DISSERTATIO MATHEMATICA

ANALYSEOS SUBLIMIORIS ALGEBRÆ ELEMENTARI CONNECTENDÆ SPECIMEN

EXHIBENS.

CUJUS PARTICULAM I.

CONS. AMPL. FACULT. PHILOS. ABOËNS.

P. P.

GABRIEL PALANDER,

Adjunctus Fac. Philos. Ord.

ET

JACOBUS FORSSELL,

Stip. Bilmark. Aboënsis.

In Audit. Mathem. die XIX. Junii MDCCCVI.

h. p. m. s.

ABOÆ,

Typis FRENCKELLIANIS.

3.

In formis Functionum Analyticarum investigandis & pro consilii diversitate effingendis sublimiorem versari Analystarum artem, res est cuique, vel leviter in hoc scientiarum genere imbuto, longe notissima Cui equidem rationi mirum quam amplas conciliavit opes inventa dudum a NEWTONO & LEIBNITIO, egregiisque recentiorum studiis insignius promota, methodus eas tractandi Functiones, quæ ex differentiis quantitatum variabilium enascuntur. Cujus novi Calculi quo latius patet ambitus, eo magis e re esse sua merito duxere summi Geometræ, adcuratam & ab omni difficultate immunem ejus condere Theoriam. Quorum sigillatim recensere nomina meritaque illustria a nostro alienum consilio rati, indicandum modo duximus, arridere nobis inprimis exhibitam haud ita pridem a Cl. LA GRANGE Theoriam Functionum Analyticarum *a*) ea præci-

A pua

---

a) In opere eximio, cujus versio Germanica inscribitur: LAGRANGE'S *Theorie der Analytischen Funktionen, in welcher die grundsätze der Differentialrechnung vorgetragen werden, unabhängig von betrachtung der unendlich kleinen oder verschwindenden Grössen, der Grenzen oder Fluxionen, und zurückgeführt auf die Algebraische Analysis Aus dem Französisch. übers. von J. Ph. Grüson.* 2 *Theil. Berlin* 1798, 1799. *in* 8:o.

rit commendabilem laude, quod Calculum Differentialem ad notiones elementares & mere Algebraicas reduxerit. In materia vero haud ignobili illustranda tenues quoque nostras ausi experiri vires non omnino temerarium hoc censebimus consilium, si opella nostra Analyseos sublimioris arctissimum cum Algebra elementari nexum tironibus paullo perspectiorem reddere valuerit. Cujus voti an nobis contigerit esse damnatis, Candido judicandum Lectori deferimus.

1. Quantitas variabilis *indefinite parva* dicitur, quæ dabili quavis quantitate minor fieri potest: *indefinite magna*, quæ dabilem quamvis excedere potest.

2. Sit $f(x)$ quantitas variabilis, quæ posita quantitate x indefinite parva nequeat esse vel indefinite parva vel indefinite magna: dabilis est quantitas aliqua finita, quæ dicatur A, ita constituta, ut eadem sub conditione fiat $f(x) - A$ quantitas indefinite parva positiva vel negativa.

Decrescente enim quantitate x aut decrescit $f(x)$ aut adcrescit. Quod si decrescat, dabiles sunt valores quouis adeo parvi, ut iis singulis $f(x)$ fieri minor nequeat. Quorum si sit maximus A & designet D quantitatem arbitrariam; erit $A+D$ quantitas, qua $f(x)$ potest fieri minor. Quare continuo decrescente x fiet demum $f(x) - A < D$. Sin $f(x)$ adcrescat, simili evincitur ratiocinio, sumto pro A valore minimo eorum, quos $f(x)$ nequit exsuperare, posse fieri $f(x) > A - D$ sive $A - f(x) < D$. Ex quibus efficitur esse $f(x) - A$ in utroque casu (in illo quidem positivam, in hoc negativam) quantitatem, quæ indefinite decrescente x reddatur indefinite parva.

