

”Det är som fyra, fyra och tre, tre, tre.”

En kvalitativ studie av små gruppers diskussioner och samarbete vid lösandet av ett matematiskt problem i tre olika länder i årskurs 6.

Joakim Smedlund 34587
Magisteravhandling i pedagogik
Handledare: Ann-Sofi Røj-Lindberg
Fakulteten för pedagogik och välfärdsstudier
Åbo Akademi
2016

ABSTRAKT

<p>Författare (Efternamn, Förnamn) Smedlund, Joakim</p>	<p>Årtal 2016</p>
<p>Arbetets titel "Det är som fyra, fyra och tre, tre, tre." En kvalitativ studie av små gruppers diskussioner och samarbete vid lösandet av ett matematiskt problem i tre olika länder i årskurs 6.</p>	
<p>Opublicerad avhandling i pedagogik för pedagogie magisterexamen. Vasa: Åbo Akademi. Fakulteten för pedagogik och välfärdsstudier.</p>	<p>Sidoantal (tot) 105</p>
<p>Materialet är taget från VIDEOMAT-projektet</p>	
<p>Referat</p> <p>Avhandlingens syfte är att undersöka lösningsförslags uppkomst och behandling i små grupparbeten samt att ta reda på samband mellan samarbetsnivån och behandlingen av dessa lösningsförslag.</p> <p>Mina problemformuleringar är:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Hur många lösningsförslag uppstår i grupperna, och hur mycket behandlas de? - Existerar, och i så fall vad kan man säga om, ett samband mellan samarbetsnivån och behandlingen av dessa lösningsförslag? <p>I studien har en kvalitativ metod använts. Insamling av material har gjorts via VIDEOMAT-projektet och består av videofilmer av problemlösningstillfällen. Dessa filmer har observerats och analyserats med hjälp av en interaktionsanalys i form av ett flödesschema.</p> <p>Alla elever i studien gick vid tillfället i årskurs 6 och eleverna kommer från Finland, Sverige och USA. Grupperna bestod av tre eller fyra elever var och en grupp från varje land observerades och undersöktes. Inga generella slutsatser beträffande ländernas olika prestationer har gjorts eftersom samplet är litet.</p> <p>I varje grupp uppstod tre eller fyra olika lösningsförslag, och huvudsakligen behandlades två av förslagen mer än de andra. De flesta lösningsförslag som inte behandlades mycket bidrog ändå i någon form till lösandet av problemet. Angående sambandet mellan behandlingen av lösningsförslagen och samarbetsnivån i grupperna blev det tydligt att grupper som samarbetar mer använde sig av fler pro- och reaktiva kommentarer i form av förklaringar som tog i beaktande det som tidigare sagts av eleverna.</p> <p>Goda sociala färdigheter, och kunskap om hur man arbetar i grupp, är essentiella både för samarbetet och för ett gemensamt lösande av problemet. Som lärare kan man träna eleverna i samarbete och belysa vikten av reflektion av de erhållna lösningarna i problemlösningprocessernas slutskede för att uppnå effektivare grupparbeten. Interaktionsanalysen visade sig vara ett kraftigt verktyg för att analysera elevernas diskussioner och tolka deras kommentarer.</p>	
<p>Sökord/indexord enl. tesaurus Problemlösning, Samarbetsinläring, Matematik, Problemsolving, Co-operative learning, Mathematics</p>	

Innehållsförteckning

1	Inledning	1
1.1	Syfte och centrala begrepp	3
1.1.1	Vad är ett matematiskt problem?.....	5
1.1.2	Vad är ett lösningsförslag?.....	6
1.2	Avhandlingens struktur	7
2	Vad är kunskap och lärande?	9
2.1	Kunskap och konstruktivism	9
2.2	Social konstruktivism	11
3	Kommunikationens roll i grupparbeten	13
3.1	Kommunikation.....	13
3.2	Intentioner och kontext	14
3.2.1	Kontextens betydelse för intentionsanalys	15
4	Grupparbeten och samarbetsinläring.....	17
4.1	Samarbetsinläring	17
4.2	Didaktiskt kontrakt:.....	24
5	Problemlösningens olika delar	28
5.1	Problemlösning	28
5.1.1	Validering	31
6	Metodkapitel – den empiriska undersökningen	33
6.1	Syfte och problemformulering.....	33
	Hur många lösningsförslag uppstår i grupperna, och hur mycket behandlas de?	33
	Existerar, och i så fall vad kan man säga om, ett samband mellan samarbetsnivå och behandling av lösningsförslag?	34
6.2	Forskningsansats.....	34
6.3	Materialpresentation	36
6.4	Genomförande av undersökningen	38
	39
6.5	Intentionsanalys med stöd av kontextualisering	39
6.6	Metodval	40
6.6.1	Interaktionsanalys.....	42
6.7	Reliabilitet, validitet och etik	44
7	Resultatredovisning	47

7.1	Finland.....	48
7.1.1	Kontextbeskrivning	48
7.1.2	Kommentarerna och lösningsförslagen som förekom i gruppen	50
7.1.3	Utvalda lösningsförslag i interaktionsflödesschemat	54
7.1.4	Nivå av samarbete	57
7.2	Sverige.....	58
7.2.1	Kontextbeskrivning	58
7.2.2	Kommentarerna och lösningsförslagen som förekom i gruppen	61
7.2.3	Utvalda lösningsförslag i interaktionsflödesschemat	65
7.2.4	Nivå av samarbete	67
7.3	USA.....	69
7.3.1	Kontextbeskrivning	69
7.3.2	Kommentarerna samt lösningsförslagen som förekom i gruppen	71
7.3.3	Utvalda lösningsförslag i interaktionsflödesschemat	75
7.3.4	Nivå av samarbete	77
7.4	Sammanfattning av resultat.....	78
7.4.1	Antalet lösningsförslag som förekom	78
7.4.2	Hur mycket förslagen diskuterades	79
7.4.3	Nivån av samarbete inom de olika grupperna.....	80
7.4.4	Samband mellan samarbetet och lösningsförslagens behandling.....	81
8	Avslutande diskussion.....	83
8.1	Resultatdiskussion	83
8.1.1	Hur behandlades lösningsförslagen?	83
8.1.2	Samband mellan samarbetsnivån och behandlingen av lösningsförslag?.....	86
8.2	Metoddiskussion.....	88
8.2.1	Förbättring av interaktionsflödesscheman.....	90
8.3	Didaktiska implikationer	91
8.4	Förslag på vidare forskning	93
	Referenser.....	95
	Bilagor	

Figurförteckning

Figur 1, typer av kommentarer	39
Figur 2, Annas lösningsförslag [14a] till [26]	54
Figur 3, Caspers lösningsförslag [33] till [40]	55
Figur 4, diskussionen i den finländska gruppen [42] till [70]	56
Figur 5, Deas lösningsförslag [1] till [14]	65
Figur 6, Emils lösningsförslag [23] till [29]	66
Figur 7, Deas frågande kring lärarens lösningsmetod [80] till [94]	67
Figur 8, Ingridis lösningsförslag [2] till [21]	75
Figur 9, Heathers lösningsförslag [22] till [38]	76
Figur 10, färgkodning infört i flödesschemat från den svenska gruppens diskussioner	91

Tabellförteckning

Tabell 1, samarbetsnivån baserat på de fyra elementen	23
Tabell 2, matematikuppgifters indelning	28
Tabell 3, kommentarer och lösningsförslag Finland	50
Tabell 4, Annas kommentarer	52
Tabell 5, Bodils kommentarer	52
Tabell 6, Caspers kommentarer	53
Tabell 7, kommentarer och lösningsförslag Sverige	62
Tabell 8, Deas kommentarer	63
Tabell 9, Emils kommentarer	63
Tabell 10, Franks kommentarer	64
Tabell 11, Guns kommentarer	64
Tabell 12, kommentarer och lösningsförslag USA	72
Tabell 13, Heathers kommentarer	73
Tabell 14, Ingridis kommentarer	73
Tabell 15, Johns kommentarer	74
Tabell 16, Kates kommentarer	74
Tabell 17, de mest diskuterade lösningsförslagen	81

1 Inledning

Hela mitt liv har jag stått inför olika problem och lösningar av dessa, och hela mitt liv har jag lärt mig av problemen, lösningarna och de felaktiga lösningarna. Men det är under min tid i skolan som vuxen, först som elevassistent och sedan som klasslärarstuderande, som själva problemlösningsprocessen har börjat intressera mig. Jag har alltid upplevt en glädje av att lösa problem, att komma vidare steg för steg och förstå problemet på djupet. Till slut inser man att hindret, oberoende hur stort det upplevdes, plötsligt inte står i ens väg längre. Det är en fantastisk känsla.

Lösning av matematiska problem i skolan ses som ett medel att befrämja inläringen, medan förmågan att lösa problem i verkligheten är ett mål för framtiden. (Björkqvist, 2001, s. 117.)

Enligt läroplanen (Utbildningsstyrelsen, 2014, s. 235) är centrala delar av undervisningen inom matematiken för årskurserna 3–6 mångsidig problemlösning som sker både i grupp och självständigt. Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen 2014 (Utbildningsstyrelsen, 2014, s. 155) anser att kollaborativt lärande ska användas mångsidigt. De sociala och kommunikativa färdigheter som krävs för detta ska användas och tränas. Eleverna ska spöras att fundera på sin egen kunskap samtidigt som de ska lyssna på andra elevers åsikter. Problemlösning- och slutledningsuppgifter ska användas tillsammans med arbetssätt som både utnyttjar och främjar elevernas egen nyfikenhet, uppfinningsrikedom, aktivitet och fantasi. Eleverna ska uppmuntras att använda sig av kreativa lösningar och tänka utanför lådan.

Jag skulle själv argumentera för att begreppet problemlösning är något man under skoltiden oftast kommer i kontakt med under matematiklektionerna. Matematiska textuppgifter är något som de flesta barn och vuxna känner till. Dessa problem är en form av abstrakt matematik, vilket innebär att man läser om en situation som innehåller verkliga eller överkliga element, och dessa element beaktas samt bearbetas enligt givna eller antagna regler. Det krävs tankearbete för att lösa ett problem. Tankearbetet tillsammans med utförandet av dessa tankar är själva

problemlösningsprocessen, och hur man som lärare kan observera denna process är inte alltid självklart.

Tankearbete sker bokstavligen i tanken, vilket omöjliggör tolkning av andras idéer och tankar direkt. Lyckligtvis kan tankar förmedlas genom olika uttrycksformer. I matematiken talar man om de matematiska uttrycksformerna. Matematiska uttryck kan delas in i fem olika former: fysisk, verbal, bildlig, numerisk och symbolisk form, och det är dessa som är de matematiska uttrycksformerna. Representationsform och uttrycksform är enklare att förstå då man ser dem som ett och samma begrepp (Gustafsson, Jakobsson, Nilsson & Zippert, 2011, s. 36–38).

De matematiska uttrycksformerna är nära förknippade med kommunikering av matematik, och varje uttrycksform kan representeras på flera olika sätt. En fysisk uttrycksform kunde innebära användandet av kroppsspråk eller klossar, medan en bildlig uttrycksform kunde vara en graf eller teckning (Gustafsson m.fl., 2011, s. 38). Genom att observera hur eleven uttrycker sitt tankearbete, det vill säga själva problemlösningsprocessen, kan man få en inblick i elevens förståelse av matematiken. Läsande av inlämnade skriftliga lösningar ger läraren endast en delförståelse för problemlösningsprocessen. Att skriva ner något kräver tolkande av de egna tankarna och ordval som bäst beskriver tankarna för läsaren (Vygotskij, 1986, s. 182). Även om färdigt utvecklade och noggrant valda tankar låter fantastiskt, skriver eleven sällan ner alla steg som krävs för att lösa problemet. Eleven skriver alltså ner uträkningen men inte resonemangen bakom val av uträkningssätt, felaktiga lösningsmetoder som kanske stötts på under problemlösningsprocessen eller andra sätt att lösa samma problem.

Genom att observera en grupp som kommunicerar och samarbetar i en problemlösningssituation kan man ta del av både verbala uttryck, såsom tal, och fysiska uttryck, såsom kroppsspråk och att räkna på fingrarna. För att ta del av de symboliska, numeriska och bildliga uttrycksformerna krävs en analys av det inlämnade materialet. En elev i grupp kan uppmanas att förklara fler steg som krävs för att lösa ett problem då hen försöker förklara sina tankebanor eller lära ut en lösningsmetod till andra gruppmedlemmar (Sahlberg & Berry, 2003, s. 36–39). Jag

vill påstå att lärare skulle ha stor nytta av att observera problemlösningsprocessen för att skapa en realistisk bild av elevers matematiska kunnande. Ifall man enbart bedömer elevers kunskapsnivåer utgående från inlämnade lösningar går man miste om fysiska och verbala uttrycksformer.

Problemlösning är en viktig del av matematikundervisningen. Björkqvist (2001, s. 115) beskriver problemlösningen som ”organisk” då problemlösningen både är, och befrämjar tillväxten av, kunskap hos elever. Genom generalisering, variation och införande av nya begrepp, är problemlösning i sig själv alltid förknippad med förnyelse. Björkqvist hävdar att problemlösning förefaller vara en lämplig komponent när elever bygger upp sin kunskap inom matematiken. Vikten av problemlösning i skolan synliggörs i flera olika länders läroplaner, där problemlösningen anses uppfylla allmänna mål inför framtiden när eleverna på egen hand förväntas kunna lösa olika problem i olika situationer (Björkqvist, 2001, s. 116.)

”Det är som fyra, fyra och tre, tre, tre.” Det är ett citat av en elev i min undersökning. Citatet anser jag beskriver förståelsen av problemet som grupperna arbetar med, och det är en återkommande insikt i de olika gruppernas problemlösningsprocesser, därför har jag valt det som titel för mitt arbete. Polya¹ (1973) talar om att förståelse för problemet är det första steget, först när man förstår problemet kan man börja komma med lösningsförslag.

1.1 Syfte och centrala begrepp

En av huvudambitionerna i forskningen är att beskriva hur det går till när en person utformar en lösningsstrategi för ett givet problem. Implicit ligger i detta förväntningen att forskningsresultaten ska vara direkt tillämpbara i undervisningen. (Björkqvist, 2001, s. 123.)

¹ George Pólya (1887–1985) en ungersk matematiker mest känd för sin modell att lösa problem, denna modell behandlas kort senare i avhandlingen.

Syftet med detta arbete är att undersöka hur lösningsförslags uppkommer och behandlas i små grupparbeten. Vad kan man som lärare få ut av att observera lösningsförslags uppkomst och behandling? Lösningsförslag som förkastats av en grupp kan inte alltid uppmärksammas i den inlämnade lösningen, men förslagen kan fortfarande ha varit betydelsefulla för problemlösningssprocessen. Alla lösningsförslag, vare sig korrekta eller inkorrekta, behandlade eller obehandlade, kan ge observatören en bild av gruppens problemlösningssprocess.

Jag har observerat och analyserat en grupp från Finland, en från Sverige och en från USA. Varje grupp arbetade med samma problem², och jag har analyserat problemlösningssprocesserna och konversationerna som tagit plats i dessa grupper.

Det existerar tydliga skillnader mellan gruppernas prestationer, men jag kan inte dra några slutsatser beträffande nationaliteternas inverkan eftersom samplet är så litet. Kulturella skillnader inom klassrummen kan bidra till gruppernas prestationer, och det kan också finnas skillnader i gruppammansättningarna eller kunskapsnivåerna hos eleverna, men dessa faktorer undersöker jag inte och kan därför inte heller komma med några påståenden. Det jag undersöker är gruppernas samarbetsnivåer, och dessa nivåers inverkan på gruppernas prestationer. Observation av elevernas problemlösningssprocesser möjliggör denna undersökning och detta klassificerar jag som en fallstudie. De slutsatser jag presenterar angående gruppernas prestationer härleds direkt från gruppens diskussioner och samarbete.

Ofta existerar det flera olika sätt att lösa ett problem, och dessa olika lösningar uppstår i elevers huvuden först som tankar. Hur lösningarna sedan utvecklas, uttrycks och behandlas av gruppen kan se mycket olika ut. Som lärare vill man att alla elever ska lära sig, och det skulle vara intressant att veta mer om hur dessa lösningsidéer tas emot och behandlas av en grupp elever. Kanske vissa idéer förkastas, vissa kanske är felaktiga och ibland har en grupp flera lösningsförslag. Genom att undersöka samarbetet och samverkan mellan eleverna tror jag att man kan komma åt vissa aspekter av problemlösningen som gått förlorad på det inlämnade pappret. Med det inlämnade pappret menar jag den lösning eleverna

² Se bilaga 1

valt att ha som svar på uppgiften, skrivit ner och lämnat in till läraren. På pappret står det sällan hur lösningen kom till, vems idé den var eller hur idén behandlades. Kanske alla i gruppen kom fram till planer som med vidarebearbetning kunde ha nått en korrekt lösning men alla planer behandlades inte.

Kan man som lärare lägga märke till lösningsförslagets uppkomst? På vilket sätt kan uppmärksammande av lösningsförslag hjälpa lärarens arbete i klassrummet? Didaktiska implikationer och frågor som dessa diskuteras i slutet av avhandlingen.

Centrala begrepp i min avhandling är matematiska problem och lösningsförslag. Jag presenterar och diskuterar kort dessa begrepp nedan. Begreppen definieras och tas djupare upp senare i avhandlingen.

1.1.1 Vad är ett matematiskt problem?

Problem som begrepp har traditionellt sett förknippats med matematiska uppgifter som ska lösas (Schoenfeld, 1992, s. 337). Denna uppfattning av vad ett problem är har resulterat i att textuppgifter, och uppgifter vars syfte är att träna lösningstekniker, setts som synonymer till begreppet problem. Dagens definition av problem i klassrummet håller sig närmare den vardagliga innebörden av ordet problem. Denna vardagliga definition av problem kan innebära ett fysiskt, mentalt eller socialt hinder som står i ens väg. Något som får en att stanna upp och fundera. *MOT Norstedts Svensk ordbok* (u.å.) definierar *problem* som följande: "svårighet som det krävs ansträngning att komma till rätta med" och "uppgift som kräver tankearbete och analytisk förmåga". Det betyder i sin tur att en individ som står inför ett problem inte direkt ser någon möjligt lösning eller lösningsmetod. Samtidigt innebär det också att ett problem är en individrelaterad definition, och ett problem för en individ är inte nödvändigtvis ett problem för en annan individ (Björkqvist, 2001, s. 118).

I undervisningssyfte används matematiska problem för att främja problemlösandet hos eleverna, men möjligheten att erhålla ny matematisk kunskap genom främmande begrepp eller matematiskt innehåll existerar också i själva problemlösandet (Björkqvist, 2001, s. 115). Polya (1973) anser att alla problem löses enligt samma modell, oberoende av ämnesområde eller kontext. I det följande stycket presenterar jag kort Polyas problemlösningssmodell. Mer om modellen går att läsa i min kandidatavhandling eller i min artikel som behandlar strukturering av matematiska konversationer (Österlund, 2013, s. 12–14; Österlund, 2014, s. 238–239).

Polyas (1973, s. 3–19) problemlösningssmodell består av fyra olika steg. Det första steget är att förstå problemet, det andra är att göra upp en plan för att lösa problemet. Det tredje steget är att utföra planen och det fjärde steget är att se tillbaka på det man utfört och reflektera runt lösningen och lösandet. Det andra steget som Polya beskriver tangerar begreppen lösningsförslag och lösningsstrategi.

1.1.2 Vad är ett lösningsförslag?

Lösningsförslag är enligt mig inte enbart planen för hur man löser problemet, lösningsförslag innebär också förmedlandet av denna plan till andra eller till sig själv. En lösningsplan eller lösningsstrategi har dock ett klart mål, vilket är lösandet av problemet. Enligt Björkqvist (2001, s. 122–123) kan man avse två saker med en lösningsstrategi, en medveten kontroll över de mentala processerna, och en uppbyggd ordningsföljd av vilka matematiska operationer man ska utföra. En lösningsplan för ett problem kan vara helt internaliserad och på så vis göra det omöjligt för mig som observatör att lägga märke till. Det är viktigt att jag skiljer på lösningsplan och lösningsförslag på det sättet att förslag innehåller någon form av kommunikation, någon form av verbalisering eller konkretisering. Ett lösningsförslag måste inte leda till en korrekt lösning av problemet, det måste inte heller leda vidare utan förslaget kan förkastas istället för att behandlas.

Ett lösningsförslag skiljer sig också åt från en lösningsplan på det sättet att lösningsförslag inte måste ha en färdigt uppgjord ordningsföljd av vilka matematiska operationer som ska utföras, utan dessa operationer kan istället sökas med hjälp av gruppen. Ifall jag enbart analyserade lösningsplaner där alla steg är uttänkta innan de förmedlas analyserar jag inte längre grupparbetens sökande efter lösningsmetoder utan då analyserar jag individers lösande av problem. Man kan således se lösningsförslag som början till en gemensam lösningsplan ifall lösningsförslaget tas emot av gruppen. Likväl kan ett lösningsförslag förkastas av gruppen och i sådana fall kan antingen förmedlaren söka nya lösningsförslag eller vidarebearbeta lösningsförslaget på egen hand. Kan man som lärare notera när ett lösningsförslag uppstår och hur det behandlas i gruppen?

1.2 Avhandlingens struktur

Mitt forskningsområde behandlar matematisk problemlösning i små grupper. Jag har genom fördjupning i tidigare studier om forskningsområden som behandlar aspekter av detta byggt upp en teoretisk referensram som jag för dialog med under arbetets gång. Den teoretiska delen av mitt arbete inleds med ett kapitel som går igenom kunskap och lärande. I det kapitlet kommer jag in på konstruktivismen och behandlar också kort den sociala konstruktivismen. Nästa kapitel handlar om kommunikationen och dess roll i grupparbeten. I samma kapitel kommer jag också in på intentioner och kontext samt kontextens betydelse för intentionsanalysering. Kapitel fyra går igenom samarbetsinlärning som begrepp och hur man kan gå till väga för att mäta nivån av samarbete i en grupparbetssituation. Som avslutning av det kapitlet behandlas det didaktiska kontraktet i samband med grupparbetssituationer. Det femte och sista teorikapitlet diskuterar problemlösning. Begreppet *validering* introduceras som en del av diskussionerna i en grupparbetssituation. Det sjätte kapitlet ägnas åt en beskrivning av den empiriska undersökningen. I kapitlet går jag bland annat igenom forskningsfrågorna, syftet

med avhandlingen, valet av metod och genomförande av undersökningen. Undersökningens reliabilitet, validitet och etik diskuteras också. Kapitel sju är resultatredovisningen och resultaten presenteras gruppvis. I det åttonde och sista kapitlet diskuteras resultaten i relation till den teori som låg som bakgrund för arbetet jag diskuterar också metodvalet för undersökningen. Avhandlingen avslutas med förslag om vidare forskning i ämnet.

2 Vad är kunskap och lärande?

I detta kapitel diskuteras kunskap och lärande sett ur en konstruktivistisk synvinkel. Genom att se på lärande ur en konstruktivistisk synvinkel kan man som forskare ta del av elevers gemensamma lärande under grupparbetsituationer och följa med förändringen av kunskap som sker då eleverna löser problem. Matematiken kan ses som en social konstruktion, och kunskap skapas gemensamt då elever arbetar tillsammans med matematik. Kapitlet står som grund för mitt synsätt på inläring och styr de tolkningar jag senare presenterar i avhandlingen.

2.1 Kunskap och konstruktivism

Kunskap är en individs uppfattningar och färdigheter erhållna genom erfarenheter eller studier (NE, u.å.). Enligt Platon (NE, u.å.) kan man säga att en individ innehar kunskap när tre villkor uppfyllts:

1. påståendet är sant
2. individen håller påståendet för sant
3. individen har goda grunder för att hålla påståendet för sant.

Sammanfattat är då kunskap en korrekt uppfattning som en individ har en motivering för att uppfatta som korrekt. Det räcker inte bara med att veta att det är sant.

Vad är matematisk kunskap, hur kommer det sig att den existerar, och hur kan den påverkas? I det här arbetet utgår jag från en konstruktivistisk syn på kunskap och inläring. En konstruktivistisk syn på kunskap innebär att all kunskap byggs upp av tidigare erfarenheter, och alla följande erfarenheter bygger på och förändrar den tidigare kunskapen samtidigt som ny kunskap skapas. Eftersom jag tidigare nämnt att kunskap måste uppfylla tre villkor kan man tycka att konstruktivismen som grundar sig på förändring och fördjupning inte lämpar sig. Men saken är den att en individ som uppfyller villkor 2 och 3 och tror att villkor 1 också är uppfyllt inte egentligen har kunskap. Villkor 2 och 3 kan ändra och komma till att uppfyllas så att

de samspelar med villkor 1, då erhålls verklig kunskap och den konstruktivistiska synen på kunskap grundar sig just på denna förändring och vidareutveckling.

