid vi behöver Du behöver inte förbereda dig på något speciellt sätt. Temat för intervjun kommer som jag redan skrev att vara dina erfarenheter av skolmatematik och specifikt i relation till högstadiet, nu s.a.s ur ett vuxenperspektiv.

Ett gott veckoslut! Hälsar Ann-Sofi

Hej!

Intervju på Academill 14 eller 15 oktober passar bra! Helst inte alltför tidigt på morgonen. Kanske nångång mitt på dagen eller tidig eftermiddag, och hellre på lördag. Academill är lite obekant plats för mig, men jag skall nog hitta fram. Skall vi slå fast lördag 14.10 kl.13?

Mvh, Kristina

Bilaga 10. Projektuppgiften "Arbetslöshet – vår tids problem"

Lärarnas eget omdöme om denna projektuppgift: "Det här projektet var mycket populärt och engagerade många. Temat var aktuellt och gav underlag för arbete med nyttig statistik" (Burman & Røj, 1997).

Arbetslöshetsgraden i Finland har haft en negativ trend under 1990-talet. Detta har vi alla kunnat följa med på nära håll. Arbetsituationen i vår egen kommun har inte heller varit som under de goda åren under början resp. slutet av 1980-talet. I det här projektet skall du göra diagram, jämförelser och beräkningar kring arbetslösheten i några OECD-länder. Dessutom skall du bekanta dig med motsvarande uppgifter för vår kommuns del, samt för ett par andra kommuner

A. Deluppgifter

Besvara följande frågor utgående från tabellen som visar arbetslösheten i några OECD-länder samt några kommuner och städer i dina hemtrakter (anm: tabellen ingick i projekttexten).

1. Gör ett eller flera linjediagram där procent arbetslösa anges för åren 1978 – 1993 för de olika länderna. (Om du är osäker över vad ett linjediagram är så får du hjälp från uppgift 94 på övningspappret som delades ut i början av september).
2. Vilket land hade den högsta resp. lägsta arbetslösheten under perioden? Motivera ditt svar.
3. Viket lands (vilka länders) arbetslöshet kan sägas vara linjär (nästan en rät linje) under perioder på några år. Med linjär menas då en fallande, en stigande eller en konstant (vågrät) linje. Hur förändras arbetslösheten under ifrågavarande period?
4. Gör ett linjediagram där arbetslöshetsgraden för de angivna kommunerna samt hela landet anges.
5. Vilka slutsatser kan du dra då du utgående från diagrammet jämför vår kommun med två andra kommuner (anm: kommunerna fanns namngivna).
6. Vilka blir dina slutsatser om du jämför vår kommun med hela landet?

7. Hur stor arbetslöshet (i procent samt antalet personer) skulle det vara i vår kommun resp. hela landet, om vi skulle utgå ifrån att trenden för de tre sista åren som finns med i tabellen skulle fortgå under de tre följande åren?
8. Gör dina egna diagram och kommentarer utgående från de uppgifter du har.

B. Redovisning och krav

En av de viktigaste idéerna med projektet är att du skall lära dig arbeta självständigt och själv kunna presentera ditt arbete. Det är därför väldigt viktigt hur du redovisar dina resultat. Du får poängavdrag för slarviga och otydliga diagram och oklar presentation. Lagg ner stor möda på att göra ditt arbete snyggt, tilltalande och lättläst.

Du blir bedömd i resultat, utförande och presentation, precis som i fjol.

Som vanligt i alla projekt finns det extrapoäng att tjäna om du själv utvidgar projektet och gör undersökningar som inte direkt är begärda.

Lycka till med projektet.

Bilaga 11. Anvisningar för "Öppet Projekt"

ÖPPET PROJEKT

I det här projektet skall du arbeta med den matematik du tycker om. Projektet kan behandla ren matematik. ("skolmatematik") eller ett vardagsnärt tema där matematiken ingår i någon form.

Förslag på områden inom skolmatematiken du kunde arbeta med är geometri, ekvationer (exempelvis högregradsekvationer), funktioner och statistik. Exempel på vardagsnära teman är handelsmatematik, matematik inom fysiken, personlig ekonomi, försäkrings- och bankmatematik osv.

A. Genomförande

Beroende på vilket tema du väljer kommer projektets uppläggning att variera. Därför bör du diskutera med din lärare efter att du valt tema, så kan vi tillsammans lägga upp projektet. Under projektets gång skall du en gång i veckan redovisa ditt arbete. Skriv därför en "dagbok" över tid och tema.