Sit

Sit igitur $f(x) - A = V$, unde $f(x) = A + V$, exprimente V quantitatem ea lege variabilem, ut x & V simul evadant indefinite parvæ.

3 Sit $f\,x$ functio quantitatis variabilis x, quæ posito $x = \alpha$ abit in $f(\alpha)$, existentibus α & $f\,\alpha$ valoribus determinatis: si tribuantur quantitati x bini valores x', x'' indefinite propinqui *b*) quantitati α, quorum sit x' medius inter α & x''; erunt valores functionis his respective correspondentes $f(x')$, $f(x'')$ *c*) indefinite propinqui quantitati $f(\alpha)$ atque $f(x')$ medium obtinebit locum inter $f(\alpha)$ & $f(x'')$.

Vicissim vero, si positis α, x', x'' iisdem ac antea fiant $f(x')$, $f(x'')$ indifinite propinquæ quantitati cuidam determinatæ $f(\alpha)$ & quidem ita, ut sit $f(x')$ propior altera illa $f(x'')$; recipiente x valorem α, functio $f(x)$ non potest non transire in $f(\alpha)$ *d*).

 Lex

---

b) *Indefinite propinquam* appellamus alteram alteri quantitatem, si mutua earum differentia est indefinite parva.

c) Nisi imaginarii fiant, cujus dignoscendi casus characterem Algebra docet.

d) Ex hoc principio sponte fluit, Analysin nullum agnoscere discrimen inter functionem, quæ sumta radice x indefinite parva fieri potest data quavis quantitatem minores & eam, quæ posito $x = 0$ evanescit. Est enim in hoc casu $\alpha = f(\alpha) = 0$. Sic in Triangulo, cujus data duo latera sint a & b, semiperimeter p, & area x, excessus semiperimetri super latus tertium $f(x)$, relatio inter $f(x)$ & x exprimitur æquatione $x = \sqrt{f(x).\,p.}$

Lex hæc continuæ variationis functionum per se est adeo evidens, ut principii locum merito sibi vindicet.

4. Retentis iisdem ac in in n:o præcedenti quantitatum signis, si sint differentiæ $x'' - x'$, $x' - \alpha$ in ratione data $a : 1$; erunt variationes functionis correspondentes $f(x'') - f(x')$, $f(x') - f(\alpha)$ in ratione adsignabili, quæ est vel constans $= m : 1$ vel ea conditione variabilis, ut nec indefinite parva nec indefinite magna fieri queat, ideoque (n:o 2.) generaliter exprimenda per $m + V : 1$, in qua est m numerus positivus ex ratione data & natura functionis determinabilis, & V vel $=$ o vel evanescens transeunte x in α.

Principii hujus ratio in eo est sita, quod, posita variatione ipsius radicis successiva, variatio functionis momentanea esse nequeat: qua nimirum, si fas esset, admissa, quantitas variabilis foret vaga & infrena nullisque subjecta computandi regulis *h. e.* talis, quæ functionis Analyticæ naturam non possit non exuisse.

5. Quum igitur generaliter sit, $f(x'') - f(x') : f(x') - f(\alpha) = m + V : 1$, pro casu illo speciali, in quo $\alpha =$

$(p - a)(p - b)$. Unde $f(x) = \dfrac{x^2}{p(p-a)(p-b)}$; quæ formula cum evanescat pro $x = 0$, aperte prodit evanescere excessum semiperimetri super latus maximum posita area $= 0$. Assertionis vero nostræ universalitati minime officit, quod notione Trianguli, (quod in Geometria elementari fieri solet) ita definita, ut excludatur ille casus, quo terna puncta illud determinantia in eadem sita sunt recta, applicari nequeat.

$\alpha = f(\alpha) = 0$, sive quoties fuerit functio ejus naturæ, ut evanescente x, $f(x)$ quoque evanescat; habebitur $x'' - x' : x' = a : 1$ & $f(x'') - f(x') : f(x') = m + V : 1$: unde $x'' : x' = 1 + a : 1$ & $f(x'') : f(x') = 1 + m + V : 1$.