I *Grunderna för grundskolans läroplan* (Utbildningsstyrelsen, 1994) blir enligt Hansén och Myrskog (1994, s. 17) en konstruktivistisk inlärningssyn synlig. Finlands aktuella läroplan, *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen* (Utbildningsstyrelsen, 2004), förefaller också återspegla en konstruktivistisk syn på inlärning som beskrivs som en social och individuell process där eleven med hjälp av sina tidigare erfarenheter och kunskaper tolkar det nya materialet (Utbildningsstyrelsen, 2004, s. 16). Den nya läroplanen som tas i bruk 2016 återspeglar en kumulativ inlärningsprocess som tar lång tid och kräver ihärdigt arbete (Utbildningsstyrelsen, 2014, s. 15). Läroplanen i Sverige lyfter också upp vad som kan tolkas som en konstruktiv aspekt av kunskap.

Kunskaper utvecklas i ett växelspel mellan vad man vill uppnå, den kunskap man redan har, problem man upplever med utgångspunkt i denna samt de erfarenheter man gör (Skolverket, 1997, s. 26).

Enligt Ernest (1998, s. 22) existerar det flera olika former av konstruktivism, såsom social konstruktivism, radikal konstruktivism och svag konstruktivism. Dessa olika former har skilda betydelser då det kommer till praktik och teori. Det alla konstruktivistiska former har gemensamt är metaforen konstruktion, varifrån själva begreppet fått sin betydelse. Arkitektur, snickeri eller konstruktionsarbete innebär att man av existerande delar bygger upp en ny struktur. På samma sätt som en textuppgift i matematik, där man undersöker addition, använder sig av begrepp som att "lägga till" och "hur många har du då" använder man sig i slöjdarbete av träplankor, träpluggar och lim för att konstruera dessa till en limträskiva. Ernest (1998, s.22) påpekar att denna metafor inte innebär att mottagna kunskapsdelar bygger upp förståelsen, utan att förståelsen byggs upp av tidigare konstruktionsakter.

Därför är skillnaden mellan förståelsens struktur och innehåll alltid bara vara relativ inom konstruktivismen. Tidigare uppbyggda strukturer blir innehållet i efterföljande konstruktioner. (Ernest, 1998, s. 22–23.)

Lärande, undervisning och kunskap kan ses på flera olika sätt, och konstruktivismen är ett sätt att se på dessa men det är nödvändigtvis inte det "korrekta" eller "sanna"

sättet. Konstruktivismen och de modeller samt teorier som baserar sig på en konstruktivistisk syn på kunskap har gett forskare möjlighet att ändamålsenligt och förklarande kunna besvara frågor inom undervisningen. Konstruktivismen, som alla andra vetenskapliga verksamheter, utvecklas och förändras genom erhållandet av fler frågor och svar inom området som undersöks. Engström påpekar att denna förändring är en helt naturlig del av vetenskaplig verksamhet. (Engström, 1998, s. 144)

En konstruktivistisk syn på inläring kan bli aktuell i matematiken, där själva ämnet har en hierarkisk uppbyggnad. Men detta innebär dock inte att ämnet måste undervisas hierarkiskt. Tidigare erfarenheter och kunskaper inom ämnet används som grund för att vidareutforska och förstå olika delområden och helheter. En elev som är medveten om hur addition av ental fungerar kan sedan gå vidare till addition av tiotal eller hundratal. Den matematiska förståelsen byggs upp i klassrummen tillsammans med eleven själv, andra elever och läraren. Att matematiken kan ses som en social konstruktion är något som fler och fler matematikdidaktiker blir eniga om (Engström, 1998, s. 146).

2.2 Social konstruktivism

Social konstruktivism innebär att kunskap byggs upp av individer i ett socialt sammanhang. På så vis skapas individuell kunskap och förståelse samt en gemensam kunskap och förståelse. Både det individuella meningsskapandet (*sense making*) och den sociala processen är avgörande för lyckad inläring av matematik (Ernest, 1994, s. 63).

Vygotskijs (1986) samhällsorienterade teori hävdar att individuella subjekt är en oskiljaktig del av det sociala fältet och att individer formas både genom gemensam interaktion och individuella processer (Ernest, 1998, s. 27). Den viktigaste interaktionen är samtalet, som kan ske mellan individer men även internaliserat hos

individen själv som tänkande. Enligt Bishop (1985, s. 24–27) kan tänkandet ses som ett internt samtal och medvetandet anses vara en del av ett större sammanhang.

Medvetandet betraktas som socialt och samtals betonat av följande tre skäl. För det första har allt någorlunda komplext individuellt tänkande sitt ursprung i och formas av internaliserat samtal; för det andra struktureras allt följande individuellt tänkande av detta ursprung och får sin karaktär från det; och för det tredje är vissa mentala funktioner kollektiva (t.ex. vid problemlösning i grupp). (Ernest, 1998, s. 27–28.)

Genom samtal kan en individ konstruera gemensam kunskap tillsammans med andra eller med sig själv via inre dialog, menar Ernest (1998, s. 29–30). Samtalet är därför centralt i matematikundervisningen, eftersom individerna utvecklar matematiken, språket och logiken genom samtal med andra elever, till exempel vid problemlösning i grupp. Lärarens uppgift, i undervisning av matematik genom samtal, är att utgå från sin egen kunskap och texter som är relevanta och behandlar den matematiska kunskap man önskar förmedla. Om läraren ska få en insikt i elevernas kunskaper krävs det att eleverna deltar i samtalet och prövar sina egna kunskaper mot den nya förmedlade kunskapen. Därför är den individuella kunskapen inom matematik anknuten till andra individers individuella kunskaper. Dessa individuella kunskaper blir allmänna och möjliga att forma om då de framförs och uttalas av individer i gruppen (Ernest, 1998, s. 29–30).

3 Kommunikationens roll i grupparbeten

Kommunikation mellan individer är en essentiell del av både grupparbeten och samarbeten. Samtal mellan elever är en form av kommunikation mellan elever, men elever kan också kommunicera med hjälp av kroppsspråk och skrift. Detta kapitel definierar kommunikation, intentioner och kontext, samt beskriver kontextens betydelse för intentionsanalys. En kommunikativ handling har alltid ett syfte, och detta syfte kallas för intention. Eftersom denna avhandling fokuserar på diskussionerna som tar plats mellan elever under ett problemlösningstillfälle krävs en genomgång av det som behandlas i detta kapitel.

3.1 Kommunikation

Sfard och Kieran (2001, s. 47) refererar i sin artikel till Grices och Levinsons definition av kommunikation. Kommunikation ses som användandet och producerandet av medel för att få en medverkande person i en diskussion att känna eller göra på ett visst sätt.

Att tänka högt kan enligt Sfard och Kieran (2001, s. 47) ses som en form av kommunikation. Denna personliga diskussion behöver inte vara synbar eller hörbar och måste dessutom inte vara i ordformat. Tänkande på egen hand i en diskussion kan ses som en personlig diskussion, och på så vis blir det en kommunikationsprocess inuti en annan kommunikationsprocess. Sfard och Kieran antar att dessa simultana intra- och interpersonella diskussioner kan påverka och forma varandra på ett reflekterande sätt. Detta innebär enligt Sfards och Kierans definition av kommunikation att talaren och mottagaren kan vara samma person, i alla fall då det gäller att "tänka högt" (Sfard & Kieran, 2001, s. 47).

I enlighet med Bishop (1985) och Sfard och Kieran (2001) har jag också valt att definiera kommunikation på följande sätt:

Kommunikation är användandet och producerandet av medel för att förmedla tankar och känslor till en medverkande person i en diskussion med önskan att det förmedlade är det samma som det mottagna.

Det är omöjligt att fullständigt bevisa att det förmedlade är det samma som det mottagna, men det man kan göra är att utvärdera effektiviteten av diskussionerna. Ett *interaktionsflödesschema*³ synliggör diskussionernas struktur och ger en överblick av helheten. *Intentionsanalys*⁴ möjliggör en tolkning av kommunikationens effektivitet. Det jag som forskare uppfattar som det förmedlade jämförs med reaktionerna hos mottagaren. Ifall reaktionerna inte överensstämmer med det förmedlade kan jag påstå att kommunikationen inte uppnådde sitt mål, och ifall förståelse är synlig hos mottagaren har kommunikationen uppnått sitt mål.

Ifall kommunikation och tänkande ses tillsammans på detta sätt måste man beakta allt som görs inom grupparbetet. Eftersom varje del av interaktionen mellan eleverna är en del av kommunikationshelheten, och eftersom dessa delar påverkar och formar de kommande kommunikationshändelserna, måste en intentionsanalys ske genom både beaktande av helheten och de enskilda kommentarerna samt av händelserna som tar plats. Detta görs i denna avhandling med hjälp av en kontextanalys där elevernas enskilda uppfattning av situationen de befinner sig i beskrivs och används som referenspunkt när intentionerna för enskilda kommentarer tolkas.

I nästa kapitel går jag igenom intentioner och kontext som är relaterade till kommunikationen samt analyserandet och kartläggandet av diskussionerna i detta arbete.

3.2 Intentioner och kontext

Sfard och Kieran (2001, s. 49) definierar intentioner som en aspekt av kommunikation. Intentioner kan beskrivas som avsikten med, eller målet med en kommunikativ handling. Sfard och Kieran menar att intentioner inte kan existera

³ Interaktionsflödesschemat presenteras senare under metodkapitlet och genomförandet av undersökningen.

⁴ Intentionsanalysen beskrivs under presentationen av interaktionsflödesscheman.

förrän någon kommunikation inträffat. Effektiviteten hos en intention är en personlig tolkning, så en observatör kan anse att en intention är effektiv samtidigt som mottagaren inte delar den åsikten. Intentionen skapas av talaren men uppfattas av mottagaren. Bedömning av en konversations effektivitet är personlig och kan skilja sig beroende på vem man frågar. Talaren bedömer intentionens effektivitet utgående från responsen av dem som kommentaren är riktad till, och observatörer bedömer i sin tur effektiviteten utgående från de personer och deras handlingar som observeras, däremot kan mottagaren (inklusive observatören) ha olika åsikter angående konversationens effektivitet (Sfard & Kieran, 2001, s. 49).

Sfard och Kieran (2001, s. 48) beskriver intention som avsikt eller mål för en handling. Hur lyckad en intention är beror helt och hållet på föremålet som intentionen är riktad till. Om intentionen med en kommentar är att väcka diskussion gällande ett specifikt ämne förväntas mottagaren av kommentaren att förstå detta och välja en lämplig relevant respons. Frågor som "hur menar du?" "va?" och "jag förstår inte" är tecken på att intentionen inte fungerat för mottagaren, på samma vis som om mottagaren besvarar en kommentar med något irrelevant. Intention innebär på så sätt en förväntning, en förväntning av förståelse hos motparten (Sfard & Kieran, 2001, s. 48).

3.2.1 Kontextens betydelse för intentionsanalys

Ryve (2006, s. 195) gjorde ett försök att utveckla Sfards och Kierans intentionsanalys genom att vidareutveckla *kontextualiseringen*. Med kontextualisering menas uppfattandet av kontexten i en viss situation. Ryve (2006, s. 196) refererar till Halldén (1999) som säger att en elev kontextualiserar en uppgift individuellt. Kognitiva, situationsbaserade och kulturella aspekter påverkar elevens uppfattning av ett problem. Detta innebär att olika elever uppfattar samma problem på olika sätt. Björkqvist (2001, s. 122) delar upp kontexten för en problemlösningssituation i tre olika delar. Den upplevda kontexten är förknippad med problemlösarens

erfarenheter från tidigare problemlösningssituationer, medan den andra kontexten hör ihop med uppgiftens innehåll och den tredje delen som bygger upp den totala kontexten hör ihop med situationen som problemlösningen sker i. Björkqvist och Halldén ser alltså liknande på kontextualiseringens olika delar.

Ryve (2006, s. 196) anser i sin artikel att kontextualiseringen bidrog starkt till analysen av hans material, inte bara för tolkningen av elevernas deltagande i diskussionerna men också för skapandet av vettiga förklaringar angående varför vissa typer av matematiska diskussioner var mest framträdande. Hur jag använde mig av kontextualisering i detta arbete presenteras i metodkapitlet.

En enskild elevs uppfattning av uppgiftens mål, det vill säga lösningen, kan påverka uppfattningen av problemet. Problemet kanske ska lösas för läraren istället för gruppen, och ifall en elev löser ett problem för gruppen eller för läraren förändras kontexten för individen i gruppen. Detta fenomen berör begreppet *didaktiskt kontrakt*, begreppet presenteras och diskuteras senare i avhandlingen under kapitel 4.2.

4 Grupparbeten och samarbetsinläring

Grupparbeten är när elever sätts in i grupper för att arbeta tillsammans. Målet med grupparbeten är att tillsammans med andra utföra en given uppgift, och i lärandemiljöer är denna uppgift ofta relaterad till inläring. Grupparbeten innebär dock inte automatiskt att inläring sker hos varje elev. Samarbetsinläring är en underkategori av grupparbeten med strikta kriterier. Det är alltså möjligt att mäta ifall samarbetsinläring tar plats i ett grupparbete. I detta kapitel presenteras samarbetsinläring som begrepp samt hur nivån av samarbete kan mätas i ett grupparbete.

4.1 Samarbetsinläring

Definition av *samarbetsinläring*: Samspelet mellan eleverna i gruppen, speciellt kommunikationen är det centrala i samarbetsinläring. Samarbetsinläring är en inlärningsfilosofi där man frångår det traditionella klassrummet där tyst individuellt arbete uppmuntras. (Røj-Lindberg, 2001, s. 4).

Elevers lärande tillsammans har varit ett intresseområde inom forskningen under de senaste fyrtio åren, men samarbetsinläring blev först på 1990-talet en populär undervisningsform i högskolor och universitet i USA (Micari, Pazos, Streitwieser & Light, 2010, s. 269). Sahlberg och Berry (2003, s. 34, 122) kom i sin undersökning fram till att samarbetsinläring inom matematik inte är vanligt i finska och engelska skolor. Lärares syn på vad små grupparbeten inom matematik är till för skiljer sig från Sahlbergs och Berrys samarbetsinlärningsbegrepp. Lärare använder sig av små grupparbeten för att lösa matematiska problem där kunskapen för att nå en lösning redan existerar hos eleverna och inte för att lära sig ny matematisk kunskap. (Sahlberg & Berry, 2003, s. 124).

Samarbetsinläring är ändå ett relativt brett begrepp som innebär att elever tillsammans tillverkar en produkt, undersöker ett problem eller vidareutvecklar förståelse och kunskap. Samarbetsinläring kan se ut på flera olika sett beroende på uppgiftens typ. Oftast när man använder begreppet samarbetsinläring syftar man till en mindre grupp elever som arbetar tillsammans och där varje elevs arbete bidrar till gruppen.

Diskussioner mellan elever som tillsammans försöker lösa olika problem kan ge eleverna själva en djupare förståelse av de matematiska begrepp som är aktuella. Eleverna i gruppen måste förklara sina tankar om problemet och motivera sina lösningsförslag för de andra. Denna samverkan mellan eleverna kan bygga upp en strukturerad gemensam kunskap i gruppen som bygger på individernas tidigare erfarenheter och kunskaper. (Vidakovic & Martin, 2004, s. 466–469)

Att införa samarbetsinläring i ett klassrum med en lärare som endast kommit i kontakt med undervisningsstilen via fortbildning är både svårt och riskfyllt enligt Sharan (Sahlberg & Berry, 2003, s. 7). Eftersom samarbetsinläring är ett relativt ungt begrepp kan det i praktiken vara svårt för lärare att gruppera elever på ett sätt som maximerar deras inlärningspotential. Forskning om elevgrupperingar i matematikundervisning är begränsad, speciellt med tanke på variabler som erfarenhet, kunskap och kunnande samt kön och kulturell bakgrund. Studier som gått in på matematiskt kunnande och elevgrupperingar visar delade resultat där det finns både forskning som visar bra resultat för homogena respektive heterogena grupper. Grupper med liknande nivå av matematiskt kunnande och grupper med olika nivåer av matematiskt kunnande har alltså båda sina fördelar.

Samarbetsinläring kräver en grupp bestående av åtminstone två elever, och grupper bestående av två till fyra elever är också de vanligaste i skolsammanhang (Røj-Lindberg, 2001, s. 4; Sahlberg & Berry, 2003, s. 31). Enligt Sahlberg och Berry (2001, s. 32) är en av de vanligaste felaktiga uppfattningarna beträffande samarbetsinläring den att indelning i grupp automatiskt ger bättre resultat för eleverna.

Åtminstone fyra olika tankesätt om vad som karakteriserar samarbetsinläring existerar. Sahlberg och Berry (2003, s. 34–41) kombinerade tre olika fastställda normer⁵ i ett försök att mäta nivån av samarbete i en grupp. Detta resulterade i fyra kritiska element som tillsammans kan mäta nivån av samarbete i en grupp. De fyra elementen är:

⁵ "This is the combination of the psychologically oriented five-element standard of Johnson's methods (Johnson and Johnson 1994), Cohen's sociological two-element standard (Cohen 1994), and problem solving standards such as the Group Investigation method of Sharan and Sharan (1992)."

1. *Positiv ömsesidig samhörighet* (Positive interdependence)
2. *Individuellt ansvar* (Individual accountability)
3. *Sociala färdigheter* (Social skills)
4. *Uppgifter som erbjuder interaktion* (Interactive tasks)

Positiv ömsesidig samhörighet

För att ett grupparbete ska fungera optimalt och räknas som ett samarbetsinläringstillfälle krävs en tillräckligt hög nivå av *positiv ömsesidig samhörighet*. En *positiv ömsesidig samhörighet* innebär att "elever i gruppen anser att de kan uppnå sina mål endast ifall de andra i gruppen också uppnår sina" (Johnson & Johnson, 1987, s. 125–126). Motsatsen till detta skulle vara en tävlingsinriktad situation där individuellt arbete och inläring uppmuntras. Då några elever lyckas i en sådan situation anses det vara ett misslyckande för resten. *Positiv ömsesidig samhörighet* uppstår inte av sig själv utan måste med hjälp av läraren aktivt byggas upp genom regler och principer för grupparbete i klassrummet. För små grupparbeten i matematik finns det flera metoder att bygga upp en *positiv ömsesidig samhörighet* hos eleverna. Gemensamma mål, uppgifter som uppmuntrar social interaktion, inlärningsmiljön och en gemensam belöning eller bedömning kan användas inom matematikundervisningen för att konstruera och förespråka samarbete mellan eleverna (Sahlberg & Berry, 2003, s. 35–36).

Individuellt ansvar

Ett ansvar över gruppens framsteg och den personliga inläringen och utvecklingen är något som hittas hos varje elev i ett samarbetsinläringstillfälle. Det *individuella ansvaret* existerar när gruppens prestationer och elevens egna prestationer uppfattas som essentiella hos eleven (Johnson & Johnson, 1987, s. 126; Sahlberg & Berry, 2003, s. 36). Sahlberg och Berry beskriver det *individuella ansvaret* som ett socialt fenomen. Läraren vill uppmuntra både ett intresse för eget och andras lärande i gruppen, och en vilja att hjälpa varandra uppnå de inlärningsmål som är

satta för gruppen. Typiska tecken på ett individuellt ansvars existens i en grupp är då gruppen diskuterar sitt arbete, delar med sig av svar och material och uppmuntrar varandra att lära sig (Johnson & Johnson, 1987, s. 126). Sahlberg och Berry (2003, s. 36–37) påstår att feedback beträffande individuella prestationer i gruppen ska möjliggöra denna vilja och intresse för andras lärande. Det är väsentligt att läraren äger goda kunskaper angående uppmuntran och stödande feedback, speciellt för de elever vars självkänsla, matematiska kunnande eller motivation är svagare. Alla elever i gruppen ska känna sig delaktiga och viktiga för gruppens inläring, och det *individuella ansvaret* ska existera också hos de svagare eleverna (Sahlberg & Berry, 2003, s. 36–37).

Att ge eleverna möjligheten att stärka sitt *individuella ansvar* är lärarens jobb, och detta kan göras genom att be eleverna förklara för och undervisa varandra i vad de själva lärt sig (Sahlberg & Berry, 2003, s. 36–38). Att förklara och utveckla idéer, att dela med sig av sina åsikter och att berätta om de föreställningar eller begrepp som används är centrala delar av ett produktivt samarbetsinläringstillfälle. En annan möjlighet att stärka det *individuella ansvaret* är genom gemensam utvärdering, prov eller förhör med betyg baserade på gruppens medeltal. Självvärdering i grupp, gruppdiskussioner och gruppreflektioner efter utfört arbete är sällsynt i matematikundervisningen. Genomgångar av det utförda arbetet kan ge eleverna en djupare förståelse av vad samt hur de lärt sig under samarbetstillfället. Utvärdering kan vara ett känsligt område för elever, och för att det ska stärka det *individuella ansvaret* måste utvärderingssättet förklaras noggrant för eleverna före arbetet utförs (Sahlberg & Berry, 2003, s. 36–38).

Sociala färdigheter

Samarbete och arbete i grupp kräver en annan sorts attityd och andra *sociala färdigheter* än arbete på egen hand. Sahlberg och Berry (2003, s. 38) menar att lärare traditionellt sett anser att elever lär sig de färdigheter som krävs för samarbetsinläring i normala undervisningssituationer, men detta är i de flesta fall ett påstående utan starka bevis.

The most basic step in developing cooperative procedures is to have students sit in small groups, but this alone does not insure that they will communicate freely and work well together (Sharan & Sharan, 1992, s. 21).

Sharan och Sharan (1992, s. 21) menar att elever som effektivt arbetar i grupp vet hur de ska kommunicera och samarbeta. Elever vet hur man sitter tillsammans med andra barn i grupper, men det betyder inte att de vet hur man arbetar i grupp. Sahlberg och Berry (2003) menar att elever både i lågstadiet och högstadiet saknar tillräckliga samarbetsfärdigheter och tankesätt för att framgångsrikt vara en del av små grupparbeten. Speciellt i matematiken, som allmänt förknippas med individuellt arbete och prestationer, krävs övning av dessa *sociala färdigheter* inför grupparbeten. En kritisk del av att lära tillsammans är att kommunicera och tänka tillsammans och de *sociala färdigheter* som krävs för ett visst grupparbete ska övas både före och under samarbetsinläringstillfället. (Sahlberg & Berry, 2003, s. 38–39)

De *sociala färdigheter* som krävs för ett arbete kan variera beroende på arbetets uppläggning, men kommunikation är något som krävs i varje form av samarbetsinläring. Eleverna i gruppen bör vara duktiga lyssnare och talare för att samarbetet ska fungera. Elever som aldrig blivit lärda att arbeta i sociala situationer kan inte förväntas klara av sådana situationer utan problem (Johnson, Johnson & Johnson Holubec, 1991, 5:3). Grundskolan i Finland har som mål att ge eleverna förmågan att arbeta tillsammans och motiverar arbetsmetoder i klassrummet som kan "främja den sociala flexibiliteten och förmågan att dels samarbeta på ett konstruktivt sätt, dels ta ansvar för andra" (Utbildningsstyrelsen, 2004, s. 17). *Sociala färdigheter* är av stor betydelse för framtiden, arbetsmarknaden behöver arbetare som kan ta ansvar för sitt eget tänkande samtidigt som de kan kommunicera, hantera konflikter och samarbeta med andra (Sahlberg & Berry, 2003, s. 39).

Uppgifter som erbjuder interaktion

De flesta uppgifter som används i matematikundervisningen, eller rättare sagt de uppgifter som oftast finns i läroböckerna, är ämnade för individuellt arbete och inte arbete i mindre grupper. Utan *interaktiva uppgifter* kan inte samarbetsinläring ske.

Problemet som eleverna ska undersöka eller lösa måste bjuda in till diskussion, eller kräva kunskap av flera individer för att nå en full förståelse av problemet (Sahlberg & Berry, 2003, s. 40–41; Sharan & Sharan, 1992, s. 34–37).

Björkqvist (2001, s. 118) definierar ett problem inom matematiken som "en matematisk uppgift som ska utföras, med tilläggs villkoret att det för lösaren i initialskedet ska vara oklart vilka lösningsmetoder som kan tillämpas". En *interaktiv uppgift* där en lösning eller ett svar inte direkt uppenbarar sig kan ligga till grund för en diskussion inom gruppen (Sahlberg & Berry, 2003, s. 41). Sharan och Sharan (1992, s. 35) anser att en uppgift som uppmuntrar till samarbetsinlärning måste vara utformad så att den kan uppfylla tre villkor:

1. Varje medlem av gruppen kan enkelt delta i arbetet.
2. Uppgiften ger alla en möjlighet att tala.
3. Medlemmarna i gruppen måste göra val och ta gemensamma beslut.

Sharans och Sharans (1992, s. 35) åsikt stämmer överens med Cohens (1994, s. 1–2) och Sahlbergs och Berrys (2003, s. 40–41) syn på uppgifter inom grupparbeten, där Cohens åsikt är att uppgifter ska vara väldefinierade och ge alla medlemmar i gruppen en möjlighet att delta.

