

DISSERTATIO PHYSICO-MATHEMATICA,
OBSERVATIONES HYPSOMETRICAS
OPE BAROMETRI INSTITUTAS
COMPUTANDI METHODUM
SISTENS;

CUJUS

PART. I,

VENIA AMPLISS. FACULTATIS PHILOSOPH.

IN IMPERIALI ACADEMIA ABOËNSI,

PUBLICE EXAMINANDAM MODESTE PROPONUNT

Mag. NATHAN. GERH. AF SCHULTÉN,
Docens in Mathesi Applicata,

ET

ALEXANDER BLOMQUIST,
Stipendiarius Publ. Nylandus.

In Audit. Philosoph. die XIX Junii MDCCCXVI.

h. a m. s.

ABOÆ, Typis FRENCKELLIANIS.



§. I.

Ad positiones locorum terrestrium adcurate determinandas, operationes tantum geographicas, sive latitudinum atque longitudinum observationes, non sufficere, manifesto patet: distantiae quoque locorum verticales a superficie quadam data atque immutabili, e. gr. libella maris media, notae habeantur, necessum est. Hinc utique determinationes harum distantiarum, & in genere altitudinum mensurationes, inter operationes Mathematicum practicorum majoris omnino momenti, merito numerandæ; quo quidem factum est, ut plures sane methodi, ad hujusmodi observationes commode instituendas, Geometrarum jamjam industria excogitatæ habeantur. Quarum quidem altitudines determinandi rationum duplex præcipue genus notandum; alterum geometricis tantum principiis

A

cipiis nitens, cujusmodi sunt mensurationes trigonometricæ, libellationes, &c.; alterum, a diversa atmosphæræ pressione, prout inferior est locus vel superior; sumtum, physicoque sic omnino stans fundamento. Hoc quidem, a Geometra inclyto *Edm. Halley* primum fundatum, nostrisque demum temporibus, & theoria diligentius elaborata, & experimentis adcuratius institutis, valde emendatum, si vel principii certitudine atque evidentia, quod negandum non est, illi cedere cogatur, simplicitate tamen & facilitate operationum, priorem sibi vere vindicat locum. Et quidem, quamvis fateri liceat, methodum hanc, quam memoramus, Barometricam, si vel inevitabiles observationum errores excipias, eum quoque perfectionis gradum nondum attigisse, ut omnes omnino, e quibus resultati pendeat certitudo, circumstantiæ physicæ, datae habeantur atque ad calculum revocatae; attamen, cum, teste experientia, errores in operationibus practicis, hisce ex caussis oriundi, jam demum valde habeantur exigui, atque in genere, quando opportuna se obtulerit observandi occasio, neque ultima omnino requiratur adcuratio, negligendi, facile utique videtur, magni esse pretii methodum, de qua loquimur, hypsometricam, eamque, multis in casibus, vel rigidæ atque directæ mensurationi geometricæ merito esse præferendam. Hæc utique contemplantes, dignam omnino rem
du-

duximus, de qua nos quoque benignæ lectorum censuræ cogitationes quasdam submitteremus; quasque nuper laudavimus, mensurationes distantiarum verticalium, ope Barometri instituendas, sequentibus breviter pagellis, methodo, quantum fieri possit, perspicuā, considerare statuimus: in re tamen, a tot tantisque viris uberrime pertractata, illustrandā, id unice propositum habentes, ut, qui nostri sint, in materiei hujus cognitione progressus, qualitercumque tantum experiremur.

§. II.

Quo plenus quidem omnino eorum, quæ hic pertinent, habeatur conspectus, formularum ab auditoribus propositarum, quarum non exigua est multitudo, nullam heic principii loco statuemus; sed, quantum fieri possit, ad prima methodi fundamenta regredientes, operam, ante omnia, in id conferemus, ut valor altitudinum generalis (ab eo, quem, in opere: *Mecanique celeste*, proponit Cel. Laplace, non multo discrepans), quanto fieri possit rigore, directe eruatur; qua quidem in disputatione, cum hypothesis aëris perfecte sicci vero rerum statui non sit consentanea, aërem humiditatis quodammodo mediæ contemplerur, necesse est; posito quidem gradu illo humiditatis, i. e. pondera vaporis aquei, in portione quadam aëris considerati,

siderati, contenti, pro data quacumque temperatura, dato quoque omnino atque determinato. Proprietates vero aëris physicas, quod attinet, harum tantum duabus sequentibus, experientia satis bene comprobatis, in præsenti opus est investigatione:

1:0 Etsi incertum est, quamnam densitatis functionem sequatur elasticitas absoluta aëris valde aut rari aut compressi, pro aëre tamen quocunque, in quo institui possint altitudinum observationes, adcurate satis valere legem illam *Mariotti*, qua, manentibus invariatis caloris temperie ipsaque, inter massas aëris & exigui vaporis aquæ immisti, ratione, vi ipsi coërcenti, datam prementi superficiem, directe est proportionalis densitas aëris.