Generalis idcirco est character functionis pro $x = 0$ evanescentis, quod sit $\frac{f(\overline{a+1}\,.\,x)}{f(x')} = 1 + m + V$.

6. Sit pro data functione $f(x)$ & valore speciali numeri a in formula $\frac{f(\overline{1+a}\,.\,x)}{f(x)} = 1 + m + V$ numerus m cognitus & sumatur $r = \frac{Log\,(1+m)}{Log\,(1+a)}$. Unde $1 + m = (1 + a)^r$. Sit porro $\frac{f(x)}{x^r} = F(x)$ & $\frac{x^r}{f(x)} = F'(x)$.

Quo pacto eruitur $\frac{F(\overline{1+a}\,.\,x)}{F(x)} = \frac{f(\overline{1+a}\,.\,x)}{((1+a).\,x)^r} \cdot \frac{x^r}{f(x)}$

$$\left(= \frac{f((1+a)\,.\,x)}{(1+a)^r f(x)}\right) = 1 + \frac{V}{(1+a)^r} \;\&\; \frac{F'((1+a)\,.\,x)}{F'(x)}$$

$$= \frac{((1+a)\,.\,x)^r}{f((1+a)\,.\,x)} \cdot \frac{f(x)}{x^r} = 1 - \frac{V}{(1+a)^r + V}.$$

Pro neutra igitur functionum $F(x)$, $F'(x)$ ei satisfieri potest conditioni (n o præced.), qua sublata nequit functio evanescere posito $x = 0$. Quare, cum præterea $F(x)$ ita dependeat a $F'(x)$ ut non, nisi facta hac quantititate indefinite parva, queat fieri indefinite magna; erit (n:o 2.) $\frac{f(x)}{x^r} = A + V$, ideoque $f(x) = x^r (A + V)$.

Demonstratum sic est, functionem quamvis Analyticam, quæ pro $x = 0$ evanescit, esse divisibilem per potestatem aliquam positivam quantitatis x eamque ob rem reductibilem ad formam $x^r (A + V)$, in qua est V vel $= 0$ vel ejus naturæ ut pro $x = 0$ evanescat.

7. Quod si in n:o præced. posuissemus $F(x) = \frac{f(x)}{x^s}$, & $F'(x) = \frac{x^s}{f(x)}$, sumto pro s numero majori vel minori quam r, obtinuissemus $\frac{F((a+1).x)}{F(x)} \left(= \frac{f((1+a).x)}{(1+a)^s f(x)} \right)$ $= \frac{(1+a)^r + V}{(1+a)^s} = (1 + a)^{r-s} + \frac{V}{(1+a)^s}$ & $\frac{F'((1+a).x)}{F'(x)}$ $= \frac{(1+a)^s}{(1+a)^r + V} = (1 + a)^{s-r} - \frac{(1+a)^{s-r} . V}{(1+a)^r + V}$. Hæ vero formulæ produnt non posse sumi s & r inæquales (n:o 5.), quin fiat, $\frac{f(x)}{x^s}$ ejus indolis, ut evanescente x vel evanescat vel fiat indefinite magna, prout fuerit s vel $< r$ vel $> r$ respective.

8. Specialem hactenus consideravimus numeri a valorem: jam vero facile probabitur, posito numero a arbitrario, permanere indicem r invariatum. Quod si negas,

gas, fac substitutis novis numeris a' & m' pro a & m respective, novum exoriri valorem ipsius r, qui dicatur r', nimirum $= \frac{Log\ (1 + m')}{Log\ (1 + a')}$. Hinc vero efficitur (n:o 6.) esse $\frac{f(x)}{x^{r'}}$ formæ $A + V$ vel ejus naturæ ut evanescente x abeat in quantitatem finitam A: quod omnino repugnat (n o præced.), dum manebit differentia aliqua inter r & r'.