Sahlberg och Berry (2003, s. 42) presenterar olika nivåer av de fyra elementen i tabellformat. Tabellen med dess olika nivåer kan fungera som ett verktyg vid bedömning av en grupps samarbetsnivå. Här följer en översättning av tabellen från engelska till svenska.

Tabell 1, samarbetsnivån baserat på de fyra elementen

<i>Samarbetsnivå</i>	<i>Positiv ömsesidig samhörighet</i>	<i>Individuellt ansvar</i>	<i>Sociala färdigheter</i>	<i>Interaktiva uppgifter</i>
Hög	Eleverna upplever att de inte skulle uppnå sina mål utan varandras bidragande och stöd. Detta uppnås genom delade mål, material och belöningar.	Varje elev har ansvar för hela gruppens prestationer. Varje elev kan när som helst redogöra för gruppens prestationer och inläring.	Färdigheter som krävs för uppgifterna har på förhand tränats, eleverna har också tränat på att delta i grupparbeten.	Det existerar ingen korrekt, eller i alla fall ingen självklar lösning av uppgiften. Alla vet och kan bidra med något, men ingen i gruppen har alla svar.
Medel	Eleverna känner att de behöver varandra under inläringstillfället, antingen genom material eller genom kunskap. Samspelet baserar sig på individuella motiv istället för gemensamma mål.	Varje elev är ansvarig för en egen del av uppgiften. Det ömsesidiga ansvaret baserar sig på delande av utrymme, material och delar av uppgiften.	Eleverna känner igen sociala färdigheter och använder sig av dem under inläringstillfället. Man har inte tränat dessa färdigheter före tillfället.	Uppgiften innehåller öppna delar men läraren eller materialet leder lösandet av uppgiften. Det finns elever som bidrar lite eller inte alls till lösandet.
Låg	Eleverna kan lyckas utan varandras bidragande. Individuella mål är viktigare än gruppens gemensamma mål. Samspel uppstår slumpmässigt och ofta genom tävlingsinriktade mönster.	Det kan existera en eller några elever som är ansvariga för presentationen av gruppens resultat. Ansvar uppmuntras genom personliga godkännanden. Inget strukturerat ansvar existerar.	Sociala färdigheter och särskilda attityder känns knappt igen och används inte. Eleverna uppmuntras inte till att ändra sitt sociala beteende.	Uppgiften innehåller inga öppna delar och kräver inte olika synpunkter. Inläringen sker genom förvärvande av information och kunskap. Det finns inte mycket utrymme för individuella idéer eller åsikter.

Tabellen används i denna avhandling som ett verktyg för att bedöma de olika gruppernas samarbetsnivå. Gruppernas samarbetsnivå är viktig att klargöra, eftersom jag undersöker ifall samband existerar mellan samarbetsnivå och behandling av lösningsförslag. Hypotesen är att en grupp med högre samarbetsnivå behandlar lösningsförslag mer genomgående. En mer genomgående behandling av lösningsförslag innebär diskussioner av de lösningsförslag som uppstår i gruppen, där eleverna är måna om varandras förståelse för uppgiften. En lägre nivå av samarbete skulle enligt denna hypotes innebära lägre grad av behandling av lösningsförslagen.

4.2 Didaktiskt kontrakt:

Blomhøj (1994, s. 36) beskriver det didaktiska kontraktet som ett begrepp som introducerades av den franska matematikdidaktikern Guy Brousseau under 1980-talet. Begreppet är del av ett begreppssystem som Brousseau försökte utveckla för att beskriva de förväntningar, uppfattningar och hållningar som karakteriserar en undervisningssituation i matematik, det vill säga en didaktisk situation (Blomhøj, 1994, s. 36).

Brousseau (2002, s. 31–33) beskriver det didaktiska kontraktet som en metafor för den ömsesidiga skyldighet som förefaller existera mellan lärare och elev i en undervisningssituation. Dessa ömsesidiga skyldigheter byggs upp mellan lärare och elev under en längre tid av undervisning. Varje didaktisk situation innehåller ett moment där läraren försöker förmedla en uppgift, ett problem, till eleverna. Utgående från instruktionerna och informationen som är tillgänglig ska eleverna använda sig av en bestämd kunskap, som de redan känner till eller håller på att lära sig, för att uppnå lösningen eller svaret som läraren väntar sig. Det enda möjliga sättet att "räkna" matematik är att undersöka och lösa specifika problem, och på så vis är det lärarens uppgift att överlåta ett bra problem åt eleverna istället för att förmedla kunskap. Ifall eleverna lyckas lösa problemet sker inläring och undervisningssituationen uppfyller sitt mål (Brousseau, 2002, s. 31).

Lärarens intentioner för matematikundervisning är oftast att utveckla matematiskt kunnande hos eleverna enligt Blomhøj (1994, s. 36–37). Det matematiska kunnandet ska helst också kunna appliceras av eleven i helt nya situationer. Detta kan endast uppnås ifall eleverna själva är aktiva på ett eller annat sätt under undervisningen. Lärarens uppgift är således att introducera eleverna till en situation där eleverna kan vara aktiva och utveckla sin kunskap. En del elever saknar förutsättningarna, kognitivt eller affektivt, för att hantera en sådan situation, och utvecklas. Lärarens sociala och professionella plikt i en sådan situation är att hjälpa eleverna. Läraren har alltså till uppgift att sätta in elever i sådana situationer där de kan utvecklas, och elevernas förväntas att uppfylla kraven som ställs på dem (Blomhøj, 1994, s.36–37).

Ju färre frihetsgrader, som t.ex. fysiska och tidsmässiga ramar, ämnets svårighet och betydelse, lärarens och elevernas ämnesförutsättningar. Pensum- och examensbestämmelser samt egna och omgivningens förväntningar, som har betydelse för samspelet mellan lärare och elever i detta projekt, desto mer kommer båda parter att fokusera på att undgå fiasko – d.v.s. att erkänna att lärandeprojektet misslyckats. (Blomhøj, 1994, s. 37.)

Ifall eleverna inte lyckas lösa problemet är det lärarens sociala och professionella plikt att stöda och hjälpa eleverna i deras lärande (Brousseau, 2002, s. 31–32). Hjälpen och stödet kan till exempel ske i form av differentiering eller omformuleringar. Läraren kan också tvingas inse att uppgiften är för svår, och i sådana fall måste hen förklara sitt misstag. Denna ömsesidiga skyldighet, som är mestadels outtalad och underförstådd är det didaktiska kontraktet, och det kan liknas vid ett kontrakt där det framgår vad bägge parterna förväntas utföra och ta ansvar för. Intressant är att kontraktet är specifikt för den matematiska kunskapen man vill komma åt. Därför är det omöjligt att säga vad det didaktiska kontraktet är i en viss situation innan det bryts. För det är vid brytningen av dessa underförstådda sociala regler som det didaktiska kontraktet måste formas om av bägge parterna (Brousseau, 2002, s. 31–32).

Det som kan hända då en elev inte uppfyller de krav som ställts på hen är att eleven själv, läraren eller föräldrarna klandrar eleven för hens misslyckande. Likväl kan läraren också klandras av sig själv, eleven, föräldrarna eller kollegor som anser att läraren inte levt upp till sin professionella plikt. Båda parterna i en undervisning vill således uppnå de mål och krav som satts, elevens lärande är det gemensamma målet för både läraren och eleven i en undervisningssituation. (Blomhøj, 1994, s. 37; Brousseau, 2002, s. 32.)

Brousseau (2002, s. 32) vill förtydliga att denna växelverkan av skyldigheter inte exakt är ett kontrakt, eftersom vi idag inte vet av några absolut säkra undervisningstekniker som alltid fungerar och uppnår önskade resultat. Läraren vill att eleven ska lära sig och gör så genom att ge eleven uppgifter anpassade till elevens egen nivå. Eleven vill att läraren ger hen möjligheten att lära sig och litar på att hen klarar av att lösa de uppgifter som hen fått av läraren. Vad som bryter

kontraktet går inte att bestämma på förhand, utan detta synliggörs först när kontraktet bryts. Eleven blir överraskad när läraren gett hen en uppgift som hen inte klarar av att lösa och blir arg, läraren blir förvånad då uppfattningen av elevens nivå varit felaktig och sökandet av ett nytt kontrakt utgående från den nya informationen börjar genast.

Det bör påpekas att det didaktiska kontraktet påverkas av den kunskap som är aktuell i undervisningssituationen, och är således inte ett allmänt pedagogiskt kontrakt (Brousseau, 2002, s. 31).

Den drivkraft som erhålls av detta spänningsmoment i en undervisningssituation bygger upp ett didaktiskt kontrakt mellan eleven och läraren. Detta kontrakt utgör, för majoriteten av eleverna, en försäkring mot misslyckande. (Blomhøj, 1994, s. 37.) Läraren kan genom tidigare erfarenhet med eleverna således känna av en uppgifts relativa svårighetsgrad, och eleverna kan på samma sätt känna att de kan klara av detta med lärarens handledning och förtroende.

Enligt Blomhøj (1994, s. 37) karakteriseras traditionell matematikundervisning av vissa gemensamma innehåll i det didaktiska kontraktet:

- Läraren går omsorgsfullt igenom lärobokens metoder och algoritmer.
- Läraren ger eleverna uppgifter som eleverna på förhand fått redskap att lösa.
- En uppgift är löst när dess enda fråga är besvarad.
- Önskat svar kan ges kort i t.ex. ett tal, en figur eller möjligen en kort mening.
- Eleverna har krav på lärarens bedömning när uppgiften är löst.
- Eleverna å sin sida, gör sitt bästa för att lösa givna uppgifter.

När en elev misslyckas eller upplever svårigheter med den situation som läraren satt eleven i får läraren en större anledning att ge mer konkreta och detaljerade anvisningar. Stödet som läraren ger ökar alltså då en elev stöter på svårigheter för att det didaktiska kontraktet ska uppfyllas. I dessa situationer är eleven först och främst upptagen med att möta lärarens krav. Eleven känner till att läraren har förväntningar, och att det didaktiska kontraktet samtidigt innebär att läraren omöjligt kan säga till eleven precis hur hen ska gå tillväga för att klara av situationen,

eftersom eleven då inte skulle lära sig något. Detta innebär i sin tur att eleven kommer att tolka allt läraren säger och gör för att få reda på ifall det eleven utfört är korrekt. Eleven motiveras alltså först och främst av att uppfylla det didaktiska kontraktet, och inte att lösa problemet i fråga. Det är viktigare för eleven att läraren är nöjd än att eleven lär sig något. Eleven kan alltså försöka *validera*⁶ sin lösning utgående från lärarens reaktioner och stöd, eller rättare sagt försöker eleven kontrollera på förhand ifall hans lösning ens går att *validera*.

Sociomatematiska normer beskriver ett klassrums typiska beteende vid matematiska problem och aktiviteter. Dessa normer är oftast outtalade och underförstådda, är personliga, dynamiska och byggs upp mellan parterna över en längre tid. Det kan finnas normer mellan elev och elev i klassen som är olika normerna mellan elev och lärare. Liknande som det didaktiska kontraktet märks dessa normer först då de ändras eller bryts. Eftersom de sociomatematiska normerna i olika klassrum är olika och osynliga samt outtalade krävs att observation av klassrummet sker under en längre tid för att synliggöra normerna (Kilhamn, 2011, s. 127–129).

⁶ Begreppet *validering* behandlas under det kommande problemlösningskapitlet.

5 Problemlösningens olika delar

Kapitlet innehåller en genomgång av problemlösning och de centrala delar inom problemlösningen som är relevanta för denna avhandling. Här presenteras problemlösning, problemuppgifter och lösningsförslag. När man förstår problemlösningens processens uppbyggnad kan man enklare analysera de delar som är av intresse, och i min avhandling ligger lösningsförslag eller planer som Polya kallar dem i fokus. Dessutom presenterar jag begreppet validering som är nära relaterat med reflektionen av både lösningsförslaget och den slutgiltiga lösningen.

5.1 Problemlösning

Som jag tidigare definierade matematiska problem i inledningen, innebär helt enkelt problemlösning arbetet med, processen under och utforskandet av ett problem som i sin tur leder till att problemet upphör existera. Ett problem är bara ett problem då man upplever att en möjlig lösning inte är uppenbar. I skolan består ofta ett problem av en uppgift. Enligt Björkqvist (2001, s. 118) kan matematikuppgifter delas in i fyra möjligheter:

Tabell 2, matematikuppgifters indelning

	Problem	Icke problem
Textuppgift	I	III
Icke textuppgift	II	IV

De uppgifter som inte är problem kan kallas övningsuppgifter eller rutinuppgifter (Björkqvist, 2001, s. 118; Bergsten, 2006, s. 166). Det som skiljer problem och rutinuppgifter åt är att vid lösandet av ett problem måste man först komma åt en metod för att lösa problemet, medan man vid lösandet av en rutinuppgift redan är medveten om vilken metod som erbjuder lösningen.

Bergsten (2006, s. 166) beskriver en problematik angående problemlösning och *att hitta en lösning*. Att hitta en lösning innebär att lösningen döljer sig bakom

problemet, lösningen existerar redan, det är bara att hitta den. Bergsten anser att detta är missvisande och att uttrycket förstör den kreativa processen som finns i problemlösningen. Ifall problemet är okänt, och man inte känner till någon lösningsmetod, krävs det att man är kreativ och utforskar problemets egenskaper. Om samma problem presenteras för en annan elev som redan är medveten om problemets egenskaper och vet om en metod som fungerar för att lösa problemet, blir problemet ett så kallat rutinproblem. Rutinproblemet upplevs som bekant, och nu ligger fokus på att hitta eller upptäcka lösningen, inte på själva lösningsmetoden (Bergsten, 2006, s. 166–167).

Vad är en lösning? En lösning på ett problem innebär att problemet inte längre uppfattas som ett problem, lösningen är uppenbar och förståelsen av problemet är tillräcklig för att se hur lösningen är tillräcklig eller korrekt.

Vad är ett lösningsförslag? Eftersom ett problem saknar en uppenbar lösning krävs det att man söker efter en lösningsmetod för att erhålla lösningen. Lösningsförslag eller lösningsstrategi är steget före metoden. Detta kan liknas vid Polyas (1973) problemlösningens andra steg, att göra upp en plan. Man utgår från den kunskap man har i fråga om problemet och via tidigare kunskaper och erfarenheter väljer man att pröva på sätt att lösa problemet. Ett lösningsförslag eller en lösningsstrategi behöver inte leda till en korrekt lösning. Förslaget och strategin behöver inte mycket för att existera som förslag. Det kan gå snabbt att göra upp en plan och börja testa den.

Lösningsförslag och lösningsstrategier är intressanta på det sättet att de ibland kan förefalla självklara för eleverna, och i andra situationer kan de uppfattas som otroligt komplicerade. Lösningsförslagen är enligt mig förknippade med kreativiteten och det matematiska tänkandet. Att se möjligheter, att våga pröva på, att inte ge upp eller att ge upp. Mycket sker mellan stegen att förstå problemet och att göra upp en plan och utföra den.

Kan man då som lärare lägga märke till när lösningsstrategier blir synliga i ett matematiskt grupparbete? Antagligen eftersom lärare oftast är medvetna om lösningen till problemet, problemet är alltså inte ett problem för oss. Eleverna är

också medvetna om detta, för det didaktiska kontraktet innehåller paragrafer i anknytning till att läraren har lösningen, eller i alla fall facit till hands. Påverkar detta då eleverna till att testa sina lösningsstrategier med läraren innan de testat den på egen hand, eller föreslår ett lösningsförslag för resten av gruppen? Är läraren en sorts säkerhet som på sätt och vis kan förhindra problemlösningsprocesser bara genom att interagera med eleverna?

För att problemlösning i grupp ska fungera optimalt borde problemet inte upplevas som en rutinuppgift för någon elev i gruppen. Alla elever borde vara omedvetna om möjliga lösningar då de introducerats med problemet (Björkqvist, 2001, s. 118).

Pugalee (2004, s. 29) refererar i sin artikel *Comparison of verbal and written descriptions of students' problem solving process* till forskarna Garfalo och Lester som 1985 identifierade ett metakognitivt ramverk som används när en person löser ett matematiskt problem. Ramverket delas in i fyra kategorier: orientering, organisering, utförande och verifiering. Detta ramverk anser jag stöder Polyas (1973) modell. Pugalee anser att Garfalos och Lesters ramverk är användbart för analys av elevers skrivna och muntliga diskussionsprotokoll. Ramverket underlättar en tolkning av elevernas kontext. I sin undersökning använde Pugalee ramverket för att kategorisera data. Pugalee lade till en femte kategori som innehöll "off-task"-kommentarer.

I min undersökning har jag valt att analysera de delar av diskussionerna där lösningsförslag uppstår och behandlas, det vill säga planeringssteget och utförandet av planen av en lösning enligt Polya och organiserings- och utförandestadiet enligt Garfalo och Lester. Utförandet av dessa planer, det vill säga uppföljandet av lösningsförslagen, resulterar oftast i nya kunskaper gällande problemets egenskaper eller så resulterar det i en lösning. Det sista steget i problemlösning är ett steg som ofta lämnas bort och omfattar reflektion av det utförda. Inom dessa reflektioner kan det uppstå situationer där eleverna måste förklara eller försvara sina lösningar. Detta går jag djupare in på i följande kapitel.

5.1.1 Validering

Validering är ett begrepp som innebär att man motiverar eller bestyrker ett argument eller en lösning (Björkqvist, 2001, s. 125). Liknande svenska begrepp är godkännande (Allärs – Allmän tesaurus på svenska, 2016), försvara, eller rättfärdiga (MOT Norstedts stora engelska ordbok, 2015). I engelskan används ofta begreppet *justify* (MOT Norstedts stora engelska ordbok, 2015). Validering kan liknas vid Polyas (1973) fjärde steg, där man måste reflektera över vad man gjort. En elev som måste *validera* sin lösning kan komma fram till att lösningen är korrekt eller inkorrekt. Eleven kan upptäcka brister i argumentationen, eller nya dimensioner av problemet som hen gått miste om i förståelsesteget. Glass och Maher (2004, s. 469) tror att problem som bjuder in till motiverande av lösningsmetoderna och lösningarna aktiverar elevernas förmåga att tänka vettigt. Glass och Maher rekommenderar att lärare ska använda sig av sådana uppgifter som bjuder in till diskussion och som kräver motiverande av lösningar.

För en finländsk elev i årskurs 6 är ett av målen i matematikundervisningen, enligt *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen* (2004), följande: "Eleven skall lära sig att uttrycka sina tankar entydigt och att motivera sitt handlande och sina slutsatser" (Utbildningsstyrelsen, 2004, s. 164). I den kommande läroplanen är ett mål för årskurserna 3–6 följande: "uppmuntra eleven att presentera sina lösningar och slutledningar för andra med konkreta hjälpmedel, figurer, muntligt och skriftligt, även med hjälp av digitala verktyg" (Utbildningsstyrelsen, 2014, s. 261).

För en svensk elev i årskurs 6 är kunskapskravet, enligt *Kursplanen i matematik* (2011), för betyget A i slutet av årskursen följande:

Eleven kan lösa enkla problem i elevnära situationer på ett **väl** fungerande sätt genom att välja och använda strategier och metoder med **god** anpassning till problemets karaktär. Eleven beskriver tillvägagångssätt på ett väl fungerande sätt och för **välutvecklade** och **väl** underbyggda resonemang om resultatens rimlighet i förhållande till problemsituationen samt kan **ge förslag på** alternativa tillvägagångssätt. (Skolverket, 2011, s. 10.)

I Förenta staterna existerar ingen övergripande läroplan för hela landet, men de flesta delstater, också Kalifornien, har på eget initiativ accepterat Common Core State Standards Initiative (CCSSI) som försöker bygga upp en övergripande läroplan i matematik och läs- och skrivkunighet. CCSSI (2010) menar att matematiskt kunniga elever i årskurs 6 ska kunna motivera och kommunicera sina lösningar åt andra elever och samtidigt kunna ta del av andras lösningar.

They justify their conclusions, communicate them to others, and respond to the arguments of others. (CCSSI, 2010, s. 6–7.)

Dessa exempel synliggör att det i alla tre länder existerar det ett fokus på elevers gemensamma reflektion över de lösningar man kommer fram till under en problemlösningsprocess. Den gemensamma reflektionen och valideringen över en lösning är ett viktigt steg i lärandet och tyvärr lämnas det ofta bort (Björkqvist, 2001, s. 121, 125; Bleiler, Thompson & Krajčevski, 2014, s. 106).

6 Metodkapitel – den empiriska undersökningen

Detta kapitel redogör inledningsvis för undersökningens syfte, problemformulering, forskningsmetod och forskningsansatsen. Därefter presenteras undersökningsgruppernas storlek och sammansättning. Förberedelser inför undersökningen och genomförande av undersökningen behandlas också. Till sist redogör jag för valet av analysmetod och undersökningens reliabilitet, validitet och etik diskuteras.

6.1 Syfte och problemformulering

Enligt mig bjuder lösningsförslag in till tolkning av en enskild elevs tankesätt. Utgående från de reaktioner som bemöter lösningsförslagen tydliggörs intentionerna och kontexten av uppgiften hos den enskilda eleven. Samtidigt kan reaktionerna på lösningsförslagen ge insyn i de andra elevernas tankar. Ifall lösningsförslagen ifrågasätts, inte förstås, förkastas eller accepteras påverkas både mottagaren och talaren i en grupp.

Syftet med avhandlingen är att belysa lösningsförslagen och undersöka deras behandling under en grupparbetsituation, därutöver undersöks samband mellan samarbetsnivån och behandlingen av lösningsförslagen.

I det följande presenterar jag mina problemformuleringar.

Hur många lösningsförslag uppstår i grupperna, och hur mycket behandlas de?

Den första forskningsfrågan ämnar belysa lösningsförslagen i gruppdiskussionerna. Hur många olika lösningsförslag uppstår under problemlösningstillfället och hur mycket behandlas dessa lösningsförslag? Varje "on-task"-kommentar förväntas höra till ett lösningsförslag. Genom kategorisering av kommentarerna enligt tillhörande *lösningsstrategi* önskar jag belysa diskussionerna av lösningsförslagen. Hur strukturerar man diskussionerna för att tydligt synliggöra lösningsförslagets uppkomst och behandling? Med hjälp av den uppfattade kontexten hos de enskilda eleverna och tolkning av intentionerna med de enskilda kommentarerna kan en

interaktionsanalys i form av ett flödesschema göras. I detta flödesschema kan lösningsförslagen förtydligas och lyftas fram. Lösningsförslagen kan i vissa fall ge en inbjudan till förståelse eleverna sinsemellan och till samarbete. Att föreslå ett tillvägagångssätt är avgörande för att ett grupparbete ska bli mer än individuellt arbete vid samma bord. Hur bemöts lösningsstrategin av gruppen och hur valideras den av individen?

Existerar, och i så fall vad kan man säga om, ett samband mellan samarbetsnivå och behandling av lösningsförslag?

Den andra forskningsfrågan baserar sig på en hypotes jag har. En grupp med hög nivå av samarbete tar emot fler lösningsförslag eller behandlar lösningsförslag mer än grupper med lägre samarbetsnivå. En grupp med högre nivå av samarbete har alltså mer givande och eftertraktade diskussioner än en grupp där samarbetet är på en lägre nivå. Krävs det att ett lösningsförslag arbetas med av hela gruppen för att samarbete ska existera? Finns det samarbete i en grupp där alla arbetar och motiverar sina egna lösningar först och sedan endast förklarar sina tillvägagångssätt för varandra?

6.2 Forskningsansats

En fallstudie är det som jag närmast skulle likna min undersökning med, eftersom jag utgår från grupparbeten men fokuserar på lösningsförslagets belysning och mottagande.

Enligt Denscombe (2009, s. 59) kännetecknas en fallstudie av "dess inriktning på bara en enda undersökningsenhet". Detta innebär att man noggrant undersöker en detalj av en händelse, i motsats till massstudier där man försöker greppa en bild av helheten. Vad som definierar "fallet" i en fallstudie är upp till forskaren och utgår från forskarens behov (Denscombe, 2009, s. 59–60; Merriam, 1988, s. 9–10). Merriam (1988, s. 10) menar att fallet kan vara till exempel en enskild elev, ett

undervisningsprogram eller en skola beroende på vad det är man vill få reda på. Om man vill effektivisera grupparbeten i klassrummet kan en fallstudie där man undersöker en enskild elev, en grupp eller grupparbetet i sig självt på djupet ge en insikter som hjälper en att nå de mål man vill. Varför man skulle enbart fokusera på en detalj av en helhet är att belysa just detaljen och få djupare insikt om den, men också för att denna typ av detaljer inte kommer fram i dagsljus då man använder sig av till exempel surveyundersökningar. Målet med fallstudier är alltså genom observation av detaljer kunna nå insikter som belyser det generella (Denscombe, 2009, s. 60, 69 & Merriam, 1988, s. 10 & Yin, 2009, s. 18).