2:0 Mutata aëris temperatura, elasticitatem ejus specificam quoque mutari; eamque hujusc variationis legem assumi posse, ut, datis, vi comprimente superficieque pressa, nec non massa aëris parvaque vaporis aquei adjecti portiuncula, mutationes voluminis aëris, mutationibus temperaturæ, thermometro mercuriali observatæ, satis exacte sint proportionales. Quam tamen aëris qualitatem heic eatenus variatam adhiberi, necesse est, ut secundum veram rerum conditionem, crescente tem-

temperatura, crescentem quoque quantitatem vaporum, in data aëris humidi massa, contentam ponamus; aucta tamen hac aquæ admistæ quantitate, juxta legem quamdam datam atque determinatam, qua quidem, servatæ eà, quam memoravimus, uniformitate, mutationes voluminis aëris tantum paullo maiores, ac sola haberentur caloris variatione, pro diversis temperaturis, prodeant.

Hisce positis, ad eruendam generalem, quam
B. quærimus, formulam, sit (vide fig.) *A* locus
E. inferior observationis, *B* superior, quos inter
aërem illum humoris medii, quem memora-
A. vimus, contentum ponamus. Adsumantur uti-
que, evidentiæ caussa, stationes *A* atque *B*, in
eadem linea verticali, (quod quidem si revera
locum non habeat, nihilo tamen secius, quæ
in sequentibus tradituri sumus, facile valere,
videbitur); in qua producta etiam centrum
telluris *C* collocatum, heic reëte considerare
C possumus. Sintque jam $CA = a$, $AB = h$, $AE = x$
(sumto *A* inter & *B* puncto quolibet *E*); p , P , p^t
altitudines Barometri, pressiones aëris in punctis
A, *E*, *B*, eodem temporis momento, exhibentes,
reducto utique hydрагyro, quod purum omnino &
coctum ponimus, ad temperaturam quamdam nor-
malem, quæ a calore aquæ congelantis, gradibus γ
thermometri cujuscumque dati mercurialis, distat;

g , G , g' temperaturæ aëris in locis A , E , B , eodem, quo memoratæ nuper altitudines Barometri, momento obtinentes (eodemque nimirum, quo supra, thermometro, per distantiam a calore congelationis aquæ, æstimatae); f gravitatis in A vis acceleratrix, qualis vi telluris centrifugâ diminuta obvenit; Δ densitas hydrargyri puri, in calore memorato γ graduum; δ'' densitas aëris, mediae (ut supra posuimus) humiditatis, in calore gradum g'' , ratione supra allata determinatorum, a columnâ mercuriali altitudinis p'' , compressi, positis utique temperatura hydragyri = γ , vique gravitatis acceleratrice, qua id sollicitatur, = ϕ ; D densitas aëris in puncto E , in momento, quod antea memoravimus, temporis; tandemque n volumen, quo, pro uno gradu thermometri adhibiti, augetur vel minuitur volumen aëris humidi (datam materiæ quantitatem, portionemque vaporum, cum ipsa temperatura, uti supra statuimus, crescentem, continentis), quod in calore congelationis aquæ = i ponitur, assumtâ utique altitudine Barometrica, elasticitatem aëris absolutam exhibente, omnino constante, ex. gr. = p''' , factis quidem temperatura hydragyri, vique gravitatis acceleratrice, iisdem omnino, ac nuperrime, pro columnâ mercurii = p'' , adhibitæ sunt.

Ut jam, ante omnia, vis gravitatis acceleratrix

trix in puncto quolibet E determinetur, observandum utique est, alià hanc legem mutari, si infra telluris superficiem situm fuerit spatium AB , alià vero, si supra. In hoc quidem casu, quem in sequentibus præcipue examinabimus, observari utique oportet, adcurate loquendo, revera duplē ob caussam, gravitatis, ab A B versus eundo, decrescere vim: 1:o quia, crescente altitudine, actio vis centrifugæ, gravitationi opposita, augeatur (quæ tamen caussa minimi tantum momenti habenda); 2:o quia, aucta loci celsitudine, distantia a particulis telluris attrahentibus crescat, ipsaque adeo primitiva telluris attractio minuatur: quam