Vi lärare hjälper till att skaffa litteratur och övrigt som kan behövas för projektet. Dessutom handleder vi er i arbetet.

B. Redovisning och krav

Det är viktigt att du har egna idéer i projektet och inte skriver rakt av litteraturen. Dessutom inverkar handledningstillfällena på bedömningen av utförandet, sålunda att egna tankar värdesätts.

Som vanligt bedöms också resultatet och presentationen.

Bilaga 12. Tre klassproblem

Bland de cirka 40 klassproblem (Burman 1996, 1997) som användes av lärarna i årskurserna 8 och 9 i syfte att "systematiskt öva eleverna i problemlösning" har jag valt ut de tre klassproblem, "Fibonacci-tal", "Mera pizza för pengarna" och grupproblemet "På vandring" som Joakim explicit anknyter till i högstadieintervjuer och/eller under den retrospektiva intervjun. Kommentarer formulerade av Joakims lärare Per inkluderas även.

Lärarna klassificerade problemen "Fibonacci-tal" och "Mera pizza för pengarna" som problem för vilka "REGEL som ofta bör tillämpas upprepade gånger" föreställdes som ett typiskt tänkt tillvägagångssätt vid en lyckad lösningsprocess. Det var "den bakomliggande metod eller idé som är avgörande för att en elev lyckas lösa problemet eller inte". För dessa två problem gällde således lärarens antagande om att en framgångsrik problemlösning påvisar elevens förmåga att se och använda regler.

Grupproblemet "På vandring" klassificerades som ett problem för vilket "PRÖVning som oftast bör vara systematiskt" samt "UTEslutningsmetod är möjlig när alternativ till lösningar ges" betraktas som tänkta tillvägagångssätt vid en framgångsrik problemlösning.

De bokstäver (A, B, C, D, E, F) som syns i problemtexterna nedan indikerar en kategorisering av de olika delmoment som respektive problem förmodades öva. Med en ring runt en bokstav indikerade läraren hur elevens/elevernas problemlösning blev "belönad" och påvisades elevens "indirekta förståelse" för problemlösning. Till exempel med A+ring indikerades "Kläckning (kreativitet, fantasi, även gissning)", med D+ring indikerades "Fullständighet" och med F+ring indikerades "Fördjupad insikt". Detta bokstavssystem infördes för att lärarna ville tona ner klassproblemens roll som redskap för formell utvärdering.

FIBONACCI-TAL

Fibonacci-tal är namnet på en speciell talföljd som är uppkallad efter en berömd italiensk matematiker som levde ca 1170-1250. Talföljden ser ut på följande sätt:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Det speciella med talföljden är att varje tal i talföljden är summan av de två tal som finns till vänster om talet. T:ex. är

$0 + 1 = 1$ $1 + 1 = 2$ $1 + 2 = 3$ $2 + 3 = 5$ osv.

a) Vi utökar nu talföljden med fyra tal så här:
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, A, B, C, D, ...

Din uppgift är att bestämma (A, B, C och) D!
D = _____

b) Man kan också utöka talföljden til vänster så här:
E, F, G, H, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Vi tänker då i stället
 $5 = 3 + 2$ $3 = 2 + 1$ $2 = 1 + 1$ $1 = 1 + 0$ osv

Din uppgift är nu att bestämma (H, G, F och) E!
E = _____
A B C E

Bokstäverna A, B, C och E användes i det här problemet som bedömningskoder enligt följande:

- A eleven har kommit en bit på väg
- B eleven kan tillämpa regeln med summan av två tal
- C eleven har bestämt talet D
- E eleven har bestämt talet E

Läraren Per konstaterade att problemet var "mycket lätt utom när det gäller att bestämma E"

MERA PIZZA FÖR PENGARNA

Din uppgift är att lösa följande problem:

Får man mera pizza för pengarna om man köper en familjepizza med diametern 38 cm till priset 63 mk eller två vanliga pizzor med diametern 28 cm till priset 27 mk per styck? Vi utgår ifrån att den valuta man får för pengarna står i direkt proportion till pizzans storlek (=area). (Glöm inte att skriva ner delresultat som kan ge delpoäng!)

A C D E

Bokstäverna A, C, D och E användes som bedömningskoder enligt följande:

- A eleven har fått fram (gissat) rätt svar utan motiveringar
- C eleven har beräknat jämförelsetal
- D eleven har beräknat arean eller areaskalan
- E eleven har motiverat det rätta svaret korrekt

Läraren Per konstaterade att problemet var "mycket svårt om inte cirklar just behandlats (och kanske också fastän så är fallet). Ändå har många eleverna en intuitiv uppfattning om vad resultatet borde bli".