Förra meningen som beskriver fallstudiens mål beskriver också samtidigt problemet med fallstudien. Hur är det ens möjligt att påstå att genom observation av enbart detaljer vid några få fall kunna nå generella insikter som skulle gälla i andra fall? Merriam (1988), Denscombe (2009) och Yin (2009) är eniga om att det är här som fallstudie forskare möter motstånd, och att det är viktigt att komma ihåg att fallstudien undersöker detaljer i en viss typ av situation. Yin (2009, s. 18) menar att fallstudier är beroende av kontext. Det fenomen man undersöker och de variabler som bygger upp fenomenet ska vara nästan omöjliga att urskilja från kontexten. Det betyder att de resultat man erhåller är oerhört bundna till den typ av situation man undersöker, men detta innebär samtidigt att de resultat man erhåller kan återfinnas i liknande situationer.

Denscombe (2009, s. 68–70) ger tre exempel på resonemang man kan använda sig av för att rättfärdiga sin forskning:

1. Även om varje enskilt fall i vissa avseenden är unikt, är det också ett exempel som ingår i en bredare kategori.
2. Möjligheten att generalisera resultaten från fallstudien till andra exempel i kategorin beror på i hur hög grad fallstudiens exempel liknar andra av samma typ.
3. När forskaren redovisar resultaten av fallstudien måste han eller hon ta med tillräckliga detaljer om hur fallet klarar en jämförelse med andra i samma

kategori, så att läsaren kan göra en initierad bedömning av i vilken mån resultaten är relevanta för andra enheter.

Fallen i min studie är lösningsförslagen som uppkommer i gruppdiskussioner där lösandet av ett matematiskt problem sker, kontexten är små grupparbeten med instruktioner av läraren som uppmuntrar till samarbete. De detaljerade resultat jag lyfter fram borde generellt sett vara intressanta och användbara för andra i liknande situationer, och jag hoppas samtidigt att mitt val att undersöka samma fall i tre grupper från tre olika länder bestyrker påståendet att detta är tillämpligt generellt i liknande situationer. Kontexten i de tre olika grupperna borde komma fram tydligt i mina beskrivningar av materialet i materialkapitlet.

6.3 Materialpresentation

Materialet jag hade tillgång till bestod av tre videoinspelningar från tre olika länder. Filmerna visar små elevgruppers arbete under ett problemlösningstillfälle som hölls för årskurs 6 i Finland, Sverige och USA. Alla grupper var instruerade att lösa tre problemuppgifter, och av dessa tre uppgifter valde jag att analysera lösandet av det så kallade tändsticksproblemet⁷. Materialet spelades in under VIDEOMAT-projektets⁸ gång mellan 2011 och 2013. Inspelningarna skedde med hjälp av stationära kameror och trådlösa mikrofoner. Varje grupp hade en egen trådlös mikrofon och en egen kamera som filmade situationen.

Grupperna bestod av tre elever i den finlandssvenska gruppen, Anna, Bodil och Casper, fyra elever i den svenska gruppen, Dea, Emil, Frank och Gun, och fyra elever i den amerikanska gruppen, Heather, Ingrid, John och Kate. Alla namn är fingerade. Eftersom jag själv inte var närvarande vid inspelningarna av materialet kunde jag inte påverka någon aspekt av filmandet. Jag har enbart observerat det material som

⁷ Se Bilaga 1

⁸ VIDEOMAT-projektets mål är att undersöka vad forskare och lärare kan få ut av att tillsammans diskutera och jämföra videofilmade klassrumssituationer. (Kilhamn & Røj-Lindberg, 2013, s. 312–314)

fanns tillgängligt och valt ut en grupp från varje land som jag sedan analyserat. Valet av grupp gjordes utgående från kameravinkel och mikrofonplacering. Om jag kunde se eleverna och höra dem tillräckligt bra ansåg jag materialet vara analyserbart. Jag valde att inte analysera en norsk grupp, dels för att jag inte kan språket tillräckligt bra och är rädd för att gå miste om något, dels för att hålla min undersökning storleksmässigt inom ramarna för en magisteravhandling.

Det finns många variationer av tändsticksuppgifter och tändsticksproblem och oftast ska eleverna utgå från, eller skapa, en illustrerad figur eller konkret modell som består av tändstickor. Arbete med tändsticksuppgifter kan till exempel innebära att elever löser problem, söker efter mönster, adderar eller subtraherar tändstickor, uppskattar mängder eller skapar geometriska figurer.

Uppgiften eleverna arbetade med i VIDEOMAT-projektet kallas tändsticksproblemet, och finns med som bilaga. Tändsticksproblemet innehåller en bild av 13 tändstickor som är radade på ett visst sätt så att de bildar fyra kvadrater. Frågan lyder hur många kvadrater man kan bilda med 73 tändstickor om man radar dem på samma sätt. Tändsticksproblemet är en uppgift där många olika lösningsmetoder kan användas för att en korrekt lösning ska nås. Ifall ingen i gruppen känner till problemet från förr kan uppgiften också bjuda in till interaktion mellan problemlösarna.

Under VIDEOMAT-projektets gång har man följt med fyra algebralektioner, och det var först efter dessa som de tre matematiska problemen delades ut till läraren för att förhindra förberedelse inför problemlösandet. Den femte lektionen som hölls under projektets gång var problemlösningslektionen. Man antog också att de fyra föregående lektionerna inte skulle ta upp allt som de tre problemen skulle innehålla. Målet med denna lektion var inte att jämföra elevernas prestationer, utan att studera elevernas resonemang och diskussioner vid lösandet av algebraiska problem som de inte specifikt var förberedda för. Instruktionerna som läraren fick av forskarna var endast att den femte lektionen skulle behandla dessa tre algebraiska problem. Läraren hade på så sätt fria händer vad gäller instruktioner, gruppindelningar samt lösande av problemen. Instruktionerna från lärarna har i alla







länder varit att alla i gruppen ska samarbeta och förstå den eller de lösningar de lämnar in. Vissa grupper fick välja att lämna in enskilda lösningar eller gemensamma lösningar. Eftersom samplet är för litet kan inga generella skillnader mellan ländernas inverkan på gruppernas prestationer kan erhållas. Hur elevernas nationella och kulturella bakgrund påverkar problemlösningen undersöks inte i detta arbete.

6.4 Genomförande av undersökningen

Genom observation och transkribering av konversationerna har jag lyckats strukturera det som sägs under problemlösningsprocesserna för att lyfta fram de tillfällen där lösningsförslag är synliga. Flödesscheman med intentionsanalys borde ge mig en stadig grund att basera mina tolkningar på för att höja reliabiliteten. Validiteten borde också dra nytta av denna form av strukturering, genom att tydligt kunna visa hur lösningsförslagen förmedlas och mottas av gruppen, även om forskningen är kvalitativ borde denna typ av strukturering och analys kunna tillämpas på större mängder av data. Problemet med observation är just det att det är tidskrävande.

Jag började med att välja ut vilka videor jag skulle observera. Detta urval skedde på basis av ljudkvalitet och synlighet av alla elever i gruppen, där ljudkvaliteten var viktigast. Efter att ha hittat en grupp från varje land gjorde jag först en testtranskribering av en fjärde grupp, samma grupp elever som jag observerade i min kandidatavhandling. Jag spelade upp filmen i halv hastighet för att verkligen ha tid att höra allt som sades, och ifall något var oklart kontrollerade gick jag tillbaka och såg situationen på nytt. På detta sätt transkriberade jag lösningsprocessen av problemuppgiften och konstaterade att denna metod av transkribering var tillräckligt noggrann för att ge mig en översikt av konversationerna. Efter att jag transkriberat allt observerade jag situationen i normal hastighet och noterade eventuellt kroppsspråk eller händelser som tog plats samtidigt som kommentarerna

sades, detta för att kunna beskriva situationen noggrannare och få en klar uppfattning av kontexten. När detta var gjort för varje grupp gick jag vidare till att tolka varje enskild kommentars intention i samband med kontexten. Detta gjordes genom ett interaktionsflödesschema som belyser kommentarernas riktning mot en viss person framåt i diskussionen (proaktiva), eller ifall en kommentar reflekterar till en tidigare kommentar (reaktiva), eller ifall en kommentar innehåller både reaktiva och proaktiva element. I flödesschemat kan man också observera ifall kommentarer är on-task, helstrukna linjer, eller off-task, streckade linjer. Se figur 1.

Typ av kommentar	On-task	Off-task
Proaktiv		
Reaktiv		
Pro- och reaktiv		

Figur 1, typer av kommentarer

6.5 Intensionsanalys med stöd av kontextualisering

Ryve (2006, s. 197) beskriver intensionsanalysen han utförde med ett exempel. En elev utför handlingar eller uttrycker vissa saker som i den här situationen skulle argumentera för en kontextualisering X av uppgiften. Kan andra uttryck hittas som stöder denna hypotes? Finns det uttryck som motsäger den här tolkningen? Forskaren testar sedan sin tolkning av situationen och jämför den mot kontextualiseringens aspekter: kognitiv, situationsbaserad och kulturell för att se ifall tolkningen av intentionen är vettig, måste bearbetas eller förkastas.

That is, the introduction of contextualizations makes the analyses of the transcripts and the construction of the interactive flowcharts more explicit, which is beneficial in at least two ways. First, it offers the researcher an opportunity to scrutinize his or her own arguments for the interpretations of the students' immediate intentions. Second, it gives the reader of the paper opportunities to form an opinion of the presented interpretations and the underlying argumentation supporting these interpretations. (Ryve, 2006, s. 203.)

Meningen med kontextualiserande är alltså att öka tillförlitligheten i en undersökning genom att ge läsaren möjligheten att se bakomliggande faktorer som påverkat den subjektiva tolkningen av interaktionerna eller intentionerna.

Jag valde att beskriva varje enskild elevs kontext utgående från min uppfattning av den situation eleverna befann sig i, utan större analys av bakgrunder för elevernas uppförande eller presterande i gruppen. Med mer material om elevernas tidigare matematiska kunnande och prestationer, elevernas sociala färdigheter eller med intervjuer av både lärare och elever kunde man antagligen nå en mer korrekt kontext för situationen. Notera att jag endast arbetade med videofilmen av den femte lektionen där eleverna löste tändsticksproblemet, detta dels för att hålla arbetet inom ramarna för en magisteravhandling, dels för att se hur tidskrävande det är att analysera en relativt kort del av ett grupparbete. Jag kan här säga att det är mycket tidskrävande. Som lärare besitter man antagligen tidigare kunskap angående sociala, kulturella och kognitiva aspekter hos eleverna. Denna kunskap kan bidra till tolkandet av kontexten i en situation.

6.6 Metodval

Metoden jag valt för att undersöka mitt material är observation. Valet att använda mig av observation var ett självklart val eftersom jag utgått från färdigt inspelat videomaterial från ett forskningsprojekt vid mitt universitet. Jag beskriver materialet senare i avhandlingen. Denscombe (2009, s. 271) påstår att det i vissa fall är bäst att direkt observera det som händer i en situation. Jag vill kunna se vad som

händer med lösningsförslagen och enligt mig är observation den bästa metoden för detta.

Observation som datainsamlingsmetod kräver inte att en grupp aktivt delger forskaren information, istället utgår forskaren från det som verkligen händer (Denscombe, 2009, s. 271; Einarsson & Hammar Chiriac, 2002, s 23). Detta innebär att metodens fokus inte enbart ligger på vad som sägs eller tänks, utan även på direkta händelser i situationen (Denscombe, 2009, s. 271).

Det finns två typer av observation, nämligen strukturerad och ostrukturerad observation. Strukturerad observation förknippas vanligtvis med kvantitativ forskning, eftersom man med hjälp av observationsscheman och förutbestämda fokusområden enkelt kan gå igenom mer material och lyfta upp det man är ute efter. Ostrukturerad observation i sin tur förknippas vanligtvis med kvalitativa undersökningar. I en ostrukturerad observation utgår man från det observerade och börjar sedan lyfta fram det som verkar intressant. Målet med den ostrukturerade observationen är alltså inte nödvändigtvis förutbestämt (Denscombe, 2009, s. 271–294; Punch, 2009, s. 154–155). Punch (2009, s. 154) menar dock att dessa förknippningar inte nödvändigtvis måste stämma.

En kvalitativ undersökning kan fortfarande ha förutbestämda fokusområden med sin observation, men en kvalitativ undersökning anpassar och omformar sina strukturer efter det observerade mycket mer än en kvantitativ undersökning. I mitt fall försöker jag strukturerat presentera både mina observationer och mina transkriptioner så att det ska vara möjligt att följa med samt förstå mina åsikter och resonemang. All strukturering är nödvändig dels för att det är en fallstudie och jag vill se så mycket som möjligt av situationerna, dels för att ge läsaren en möjlighet att förstå mina antaganden och mina tolkningar. Att observera och analysera på det sätt jag gör är av naturen subjektivt, men med tydlig strukturering önskar jag nå en viss objektivitet.

Jag har alltså observerat tre olika problemlösningstillfällen där samma uppgift löstes av tre olika grupper. Den finlandssvenska gruppen bestod av tre elever, den svenska gruppen av fyra elever och den amerikanska av fyra elever. Jag valde att observera

tre olika gruppers problemlösningsprocess under lösandet av samma problem istället för att observera hur en grupp löste tre olika problem. Jag utgick från att tre olika gruppers problemlösande skulle vara mer intressant och mer relevant för de forskningsfrågor som jag ställde.

6.6.1 Interaktionsanalys

Människors uttalanden är alltid en form av kommunikation, och oberoende av om de är tysta och personliga eller allmänna och hörbara ska de aldrig tolkas som ensamstående händelser. Kommunikation kan därför ses som en process där en händelse, aktion eller ett uttalande är en del av hela processen. Denna händelse kan också vara en reaktion mot något som tagit plats tidigare i processen, eller en aktivt riktad handling mot någon som deltar i processen. Också då man endast hör en enskild mening uttalas står den inte ensam utan den är antingen riktad mot någon, en reaktion på någons tidigare uttalande eller både och (Sfard & Kieran, 2001, s. 58).

Sfard och Kieran (2001, s. 58–60) talar om osynliga pilar som hör ihop med uttalanden i en diskussion, och dessa pilar visar ifall en kommentar är *reaktiv*, *proaktiv* eller *pro- och reaktiv*⁹. En *reaktiv* kommentar är en kommentar som reagerar på ett tidigare uttalande och symboliseras i så fall med en pil bakåt i tiden, medan en *proaktiv* kommentar inbjuder till samtal eller för konversationen vidare och symboliseras då med en pil framåt i tiden. En *pro- och reaktiv* kommentar innehåller både en reaktion på något som blivit sagt tidigare och som för konversationen framåt genom frågande eller förklarande. Förtydligandet av denna struktur i en konversation kan underlätta analyserandet av de situationer man vill undersöka. Reaktiva kommentarer kan vara förklarande eller förtydligande, medan proaktiva kommentarer kan vara frågande eller provocerande. Kommentarer som är pro- och reaktiva kan vara förklarande samtidigt som de söker en förståelse som

⁹ Se figur 1, typer av kommentarer på s. 38

respons av mottagaren. Viktigt att påpeka är att kommentarer kan vara riktade mot elevens egna uttalanden, i form av högt tänkande, och då går pilarna vertikalt uppåt eller neråt. Kommentarer kan också vara riktade mot andra elever, då i form av diagonala pilar uppåt eller neråt.

Eftersom inga kommentarer är uteslutna från helheten krävs också att kontexten för diskussionen behandlas. Sfard och Kieran (2001, s. 60–62) påpekar detta genom att belysa uppgiftens inverkan på strukturen i en diskussion. Olika uppgiftstyper skulle alltså resultera i olika sorts diskussioner i samma grupp. Ryve (2006) valde att vidareutveckla Sfards och Kierans interaktions- och intentionsanalys genom att lyfta fram kontextens betydelse. Kontexten blir synlig i en diskussion genom att man observerar vad det är som diskuteras och hur det diskuteras. Detta ser jag som en fördjupning och ett förtydligande av Sfards och Kierans påstående om uppgiftstypers inverkan på en diskussion. Läraren har oftast ett syfte med de uppgifter eleverna ska utföra. Detta syfte anser jag kan tolkas som lärarens önskade kontext för situationen. Inför problemlösandet gav varje lärare instruktioner för arbetssättet, och i varje grupp uppmuntrades eleverna att samarbeta och diskutera problemet samt de lösningar som de kom fram till under tillfället. Den önskade kontexten från lärarens sida behöver inte nödvändigtvis påverka elevernas individuella kontext, men lärarens önskade kontext kan påverka hur läraren ser på elevernas samarbete.

Enligt Ryve (2006, s. 195) bestämmer elevernas uttalanden och ageranden kontexten för situationen, och genom att ta detta i beaktande under observationen kan intentionerna förhoppningsvis tolkas mer korrekt. Genom att beskriva kontexten som jag tolkar den erbjuder jag en möjlighet att förstå mina tolkningar och samtidigt göra undersökningen mer tillförlitlig. Ryve (2006, s. 197–198) beskriver kontexten vid lösandet av ett matematiskt problem utgående från varje enskild elev i gruppen genom att analysera diskussionen och tolka elevernas inställning till uppgiften. Ett matematiskt problem behöver inte vara ett problem för alla, och problemet tolkas på olika sätt av olika individer. Med detta i åtanke vill jag knyta ihop Ryves, Sfards och Kierans tankar om kontext. Uppgiften eller problemet är utgångspunkten för diskussionen och uppgiftens typ formar diskussionen, och en

grupp kan ha mycket olika sorters diskussioner beroende på hurdan problem de löser. Samtidigt kommer problemet att tolkas individuellt av varje elev i gruppen, vilket innebär att kontexten för varje enskild elev i gruppen skiljer sig från varandra, och detta synliggörs genom diskussionen där man kan tolka elevernas inställningar till problemlösandet. På samma sätt kan lärarens kontext skilja sig från elevernas, vilket kan resultera i en snedvriden uppfattning av samarbetet i gruppen då läraren inte är delaktig hela tiden.

Utgående från mina observationer och transkriptioner har jag tolkat elevernas enskilda kontext, detta för att ge stöd för struktureringen av diskussionen till ett flödesschema där man kan se ifall kommentarerna är reaktiva eller proaktiva. Flödesschemat har i sin tur använts för att lyfta fram de situationer där lösningsförslag är synliga, och det är dessa tillfällen där jag tolkar intentionerna i kommentarerna för att sedan kunna påstå ifall ett lösningsförslag tagits emot, förkastats eller gått förbi.

6.7 Reliabilitet, validitet och etik

Med reliabilitet menas tillförlitlighet eller pålitlighet. En tillförlitlig forskning är en forskning som kan upprepas av andra forskare och ge samma eller liknande resultat. Speciellt med kvalitativa forskningsmetoder såsom intervju eller observation är forskaren i sig en stor del av undersökningen, och vilka resultat forskningen ger är direkt beroende av forskaren. Det är omöjligt att kontrollera ifall en kvalitativ forskning är helt och hållet tillförlitlig, eftersom det kan vara omöjligt att återskapa exakt samma miljö eller situation. Men det är ändå inte omöjligt att försäkra läsare om att ens kvalitativa forskning är tillförlitlig. Genom att tydligt redogöra för metodval, analys och tillvägagångssätt under forskningen kan man ge läsaren en tydligare bild av hela undersökningen och på så vis ges en möjlighet att förstå de slutsatser forskaren kommit fram till och varför (Bell, 2006, s. 117 & Denscombe, 2009, s. 381).

Med validitet menas trovärdighet eller giltighet. Ett trovärdigt forskningsarbete kan visa att arbetets data är träffsäkra och exakta. Detta betyder att den forskningsansats som valts och den metod eller de metoder man använt sig av verkligen besvarar de forskningsfrågor som ställts. Det existerar ingen exakt metod för att mäta trovärdigheten i ett arbete, men forskaren kan på olika sätt intyga läsaren och sig själv om att undersökningen är trovärdig. Tidigare forskning inom området, öppna diskussioner med andra som är insatta i ämnet eller användning av triangulering kan höja trovärdigheten. Triangulering innebär användning av data från olika tidpunkter eller med olika kulturell, social eller geografisk kontext. En forskning som saknar reliabilitet saknar också validitet, men detta innebär inte att en forskning som har hög reliabilitet också har en hög validitet. Däremot gäller att en forskning med hög validitet också har en hög reliabilitet. Ifall en undersökning verkligen undersöker och besvarar det som det frågas, hög validitet, borde andra forskare också nå fram till samma resultat, hög reliabilitet (Bell, 2006, s. 117–118; Denscombe, 2009, s. 380).

Etiken i en forskning är viktig för att skydda respondenterna. De överenskommelser som sker mellan forskare och respondent får inte brytas. Respondenterna ska informeras om vad som undersöks, när det undersöks och hur det undersöks. Hur resultaten kommer att användas och hur resultaten kommer att spridas är också viktigt att förtydliga för respondenterna. Deltagarna i undersökningen är människor och har samma rättigheter och värdighet som andra människor. Människligheten ska respekteras även i forskning. Deltagarnas integritet ska också skyddas, det vill säga ifall deltagarna vill förbli anonyma ska de förbli det eller så har de rätt att tacka nej till att delta. Allt detta sker för att skydda "vanliga människor" från forskare som vill göra allt för att nå mer kunskap om sitt ämne. Forskaren har också en etisk skyldighet att rapportera data som de är och inte manipulera data för att nå önskvärda resultat (Bell, 2006, s. 55–66; Denscombe, 2009, s. 193–206).

I min undersökning försöker jag uppnå en hög tillförlitlighet genom att noggrant beskriva mina val av forskningsansats, metod och genomförande av analysen. Genom strukturering av konversationerna och användandet av en intentionsanalys i

ett flödesschema som förtydligar konversationens erbjuder jag en möjlighet att förstå mina tolkningar och antaganden.

Jag har försökt uppnå en hög validitet i mitt arbete genom att finslipa mina metoder genom diskussioner med handledare och medstuderande. Diskussionerna har riktat mina metodval till det jag slutligen använde mig av. Via diskussionerna har jag lyckats säkerställa för mig själv att en tydlig strukturering och ett tydligt avgränsande till fallstudie kan ge mig svar på de frågor jag ställer. Genom att observera och analysera tre grupper, med olika kulturella bakgrunder, och deras diskussioner önskar jag även stärka validiteten i min undersökning. Det sociala har stor betydelse i situationen eller kontexten som eleverna befinner sig i, men genom att acceptera detta utan att analysera sönder de sociala aspekterna i varje grupp hoppas jag kunna belysa mina data mer. En medvetenhet om att det existerar kulturella och sociala skillnader i de olika grupperna borde förstärka de resultat jag kommer fram till. Eftersom jag i huvudsak undersöker hur lösningsförslag uppkommer och tas emot i en starkt strukturerad form. Mitt mål är att få fram ett verktyg som möjliggör konstruktioner av diskussioner på ett tydligt sätt som sedan möjliggör vidare analys av till exempel gruppkompositioner, sociala aspekter, ledarroller eller problemuppgifternas inverkan på det hela. Jag vill upptäcka ett verktyg som är användbart och anpassat för sådan forskning.

Min forskning är etiskt sett korrekt. Jag använder mig av material som är insamlat under ett större projektarbete där alla deltagare har informerats och jag håller mig inom ramarna för de överenskommelser som gjordes där. Jag använder mig av fingerade namn och skolornas namn är okända för läsaren. Det enda jag delger läsaren är gruppernas kompositioner angående antal elever, könsfördelning och nationalitet. De personer som kan känna igen personer utgående från min forskning torde vara insatta i VIDEOMAT-projektet. Jag vet inte ens elevernas riktiga namn, eller från vilka skolor de kommer, för det har ingen betydelse för min undersökning eller för mina resultat.

7 Resultatredovisning

I resultatkapitlet presenterar jag delar av de data jag erhållit från mitt material. Elevgrupperna presenteras var för sig och varje presentation inleds med en beskrivning av elevernas kontext, sedan följer i tabellformat en översikt av alla kommentarer som var anknutna till de lösningsförslag som förekom under gruppens diskussioner. Jag presenterar utdrag ur interaktionsflödesschemat där man kan följa diskussioner av vissa lösningsförslag. Till sist presenterar jag en bedömning av nivån av samarbete inom gruppen.

För att stöda intentionsanalysen och göra interaktionsflödesschemat bättre valde jag att först se på elevernas uppfattning av och inställning till lösandet av tändsticksproblemet. Dessa faktorer kallar jag problemlösningssituationens kontext. Kontexten grundar sig i elevernas uppfattning av problemet. Eftersom varje elev har en egen uppfattning av uppgiften har de också en individuell kontext i problemlösningssituationen. Det vill säga varje elev uppfattar situationen på olika sätt även om de alla löser samma problem.