C quidem attractionem, cum figura telluris pæne sphærica habeatur, ejusque densitas, versus partes interiores crescens, in æqualibus a centro distantiis, fere eadem assumi queat, rationem distantiae locorum a centro duplicatam inversam, quam proxime sequi, supponi fere potest. In præsenti vero disquisitione, ad calculos simpliciores reddendos, totalem in E gravitationem (vii ipsa centri-

fugâ diminutam) = $\frac{a^2 f}{(a+x)^2}$ tantum posuisse, eo potius licet, quod decrementum gravitatis a superficie maris ad apices usque montium altissimorum, hac ipsa formula computatum, vel sub æquatore,

par-

parte tantum $\frac{1}{z^{\sigma}}$ a valore differat, qui citata nū per ratione adcuriori eruitur.

Hisce observatis, sumta jam $c = \text{basi constanti columnæ aëris, cuius altitudo} = AB$, facile utique patet, differentiale pressionis, aërem in puncto E comprimentis, dupli modo exhiberi posse; idque omnino tam per:

$- cdx \cdot D \cdot \frac{a^2 f}{(a+x)^2}$, quam: $d \cdot (cP\Delta \cdot \frac{a^2 f}{(a+x)^2})$, recte expressum iri; unde ista facile prodit æquatio:

$$\begin{aligned} - \frac{Ddx}{(a+x)^2} &= \Delta \cdot d \cdot \left(\frac{P}{(a+x)^2} \right) \\ &= \frac{\Delta ((a+x)^2 \cdot dP - 2(a+x) \cdot Pdx)}{(a+x)^4} \dots (1), \end{aligned}$$

quæ quidem fundamenti est habenda loco totius, quæ in sequentibus occurret, investigationis.

Ad valorem jam quendam ipsius D , qui hac in æquatione substituatur, eruendum, notandum utique est, per præcedentia, haberi:

$$p'' : p''' :: \delta'' : \dots \frac{p''' \cdot \delta''}{p''} = \text{densitati aëris (humidi- tatis}$$

tatis quasi mediae), in calore g'' graduum, altitudine Barometrica p''' , compressi;

$\frac{x + nG}{x + ng''} : \frac{p''' \delta''}{p''} :: \dots \frac{p''' \delta''}{p''} \cdot \frac{x + ng''}{x + nG}$ = densitati aëris temperaturæ G , sub eadem, ac nuper, pressione = p''' ; tandemque:

$\frac{p''' : p''}{p''' : p''} : \frac{\frac{p''' \delta''}{p''} \cdot \frac{x + ng''}{x + nG}}{\frac{p''' \delta''}{p''} \cdot \frac{x + ng''}{x + nG}} :: \dots \frac{\delta''(x + ng'')}{x + nG} =$ densitati aëris, in calore = G , altitudine mercuriali = p'' , compressi; quam igitur expressionem quantitate p''' omnino exemptam videmus, unde patet, hanc utique quantitatem ex arbitrio quidem nostro pendere posse.

Habemus igitur, per allata supra, analogiam sequentem:

$$p''.\varphi : P \cdot \frac{a^2 f}{(a+x)^2} :: \frac{\delta''(x + ng'')}{x + nG} :$$

$$D = \frac{P \cdot a^2 f \cdot \delta''(x + ng'')}{p''.\varphi \cdot (a+x)^2 \cdot (x + nG)},$$

qua quidem, valor, quem quæsivimus, ipsius D determinatus est.

Jam vero observandum est, hac in formula, quantitatem G , utpote non constantem, sed aliam

B

pro

pro aliis inter A & B locis, necessario functionis instar ipsius x considerari debere. Cum forma autem hujus functionis, ut calculo quid efficiatur, determinata esse debeat; hæcque determinatio, per naturam rei, hypothesibus tantum plus minusve probabilibus, niti possit; in sequentibus calorēm G , ab A B versus, uniformiter tantum decrescere ponemns, quæ quidem hypothesis, quamvis accuratissima forsitan omnium non sit, simplicissima tamen est, & a pluribus quoque auctoribus assumta. Quod si aliam vero ipsius x functionem pro G substitui placeat, notandum utique est, rationem analyseos, pro citata ruper hypotesi, in sequentibus occurrentis, adeo quidem late patere, ut ad alios quoque ipsius G casus, facile accommodari possit; hincque data habeatur ipsa norma hujusmodi calculorum, quæ quidem præcipuam eorum difficultatem continere censenda est.