9. *Exemplum.* Sit $f(x) = Sin\ x$, & sumatur pro a numerus quicunque integer positivus. Quo pacto, vi Theorematis Trigonometrici $Sin (A + B) = Sin\ A\ Cos\ B + Cos\ A\ Sin\ B$, eruitur $Sin\ ((a + 1)\ .\ x) = Sin\ x\ Cos\ (ax) + Sin\ (a\ x)\ Cos\ x = Sin\ x\ [Cos\ (a\ x) + Cos\ ((a - 1)\ .\ x)\ Cos\ x] + Sin\ ((a - 1)\ .\ x)\ Cos\ x^2 = Sin\ x\ [Cos\ (ax) + Cos\ ((a - 1)\ .\ x)\ Cos\ x + \ldots + Cos\ ((a - n)\ .\ x)\ Cos\ x^n] + Sin\ ((a - n)\ .\ x)\ Cos\ x^{n+1} = (n + 1)\ Sin\ x + Sin\ x\ (Cos\ (ax) + Cos\ ((a - 1)\ .\ x)\ Cos\ x + \ldots + Cos ((a - n)\ .\ x)\ Cos\ x^n - n - 1) + Sin\ ((a - n)\ .\ x)\ Cos\ x^{n-1}$. Quod si hæc series continuetur usque eo ut fuerit $n = a$, emerget $\frac{Sin\ ((a + 1)\ .\ x)}{Sin\ x} = (a + 1) + [Cos\ (ax) + Cos\ ((a - 1)\ .\ x)\ Cos\ x + \ldots + Cos\ 2x\ Cos\ x^{a-2} + Cos\ x\ .\ Cos\ x^{a-1} + Cos\ x^a . - (a + 1)]$, cujus æquationis membrum posterius posito $x = o$ redigitur ad $(1 + a)$. Unde comparatione instituta cum formula generali (n:o 6.) $\frac{f\ ((1 + a)\ .\ x)}{f\ (x)} = (1 + a)^r + V$, colligitur esse $r = 1$, ideoque $Sin\ x$ formæ $x\ (A + V)$.

10. The-

10. *Theorema.* Functio quævis Analytica $f(x)$, quæ posito $x = o$ indefinite magna non evadit, converti potest in seriem vel finitam vel infinitam terminorum formæ Ax^r, in qua exponens r valores quosvis (exceptis negativis) recipere potest.

Evanescente quantitate x aut evanescit $f(x)$, aut finitum attingit valorem. In illo casu est (n:o 6.) $f(x)$ formæ $x^{r1}(A1 + V1)$, in hoc (n:o 2.) formæ $(A + V)$, in qua designat A valorem, in quem transit functio, facto $x = o$, & V quantitatem pro hoc valore ipsius x evanescentem. Quum vero hæc quantitas (n:o 6.) sit quoque reductibilis ad formam $x^{r1}(A1 + V1)$, poterit $f(x)$ exprimi per $A + x^{r1}(A1 + V1) = Ax^o + x^{r1}(A1 + V1)$. Quæ forma, utpote generalior, priorem illum casum evanescentis functionis pro $x = o$ quoque complectitur, posito nimirum $A = o$.

Quod si jam in æquatione $f(x) = Ax^o + x^{r1}(A + V_1)$ sit $V_1 = o$; consummata est series. Sin minus; eadem repetita transformandi ratione ad novas successive progredi licet functiones V_2, V_3 &c, serie æquationum hujus formæ $V_1 = x^{r2}(A_2 + V_2)$, $V_2 = x^{r3}(A_3 + V_3)$, &c. definitas. Potest vero hæc series, quousque libuerit continuari, nisi quando inciderimus in $Vn = o$. Eliminatis vero successive ope hujusmodi æquationum quantitatibus V_1, V_2, V_3, . . &c. succrescente terminorum numero obtinebitur $f(x) = Ax^o + x^{r1}(A_1 + V_1) = Ax^o + A_1 x^{r1} + x^{r1+r2}(A_2 + V_2) = Ax^o + A_1 x^{r1} + A_2 x^{r1+r2} + x^{r1+r2+r3}(A_3 + V_3) = Ax^o + A_1 x^{r1}$