PÅ VANDRING

En grupp på fotvandring beslöt att de som dagsetapp skulle gå västerut ett visst antal hela kilometer, sedan söderut ett visst antal hela kilometer och slutligen den kortaste vägen till utgångspunkten. Uppgiften är att pröva hur många hela kilometer gruppen skall gå västerut och söderut för att deras dagsetapp skall vara så nära 20 km som möjligt.

"Den grupp som kommer närmast 20 km på 20 min. Vinner!"

A B C D

Bokstäverna A, B, C och D användes som bedömningskoder enligt följande:

- A har använt Pytagoras' sats
- B har ritat en figur eller gjort en tabell
- C har redovisat och jämfört flera alternativ
- D har hittat den bästa lösningen

Läraren Per konstaterade att problemet "utfördes i grupper om tre elever och med 20 minuter till förfogande. Alla grupper lyckades i minst tre av de ovan nämnda avseendena /../ problemuppgiften verkade vara mycket lyckad av diskussionen och samarbetet att döma."

Bilaga 13. Exempel på klassrumsepisoder

Att ta ansvar för sitt lärande är att komma ihåg regler

Episoden föregicks av spridda elevfrågor i anslutning till det projektarbete som läraren nyligen introducerat. Läraren uppmanade sedan eleverna att erinra sig och upprepa en matematisk lagbundenhet, en regel, som hade behandlats i klassen för en tid sedan.

Episoden inleds av läraren som säger

För några veckor sedan gick vi igenom multiplikation med negativa tal, kommer ni ihåg regeln?

Alla elever kommer inte ihåg regeln. Elev A ställer motfrågan

Vad då för regel?

Läraren ger en ledtråd.

Den där med minustecken.

Elevers tänkande kanaliseras därmed mot det förväntade svaret. På uppmaning av läraren redogör elev B för den förväntade regeln varpå läraren omedelbart bekräftar svaret genom att säga

Rätt. Hörde alla?

Läraren vänder sig sedan till elev A med uppmaningen

Kan du upprepa?.

Elev A upprepar regeln på förväntat sätt och läraren bekräftar svaret med att säga "Precis". En stund senare uppmanar läraren eleverna att skriva rubriken *Division med negativa tal* i sina teorihäften.

Den som inte vet skall vara tyst

I klassrummet pågick ett samtal som antog kommunikationsmönstret IRE, initiering-respons-evaluering. Läraren ställde frågor till hela klassen om hur uppgifter skulle lösas och eleverna förväntades kunna svara korrekt.

Läraren hade märkt hur en elev sitter och småpratar med en annan elev och uppmanar eleven att svara på en fråga utan att eleven räckt upp handen. Eleven kan inte ge läraren det förväntade svaret varpå läraren med kommentaren

Hur kan du sitta och prata annat om du inte vet, då skall du vara tyst åtminstone.

bekräftar att legitimt kunnande innefattar uppmärksamhet för att kunna svara på lärarens frågor på förväntat sätt.

Ann-Sofi Røj-Lindberg

Skolmatematisk praktik i förändring – en fallstudie

I sin doktorsavhandling beskriver författaren en situation där en grupp finlandssvenska matematiklärare och lärarutbildare tillsammans med henne genomförde en treårig aktionsforskningsprocess i syfte att reformera det skolmatematiska arbetets metoder i årskurserna 7–9. Reformprojektet var teoretiskt förankrat i konstruktivism, lärares förändringsarbete genom aktionsforskning och de finländska nationella läroplansreformerna 1985 och 1994. Målet var att få eleverna att verkligen vilja lära sig matematik. Genom analys av utvalda elevers intervjubaserade berättelser om sina skolmatematiska erfarenheter under högstadiet kan författaren dra slutsatsen att reformprojektet i det stora hela nådde detta mål. Hon hävdar att matematiklektionerna i årskurserna 7–9 ändå fortsatte att präglas av typiska sedvänjor, såsom skolmatematikens uppgiftsdiskurs och orientering mot rätta svar. En central slutsats som dras i avhandlingen är att en elevs upplevelse av framgångsrik skolmatematisk verksamhet växer fram samtidigt med elevens upplevelse av tillhörighet (eller inte) i sådana matematiska gemenskaper där läraren ingår och där legitimt matematiskt kunnande underhandlas.