Erit quidem, ex allatis nuperrime, jam:

$$G = \alpha - \beta x;$$

qua in formula determinatis α & β , ponendo $x = o$, $x = h$, habetur adeo:

$$G = g - \frac{(g - g')}{h} \cdot x .$$

Hinc

Hinc utique, in præsenti prodit hypothesi:

$$D = \frac{P \cdot a^2 f \cdot \delta''(I + ng'')}{p'' \cdot \varphi \cdot (a+x)^2 \cdot (I + ng - \frac{n(g-g')}{h} \cdot x)};$$

Huncque valorem, in æquatione supra inventa (I),
substituendo:

$$\begin{aligned} & - \frac{P \cdot a^2 f \cdot \delta''(I + ng'')}{p'' \cdot \varphi} \cdot \frac{dx}{I + ng - \frac{n(g-g')}{h} \cdot x} \\ & = \Delta \cdot ((a+x)^2 \cdot dP - 2(a+x) \cdot P dx), \end{aligned}$$

sive:

$$\begin{aligned} & - \frac{a^2 f \cdot \delta''(I + ng'') \cdot h}{p'' \cdot \varphi \cdot \Delta} \cdot \frac{dx}{(a+x)^2 \cdot ((I + ng)h - n(g-g')x)} \\ & = \frac{dP}{P} - \frac{2dx}{a+x}; \end{aligned}$$

Hincque, integrando:

$$\begin{aligned} & Const. + \frac{a^2 f \cdot \delta''(I + ng'') \cdot h}{p'' \cdot \varphi \cdot \Delta} \cdot \left(\frac{I}{(a+x) \cdot ((I + ng)h + n(g-g')x)} + \right. \\ & \left. \frac{n(g-g')}{((I + ng)h + n(g-g')x)^2} \cdot L! \cdot \left(\frac{(I + ng)h - n(g-g')x}{a+x} \right) \right) \\ & = L! \cdot P - 2 \cdot L! \cdot (a+x) \end{aligned}$$

A 2

(de-

(designando Logarithmos Hyperbolicos per L' .); i. e., ponendo $x = o$, $P = p$ atque $x = h$, $P = p'$, æquationemque posteriorem, hinc oriundam, a priori subtractando, unde eliminatur constans arbitraria:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 f \cdot \delta''(1+ng'') \cdot h}{p'' \cdot \phi \cdot \Delta} \cdot \left(\frac{x}{(1+ng)h + n(g-g') \cdot a} \cdot \frac{h}{a(a+h)} \right. \\ & + \left. \frac{n(g-g')}{((1+ng)h + n(g-g')a)^2} \cdot L' \cdot \left(\frac{(1+ng) \cdot (a+h)}{(1+ng') \cdot a} \right) \right) \\ & = L' \cdot \frac{p}{p'} + 2 \cdot L' \cdot \left(\frac{a+h}{a} \right) \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Ad eruendum jam hac ex æquatione valorem, quem quaerimus, ipsius h , observandum utique est, in hypothesi: $\frac{x}{a} = o$, eam in sequentem abire:

$$\frac{\delta'' \cdot f(1+ng'') \cdot h}{p'' \cdot \phi \cdot \Delta \cdot n(g-g')} \cdot L' \cdot \left(\frac{1+ng}{1+ng'} \right) = L' \cdot \frac{p}{p'};$$

unde valorem ipsius h generalem, qui functio est quantitatis a , formâ:

$$h = A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2} + \&c.$$

ut exhibeamus, facile ducimur; denotantibus utique A , B , C quantitates finitas, ab h & a immunes, calculo quoque progrediente determinandas. Hanc uti-

utique expressionem ipsius h , in æquatione nostra (2), substituendo; observando scilicet, quod:

$$\begin{aligned} L' \cdot \left(\frac{a+h}{a} \right) &= L' \cdot \left(1 + \frac{A}{a} + \frac{B}{a^2} + \text{&c.} \right) \\ &= \frac{A}{a} + \frac{B - \frac{1}{2} A^2}{a^2} + \text{&c.}; \end{aligned}$$

æquationemque prodeuntem, secundum dignitates negativas ipsius a disponendo; habetur:

$$\begin{aligned} &A \cdot \frac{n\delta''f(1+ng'').(g-g')}{p''.\varphi.\Delta} \cdot L' \cdot \left(\frac{1+ng}{1+ng'} \right) \\ &\quad - n^2(g-g')^2 \cdot L' \cdot \frac{p}{p'} \Bigg\} \\ &+ \frac{2A^2 \cdot n\delta''f(1+ng'').(g-g')}{p''.\varphi.\Delta} - 2n^2A(g-g')^2 \Bigg\} \\ &+ \frac{B.n\delta''f(1+ng'').(g-g')}{p''.\varphi.\Delta} \cdot L' \cdot \left(\frac{1+ng}{1+ng'} \right) \cdot \frac{1}{a} + \text{&c.} = 0; \\ &- 2n(1+ng)(g-g') \cdot A \cdot L' \cdot \frac{p}{p'} \Bigg\} \end{aligned}$$