Jag beskriver först den kontext jag uppfattade hos eleverna. Denna kontext användes dels till intentionsanalys, dels till stöd för skapandet av interaktionsflödesschemat. Analys av interaktion är subjektivt och jag hoppas ge min undersökning större tillförlitlighet genom att ge läsaren en möjlighet att se mina bakgrundsresonemang till flödesscheman och hur jag sedan tolkar resultaten.

Efter kontextbeskrivningen följer tabeller där gruppens och varje enskild elevs kommentarer är kategoriserade enligt lösningsförslag. I tabellerna syns också vilken typ av kommentarer som förekom. De olika typerna av kommentarerna är indelade i proaktiva, reaktiva och pro- och reaktiva kommentarer.

Efter kommentartabellerna följer utdrag ur det analyserade materialet där lösningsförslag förekommer. Bilderna av resultaten innehåller interaktionsflödesschemat tillsammans med transkriptioner (det som sägs) och aktioner (det som görs). Genom att strukturera diskussionerna på detta sätt vill jag förmedla resultaten på ett synligt och begripligt sätt för att sedan tillåta en diskussion av de lösningsförslagssituationer som uppstod i grupperna.

Utgående från Sahlbergs och Berrys (2003, s. 42) tabell har jag bedömt nivån av samarbete inom grupperna. Samarbetsnivån presenteras i dessa kapitel och jag

återkommer senare till dessa resultat då jag diskuterar det möjliga sambandet mellan samarbetsnivå och behandling av lösningsförslag. Gemensamt för alla grupper är tändsticksproblemet, och jag kan nämna direkt att den uppgiften visade sig inbjuda till interaktion i alla grupper. Jag beskriver ändå kort mina resonemang i fråga om uppgiften inom varje grupp detta på grund av att uppgiften inte nödvändigtvis erbjuder samma problem till alla grupper.

7.1 Finland

Den finlandssvenska gruppen bestod av tre elever, Anna, Bodil och Casper.

7.1.1 Kontextbeskrivning

Anna:

Även om Annas första kommentar till uppgiften var [11] "Jag hatar tändsticksuppgifter!" var hon först att komma med ett lösningsförslag. [14a] "Mmm, det är ju bara att börja rita!". Utgående från hennes kommentar [11] rörande uppgiftstypen är det inte långsökt att anta att hon är bekant med tändsticksuppgifter från förr. Dessutom kan hon ha tidigare kunskap om lösandet av liknande problem. Anna diskuterade mest tillsammans med Bodil under problemlösningsprocessen, eftersom Bodil också använde sig av att rita som lösningsmetod. Anna verkade dock också till en viss nivå intresserad av Caspers tankar beträffande lösandet av problemet vilket synliggjordes via kommentaren [35] "Jag vill att du förklarar igen" och att hon stannade upp med sitt arbete och lyssnade på Caspers förklaringar. Då läraren hänvisade till Caspers lösningsmetod med kommentaren [82] "I längden så har ju Casper nu då ett snabbare sätt." Svarade Anna [83] "Men det är ingen skillnad hur snabbt det går bara man har rätt svar." Enligt mig var Annas kontext en grad av bekantskap med uppgiftstypen från tidigare, en övertygelse att det går att lösa problemet med den metod hon valde från början och att målet är att få uppgiften löst korrekt även om det existerar andra snabbare metoder.

Bodil:

Bodil hörde Annas förslag [14a] att rita för att lösa problemet och arbetade med den metoden under hela tillfället. Bodils kommentar [21] "Nej det går inte att göra det." var riktad mot Casper och [23] "Nej det är fyra på två stycken, det är ju vid ändorna." riktad mot Anna pekar på en felaktig förståelse av mönstret, som bygger upp uppgiften. Under problemlösningstillfället ignorerade Bodil Caspers lösningsförslag genom att inte lyssna och inte reagera på hans kommentarer kring lösandet av problemet. Dessutom vände hon ryggen till Casper och riktade sina kommentarer endast mot Anna. Bodil verkade också glad över att nå en lösning före Casper, [78] "Ja men vi fick de klart före dig!" och andra sarkastiska svar till Caspers kommentarer tyder på att Bodil inte alls ville arbeta i samma grupp som Casper. Bodil arbetade flitigt hela lektionen med inställningen att det går att nå en lösning genom att rita tändstickor. Kontexten för Bodil tolkar jag som en klar uppfattning av att lösningsmetoden hon valde fungerar, ointresse angående andra lösningsmetoder och en ovilja att samarbeta med Casper.

Casper:

Casper arbetade största delen av tiden ensam. Hans insikt i uppgiftens mönster ($4+3+3+3\dots$) möttes endast en gång av Anna som verkade förstå honom. Hans lösningsförslag att använda division [20a, 20b] "Hej om man delar 73 på fyra delar. Så blir det till varje sida, så här." möttes endast av [21] "Nej det går inte att göra det." av Bodil och [26] "Det är lättare om man börjar rita det!" av Anna. Casper försökte flera gånger få Bodil att inse hur man kan lösa problemet med hjälp av division, vilket syntes via kommentarer som [45b] "Sju gånger tre, sju, sju kvadrater till, sju kvadrater till. Sju kvadrater till!" som var en kommentar då Bodil hade nämnt att hon hade ritat 52 tändstickor redan och sedan fortsatte rita tändsticka för tändsticka. Casper verkade frustrerad över att Bodil antingen vägrade lyssna på honom eller inte förstod hans lösningsmetod. Casper fick dock förklara och förfina sin lösningsmetod med läraren. Kontexten för Casper tolkar jag som en vilja att få sitt lösningsförslag hört och sett, en vilja att arbeta tillsammans, eller i alla fall förstå varandra. Casper föreslog division som räknesätt för att lösa uppgiften, sedan upptäckte han också mönstret i uppgiften. Dessa ledde till slut till en korrekt lösning av problemet.

7.1.2 Kommentarererna och lösningsförslagen som förekom i gruppen

Antalet lösningsförslag som gruppen kom med presenteras och beskrivs kort. I tabellerna framgår både gruppens och de enskilda elevernas typ och antal av kommentarer.

I den finlandssvenska gruppen nämndes tre olika lösningsförslag som diskuterades.

- Lösning av problemet genom att rita en figur, detta förslag refereras härfter till som teckningsförslaget (Tec.). Gruppen diskuterade möjligheten att rita tändstickor för att nå en lösning.
- Lösning av problemet genom användning av division (Div.). Gruppen diskuterade lösning av problemet med hjälp av division. Detta lösningsförslag diskuterades ibland i samband med mönstret i problemuppgiften.
- Utforskande av det upprepande mönstret (Mön.) som förekommer i problemuppgiften. Gruppen upptäckte mönstret som är karakteristiskt för uppgiften. Ifall tre tändstickor läggs till i ändan av raden av tändstickor fås en ny kvadrat. Detta mönster diskuterades också i samband med divisionslösningen.

Tabell 3, kommentarer och lösningsförslag Finland

Kommentarer	Lösningförslag		
	Teckning	Division	Mönster
Proaktiva	17(1)	10	7(1)
Reaktiva	14(1)	5	2
Pro- och reaktiv	17	24(9)	13(1)
Totalt	48(2)	39(9)	22(2)

De kommentarer som är inom parentes i tabell 3 är från diskussionen mellan läraren och Casper och bör därför uppmärksammas. Siffran inom parentesen är

medräknad i antalet kommentarer, till exempel förekom det totalt 17 proaktiva kommentarer beträffande teckningsförslaget, och en av kommentarerna förekom i diskussionen mellan Casper och läraren.

Den finlandssvenska gruppen diskuterade tre olika lösningsförslag. Att lösa problemet genom att rita en figur av tändstickor föreslogs av Anna och diskuterades mest mellan henne och Bodil. Användande av division föreslogs av Casper och försök till diskussion inom gruppen gjordes flera gånger genom inbjudande till diskussion och förklarande. Trots försöken blev Casper tvungen att vidareutveckla lösningsförslaget tillsammans med läraren då Anna och Bodil inte verkade intresserade av Caspers förslag. Mönstret uppmärksammades inom gruppen och bidrog till diskussionerna rörande de två andra lösningsförslagen.

Anna och Bodil valde att rita en figur av tändstickor för att lösa problemet tillsammans, och de kom fram till en lösning av tändsticksproblemet. Även om de arbetade självständigt genom att själva rita figurer skedde samarbete mellan dem genom processbeskrivande kommentarer. De arbetade samtidigt med samma sak och intresserade sig för varandras teckningar. De kontrollerade varandras tändsticksantal och var nöjda med lösningen de kom fram till. Behandlingen av lösningsförslaget skedde alltså mestadels genom utförande av planen som Anna föreslog tidigt under problemlösningstillfället.

Misslyckad kommunikation mellan Casper och de andra i gruppen blev synlig genom interaktionsanalysen. Casper utvecklade sitt lösningsförslag på egen hand då de andra i gruppen inte visade mycket intresse för Caspers förslag. Läraren visade intresse för lösningsförslaget och ledde Casper vidare i hans tankebanor för att få Casper att skriva ner sin lösningsmetod. Lösningsförslaget behandlades inte av gruppen i sig, utan av Casper och läraren. Casper presenterade sin lösning av problemet för gruppen i slutet av problemlösningstillfället, men intresset för hans lösningsförslag var inte stort då heller.

Mönstret uppmärksammades av Casper i diskussionerna och Anna visade intresse för denna insikt i problemets struktur. Casper fick förklara mönstrets egenskaper och Anna verkade förstå den upprepning som sker i tändsticksproblemet.

Diskussionen var relativt kort angående mönstret, men insikten i mönstret gav Casper en möjlighet att utarbeta divisionslösningen.

Elevernas enskilda kommentarer:

Tabell 4, Annas kommentarer

	Anna			
	Tec.	Div.	Mön.	Totalt
Proaktiva kommentarer	4	0	2	6
Reaktiva kommentarer	2	0	1	3
Pro- och reaktiva kommentarer	5	0	3	8
Totala antalet kommentarer	11	0	6	17

Anna diskuterade mest tändsticksfiguren och hon hade mest pro- och reaktiva kommentarer. Annas kommentarantal var lägst i gruppen med 17 av totalt 109.

Tabell 5, Bodils kommentarer

	Bodil			
	Tec.	Div.	Mön.	Totalt
Proaktiva kommentarer	10	0	0	10
Reaktiva kommentarer	9	4	1	14
Pro- och reaktiva kommentarer	11	0	1	12
Totala antalet kommentarer	30	4	2	36

Bodil diskuterade mest teckningsförslaget och hon hade mest reaktiva kommentarer. Bodils kommentarantal var 36 av totalt 109.

Tabell 6, Caspers kommentarer

	Casper			Totalt
	Tec.	Div.	Mön.	
Proaktiva kommentarer	2	9	4	15
Reaktiva kommentarer	2	1	0	3
Pro- och reaktiva kommentarer	1	16	8	25
Totala antalet kommentarer	5	26	12	43

Casper diskuterade mest divisionen som lösningsförslag och hade mest pro- och reaktiva kommentarer. Caspers kommentarantal var högst i gruppen med 43 av totalt 109.

7.1.3 Utvalda lösningsförslag i interaktionsflödesschemat

#	A	B	C	L	Vad som sägs	Vad som görs
14 _a	●	○	○	○	Mmm, det är ju bara att börja rita!	
14 _b	○	○	○	○	Alltså om inte någon kan räkna det här i huvudet, som ingen kan.	Anna vänder sig mot gruppen och börjar rita tändstickor
15	○	○	○	○	Men herregud 73 tändstickor.	
16	○	○	○	○	73 dividerat med 19.	Casper vänder sig mot Bodil och Anna
17 _a	○	○	○	○	Det behövs ju tre eller fyra.	
17 _b	○	○	○	○	Ok jag ritat också.	Anna och Bodil ritat tändstickor, Casper skriver på sitt papper
18 _a	○	○	○	○	Jag får med bil, sen går jag hem.	Casper talar med en annan elev i klassen
18 _b	○	○	○	○	Kom med mig!	
18 _c	○	○	○	○	Du kan komma med oss nog.	
18 _d	○	○	○	○	Voi nä, 34? Heh.	Casper kommenterar Bodils ritande
19 _a	○	○	○	○	Se inte på de här uträkningarna, de är för dåliga för dig.	Anna tittar på Bodils papper
19 _b	○	○	○	○	Hehe, vänta nu.	
20 _a	○	○	○	○	Hej om man delar 73 fyra delar.	Casper vänder sig mot gruppen
20 _b	○	○	○	○	Så blir det till varje sida, så här.	
21	○	○	○	○	Nej det går inte att göra det.	Anna vänder sig mot Casper
22	○	○	○	○	Det går inte för att det är tre på några och fyra på några.	
23	○	○	○	○	Nej Anna det är fyra på två stycken, det är ju vid ändoma.	Bodil vänder sig mot Anna
24	○	○	○	○	Mmm.	Anna ritat vidare
25	○	○	○	○	Oj nä, det är omöjligt att göra det här.	Casper vänder sig mot gruppen
26	○	○	○	○	Det är lättare om man börjar rita det.	Anna fortsätter rita

Figur 2, Annas lösningsförslag [14a] till [26]

I figur 2 synliggörs gruppens första lösningsförslag [14ab] och hur det mottas av gruppen. Anna säger självsäkert att det bara är att börja rita, samtidigt som hon konstaterar att ingen i gruppen klarar av att räkna ut detta i huvudet. Bodil [17b] verkar ta emot lösningsförslaget och börjar använda sig av samma metod för att lösa problemet. Samtidigt kan man också se gruppens andra lösningsförslag [16] uttryckas av Casper utan reaktioner från de andra gruppmedlemmarna. Division föreslås igen av Casper vid [20ab], och de andra gruppmedlemmarna uppmärksammar ett fel i förslaget, och Casper konstaterar till sist att det är omöjligt att göra detta. Anna uppmuntrar honom med att teckningen är enklare att utföra.

#	A	B	C	L	Vad som sägs	Vad som görs
33 _a					Alltså det är bara fyra plus tre plus tre plus tre.	Casper vänder sig mot Bodil
33 _b					Det är fyra! Fyra, fy... alltså se.	
33 _c					Fyra, det är en kvadrat, och sen behöver dom alla bara tre.	Casper pekar och visar på sitt papper åt Bodil
33 _d					Fattar du?	Casper tittar på Bodil och Anna
34					Nä.	Bodil börjar rita på sitt papper igen
35					Jag vill att du förklarar igen.	Anna vänder sig mot Casper
36 _a					Se, se, kato kun minä tulen.	Casper blir glad och visar på sitt papper åt Anna
36 _b					Se, man kan ju göra först en kvadrat med fyra, sen behöver man bara göra tre när det är den där seinän där valmiiks.	
36 _c					Så man kan ta fyra plus, öh.	
37					Det är som fyra, fyra och tre, tre, tre, tre.	Anna gestikulerar med händerna i luften
38					Tre, 63, dividerat med 69.	Casper tittar fundersamt på Anna
39					Det är 73, 72, 71 sådana tre.	Anna gestikulerar med händerna och börjar rita på Bodils papper
40 _a					Nä, men alltså man tar ju fyra minus från 73 för man har lagat alla dit.	Casper lyfter upp sitt papper och pekar på det igen
40 _b					69.	Casper tittar på Bodils papper
40 _c					Bodil det där tar så länge.	Casper tittar på Bodils papper

Figur 3, Caspers lösningsförslag [33] till [40]

I figur 3 kan man se att Casper [33abcd] har upptäckt mönstret i uppgiften och försöker förmedla denna insikt till gruppen. Bodil verkar avvisande och ointresserad [34] medan Anna [35] stannar upp och ber Casper förklara igen.

#	A	B	C	L	Vad som sägs	Vad som görs
42	●	○	○	○	Hej, man kan ju inte laga mera kvadrater än vad man har tändstickor.	Anna börjar arbeta på sitt eget papper igen
43	○	●	○	○	Se Anna, titta, här har vi 52 tändstickor så...	Bodil visar på sitt papper
44	●	○	○	○	Vänta jag skall rita det här.	Anna tittar på Bodils papper och återgår sedan till sitt eget
45a	○	○	●	○	21.	Casper funderar och vänder sig mot Bodil
45b	○	○	●	○	Sju gånger tre, sju, sju kvadrater till, sju kvadrater till. Sju kvadrater till!	Casper hukar sig över Bodils papper och pekar
46	○	○	●	○	Nä.	Bodil lutar sig bakåt
47a	○	○	○	○	Sägs: Jå för se, se när du har lagat 52 man behöver bara laga tre tändstickor till en kvadrat nu. Görs: Casper pekar och svänger på Bodils papper	
47b	○	○	○	○	Fattar du?	
47c	○	○	○	○	Se nu har du lagat 53.	Casper pekar på Bodils papper
48	○	○	○	○	Jag har lagat 55.	Bodil lutar sig tillbaka
49	○	○	○	○	Har du?	
50a	○	○	○	○	Mmm.	
50b	○	○	○	○	Det är 55 tändstickor har jag använt.	
51a	○	○	○	○	Oj nä.	Casper lutar sig bakåt med handen mot pannan
51b	○	○	○	○	Och 73.	Casper vänder sig ut mot klassen
52	○	○	○	○	Nä men det är bara att fortsätta, det är bara att fortsätta, nog går det att fortsätta.	Bodil återgår till ritandet
53	○	○	○	○	18, 18.	Casper tittar på Bodil
54	○	○	○	○	57, 58, 59, 60, 61...	Bodil ritar
55	○	○	○	○	Nä men 18 delat med tre blir sex kvadrater mera.	Casper lutar sig mot Bodil och slår handen i pulpeten
56	○	○	○	○	62, 63, 64, 65, 66, 67.	Bodil ritar
57	○	○	○	○	Voi fattar du inte?	Casper slår i pulpeten
58	○	○	○	○	69, 70.	Bodil ritar vidare
59	○	○	○	○	Ja! Sex kvadrater till!	Casper lutar sig fram mot Bodil
60	○	○	○	○	Sägs: Nu har vi, en, två, tre, fyra, fem, sex, sju, åtta, nio, tio, elva, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24! Det är 24! Läraren vi är klara! Görs: Bodil räknar	
61	○	○	○	○	En, två, tre, fyra, fem, sex, sju...	Anna räknar kvadrater på sitt papper
62	○	○	○	○	Det är 24.	Bodil vänder sig mot Anna
63	○	○	○	○	Ja, fattar du? Det var...	Casper är vänd mot Bodil
64	○	○	○	○	Vänta, jag måste bara, en, två, tre, fyra.	Anna räknar kvadrater på Bodils papper
65	○	○	○	○	Jag skulle ha vetat ett mycket enklare sätt att räkna det här än vad dom gjorde.	Casper vänder sig mot läraren
66	○	○	○	○	Har ni ritat?	Läraren är ur bild
67	○	○	○	○	Jå.	Casper är vänd mot läraren
68	○	○	○	○	Tänk om vi skulle ha frågat efter 250 tändstickor.	Läraren kommer gående mot gruppen
69	○	○	○	○	Ja då skulle det ha varit länge att rita det.	Bodil ser upp mot läraren
70	○	○	○	○	Ja, ni skall höra, lyssna på Casper här. Vad har Casper hittat på för sätt?	Läraren rör Caspers rygg och lutar honom inåt mot gruppen

Figur 4, diskussionen i den finländska gruppen [42] till [70]

Anna verkar efter förklaringen också förstå sig på det upprepande mönstret i uppgiften, men efter kommentaren [42] fortsätter hon sedan med sin lösningsmetod på egen hand. Casper hör Bodils kommentar [43] och räknar sedan ut hur många tändstickor som återstår att skapa fyrkanter med och försöker förmedla denna information till Bodil i kommentar [45ab]. Bodil verkar inte alls vilja förstå Caspers lösningsmetod och ignorerar honom medan hon ritar vidare. Casper [53, 55, 59] försöker flera gånger säga till Bodil att han kan räkna ut hur många kvadrater som ska ritas med hjälp av division och verkar bli upprörd [57, 63, 65] då Bodil ignorerar honom.

7.1.4 Nivå av samarbete

Nivån av den positiva ömsesidiga samhörigheten:

I den finlandssvenska gruppen anser jag att en medelnivå av positiv ömsesidig samhörighet uppnåddes. Anna och Bodil samarbetade mycket tillsammans och jag skulle bedöma deras nivå av samhörighet som hög, Casper hade det inte lika lätt att samarbeta med de andra, dels på grund av att Anna och Bodil inte verkade vilja lyssna på hans lösningsförslag, dels för att de inte förstod Caspers förklaringar när de väl lyssnade på honom. Caspers nivå av samhörighet med gruppen skulle jag därför bedöma som låg. Gruppen får således ett medeltal på en medelnivå av samhörighet.

Det individuella ansvaret:

Vad beträffar det individuella ansvaret inom gruppen anser jag att en medelnivå var synlig. Anna och Bodil arbetade både tillsammans och självständigt med sina lösningar, medan Casper arbetade på egen hand med sitt även om han flera gånger frustrerat försökte förmedla sin lösningsmetod till de andra i gruppen.

De sociala färdigheterna:

Gruppen hade problem med de sociala färdigheterna. Casper kunde inte förklara sitt lösningsförslag för de andra, och de andra ville inte alltid lyssna. Läraren kom till slut in som förmedlare mellan eleverna, och även om alla elever förstod att de nått korrekta lösningar på olika sätt var detta inte viktigt för dem. Anna och Bodil löste problemet på sitt sätt och Casper på sitt. Därför anser jag att gruppen hade en låg nivå av sociala färdigheter.

Uppgifter som inbjuder till interaktion:

Även om en av de första kommentarerna var "Mmm, det är ju bara att börja rita!" visade sig teckningsförslaget vara utmanande, och krävde en stor mängd koncentration från både Anna och Bodil. Även om lösningsförslaget kom tidigt och resulterade i en korrekt lösning var lösningen inte uppenbar. Uppgiften var av hög nivå angående interaktionsinbjudan.

Nivån av samarbete i den finlandssvenska gruppen anser jag ligga på en medelnivå. Gruppen hade som helhet svårt att samarbeta, men Anna och Bodil hade en hög nivå av samarbete under hela problemlösningsprocessen. Casper fick genom diskussion med läraren utveckla sitt lösningsförslag och kunde till sist uppnå en korrekt lösning genom division.

7.2 Sverige

Den svenska gruppen bestod av fyra elever, Dea, Emil, Frank och Gun.

7.2.1 Kontextbeskrivning

Dea:

Dea var den första i gruppen som föreslog en lösningsmetod för problemet. Kommentaren [4] "Vi ritar det!" möttes från Franks håll med [5] "Näee!" och från Emils håll med ett [6] "A-ja." Dea höll dock fast vid sin lösningsmetod och började rita tändstickor för att bilda kvadrater. Lösningsmetoden verkade ändå vara

utmanande, eftersom svaret på lärarens fråga [54] "Vad tyckte ni om den strategin?" var [55] "Jobbigt." från Dea. Dea försökte arbeta med metoden fram tills kommentaren [64] "Men jag kan inte räkna ut det." som var en reaktion på lärarens [62] "Vad är någon annan strategi man kan använda sig av än att rita? Vad säger ni?". När läraren började gå igenom olika lösningsmetoder och kom in på algebra gav Dea till sist upp med sin teckning och strök över allt och rev bort uppgiften från pappret och limmade fast den på ett nytt papper. Dea arbetade mycket på egen hand med sin lösningsmetod, och hon talade mest med Emil och Frank under problemlösningstillfället. Kontexten för Dea skulle jag på basis av det observerade säga var först en positivitet kring hennes lösningsförslag, som resulterade i ett misslyckande och som ledde till att Dea skrev ner lösningsmetoden som läraren gick igenom med klassen. Deas lösningsmetod förkastades då hon kom fram till att hon ritat för många tändstickor [67] "Det vart för många ju.", och istället för att korrigera eller försöka på nytt valde hon att skriva ner lärarens förslag på en lösning. Dea ville lösa problemet.

Emil

Emil började med att läsa uppgiften högt för gruppen och hoppade på Deas lösningsförslag [4] och började rita tändstickor. Franks negativa reaktion på lösningsförslaget [8ab] "Nej, nej, nej, nej. Ska vi rita 73 tändstickor?" fick Emil att radera ut de tändstickor han ritat, och han började rita tändstickor på ett annat systematiskt sätt. Emil jämförde antalet ritade tändstickor med Dea, och blev glad då de båda ritat sju stycken. [15] "En, två, tre, fyr, fem, sex, sju." fick reaktionen [16] "Hej! Har du också gjort sju?". Emil stötte dock på problem med sin teckning och övergav den lösningsmetoden i jakt på en lösning baserad på divisionsräkning. Emils [23ab] "Nej vi gör så att 17 delat på 13 nu. Vi tar 17 delat på 13!" fick reaktionen [29] "Nej, jag gör som Emil!" av Frank och detta resulterade i en orelaterad diskussion om radergummin mellan Emil och Frank. Emil ville också testa att dividera 73 med 13, och att sedan addera 74 med 29. Till slut försökte Emil förstå sig på lärarens lösningsmetod och Dea förklarade varför man skulle dividera med tre istället för fyra. Emils sista kommentar [94] "Ja, ja men jag förstår." sades snabbt och Emil reste sig för att lämna in pappren samtidigt, men det är osäkert om han verkligen förstod lösningsmetoden. Emil kom med förslag under

problemlösningstillfället men fick få reaktioner, vilket kanske ledde till att han inte kunde utveckla sina idéer tillsammans med gruppen. Jag anser att kommunikationen inte var tillräckligt god under problemlösningstillfället för att vidareutveckla Emils tankar rörande problemet. Han ville lösa problemet men kunde inte göra det på egen hand, vilket fick honom att tappa intresset.