$+ A_2$

$+ A_2 x^{r_1 + r_2} + A_3 x^{r_1 + r_2 + r_3} + \ldots\ldots\ldots\ldots +$
$x^{r_1 + r_2 + r_3 + \ldots r_n} (A_n + V_n)$

11. Quum in serie præcedenti sit generaliter V_n quantitas, quæ evanescit posito $x = o$; aperte constat (n:o 3.), posse, sumenda quantitate x perexigua, reddi V_n adeo parvam, ut sit $A_n > V_n$ ideoque a fortiori $A_n x^{r_1 + r_2 + \ldots r_n} > V_n \cdot x^{r_1 + r_2 + \ldots r_n}$. Quare, cum sit $V_n x^{r_1 + r_2 + \ldots r_n}$ summa omnium terminorum terminum $A_n x^{r_1 + r_2 + \ldots r_n}$ subsequentium; manifestam habemus eam seriei nostræ proprietatem, quod x possit sumi adeo parva, ut fiat terminus quilibet major aggregato omnium altiores potestates quantitatis x continentium *e*).

12. Sit $f(x)$ functio, quæ posito $x = a$ abit in A. Quod si ponatur $x - a = z$, substituto pro x valore $a + z$, $f(x) - A$ transibit in functionem quantitatis z ita comparatam ut pro $z = o$ evanescat. Erit igitur $f(x) - A$ formæ $z^r (A + V)$, in qua V evanescit facto $z = o$. Unde, suffecta in locum ipsius z æquipollente quantitate $x - a$, exsurgit $f(x) = A + (x - a)^r (A + V)$.

Si functio $f(x)$ evanescit pro $x = a$, fit $A = o$, & $f(x) = (x - a)^r (A + V)$. Unde patet omnem functionem Analyticam, quæ facto $x = a$ evanescit, esse divisibilem per aliquam potestatem positivam quantitatis $x - a$.

 Cu-

e) Propositio hæc tanti est in calculo sublimiore momenti, ut inter fundamentales merito referatur. Cfr. LAGRANGE *Lib. cit. I. Th. pag.* 20.

Cujus propositionis vim in gratiam tironum nonnullis illustrare juvat exemplis.

13. *Exempl.* 1. Sit $f(x) = x^m - a^m$ & quidem 1:o exponens m numerus positivus integer. Sumatur $S = x^{m-1} + x^{m-2}a + \ldots + xa^{m-2} + a^{m-1}$, quæ series si ducatur successive in x & a; erit oriundarum hac lege serierum differentia $(x - a)S = x^m - a^m$.

Sit 2:o exponens m numerus positivus fractus $= p:q$, designantibus p & q numeros integros positivos. Fiat vero jam $S_1 = x^{(p-1):q} + x^{(p-2):q} a^{1:q} + \ldots x^{1:q} a^{(p-2):q} + a^{(p-1):q}$ & $S_2 = x^{(q-1):q} + x^{(q-2):q} a^{1:q} + \ldots x^{1:q} a^{(q-2):q} + a^{(q-1):q}$. Qua utraque serie ducta in $x^{1:q} - a^{1:q}$ emergit $S_1 (x^{1:q} - a^{1:q}) = x^{p:q} - a^{p:q}$ & $S_2 (x^{1:q} - a^{1:q}) = x - a$. Est ergo $S_1 : S_2 = \dfrac{x^{p:q} - a^{p:q}}{x - a}$, unde $x^{p:q} - a^{p:q} = x^m - a^m = \dfrac{S_1 (x - a)}{S_2}$.

Sit denique 3:o m numerus quicunque negativus integer vel fractus. In hoc vero casu est $f(x) = \dfrac{1}{x^m} - \dfrac{1}{a^m} = (a^m - x^m)\left(\dfrac{1}{x^m a^m}\right)$. Quare cum formulæ hujus factor $a^m - x^m$, ad alterutram classium præcedentium

refe-

referenda, divisorem patiatur $x - a$; de ipsa functione idem valet f).