Frank

Frank var väldigt negativ till tanken att rita 73 tändstickor och motsatte sig starkt den lösningsmetoden till en början. När både Emil och Dea arbetade med metoden försökte han också rita tändstickor, men då Emil kom med förslaget att använda sig av division förkastade han teckningsmetoden och raderade ut det han ritat. Frank var uppmärksam på de olika lösningsförslagen som uppstod i gruppen och han kom också med ett eget då Emil sade [46] "Du tappar alltid något, du vill ju inte jobba någonting.". Franks [47abc] "Jo. Sjuttiotre delat på fyra. Tror jag." var det enda lösningsförslag som Frank kom med under tillfället, men det var svårt att observera ifall han arbetade vidare med sitt eget förslag. Frank verkar ha lyssnat på lärarens lösningsförslag eftersom han rättade Emil och Dea när Emil trodde att man skulle dividera med fyra. Emils [81] "Nej, delat med fyror" möttes av Franks [82] "Tre var det." och Deas [86] "Fyra var det ju, kolla här." fick reaktionen [87] "Nej." av Frank. Franks motivation att lösa problemet på egen hand tolkar jag som bristfällig, däremot verkade han vilja nå en korrekt lösning genom att lyssna på de andra i gruppen, motsätta sig "jobbiga" lösningar och lyssna på lärarens genomgång av problemet.

Gun

Det är svårt att observera tysta elever som inte syns mycket i kameran. Kameravinkeln över gruppen gjorde att Gun skymdes av Frank, dessutom hade Gun endast två kommentarer under hela tillfället. [52] "Dea!" sades då läraren frågade [51] "Hur många använder sig av den här strategin att man ritar för att komma fram till hur många tändstickor?" samtidigt petade Gun på Dea med en penna för att fånga hennes uppmärksamhet. Den andra kommentaren var [84] "Nej vi tar det, vi tar det Dea säger." då gruppen diskuterade lärarens lösningsförslag och hur gruppen skulle skriva ner det. Kontexten för Gun skulle jag därför tolka som en vilja

att få problemet löst, men samarbetet skedde mest som "sekreterare" och på ett liknande men tystare sätt som Frank. Gun lyssnade på gruppens diskussioner men bidrog inte själv med förslag. Detta betyder att Gun antingen arbetade på egen hand, som "antecknare" och tog åt sig de andras idéer och förslag eller så arbetade hon inte alls. Men eftersom Gun verkade mån om att uppmärksamma Dea om lärarens fråga, och eftersom hon tog Deas parti i diskussionen vill jag ändå tolka det som att Gun ville få problemet löst.

7.2.2 Kommentarererna och lösningsförslagen som förekom i gruppen

Antalet lösningsförslag som gruppen kom med presenteras och beskrivs kort. I tabellerna framgår både gruppens och de enskilda elevernas typ och antal av kommentarer.

I den svenska gruppen nämndes fyra olika lösningsförslag som diskuterades.

- Lösning av problemet genom att rita en figur, detta förslag refereras här efter till som teckningsförslaget (Tec.). Gruppen diskuterade möjligheten att rita tändstickor för att nå en lösning.
- Lösning av problemet genom användning av division (Div.). Gruppen diskuterade lösandet av problemet med hjälp av division. Detta lösningsförslag diskuterades ibland i samband med mönstret i problemuppgiften.
- Addition (Add.) för att nå en lösning. Gruppen diskuterade användandet av addition för att lösa uppgiften, även om additionerna var inkorrekta och inte skulle resultera i en korrekt lösning skedde diskussion kring detta.
- Utforskandet av det upprepande mönstret (Mön.) som förekommer i problemuppgiften. Gruppen upptäckte mönstret som är karakteristiskt för uppgiften, ifall tre tändstickor läggs till i ändan av raden av tändstickor fås en ny kvadrat. Detta mönster diskuterades också i samband med divisionslösningen.

Tabell 7, kommentarer och lösningsförslag Sverige

Kommentarer	Lösningsförslag			
	Teckning	Division	Addition	Mönster
Proaktiva	13(2)	5	4	3
Reaktiva	8(1)	5	2	1
Pro- och reaktiva	14(1)	6	2	2
Totalt	35(4)	16	8	6

Kommentarerna inom parentes tillhör läraren och sades när läraren gick igenom teckningsmetoden för att nå en lösning med klassen.

Den svenska gruppen diskuterade fyra olika lösningsförslag. Dea föreslog att rita tändstickorna för att lösa problemet. Hon fick till en början stöd av Emil angående förslaget men Frank motsatte sig att rita en figur med 73 tändstickor. Division kom upp i diskussionerna kort genom Emil, som föreslog olika divisioner men saknade motiveringar för dem, Frank ville dock försöka sig på divisionen men de verkade inte ha kommit långt med en lösning baserad på division. Emil nämnde också olika additioner, också här utan bakomliggande motiv. Mönstret diskuterades kort av gruppen i slutet av tillfället som en genomgång av det läraren hade sagt.

Teckningsförslaget diskuterades mest med pro- och reaktiva kommentarer, och själva diskussionen bestod mest av hur det gick med teckningen. Diskussionen handlade också om hur svårt det är att rita 73 tändstickor.

Divisionen diskuterades mest med pro- och reaktiva kommentarer, och i början bestod diskussionen av lösryckta förslag om dividerandet utan bakomliggande motiv. I slutet av problemlösningstillfället diskuterade gruppen lösningen som läraren gick igenom med klassen, och där klargjordes en del missuppfattningar.

Diskussionerna beträffande additionen var enbart lösryckta tankar utan bakomliggande motiv och de skulle inte ha lett till en korrekt lösning.

Mönstret diskuterades kort i slutet av tillfället och diskussionen gick enbart ut på att klargöra uppgiftens upprepande mönster av adderande av tändstickor i grupper av tre.

Elevernas enskilda kommentarer:

Tabell 8, Deas kommentarer

	Dea				Totalt
	Tec.	Div.	Add.	Mön.	
Proaktiva kommentarer	6	1	0	2	9
Reaktiva kommentarer	1	0	2	0	3
Pro- och reaktiva kommentarer	5	1	0	1	7
Totala antalet kommentarer	12	2	2	3	19

Dea diskuterade mest teckningsförslaget och hade flest proaktiva kommentarer. Deas kommentarantal var näst högst i gruppen med 19 av totalt 65.

Tabell 9, Emils kommentarer

	Emil				Totalt
	Tec.	Div.	Add.	Mön.	
Proaktiva kommentarer	2	2	4	1	9
Reaktiva kommentarer	2	1	0	1	4
Pro- och reaktiva kommentarer	6	4	2	1	13
Totala antalet kommentarer	10	7	6	3	26

Emil diskuterade mest teckningsförslaget och hade flest pro- och reaktiva kommentarer. Emils kommentarantal var högst med 26 av totalt 65.

Tabell 10, Franks kommentarer

	Frank				Totalt
	Tec.	Div.	Add.	Mön.	
Proaktiva kommentarer	3	1	0	0	4
Reaktiva kommentarer	4	4	0	0	8
Pro- och reaktiva kommentarer	1	1	0	0	2
Totala antalet kommentarer	8	6	0	0	14

Frank diskuterade mest teckningsförslaget och hade flest reaktiva kommentarer. Franks kommentarantal var 14 av totalt 65.

Tabell 11, GUNS kommentarer

	Gun				Totalt
	Tec.	Div.	Add.	Mön.	
Proaktiva kommentarer	0	1	0	0	1
Reaktiva kommentarer	0	0	0	0	0
Pro- och reaktiva kommentarer	1	0	0	0	1
Totala antalet kommentarer	1	1	0	0	2

Gun diskuterade inte mycket, men hon kommenterade både teckningsförslaget och användningen av division en gång var. Guns kommentarantal var lägst i gruppen med 2 av totalt 65.

7.2.3 Utvalda lösningsförslag i interaktionsflödesschemat

#	D	E	F	G	L	Vad som sägs	Vad som görs
1	○	●	○	○	○	I figuren har 13 tändstickor används till att göra fyra kvadrater i en rad	Emil gäspar
2	○	○	●	○	○	Figuren har 13...	Frank inflikar i Emils höga läsand av uppgiften
3	○	○	○	○	○	Sågs: hur många kvadrater i en rad kan man lägga på detta sätt om man använder 73 tändstickor? Görs: Emil fortsätter efter gäsningen	
4	○	○	○	○	○	Vi ritat det!	Dea ser glatt upp mot Emil och Frank
5	○	○	○	○	○	Näee!	Frank ser på Dea
6	○	○	○	○	○	A-ja.	Emil börjar rita tändstickor
7	○	○	○	○	○	Men ja gör det.	Dea börjar rita tändstickor
8 _a	○	○	○	○	○	Nej, nej, nej, nej.	Frank ser fortfarande på Dea
8 _b	○	○	○	○	○	Ska vi rita 73 tändstickor?	
9 _a	○	○	○	○	○	Nej.	Emil slutar rita tändstickor
9 _b	○	○	○	○	○	Man gör så här.	Emil suddar på sitt papper
10	○	○	○	○	○	Ska man rita fyrkanter?	Frank ser frågande på Emil
11	○	○	○	○	○	Nej men så här.	Emil börjar rita igen på pappret
12	○	○	○	○	○	Då, då kommer jag att tänka på tändstickor de e då.	Frank vänder sig mot Emil
13	○	○	○	○	○	Då får du göra det.	Emil ritat
14	○	○	○	○	○	Åhhh (klagande suck)	Frank lutar sig bakåt

Figur 5, Deas lösningsförslag [1] till [14]

Gruppens lösande av problemet börjar med att Emil och Frank högt läser upp uppgiften för gruppen [1,2,3]. Dea är den första att komma med ett lösningsförslag som innebär att de skulle rita de 73 tändstickor som ska användas. Även om Deas förslag till en början bemöts positivt av Emil förkastas ändå lösningsmetoden av både Emil och Frank vid ett senare skede. Frank verkar inte alls intresserad av att rita ut 73 tändstickor, och motsätter sig starkt förslaget, men efter kommentar [14] börjar också han rita tändstickor.

#	D	E	F	G	L	Vad som sägs	Vad som görs
23 _a	○	●	○	○	○	Nej vi gör så att vi tar 17 delat på 13 nu.	Emil har suddat ut det han ritat
23 _b	○	●	○	○	○	Vi tar 17 delat på 13!	Emil vänder sig mot Dea
24	○	○	●	○	○	Näe.	Frank ritat
25	○	●	○	○	○	Hur många tändstickor har du använd nu då?	Emil ser på Dea
26 _a	●	○	○	○	○	Två, två, två.	Dea pekar på sitt papper
26 _b	●	○	○	○	○	Varje sån att om det är två stycken så blir det sju.	Dea vänder sig mot Emil
26 _c	●	○	○	○	○	Tror ja, jag kanske gjort fel!	Dea vänder sig mot Frank
27	○	●	○	○	○	Va? Vad snackar...	Emil ser på Dea
28 _a	●	○	○	○	○	En, två, tre, fyr, fem, sex, sju, en två tre fyr fem sex.	Dea pekar med pennan på sitt papper och räknar
28 _b	●	○	○	○	○	Ah!	Dea suddar på sitt papper
29	○	○	○	○	○	Nej, jag gör som Emil!	Frank börjar sudda

Figur 6, Emils lösningsförslag [23] till [29]

Emil föreslår en lösningsmetod där man skulle använda sig av division [23ab]. Även om förslaget inte skulle leda till en korrekt lösning är det en inbjudan till samarbete från Emils sida. När Emils lösningsförslag inte understöds riktar han sitt intresse till Deas teckning istället. [27] Emil verkar inte förstå Deas förklaringar [26,28] angående hennes lösningsmetod. [29] Frank bestämmer sig till slut att ge upp med att rita tändstickor som lösningsmetod och väljer att använda sig av Emils divisionsförslag. När Emils förslag understöds leder det till en lång diskussion om radergummin mellan Emil och Frank som var helt orelaterad till lösandet av uppgiften.

#	D	E	F	G	L	Vad som sägs	Vad som görs
80	●	○	○	○	○	Var det så här vi skulle göra?	Dea ser på sitt papper
81	○	●	○	○	○	Nej, delat med fyror.	Emil ser upp mot gruppen
82	○	○	●	○	○	Tre var det.	Frank ser upp mot gruppen
83	○	●	○	○	○	Tre?	Emil ser frågande mot Frank, Frank nickar
84	○	○	○	●	○	Nej vi tar det, vi tar det Dea säger.	Gun lutar sig fram mot gruppen
85	○	○	○	○	○	Varför delat på tre?	Emil vänder sig mot Frank och gruppen
86	●	○	○	○	○	Fyra var det ju, kolla här.	Dea vänder sig mot Frank
87	○	○	○	○	○	Nej.	Frank ser på Dea
88	●	○	○	○	○	Det första är fyra, om du ser här, här är det fyra.	Dea pekar och visar på sitt papper
89	○	○	○	○	○	Ja.	
90	○	○	○	○	○	Sen är det ju bara en, två, tre.	Dea visar på pappret
91	○	○	○	○	○	Men den då?	Emil pekar på Deas papper
92	○	○	○	○	○	Ja men den då!	Frank lutar sig fram mot Emil och verkar sarkastisk
93	○	○	○	○	○	En, två, tre. En, två, tre.	Dea pekar och visar på sitt papper
94	○	○	○	○	○	Ja, ja men jag förstår.	Emil lutar sig bakåt och stiger upp

Figur 7, Deas frågande kring lärarens lösningsmetod [80] till [94]

I slutet av problemlösningstillfället efter att läraren gått igenom en lösningsmetod försökte gruppen skriva ner lösningen. Kommentarer tyder på en förvirring beträffande lösningsmetoden. Innan dessa kommentarer hade Dea strukit över allt hon ritat och rivit bort uppgiften från pappret och limmat fast den på ett nytt papper. Dea började alltså om från början och skrev ner lösningen som gick igenom med klassen. [81,83,85] Emil verkar inte förstå varför divisionen ska ske med tre istället för fyra då kvadraterna består av fyra tändstickor. [82,88, 90,93] Frank och Dea verkar förstå sig på det upprepande mönstret i uppgiften och Emil säger till slut att han förstår varför divisionen sker med tre istället för fyra. Gun håller sig till Deas kommentarer och litar på att Deas förståelse för lösningen är korrekt.

7.2.4 Nivå av samarbete

Nivån av den positiva ömsesidiga samhörigheten:

Jag anser att den svenska gruppens nivå av positiv ömsesidig samhörighet var låg. Gruppens gemensamma mål att lösa problemet existerade i början av

problemlösningstillfället genom det tveksamma godkännandet av teckningsförslaget. Men efter att både Emil och Frank övergav teckningsförslaget i jakt på andra möjliga lösningar existerade ingen samhörighet.

Det individuella ansvaret:

Det individuella ansvaret inom gruppen var också på låg nivå. När teckningsförslaget nämndes av läraren reagerade gruppen och lyfte fram Deas arbete, och hon fick presentera hur hon upplevde teckningsförslaget.

De sociala färdigheterna:

Enligt mig saknade gruppen de sociala färdigheter som krävdes för att kunna arbeta tillsammans. Den interaktion som skedde mellan eleverna var till största del klagande över andras lösningsförslag och oförmåga att förklara lösningsförslag. En avsaknad av intresse att vidare utveckla de få lösningsförslag som uppstod.

Uppgifter som inbjuder till interaktion:

Det existerade ingen korrekt eller självklar lösning för gruppen, och det fanns också elever som inte alls bidrog till gemensamt lösande av problemet. Jag anser att uppgiften erbjöd eleverna en blandning mellan en hög nivå och en medelnivå av interaktion, även om slutresultatet var en relativt låg interaktion mellan gruppdeltagarna.

Nivån av samarbete bedömer jag ligga på en låg nivå. Det kan finnas flera orsaker till att gruppen misslyckades med att samarbeta. Förutom de låga nivåerna av de olika elementen kan också tidsbrist vara en bidragande faktor till gruppens prestationer. När läraren började gå igenom problemet med klassen saktade arbetet inom gruppen ner, och det enda egentliga samarbetet som skedde var i slutet av diskussionen när eleverna tog del av lärarens lösning och försökte skriva ner den.

7.3 USA

Den amerikanska gruppen bestod av fyra elever, Heather, Ingrid, John och Kate.

7.3.1 Kontextbeskrivning

Heather

Heather tänkte högt flera gånger under problemlösningstillfället och diskuterade med de andra i gruppen angående lösandet av tändsticksproblemet. Heather lyssnade på Ingrid när hon föreslog att man skulle använda division [3] "I was thinking we divide it." Heather nådde tillsammans med gruppen fram till en lösning genom division. Dessutom förstod Heather sedan Johns lösningsförslag när både John och Ingrid förklarar hur de tänker. Johns lösningsförslag lyftes fram mer under Ingrids och Johns kontextbeskrivningar. Heather visade stor förståelse för problemets struktur och såg också mönstret i problemet. [19] "Yeah but each box is also interconnected to the one. So that'd be three. It'd be like four and three and three and three." Insikten ledde till lösningsförslaget att dividera med tre. Kontexten för Heather tolkar jag som en stark vilja att lösa problemet, en förståelse av problemets struktur och en stor samarbetsvilja. Heather kunde vidareutveckla divisionslösningen och kunde sedan också förstå och vidareutveckla dubbleringslösningen.

Ingrid

Ingrid var först att komma med ett lösningsförslag i gruppen. Kommentaren [3] "I was thinking we divide it." och senare [13] "Could we try to divide it by four?" tyder på en vilja att lösa problemet tillsammans med de andra. Ingrid funderade tillsammans med gruppen under hela tillfället. Detta var också synligt då hon försökte förklara Johns lösningsförslag för Heather. Johns kommentar, som avslutades i mummel, [39] "So what I'm thinking is thirteen is double so twenty six. Just another one here so you're doubling it..." förstods av Ingrid, vilket syns i kommentaren [43abc] "Ok. If you times thirteen by four you get fifty two. Because you could double it.", som var riktad mot Heather. Tillsammans med Heather, som också förstod Johns lösningsförslag, kunde de lösa problemet genom dubbling. Ingrid visade en stark vilja att samarbeta, kom med lösningsförslag, och kunde

förstå de andras tankesätt gällande andra lösningsförslag. Ingrid's kontext tolkar jag därför som en vilja att lösa problemet tillsammans med gruppen. Hon bidrog till gruppen genom uträkningar och genom att vidareutveckla sina tankar genom diskussion.

John

John deltog i diskussionerna då gruppen diskuterade möjligheterna att använda division för att lösa problemet. Han verkade snabbt se mönstret i uppgiften då han inflikade i Heathers kommentar [8] "Well yeah but you can keep on adding boxes of, um, the matches." vilket tyder på att John såg det återkommande mönstret i uppgiften. Heather inflikade i Johns tankar med kommentaren [10] "Yeah you add on three until you get to seventy three." John arbetade med en annan lösningsmetod som bestod av dubbling, han började med att dubblera 13, [39] och kom sedan fram till att en dubbling av tolv fungerade bättre då en av tändstickorna används som ändan på alla kvadrater. [70] "I took one match away and did twelve times two.", han verkade ha nått en lösning genom dubblingsmetoden utgående från kommentaren [83] "Well we each have our own way of doing it." Johns kontext tolkas som en vilja att lösa problemet självständigt eller tillsammans med de andra. Han förklarade sitt lösningsförslag för de andra tillsammans med Ingrid och Heather och verkade nöjd över att alla i gruppen hade sina egna sätt att lösa problemet.

Kate

Av alla elever i USA-gruppen var Kate den som lyssnade mest på de andra och använde sig av de andras lösningsförslag. Hon visade en viss förståelse av problemets uppbyggnad med kommentaren [20] "Actually that match has to go to this box." men hon verkade inte riktigt förstå divisionslösningen när Heather noggrant gick igenom lösningen med henne. Kate förstod inte varför Heather valde att utgå från de fyra kvadraterna som redan fanns vid början av uppgiften. [54] "Where would you get the last four?" och [56] "Yeah but the four boxes." tyder på detta. En av Kates sista kommentarer när de var klara med uppgiften var [82] "So could you explain how we did it?" vilket igen tyder på att hon inte hängde med Heathers förklaringar angående divisionslösningen. Kates kontext tolkar jag som en

vilja att få problemet löst, eftersom hon flera gånger frågade gruppen om hur de nådde lösningarna. Hon kom inte själv med lösningsförslag vilket kunde bero på att Heather ledde många av diskussionerna och Heathers förklaringar inte resulterade i en förståelse hos Kate. Jag anser att Kate inte förstod lösningarnas struktur. Om hon förstod problemet eller inte är svårt att säga, eftersom det jag observerade var en förvirring rörande Heathers lösningsförklaringar.

7.3.2 Kommentarererna samt lösningsförslagen som förekom i gruppen

Antalet lösningsförslag som gruppen kom med presenteras och beskrivs kort. I tabellerna framgår både gruppens och de enskilda elevernas typ och antal av kommentarer.

I gruppen från USA förekom fyra olika lösningsförslag som diskuterades.

- Lösning av problemet genom användning av division (Div.). Gruppen diskuterade lösandet av problemet med hjälp av division. Detta lösningsförslag diskuterades ibland i samband med mönstret i problemuppgiften samt en additionslösning.
- Utforskande av det upprepande mönstret (Mön.) som förekommer i problemuppgiften. Gruppen upptäckte mönstret som är karakteristiskt för uppgiften. Ifall tre tändstickor läggs till i ändan av raden av tändstickor fås en ny kvadrat. Detta mönster diskuterades också i samband med divisionslösningen.
- Addition (Add.) för att dela upp uppgiften och analysera hur många tändstickor som ska läggas till för att uppnå antalet 73 tändstickor. Detta lösningsförslag smalt ihop med divisionsförslaget.
- Dubblering (Dub.) som lösningsmetod diskuterades också i gruppen. Genom att ta bort en tändsticka från de 13 som först användes och sedan dubblera tolv tändstickor ett antal gånger kunde man komma fram till en korrekt lösning.

Tabell 12, kommentarer och lösningsförslag USA

Kommentarer	Lösningsförslag			
	Division	Mönster	Addition	Dubbling
Proaktiva	10	2	2	8
Reaktiva	13	2	2	3
Pro- och reaktiva	30	10	7	8
Totalt	53	14	11	19

Av alla förslag diskuterades divisionsförslaget mest, och de flesta kommentarer var pro- och reaktiva. Divisionsförslaget resulterade i en lösning och tillvägagångssättet presenterades flera gånger inom gruppen. Alla elever förutom Kate verkade förstå divisionslösningen.

Mönsterdiskussionen tog jag upp som en särskild del eftersom den behandlade uppgiftens struktur. Fyra plus tre, plus tre är det upprepande mönstret som existerar i tändsticksproblemet och diskussionen av detta bidrog både till divisionslösningen samt dubbleringslösningen. De flesta kommentarerna var pro- och reaktiva.

Additionsdiskussionen var kort och behandlade enbart en uppdelning av uppgiften. 13 plus 60 är 73 var det som Heather och Ingrid fick ut av diskussionen. Denna kunskap användes i divisionslösningen där eleverna sedan dividerade 60 med tre för att se hur många fler kvadrater som läggs till de redan befintliga fyra.

Dubblingsförslaget var Johns och togs upp i gruppdiskussionerna via mönsterdiskussionen. John arbetade mestadels på egen hand med sin dubblingslösning, men Ingrid försökte sig också på förslaget och kunde sedan med hjälp av Heather nå en korrekt lösning på problemet. Kommentarererna från dubblingsdiskussionerna var mestadels proaktiva och pro- och reaktiva.

Elevernas enskilda kommentarer:

Tabell 13, Heathers kommentarer

	Heather				
	Div.	Mön.	Add.	Dub.	Totalt
Proaktiva kommentarer	4	1	2	1	8
Reaktiva kommentarer	7	0	0	0	7
Pro- och reaktiva kommentarer	20	6	6	4	36
Totala antalet kommentarer	31	7	8	5	51

Heather diskuterade mest divisionen och hade flest pro- och reaktiva kommentarer. Heathers kommentarantal var högst i gruppen med 51 av totalt 97.

Tabell 14, Ingrids kommentarer

	Ingrid				
	Div.	Mön.	Add.	Dub.	Totalt
Proaktiva kommentarer	5	1	0	6	12
Reaktiva kommentarer	3	1	2	3	9
Pro- och reaktiva kommentarer	5	2	1	3	11
Totala antalet kommentarer	13	4	3	12	32

Ingrid diskuterade mest divisionen och hade flest proaktiva kommentarer. Ingrids kommentarantal var näst högst i gruppen med 32 av totalt 97.

Tabell 15, Johns kommentarer

	John				
	Div.	Mön.	Add.	Dub.	Totalt
Proaktiva kommentarer	0	0	0	1	1
Reaktiva kommentarer	0	1	0	0	1
Pro- och reaktiva kommentarer	3	1	0	1	5
Totala antalet kommentarer	3	2	0	2	7

John kommenterade mest divisionen och hade flest pro- och reaktiva kommentarer. Johns kommentarantal var lägst med 7 av totalt 97.

Tabell 16, Kates kommentarer

	Kate				
	Div.	Mön.	Add.	Dub.	Totalt
Proaktiva kommentarer	1	0	0	0	1
Reaktiva kommentarer	3	0	0	0	3
Pro- och reaktiva kommentarer	2	1	0	0	3
Totala antalet kommentarer	6	1	0	0	7

Kate diskuterade mest divisionen och hade flest reaktiva och pro- och reaktiva kommentarer. Kates kommentarantal var lägst med 7 av totalt 97.

7.3.3 Utvalda lösningsförslag i interaktionsflödesschemat

#	H	I	J	K	Vad som sägs	Vad som görs
2a	●	○	○	○	Sägs: How many squares in a row can be made in the same way using seventy three matches? Görs: Alla i gruppen läser uppgiften	
2b	●	○	○	○	Sägs: It's just ah, each square is out of four matches but they are all interconnected so how many matches would it make. Görs: Heather ser på sitt papper och pratar	
3	○	○	○	○	I was thinking we divide it.	Ingrid ser på Heather och pekar på sitt papper
4	●	○	○	○	Sägs: How many, well how many boxes would seventy three matches make if they are made by four? Görs: Heather ser på Kate	
5	○	○	○	○	Oh.	Ingrid nickar och ser på Heather
6	●	○	○	○	So the thirteen equals four...	
7a	○	○	○	○	Sägs: That'd mean that there would be three boxes that were four and just one box that'd be one. Görs: Ingrid gestikulerar med händerna	
7b	○	○	○	○	Because you want to get an even amount.	Ingrid ser på Heather
8	●	○	○	○	Well yeah but you can keep on adding boxes of, um, the matches.	Heather pekar och visar på sitt papper
9	○	○	○	○	Of three.	John ser upp mot Heather
10	○	○	○	○	Yeah you add on three until you get to seventy three.	Heather pekar på sitt papper
11	○	○	○	○	Oh yeah.	Ingrid suddar
12	○	○	○	○	Sägs: And then you count how many boxes you've made out as well, that'd take too long though, heh, using seventy three. Görs: Heather pekar på sitt papper	
13	○	○	○	○	Could we try to divide it by four?	Ingrid ser på Heather
14a	○	○	○	○	I'd say seventy three divided by thirteen.	Heather är vänd mot gruppen
14b	○	○	○	○	But I don't think that'd be correct.	Ingrid börjar rita på sitt papper
15	○	○	○	○	Um, like.	Kate ser på sitt papper
16	○	○	○	○	What if we seventy three.	John ser på sitt papper
17	○	○	○	○	Yeah seventy three divided by four.	
18a	○	○	○	○	Yeah!	
18b	○	○	○	○	Each box would have like.	Ingrid suddar lite på pappret
19a	○	○	○	○	Yeah but each box is also interconnected to the one.	Heather pekar på sitt papper
19b	○	○	○	○	So that'd be three.	
19c	○	○	○	○	It'd be like four and three and three and three.	
20	○	○	○	○	Actually that match has to go to this box.	Kate pekar på Heathers papper
21a	○	○	○	○	Yeah, so like if this was four, then this one would already been used to make.	Heather lutar sig framåt och pekar på sitt papper
21b	○	○	○	○	Let's just do seventy three divided by three and then minus four.	Heather tittar på gruppen och börjar sedan räkna

Figur 8, Ingrid's lösningsförslag [2] till [21]

Diskussionen börjar med att Heather läser uppgiften högt och Ingrid [3] kommer snabbt med förslaget att division kunde användas för att lösa uppgiften. Heather [6] nämner snabbt en ekvation där 13 tändstickor är lika med fyra kvadrater. Ingrid [7] kommenterar att detta skulle innebära att tre av kvadraterna består av fyra och en kvadrat består av endast en tändsticka, eftersom man vill ha ett jämnt antal tändstickor. Heather [8,10] och John [9] märker ett mönster i uppgiften som innebär att man kan lägga till tre tändstickor för att få en komplett kvadrat. Ingrid

[11] märker mönstret då det nämns och Heather konstaterar att det skulle ta länge att lägga till tändstickor för att komma upp till 73. Ingrid [13] föreslår en division med fyra för att komma åt antalet kvadrater som kan göras med 73 tändstickor. Heather [14] föreslår att dividera 73 med 13, men hon lägger snabbt till antagandet att det är inkorrekt. Johns kommentar [16] leder gruppen tillbaka till 73 dividerat med fyra. Heather [19abc] konstaterar att varje kvadrat är sammankopplad och synliggör mönstret som fyra och följt av treor. Detta leder slutgiltigt till att gruppen räknar ut vad 73 dividerat med tre ger för kvot.

#	H	I	J	K	Vad som sägs	Vad som görs
22 _a	○	●	○	○	It's giving me a decimal.	
22 _b	○	●	○	○	You have it yet?	Ingrid ser på Heather
23	○	○	●	○	Sägs: So if we just keep adding three, that'd be twelve divided by, yet we only used one of these, I don't know. Görs: John ser på sitt papper	
24 _a	●	○	○	○	Thirteen plus 60 equals seventy three.	Heather ser på sitt papper
24 _b	●	○	○	○	Oh! I got it.	Heather ser mot gruppen
24 _c	●	○	○	○	It is twenty three.	Heather pekar på sitt papper
25	○	●	○	○	It is?	Ingrid ser på Heather och sen sitt papper
26 _a	●	○	○	○	Sägs: Yeah because thirteen, we already have thirteen there plus sixty equals seventy three and then seventy three and. Görs: Heather visar på sitt papper	
26 _b	●	○	○	○	Sägs: So that'd be sixty divided by four for each box so that'd be twenty, wait how did I get it? Görs: Heather tittar upp mot gruppen och gestikulerar	
26 _c	●	○	○	○	No that'd be sixty divided by...	Heather ser ner på sitt papper och fortsätter gestikulera
27	○	●	○	○	Fifteen.	Ingrid ser på Heathers papper
28	●	○	○	○	Wait a second, yeah let me think about that one.	Heather ser ner på sitt papper
29	○	●	○	○	Because you could just use more matches but you used only thirteen.	Ingrid pekar på sitt papper och ser på Heather
30	●	○	○	○	Well thirteen plus sixty equals seventy three so that'd be thirteen plus sixty more.	Heather ser på Ingrid och pekar på sitt papper
31	○	●	○	○	Wait what did you say thirteen times?	Ingrid ser på Heather och sitt papper
32	●	○	○	○	Thirteen plus sixty is seventy three.	Heather pekar på sitt papper med pennan
33	○	○	○	○	Seventy three.	Ingrid skriver ner på pappret
34	●	○	○	○	Sägs: Yeah and so then that means to this thirteen we'd have to add sixty more three matches. Görs: Heather pekar på sitt papper	
35	○	●	○	○	Squares!	Ingrid ser på Heather
36 _a	●	○	○	○	Sägs: Yeah sixty more squares and each square is made out of three matches connected onto the last one. Görs: Heather ser på Ingrid	
36 _b	●	○	○	○	Sägs: So sixty divided by three is twenty, and twenty plus all the squares we have here is twenty four. Görs: Heather ritat kvadrater i luften	
37	○	●	○	○	Aha!?	Ingrid tittar på Heather
38	●	○	○	○	So then you'd get twenty four as your answer.	Heather tittar på sitt papper

Figur 9, Heathers lösningsförslag [22] till [38]

Ingrid [22] kommer fram till att divisionen de utförde ger ett resultat med en rest av tre. Heather [24] inser att 13 plus 60 är 73, och räknar snabbt i huvudet att

lösningen skulle vara 23 kvadrater. [34] är kommentaren då Heather kommer fram till att addition av 60 tändstickor till i grupper av tre skulle ge en korrekt lösning. Efter en intensiv diskussion kommer Heather [36] fram till att 60 dividerat med tre ger kvoten 20 och det adderat med de fyra kvadrater de redan har skulle ge en lösning med 24 kvadrater. [38] konstaterar Heather att lösningen skulle vara 24 kvadrater.

7.3.4 Nivå av samarbete

Nivån av den positiva ömsesidiga samhörigheten:

Jag anser att en hög nivå av positiv ömsesidig samhörighet uppnåddes. Eleverna utvecklade flera lösningsförslag tillsammans och alla elever kunde vid något tillfälle bidra med kunskap. Även Kate som var mestadels tyst insåg egenskaper hos problemet som bidrog till gruppens diskussioner.

Det individuella ansvaret:

Det individuella ansvaret uppnådde en blandning av hög nivå och medelnivå. De flesta i gruppen hängde med i varandras lösningsförslag, och speciellt Heather var mån om att förklara divisionsmetoden på ett sådant sätt att alla i gruppen skulle förstå hur de hade gått till väga. Kate frågade ändå i slutet av diskussionerna hur de hade löst problemet, och detta tolkar jag som en vilja att förstå problemet, men också som en nyans av individuellt ansvar.

De sociala färdigheterna:

De sociala färdigheterna som var synliga under problemlösningstillfället verkade ligga på en hög nivå. Eleverna verkar vara vana vid att arbeta i små grupper. Huruvida de sociala färdigheterna har övats på förhand kan jag inte uttala mig om.

Uppgifter som inbjuder till interaktion:

Det existerade ingen självklar lösning för gruppen när de inledde arbetet, och alla elever kunde bidra med insikter och kunskap kring problemets uppbyggnad. Därför erbjöd uppgiften en hög nivå av interaktion för den amerikanska gruppen.

Nivån av samarbete för gruppen från USA anser jag ligga på en hög nivå. Gruppen samarbetade flitigt, och även om alla inte bidrog lika mycket var gruppen mån om att alla skulle lösa problemet, även om de var nöjda med att ha löst problemet på sina egna olika sätt.

7.4 Sammanfattning av resultat

Eftersom resultatkapitlet är långt sammanfattas här kort de resultat som tidigare presenterats i kapitlet. Först presenteras antalet lösningsförslag och sedan deras diskussioner. Nivån av samarbete följer och till sist kommer sambandet mellan behandlingen och samarbetsnivån.

7.4.1 Antalet lösningsförslag som förekom

Antalet lösningsförslag sammanfattas här för varje enskild grupp. Grupperna hade liknande förslag för att lösa problemet, men det är viktigt att påpeka att diskussionerna inom grupperna var olika även om förslagen var de samma.

Den finlandssvenska gruppen hade tre olika lösningsförslag som diskuterades. De olika lösningsförslagen var att rita en figur av tändstickor, att använda division som räknesätt för att lösa problemet och att undersöka mönstret i uppgiften.

Den svenska gruppen hade fyra olika lösningsförslag som diskuterades. De olika lösningsförslagen var att rita en figur av tändstickor, att använda division som räknesätt för att lösa problemet, att lösa problemet med hjälp av addition och att undersöka mönstret i uppgiften.

Gruppen från USA hade fyra olika lösningsförslag som diskuterades. De olika lösningsförslagen var att använda division som räknesätt för att lösa problemet, att undersöka mönstret i uppgiften, att lösa problemet med hjälp av addition och att dubblera antalet tändstickor ett antal gånger för att nå en lösning.

7.4.2 Hur mycket förslagen diskuterades

I tabell 3, 4, 5 och 6 framgår den finlandssvenska gruppens kommentarer. Den finlandssvenska gruppen diskuterade teckningsförslaget mest med 48 kommentarer, flest proaktiva och pro- och reaktiva kommentarer (17 st. + 17 st.) och Bodil stod för 30 kommentarer beträffande teckningsförslaget. Divisionen diskuterades näst mest med 39 kommentarer, flest pro- och reaktiva kommentarer (24 st.) och Casper stod för 26st kommentarer av 39 angående divisionen. Minst diskuterades mönstret i uppgiften med 22 kommentarer, flest pro- och reaktiva kommentarer (13 st.) och Casper stod för 12 av de 22 kommentarerna.

I tabellerna 7, 8, 9, 10 och 11 framgår den svenska gruppens kommentarer. Den svenska gruppen diskuterade teckningsförslaget mest med 35 kommentarer, flest pro- och reaktiva kommentarer (14 st.) och Dea stod för 12 kommentarer. Divisionen hade 16 kommentarer varav flest pro- och reaktiva kommentarer (6 st.) och Emil stod för 7 kommentarer angående divisionen. Additionen hade 8 kommentarer varav flest proaktiva kommentarer (4 st.) och Emil hade 6 kommentarer. Mönstret diskuterades minst med endast 6 kommentarer, flest proaktiva kommentarer (3 st.) och Dea samt Emil hade 3 kommentarer var.

I tabellerna 12, 13, 14, 15 och 16 framgår den amerikanska gruppens kommentarer. Gruppen från USA diskuterade divisionen mest med 53 kommentarer, flest pro- och reaktiva kommentarer (30 st.) och Heather stod för 31 av kommentarerna. Dubbleringen diskuterades med 19 kommentarer, flest proaktiva och pro- och reaktiva kommentarer (8 st. + 8 st.) och Ingrid stod för 12 kommentarer. Mönstret diskuterades med 14 kommentarer, flest pro- och reaktiva kommentarer (10 st.)

och Heather stod för 7 av kommentarerna. Additionen diskuterades minst med 11 kommentarer, flest pro- och reaktiva kommentarer (7 st.), och Heather hade flest kommentarer här med 8 av 11 kommentarer rörande additionen.

7.4.3 Nivån av samarbete inom de olika grupperna

Den finlandssvenska gruppen uppnådde en medelnivå av samarbete. Detta på grund av att Anna och Bodil som tillsammans arbetade flitigt uppnådde en hög nivå, men Casper lämnades utanför och intresset för hans lösningsförslag var mycket lågt.

Den svenska gruppen uppnådde en låg samarbetsnivå. Detta på grund av att intresset för Deas lösningsförslag var lågt och hon arbetade ensam med sin lösningsmetod största delen av tiden. Emil kom med många förslag men de bestod av lösryckta tankar som inte behandlades vidare. Frank var negativ till att rita tändstickor och diskuterade inte de andra lösningsförslagen. Gun hade endast två kommentarer under tillfället och de bidrog inte till lösandet av problemet.

Den amerikanska gruppen uppnådde en hög samarbetsnivå. Detta grundar jag på att alla elevers förslag beaktades, deras tankar vidareutvecklades tillsammans och gruppen var mån om att alla skulle förstå och lösa problemet. Även om de hade olika sätt att lösa problemet konstaterades detta som positivt.

7.4.4 Samband mellan samarbetet och lösningsförslagets behandling

Tabell 17, de mest diskuterade lösningsförslagen

Grupp	Lösningsförslag	Kommentarer				Samarbetsnivå	Ledde till lösning
	Mest diskuterat lösningsförslag	Proaktiva	Reaktiva	Pro- och reaktiva	Totalt		
Finland	Teckning	17(1)	14(1)	17	48(2)	Medel	Ja
Sverige	Teckning	13(2)	8(1)	14(1)	35(4)	Låg	Nej
USA	Division	10	13	30	53	Hög	Ja

Kommentarerna inom parenteser är från diskussioner med lärarna, och har därför uppmärksamats eftersom de inte direkt hör till gruppens diskussioner. Parenteskommentarerna är medräknade i det hela talet. Till exempel i den finlandssvenska gruppen är antalet proaktiva kommentarer beträffande teckningsförslaget totalt sett 17, men en av kommentarerna hör till diskussion med läraren. Gruppen har således 16 proaktiva kommentarer inom gruppens egna diskussioner.

Jag valde att undersöka sambandet mellan samarbetsnivån och behandlingen av lösningsförslagen genom att se på de mest diskuterade lösningsförslagen inom grupperna. Motiveringen bakom att se på de mest diskuterade lösningsförslagen var att dessa diskussioner ledde till en lösning eller kom nära en lösning. Det kunde vara motiverat att se på fler lösningsförslag och behandlingen av dessa för att undersöka sambandet mellan samarbete och behandling. De samband jag hittade framkommer i de mest diskuterade lösningsförslagen.

Teckningsförslaget diskuterades på liknande sätt i den finlandssvenska och svenska gruppen, enligt fördelningen av kommentartyperna. Flest pro- och reaktiva kommentarer följt av proaktiva kommentarer, och minst reaktiva kommentarer. Den finlandssvenska gruppen diskuterade lösningsförslaget mer än den svenska gruppen. Dessutom kom den finlandssvenska gruppen fram till en lösning, medan den svenska gruppen endast kom nära en lösning. Diskussionerna om teckningsförslaget var också liknande hos de båda grupperna, där kommentarerna till största del bestod av processbeskrivningar. Kommentarer som högt räknade av

tändstickor eller frågande om hur långt elever kommit med sin teckning förekom också. I den svenska gruppen fanns mer motstånd mot lösningsförslaget där några av de reaktiva kommentarerna var sådana som motsatte sig teckningsförslaget. Dea arbetade länge med att rita tändstickor och kom nära en lösning, men när läraren började gå igenom en algebraisk lösningsmetod förkastade Dea sin ofärdiga lösning och valde att skriva av lärarens förslag. I den finlandssvenska gruppen fanns inga sådana kommentarer, men däremot var det endast Anna och Bodil som valde att rita tändstickor. Bodil hade flest kommentarer, och de flesta av hennes kommentarer var processbeskrivande med högt uppräknande av antalet tändstickor.

I den amerikanska gruppen var majoriteten av kommentarerna angående divisionsförslaget pro- och reaktiva, och en lösning uppnåddes. Divisionsförslaget diskuterades mest av Heather och Ingrid, där Heather stod för flest kommentarer. Heather tänkte högt och förklarade processen och hennes kommentarer var mestadels detta. Heather var mån om de andra elevernas uppfattning av problemlösningsprocessen och ville att alla skulle förstå hur de hade gått till väga för att nå lösningen.

8 Avslutande diskussion

I detta kapitel diskuterar jag resultaten från min undersökning och relaterar dem till den teori jag tidigare gick igenom i min avhandling. Jag diskuterar även valet av interaktionsflödesschema som metod för min undersökning samt belyser för- och nackdelar med metoden. Till sist ger jag förslag på vidare forskning inom ämnesområdet.

8.1 Resultatdiskussion

8.1.1 Hur behandlades lösningsförslagen?

I tabellerna jag presenterade i de föregående kapitlen synliggjordes både hela gruppens och de enskilda elevernas kommentarer. Transkriptionerna av de observerade problemlösningstillfällena tillsammans med tabellerna ska ge en tydlig bild av hur lösningsförslagen behandlades.

Kommentartypen som förekom mest inom den finlandssvenska gruppen var pro- och reaktiv, kommentarerna var av en förklarande natur. Processbeskrivning av teckningen, uppmärksammande och förklarande beträffande divisionsförslaget samt en diskussion om det upprepande mönstret i uppgiften.

Kommentartyperna som förekom mest inom den svenska gruppen var proaktiva och pro- och reaktiva, kommentarerna var mest frågande och beskrivande. Ingen diskussion hölls egentligen om tillvägagångssätten att lösa problemet, istället förekom många lösryckta tankar och en del processbeskrivning angående teckningsförslaget.

Kommentartypen som förekom mest inom den amerikanska gruppen var pro- och reaktiv. Många förklarande kommentarer och beskrivande kommentarer var synliga och förslag från olika elever togs i beaktande både när divisionslösningen och dubbleringslösningen utformades.

Sahlberg och Berry (2003, s. 43) refererar till en undersökning¹⁰, där vikten av god kommunikation och speciellt kvalitén av interaktion är essentiell för samarbetsinlärning. Inga samarbetsinlärningsmetoder förväntar sig av elever att uppnå nyttiga resultat enbart genom att bli satta i grupp. Sahlberg och Berry (2003, s. 43–44) fortsätter med en lista, som de inte anser vara fullständig, bestående av tre viktiga punkter som måste tas i beaktande när lärare vill uppnå produktiva mindre grupparbeten. Den första punkten poängterar träning av att lära tillsammans. Andra punkten tar upp lärare och elevers nya roller i klassrummet, där lärarens roll ska vara uppmuntrande till samarbete och eleven ska ta ansvar för sitt lärande och sitt beteende. Den sista punkten behandlar lärares behov av träning i hantering av samarbets- och sociala inlärningsmiljöer.

Att eleverna lyssnande på varandra märktes tydligt i de pro- och reaktiva kommentarerna. Eleverna beaktade varandras kommentarer då de vidareutvecklade sina tankar eller förklarade sina egna tankar för andra. God kommunikation och en hög kvalitet av interaktion verkar återspeglas i den pro- och reaktiva kommentartypen.

Resultaten angående behandlingen av de lösningsförslag som uppstod i de olika grupperna måste jämföras med den förväntning lärarna hade på sina grupper. I alla grupper uppmuntrades samarbete. Eleverna skulle tillsammans lösa problemet och ta del av varandras lösningar och alla skulle förstå hur gruppen hade gått till väga för att lösa problemet. Dessa förväntningar uppnåddes inte i alla grupper. Den svenska gruppen lyckades inte lösa problemet, och samarbetsnivån var låg. Den finlandssvenska gruppens samarbetsnivå ansågs ligga på en medelnivå, men detta på grund av att samarbetet mellan Anna och Bodil ansågs vara högt och Casper lämnades utanför. I den finlandssvenska gruppen existerade inte intresse för flera lösningsförslag, en lösningsmetod var tillräcklig enligt Anna. I gruppen från USA ansågs nivån av samarbete vara hög, gruppen var mån om att lösa problemet och intresset för de olika lösningsförslagen var synligt. Kate som inte förstod gruppens

¹⁰ Battisch, V., Solomon, D. & Delucchi, K. (1993). Interaction processes and student outcomes in cooperative learning groups. *Elementary School Journal*, 94(1), 19–32.

tillvägagångssätt erbjöds många förklaringar kring både divisionsförslaget och dubbleringsmetoden.

Det didaktiska kontraktet mellan eleverna och läraren i de olika grupperna kan anses ha blivit synligt utgående från de resultat som erhålls vad beträffar behandlingen av lösningsförslagen. Även om det didaktiska kontraktet, eller de sociomatematiska normerna först anses bli tydliga under en längre observationstid anser jag att mina tolkningar är viktiga eftersom de ger en första uppfattning av de didaktiska kontrakt som existerar i dessa grupper. Jag kan dock omöjligt påstå att det jag observerat ger mig en komplett uppfattning av de didaktiska kontrakt som råder inom grupperna eller klassrummen.

I den finlandssvenska gruppen ansågs det att en lösning var tillräcklig, även om läraren uppmuntrade till samarbete och bad eleverna att visa intresse för flera lösningsförslag. Eleverna i denna grupp kanske är vana med att en lösning räcker, problemet är inte längre ett problem när man erhållit ett svar. Läraren poängterade för gruppen att båda sätten löser problemet och att Caspers lösningsmetod kan anpassas till större problem av samma typ, men varken Anna eller Bodil verkade intresserade av detta.

I den svenska gruppen, som misslyckades med att lösa problemet och misslyckades med att samarbeta, kan man anta att arbets sättet var ovanligt. Eleverna kanske inte var vana att bli satta i en sådan situation, eller så var problemet för svårt för eleverna. Eleverna visade missnöje till läraren och accepterade att bara kopiera lärarens lösning när genomgången av uppgiften påbörjades. Man kan spekulera att mera tid för gruppens arbete kunde ha resulterat i en lösning, eller att handledning från läraren innan en genomgång påbörjades kunde ha underlättat gruppens arbete.

I den amerikanska gruppen uppnåddes två olika lösningar som båda förklarades inom gruppen av eleverna, dessutom var speciellt Heather mån om hela gruppens förståelse av både problemet och lösningsmetoderna som användes. Sättet eleverna arbetade på, och hur snabbt de började samarbeta och lyssna på varandra anser jag tyda på en vana av denna sort av arbetsmetod, det didaktiska kontraktet

verkar inte ha brutits och blev på så vis inte heller lika synligt som i de andra grupperna.