14. *Exempl.* 2. Sit $f(x) = \alpha_1 (A_1 + (x - a)^{r_1} X_1)^{m_1} + \alpha_2 (A_2 + (x - a)^{r_2} X_2)^{m_2} + .. \alpha_n (A_n + (x - a)^{r_n} X_n)^{m_n}$, in qua $\alpha_1 + \alpha_2 + .. \alpha_n = 0$, $A_1^{m_1} = A_2^{m_2} = ... A_n^{m_n}$, exponentes $r_1 + r_2 .. r_n$ positivi, & $X_1, X_2, .. X_n$ functiones, quæ posito $x = a$ maneant finitæ.

Ex admissis his conditionibus patet esse $\alpha_1 A_1^{m_1} + \alpha_2 A_2^{m_2} + .. \alpha_n A_n^{m_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... \alpha_n) A_1^{m_1} = 0$, ideoque evanescere functionem propositam posito $x = a$. Quare tentanda est ejus reductio ad formam $(x - a)^r X$. Quem in finem fiat $A_1 + (x - a)^{r_1} X_1 = z_1$, $A_2 + (x - a)^{r_2} X_2 = z_2$ atque generaliter $A_n + (x - a)^{r_n} X_n = z_n$: quo facto transformabitur $f(x)$ in $\alpha_1 z_1^{m_1} + \alpha_2 z_2^{m_2} + ... \alpha_n z_n^{m_n} = \alpha_1 (z_1^{m_1} - A_1^{m_1}) + \alpha_2 (z_2^{m_2} - A_2^{m_2}) + ... \alpha_n (z_n^{m_n} - A_n^{m_n})$. Hujus vero aggregati singula membra (n:o præced.) divisores admittunt $z_1 - A_1 = (x - a)^{r_1} X_1$, $z_2 - A_2 =$

f) Quum pro data quavis quantitate irrationali quantitates rationales, ad verum ejus valorem propius propiusque accedentes, assignari queant; quæ de forma functionis $x^m - a^m$ pro m rationali præcepta sunt, ea quoque ad casum exponentis surdi extendi possunt.

$(x - a)^{r_2} X_2, \ldots z_n - A_n = (x - a)^{r_n} X_n$ respective. Unde colligitur $f(x) = C_1 (x - a)^{r_1} + C_2 (x - a)^{r_2} + \ldots C_n (x - a)^{r_n}$, denotantibus $C_1, C_2, \ldots C_n$ quantitates pro $x = a$ finitum conservantes valorem. Est ergo functio proposita divisibilis per potestatem quantitatis $x - a$, ejus videlicet ordinis, quem indicat exponentium $r_1, r_2, \ldots r_n$ minimus.

15. Si sit $f(x, y, z$ &c$)$ functio plurium quotcunque variabilium x, y, z &c., quæ posito $x = y$ evanescat; est hæc functio reductibilis ad formam $(x - y)^r \varphi(x, y, z$ &c.$)$, in qua $\varphi(x, y, z$ &c$)$, posita pro x quantitate y, abit in functionem residuarum quantitatum y, z &c. $= f'(y, z$ &c.$) + V$.

Formula hæc nostra cum principio nuper illustrato omnino conspirat, eo videlicet solo observato discrimine, quod quantitas A_1 in quam (n:o 12.) $\frac{f(x)}{(x-a)^r}$ transit posito $x=a$, sit omnino finita, nulla existente amplius superstite quantitate variabili, ea vero quantitas, in quam transmigrat $\frac{f(x, y, z \text{ \&c.})}{(x - y)^r}$, eliminata quantitate x ope æquationis $x = y$, permaneat functio residuarum quantitatum y, z &c. ideoque exprimenda sit per $f'(y, z$ &c.$) + V$. Unde $f(x, y, z$ &c.$) = (x - y)^r (f'(y, z$ &c.$) + V) = (x - y)^r \varphi(x, y, z$ &c.$)$.