Kilhamn (2011, s. 127–129) anser att en studie över en längre tidsperiod krävs för att synliggöra de sociomatematiska normerna som existerar i en grupp eller ett klassrum, och jag håller med henne. Mina spekulationer vad beträffar elevernas reaktioner är vaga, men ändå viktiga. Som utomstående observatör är detta vad jag ser hos grupperna. Detta är min första uppfattning av gruppernas prestationer, och som ny lärare skulle jag utgå från detta ifall jag skulle undervisa eleverna. Jag anser inte att det är långsökt att påstå att en lärare som haft sin klass en längre tid skulle ha mer insikt i elevernas förmågor än vad jag har, därför anser jag att en undersökning av denna typ utförd av klassläraren kunde ge mer information om elevernas behov. Problem som en klasslärare kan ha med denna typ av undersökning, är att hålla objektiv syn på elevernas arbete och inte låta tidigare åsikter påverka resultaten för mycket.

8.1.2 Samband mellan samarbetsnivån och behandlingen av lösningsförslag?

Att dra slutsatser om sambandet mellan samarbetet och lösningsförslagets behandling är svårt, men det som framkom i undersökningen var att en grupp som är mån om alla elevers förståelse av problemlösningsprocessen använder sig mer av pro- och reaktiva kommentartyper. Förklarande kommentarer reagerar på det som blivit sagt tidigare och leder diskussionen vidare med proaktiva kommentarer. Förklaringarna är ofta långa och genom de reaktiva inslagen försöker förklararen vara så tydlig som möjligt då hen förknippar nya kommentarer med sådant som tidigare blivit sagt. Eleverna lyssnar på varandra och reagerar på varandras kommentarer.

Att lyssna på varandra och beakta varandras idéer och förslag är ett mål i den nya läroplanen (Utbildningsstyrelsen, 2014, s. 155). Det är dessutom ett kriterium för gott samarbete enligt Sahlberg och Berry (2003, s. 35–39) där tre av de fyra

elementen, nämligen *positiv ömsesidig samhörighet, individuellt ansvar* och *sociala färdigheter, behandlar* och påpekar detta. Samarbete är dock inte kopplat endast till pro- och reaktiva kommentarer, samarbete kan också ses genom proaktiva eller reaktiva kommentarer men lyssnande och beaktande syns tydligare i de pro- och reaktiva kommentarerna.

Som lärare vill man kanske uppmuntra denna typ av kommentarer, och detta kunde ske genom träning av *sociala färdigheter*. Att verkligen lyssna och beakta andra elever i gruppen är ett kriterium för samarbete, men motivationen att göra detta ligger i den *positiva ömsesidiga samhörigheten* och det *individuella ansvaret*. Elever som inte känner att deras eller de andra elevernas arbete är viktigt för gruppens prestationer kan inte uppnå samarbete.

Samarbete kan ske i en grupp utan att alla elever deltar i varje lösningsförslag, samarbete mellan två elever vad beträffar ett lösningsförslag räknas därför som ett samarbete inom gruppen även resterande elever inte deltar lika aktivt i lösningsförslagets diskussioner. Förklarandet av lösningsprocessen åt resten av gruppen efter att två elever nått en lösning kan också ses som samarbete i den formen att eleverna är måna om varandras förståelse, detta kunde ses i gruppen från USA. Motsatsen till detta kunde ses i den finlandssvenska gruppen där Anna och Bodil diskuterade sitt lösningsförslag, och Casper fick diskutera med läraren för att nå sitt lösningsförslag. Casper förklarade sin lösningsprocess åt gruppen efter att han hade nått en lösning men gruppen var inte intresserade av olika sätt att lösa problemet, det räckte med en lösningsmetod enligt Anna och Bodil.

Hur man som lärare kan fortsätta diskussionerna efter att lösningar blivit nådda är en utmaning. Den reflekterande processen som borde ta plats efter att ett problem blivit löst blir ofta bortglömd (Björkqvist, 2001, s. 121, 125; Bleiler, Thompson & Krajčevski, 2014, s. 106). Lösningen, eller produkten är viktigare än processen för många elever även om det är i processen där inläring tar plats. Bergsten (2006, s. 166–167) påpekar att en problemuppgift inte upplevs som ett problem för de elever som redan är medvetna om problemets egenskaper. Fokus ligger istället på sökandet efter lösningen än på själva lösningsprocessen. Denna uppfattning anser

jag kan ligga som bakgrund när elever inte är lika intresserade av flera olika sätt att lösa ett problem när de redan löst det på ett sätt. Björkqvist (2001, s. 118) påpekar samma sak, varje elev borde vara omedveten om möjliga lösningar när problemet introduceras till gruppen. Även om föregående kommentar behandlar lösandet av ett nytt problem kan det också tillämpas på reflektion av ett gammalt problem. Problemet är inte längre ett problem och saknar därför den mystik som ett olöst problem har. Här måste läraren motivera eleverna att hitta flera lösningar, och påpeka att målet inte enbart är att lösa problemet, utan att förstå problemet egenskaper och se flera lösningsmetoder som givande. Produkten, lösningen, ska inte vara målet då flera olika processer leder till samma produkt, enligt mig är det processerna som ska vara det intressanta i detta fall.

8.2 Metoddiskussion

Analys av videomaterial är en tidskrävande forskningsmetod, och en strukturerad observation möjliggör för mig som forskare att lyfta fram de intressepunkter som jag vill analysera. Att utgå från helheten av situationen och sedan lyfta fram de delar som är intressanta leder mig från en ostrukturerad till en strukturerad observation. Ryve (2006, s. 203) ansåg i sin undersökning där han analyserade gruppdiskussioner användandes av interaktionsschema med kontextualisering följande:

That is, the introduction of contextualizations makes the analyses of the transcripts and the construction of the interactive flowcharts more explicit, which is beneficial in at least two ways. First, it offers the researcher an opportunity to scrutinize his or her own arguments for the interpretations of the students' immediate intentions. Second, it gives the reader of the paper opportunities to form an opinion of the presented interpretations and the underlying argumentation supporting these interpretations. (Ryve, 2006, s. 203.)

Jag håller med Ryve (2006) och anser att kontextualiseringen innan interaktionsanalysen gav inte bara mig som forskare en möjlighet att ifrågasätta

mina tolkningar, utan de utgör även en grund för läsaren att forma egna tankar om både materialet om mina tolkningar av materialet. Interaktionsanalysen möjliggjorde en tydlig strukturering av de transkriptioner jag erhöll från videomaterialet, samtidigt som den utgjorde grunden för en vidare analys av hur lösningsförslagen behandlades. Genom att tydligt lyfta fram hur många kommentarer som var relaterade till lösningsförslagen, och hur många kommentarer som varje elev hade känner jag att jag kunde förtydliga min tolkning av samarbetet som tog plats under problemlösningstillfällena. Detta förtydligande ger en inblick i mina tolkningar, och jag hoppas att det skapar en grund för förståelse av mina analyser. Genom att förtydliga och motivera alla tolkningar jag gjorde hoppas jag uppnå en stark reliabilitet.

Sfard och Kieran (2001, s. 60) påpekar att denna typ av analys är oberoende av uppgiftens innehåll, den fokuserar på det som sker mellan eleverna. Detta innebär att metoden går att använda i alla typer av problemlösningssituationer, den är inte enbart användbar inom matematiska sammanhang. Det går också att använda sig av metoden inom andra sammanhang än problemlösning, alla typer av diskussioner går att kartlägga med denna metod, men för att ha nytta av metoden måste man veta vad det är man vill lyfta fram och undersöka.

Svagheter rörande metoden är att det är en mycket tidskrävande metod då det är viktigt att se på varje kommentar som en del av helheten samtidigt som man inte får övertolka elevernas kommentarer. Varje kommentar ska analyseras enskilt i beaktande till helheten, och detta tar tid. Med en tydlig kontextualisering kan intentionsanalysen ske med större reliabilitet. Risken finns att forskaren börjar tolka elevernas bakomliggande känslor, och således kan onödiga tolkningar förekomma. Att hålla sig så objektiv som möjligt är ytterst viktigt eftersom metoden är subjektiv till sin natur. Genom tydlig presentation av kontextualiseringen, och en konstant synvinkel på elevernas kommentarer kan man presentera materialet med tolkningar på en sådan nivå att läsaren bättre kan förstå forskarens antaganden och tolkningar.

8.2.1 Förbättring av interaktionsflödesscheman

Presentationen av resultaten var en viktig del av min undersökning eftersom en så tydlig presentation som möjligt stärker reliabiliteten. I de artiklar¹¹ som jag använde mig av i den här undersökningen, där flödesscheman används, upplevde jag ett problem. Transkriptioner av diskussionerna presenteras ofta först, och efter det presenteras interaktionsflödesschemat, detta resulterar i att man som läsare måste bläddra mellan olika sidor ifall man vill tolka interaktionsschemat, såvida man inte då memorerat varje enskild kommentar på förhand, vilket är svårt om inte omöjligt. Jag vidareutvecklade interaktionsflödesschemat i min undersökning genom att presentera flödesschemat tillsammans med de transkriberade kommentarerna och det som utfördes i gruppen. Detta anser jag ger läsaren vidare möjligheter att förstå både materialet och mina tolkningar.

Interaktionsflödesscheman gjorda med hjälp av intentionsanalyser med kontextualisering anser jag vara en av de tydligaste metoder som finns för att lyfta fram olika delar av grupparbeten som ligger i intresse. Denna metod önskar jag finslipa och vidare utveckla till ett enklare verktyg som kunde vara tillämpbart vid bedömning av grupparbetsprocesser. Ett exempel på vidare utveckling av detta system kunde vara ett införande av färgkodning i flödesschemat som korresponderar med de tabeller där lösningsförslagets kommentarer presenteras. Nedan följer en figur där kommentarer relaterade till divisionsförslaget markerats med rött, och kommentarer relaterade till teckningsförslaget är markerade med grönt.

¹¹ Se Referenser: Ryve, A. (2006). och Sfard, A., & Kieran, C. (2001).

#	D	E	F	G	L	Vad som sägs	Vad som görs
23 _a	○	●	○	○	○	Nej vi gör så att vi tar 17 delat på 13 nu.	Emil har suddat ut det han ritat
23 _b	○	●	○	○	○	Vi tar 17 delat på 13!	Emil vänder sig mot Dea
24	○	○	●	○	○	Näe.	Frank ritat
25	○	○	○	○	○	Hur många tändstickor har du använd nu då?	Emil ser på Dea
26 _a	●	○	○	○	○	Två, två, två.	Dea pekar på sitt papper
26 _b	●	○	○	○	○	Varje sån att om det är två stycken så blir det sju.	Dea vänder sig mot Emil
26 _c	●	○	○	○	○	Tror ja, jag kanske gjort fel!	Dea vänder sig mot Frank
27	○	○	○	○	○	Va? Vad snackar...	Emil ser på Dea
28 _a	●	○	○	○	○	En, två, tre, fyr, fem, sex, sju, en två tre fyr fem sex.	Dea pekar med pennan på sitt papper och räknar
28 _b	●	○	○	○	○	Ah!	Dea suddar på sitt papper
29	○	○	○	○	○	Nej, jag gör som Emil!	Frank börjar suddat

Figur 10, färgkodning införd i flödesschemat från den svenska gruppens diskussioner

Man kunde införa en beskrivning av färgernas betydelse direkt i figuren, men eftersom figuren ändå presenteras med beskrivande text anser jag att färgernas betydelse kan förklaras i den löpande texten istället. Problem som kan förekomma här är hur man ska ta färgblinda läsare i beaktande. Färger som rött och grönt kanske ska undvikas, eller i alla fall inte användas nära varandra. Jag upplever att införande av färgkodning i flödesschemat skulle förbättra presentation av resultat.

8.3 Didaktiska implikationer

Utvecklandet av funktionella verktyg som kan användas av lärare för att bedöma processen under ett grupparbete anser jag vara viktigt inte bara för att ge eleverna ett rättvist betyg, utan för att ge läraren en syn in i de grupparbetessituationer som verkligen tar plats i klassrummet. Med teoretiskt stöd genom forskning kan man med större säkerhet nå ett smidigt sätt att bedöma grupparbetsprestationer, och detta anser jag vara en essentiell del för att få in mer grupparbeten i skolorna. Grupparbeten fungerar sällan, och de grupparbetessituationer som sker i klassrummet bedöms sällan, istället bedöms de gemensamma produkterna eller

prestationerna. Jag anser att man också borde bedöma processerna för att kunna förbättra elevernas samarbete i grupparbeten.

Med tanke på den nya läroplanen (Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen, 2014) som förespråkar samarbete i problemlösning borde lärarens fokus i klassrummet också riktas mot de processer som kommer att äga rum i formen av grupp och pararbeten. Kanske kunde bedömning av vilka kompetenser som enskilda elever behöver träna ske genom videoobservation och interaktionsanalys? Även om det är en mycket tidskrävande process är materialet man kan komma åt mycket stort, och min åsikt är att de insikter man som lärare eller forskare kan få ut av en undersökning av denna typ är värt mödan.

I min undersökning fick jag insikter i elevernas sociala kompetenser, deras samarbetsnivå och deras tanke sätt. Samtidigt fick jag se hur de olika eleverna arbetade och hur de bidrog till lösandet av problemuppgiften.

Vad beträffar problemlösning i grupp i klassrum anser jag att lärare ska uppmuntra sökandet efter flera lösningar, och att fokus ska ligga på lösandet av problemet och inte på lösningen. Ju fler lösningsmetoder som uppkommer desto bättre. Flera lösningsmetoder ger en bättre uppfattning av problemet och borde även förbereda elever bättre inför kommande problem av liknande natur. Processreflektion, den viktiga delen som ofta blir bortglömd, sker inte av sig själv när eleverna är omedvetna om nyttan av reflekterandet. Enligt Sahlberg och Berry (2003, s. 69) kan problemlösning i grupp utveckla elevers sociala färdigheter samtidigt som matematiken blir direkt användbar i problemlösningssituationer.

Som Björkqvist (2001, s. 123) påstår förväntas de forskningsresultat man erhåller när man undersöker utformandet av lösningsstrategier vara direkt tillämpbara i undervisningen. Förväntningen att ha nytta i mitt framtida arbete som lärare av en undersökning av denna typ existerar även hos mig. Jag anser också att detta arbete har påverkat min syn på inläring i problemlösningssituationer. Björkqvist fortsätter i sin artikel med att säga att även om de ledtrådar som kan leda till en förbättring av elevernas problemlösning förmåga är magra är de inte oväsentliga. Sökande efter

undervisningsmetoder som stöder elevernas förstärkande av och utvecklande av effektiva tankemönster anses befogat.

Detta arbete har gett mig åsikter om instruerande, samarbetsinlärning och bedömning av gruppprocesser som jag anser kommer att vara till nytta i mitt framtida arbete.

8.4 Förslag på vidare forskning

Jag anser att vidare forskning kunde utföras med användandet av intentionsanalys och kontextualisering, delvis för att ta reda på viktiga frågor som ställs kring delar av undervisning, men också för att förfina de verktyg som krävs för att göra detta. Observationsscheman där elevernas individuella kontext och samarbetsförsök beaktas, och där elevernas enskilda arbete och gruppens samarbete synliggörs, borde ge insikter i vilka kompetenspunkter eller sociala färdigheter som krävs för ett lyckat samarbete. Eftersom varje uppgift tolkas individuellt måste också kontexten analyseras individuellt för varje elev varje gång för att nå en korrekt bedömning. Att utveckla verktyg som stöder lärares bedömning av grupparbeten, och som framför allt gör bedömningen mer tidseffektiv ligger i mitt intresse. Videoobservation är inte tidskrävande för eleverna, men för forskaren eller läraren kan en osystematisk observation ta lång tid att genomföra. En strukturerad observation med ett bestämt fokusområde kunde med hjälp av ett tillförlitligt verktyg ge läraren möjligheten att bedöma processerna i grupparbeten och samtidigt ge en insikt i elevernas sociala kompetenser. Observation är en tidskrävande process för forskaren eller läraren, men provrättning eller genomgång av essäer kräver också tid.

Vidare forskning inom gruppdynamik, samarbetsinlärning och metoder för att främja samarbete i klassrummet existerar redan och utvecklas inom flera ämnen i grundskolan. Som rekommendation för framtida studerande som läser detta arbete vill jag lyfta fram grupparbeten och alla de dimensioner som existerar inom det

begreppet. Denna magisteravhandling, tillsammans med min kandidatavhandling, har format mig som lärare och gett mig åtskilliga inspirationsmoment inför framtida arbeten i klassrum. Även om en avhandling aldrig skulle läsas av någon annan än handledaren, och även om alla rekommenderar att man ska välja något som intresserar en, så anser jag att det också är viktigt att det man väljer på något sätt behandlar undervisningstekniker. På så vis går man inte tomhänt vidare från detta otroligt krävande arbete.

Framtida forskningsfrågor kunde vara:

- Vad är lärares åsikter angående bedömning av grupparbetsprocesser?
- Hur kan bedömning av grupparbetsprocesser utvecklas och effektiviseras för användning i undervisning?
- Påverkar elevers popularitet grupparbete och samarbete?

Referenser

Allärs – Allmän tesauros på svenska. [u.å.] *Validering*. Hämtad 18 mars 2016, från <https://finto.fi/allars/sv/page/Y38437>

Bell, J. (2006). *Introduktion till forskningsmetodik*. Lund: Studentlitteratur

Bergsten, C. (2006). En kommentar till den matematiska problemlösningens didaktik. I: L. Häggblom, L. Burman & A-S. Røj-Lindberg (Red.), *Kunskapens och lärandets villkor* (s. 165–176). Vasa: Pedagogiska Fakulteten, Åbo Akademi

Bishop, A.J. (1985). The social construction of meaning: A significant development for mathematics education? *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 24–28.

Björkqvist, O. (2001). Matematisk problemlösning. I: B. Grevholm (Red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* (s. 115–132). Lund: Studentlitteratur.

Bleiler, S. K., Thompson, D. R., & Krajčevski, M. (2014). Providing written feedback on students' mathematical arguments: proof validations of prospective secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(2), 105–127. Doi: 10.1007/s10857-013-9248-1

Blomhøj, M. (1994). Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare [Elektronisk version]. *Nämnaaren*, 4(4), 36–43. http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/3645_94_4.pdf

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Cohen, E. (1994). *Designing Groupwork – Strategies for the Heterogeneous Classroom*. New York: Teachers College Press.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common core state standards for mathematics* [Elektronisk version]. Hämtad 20 november 2014, från http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

Denscombe, M. (2009). *Forskningshandboken. För småskaliga forskningsprojekt inom samhällsvetenskaperna*. Lund: Studentlitteratur.

- Einarsson, C., & Hammar Chiriac, E. (2002). *Gruppobservationer. Teori och Praktik*. Lund: Studentlitteratur
- Engström, A. (1998). Konstruktivismen – några reflektioner. I A. Engström (Red.), *Matematik och reflektion – En introduktion till konstruktivismen inom matematikdidaktiken* (s. 144–152). Lund: Studentlitteratur.
- Ernest, P. (1994). Social Constructivism and the Psychology of Mathematics Education. I: P. Ernest (Ed.) *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education* (s. 62–72). London: Falmer Press.
- Ernest, P. (1998). Vad är konstruktivism. I A. Engström (Red.), *Matematik och reflektion – En introduktion till konstruktivismen inom matematikdidaktiken* (s. 21–33). Lund: Studentlitteratur.
- Glass, B., & Maher, C. A. (2004). Students problem solving and justification. I: M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Red.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol: 2* (s. 463–470). Capetown: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Gustafsson, I-M., Jakobsson, M., Nilsson, I., & Zippert, M. m.fl. (2011). Matematiska uttrycksformer och representationer. *Nämnamnaren* 38(3), 36–45
- Hansén, S-E., & Myrskog, G. (1994). Läroplansreform och inläringssyn. I: A. Wickman-Skult (Red.), *Grundskolan förändras* (s. 14–22). Helsingfors: Utbildningsstyrelsen
- Johnson, D., & Johnson, R. (1987). *Learning together and alone: cooperative, competitive, and individualistic learning*. New Jersey: Prentice Hall
- Johnson, D., Johnson, R., & Johnson Holubec, E. (1991). *Cooperation in the classroom*. USA: Interaction Book Company
- Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers*. [Elektronisk version]. Hämtad 26 november 2015 från, <https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/24151>

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education*. Kalifornien: Jossey-Bass Publishers

Micari, M., Pazos, P., Streitwieser, B., & Light, G. (2010). Small-group learning in undergraduates STEM disciplines: effect of group type on student achievement. *Educational Research and Evaluation*, 16(3), 269–286, DOI: 10.1080/13803611.2010.520860

MOT Norstedts stora engelska ordbok. [u.å.] *Justify*. Hämtad 1 april 2015, från <https://mot.kielikone.fi/mot/OBOAKA/netmot.exe?UI=sv80&dic=9>

MOT Norstedts Svensk ordbok. [u.å.]. *Problem*. Hämtad 9 mars 2015, från <https://mot.kielikone.fi/mot/OBOAKA/netmot.exe?UI=sv80&dic=10>

Nationalencyklopedin [u.å.]. *Kunskap*. Hämtad 1 april 2015, från <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/kunskap>

Nationalencyklopedin [u.å.]. *Kunskapsteori*. Hämtad 1 april 2015, från <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/kunskapsteori>

Polya, G. (1973). *How to solve it: a new aspects of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

Pugalee, D. K. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of students' problem solving processes. *Educational Studies in Mathematics* 55(1–3), 27–47. ISSN: 0013-1954

Punch, K. F. (2009). *Introduction to Research Methods in Education*. London: SAGE Publications

Ryve, A. (2006). Making explicit the analysis of students' mathematical discourses – revisiting a newly developed methodological framework. *Educational Studies in Mathematics* 62(2), 191–209. DOI: 10.1007/s10649-006-4834-0

Røj-Lindberg, A-S. (2001). Samarbetsinläring – metoder för undervisning och kollegialt samarbete. I: A-S. Røj-Lindberg & T. Wikman (Red.), *Att lära i samarbete* –

Samarbetsinläring i teori och praktik (s. 3–10). Vasa: Fortbildningscentralen vid Österbottens högskola.

Sahlberg, P., & Berry, J. (2003). *Small group learning in mathematics*. Åbo: Samfundet för Pedagogisk Forskning i Finland

Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as Communication: Rethinking Learning-by-Talking Through Multi-Faceted Analysis of Students' Mathematical Interactions. *Mind, Culture, and Activity*, 8(1), 42–76. DOI: 10.1207/S15327884MCA0801_04

Sharan, Y., & Sharan, S. (1992). *Expanding cooperative learning through group investigation*. New York: Teachers College, Columbia University.

Shoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense Making in Mathematics. I: D. Grouws (Red.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company, s.334–370.

Skolverket. (1997). *Bildning och kunskap* [Elektronisk version]. Hämtad 20 november 2014, från <http://www.skolverket.se/publikationer?id=135>

Skolverket. (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011* [Elektronisk version]. Hämtad 20 november 2014, från <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2575>

Utbildningsstyrelsen. (1994). *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen*. Helsingfors: Tryckericentralen.

Utbildningsstyrelsen. (2004). *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen* [Elektronisk version]. Hämtad 20 november 2014, från http://www.oph.fi/lagar_och_anvisningar/laroplans-och_examensgrunder/grundlaggande_utbildningen

Utbildningsstyrelsen. (2014). *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen* [Elektronisk version]. Hämtad 12 december 2015, från

http://www.oph.fi/laagar_och_anvisningar/laroplans-och_examensgrunder/grundläggande_utbildningen

Vidakovic, D., & Martin, W. O. (2004). Small-group searches for mathematical proofs and individual reconstructions of mathematical concepts. *Journal of Mathematical Behavior*, 23(4), 465–492, DOI: 10.1016/j.jmathb.2004.09.006

Vygotskij, L. S. (1986). *Thought and Language*. Cambridge, MA: The MIT Press

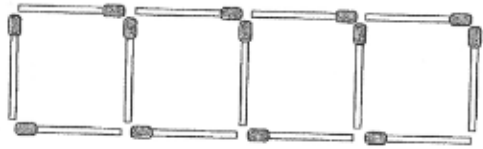
Yin, R. K. (2009). *Case study research: design and methods*. London: SAGE Publications

Österlund, J. (2013). *Si, lyssna lite på mig bara. En kvalitativ analys av matematiska diskussioner hos tre elever i årskurs 6 som tillsammans löser matematiska problem*. Opublicerad avhandling för pedagogie kandidatexamen. Pedagogiska fakulteten, Åbo Akademi, Vasa.

Österlund, J. (2014). Structuring conversations for analysing problem-solving. I: A-S. Røj-Lindberg, L. Burman, B. Kurtén-Finnäs & K. Linnanmäki (Eds.), *Spaces for learning: past, present and future* (s. 238–239). Vasa: Åbo Akademi University

Bilaga 1: Tändsticksproblemet

Tändsticksproblemet



I figuren har 13 tändstickor använts till att lägga 4 kvadrater i en rad.

Hur många kvadrater i en rad kan man lägga på detta sätt om man använder 73 tändstickor?

Hur vet du det?