16. The-

16. *Theorema.* Sint $f(x)$, $f(y)$ functiones identicæ singularum quantitatum x, y respective; erit $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ $= \varphi(x, y)$ functio binarum quantitatum x & y, quæ suffecta y in locum ipsius x abit in functionem residuæ quantitatis y.

Functionem propositam $f(x) - f(y)$ contineri sub forma generali $(x - y)^r \varphi(x, y)$ mox (n:o præced.) exinde patet, quod æquatis x & y evanescat. Exponentem vero $r = 1$ sequenti detegere licet analysi.

Sit a numerus positivus arbitrarius & sumantur u & z ea conditione, ut sit $y - z = a \cdot (x - y) = au$. Quibus positis erit

$$f(x) - f(y) = (x - y)^r \varphi(x, y) = u^r (f'(y) + V)$$
$$= (f(x) - f(z)) = (x - z)^r \varphi(x, z)) = ((a + 1) u)^r ((f'(z) + V_1)$$
$$- (f(y) - f(z)) - (y - z)^r \varphi(y, z)) - (a\,u)^r f'(z) + V_2),$$

manente ubique indice r eodem & exprimentibus $f'(y)$, $f'(z)$ functiones identicas singularum quantitatum y, z respective atque existentibus V, V_1, V_2 ejus naturæ, ut pro $u = o$ evanescant. Unde expuncto factore communi u^r obtinebitur $f'(y) + V = ((a + 1)^r - a^r) f'(z) + (a + 1)^r V_1 - a^r V_2$. Est vero $f'(y) = f'(z + au)$ quantitas ita comparata, ut evanescente u abeat in $f'(z)$, ideoque exprimenda per $f'(z) + V'$, sustinente V' vicem functionis alicujus quantitatum y & z, evanescentis posito $u = o$. Quo substituto valore hæc emerget æquatio: $(a^r + 1 - (a + 1)^r) f'(z) = (a + 1)^r V_1 - a^r V_2 - V - V'$. Quum vero sit æquationis hujusce prius membrum,

brum, a quantitate u immune, nulli obnoxium variationi ex mutato valore quantitatis u oriundæ, de altero idem valet. Quippe quod hac una ſub conditione obtinere poteſt, (ob ſingulos terminos, ex quibus componitur, evaneſcentes pro $u = o$) ſi fuerit $(a + 1)^r V_1 - a^r V_2 - V - V' = o$. Unde $(a^r + 1 - (a + 1)^r) f'(z) = o$. Quare, cum nequeat $f'(z)$ evaneſcere, ſaltim niſi quantitati z ſpecialis adſignetur valor g), erit $a^r + 1 = (a + 1)^r$. Cui ſatisfieri conditioni nequit, niſi ponendo $r = 1$.

Eſt igitur $f(x) - f(y) = (x - y)\, \varphi(x\ y)$ Unde $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = \varphi(x, y.)$

17. Quum, deſignantibus x, y binos valores abſciſſæ in curva quadam, exprimant $f(x)$, $f(y)$ ordinatas reſpective correſpondentes; quantitatibus y, $f(y)$ haud inepte ſufficere licet x_1, $f(x_1)$ reſpective. Quo pacto liquet eſſe $\varphi(x, x_1) =$ Tangenti anguli ejus, quo inclinatur Secans, per ea transiens puncta, in quibus ordinatæ $f(x)$, $f(x_1)$ curvæ occurrunt, ad axem abſciſſarum.

18. Quia

---

g) Pro valoribus nimirum ſpecialisſimis quantitatis z fieri poteſt, ut $f'(z)$ vel evaneſcat vel fiat infinite magna, quibus in caſibus ad eruendum exponentem r hæc minime valet concludendi ratio. Quippe qui ſpecialem in Analyſi attentionem requirunt & ſingularia præcepta.