unde facile determinantur:

$$\begin{aligned} A &= \frac{n \cdot p'' \cdot \varphi \cdot \Delta (g-g') \cdot L' \cdot \frac{p}{p'}}{\delta''f(1+ng'').L' \cdot \left(\frac{1+ng}{1+ng'} \right)}, \\ &= p''.\varphi.\Delta \end{aligned}$$

$$= \frac{p'' \cdot \varPhi \cdot \Delta}{\delta'' f} \cdot L' \cdot \left(\frac{p}{p'} \right) \cdot \left(I + \left(\frac{g' + g}{2} - g'' \right) \cdot n \right. \\ \left. + \left(g''^2 - \frac{g''(g' + g)}{2} - \frac{(g - g')^2}{12} \right) \cdot n^2 + \text{&c.} \right);$$

$$B = \frac{2np''^2 \cdot \varPhi^2 \cdot \Delta^2 (g - g') \cdot L' \cdot \frac{p}{p'}}{\delta''^2 \cdot f^2 (I + ng'')^2 \cdot \left(L' \cdot \left(\frac{I + ng}{I + ng'} \right) \right)^2} \cdot \left((I + ng) L' \cdot \left(\frac{p}{p'} \right) \right. \\ \left. + n(g - g') - \frac{n(g - g') \cdot L' \cdot \frac{p}{p'}}{L' \cdot \left(\frac{I + ng}{I + ng'} \right)} \right), \\ = \frac{2p''^2 \cdot \varPhi^2 \cdot \Delta^2}{\delta''^2 f^2} \cdot L' \cdot \left(\frac{p}{p'} \right) \cdot \left(I + \frac{1}{2} L' \cdot \left(\frac{p}{p'} \right) + \left(g' + g - 2g'' \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{7g + 5g'}{12} - g'' \right) \cdot L' \cdot \frac{p}{p'} \right) \cdot n + \text{&c.} \right);$$

&c.

Hincque erit utique:

$$h = \frac{p'' \cdot \varPhi \cdot \Delta}{\delta'' f} \cdot L' \cdot \left(\frac{p}{p'} \right) \cdot \left(I + \left(\frac{g' + g}{2} - g'' \right) \cdot n \right. \\ \left. + \left(g''^2 - \frac{g''(g' + g)}{2} - \frac{(g - g')^2}{12} \right) \cdot n^2 + \text{&c.} \right) \\ + 2p''^2.$$

$$+ \frac{2p''^2 \cdot \varphi^2 \cdot \Delta^2}{a \cdot \delta'^2 f^2} \cdot L' \left(\frac{p}{p'} \right) \cdot \left(I + \frac{1}{2} L' \left(\frac{p}{p'} \right) + \right. \\ \left. (g' + g - 2g'' + \left(\frac{7g + 5g'}{12} - g'' \right) \cdot L' \left(\frac{p}{p'} \right)) \cdot n + \text{&c.} \right) \\ + \text{&c.};$$

qui quidem valor est ille generalis, quem quæsivimus, altitudinis h .

§. III.

Ut hæc jam formula usibus practicis adcommodata reddatur, non solum, pro quantitatibus constantibus $p'', \delta'', g'', \Delta, n, \text{ &c.}$, substituendi sunt valores numerici maxime probabiles, experimentis dati; sed partes quoque quasdam ipsius formulæ, ulteriori quadam determinatione, in præsenti jam §. adferendâ, egere, facile perspicuum est.

Quod si igitur primum vires ipsas acceleratrices φ & f , supra adhibitas, consideremus, videbimus utique rationem earum inter se $\frac{\varphi}{f}$, in formula occurrentem, eo modo transformari debere, ut primo pateat intuitu, e quibus elementis hæc pendeat ratio, quomodoque, in casu quolibet speciali, hisce per observationes datis, determinari possit. Sit igitur pendulum simplex (ad spatiū aëre

aëre vacuum & temperaturam normalem reductum), prope superficiem maris, sub æquatore, longitudinis datæ E ; pendulum, huic isochronum, polare = Π ; erit utique valor penduli, præcedentibus isochroni, ad libellam maris, in latitudine quacumque $\Lambda = E + (\Pi - E)$. Sin Λ^2 . Positis igitur, $\phi = vi$ gravitatis acceleratrici, ad superficiem maris, sub latitudine λ' , atque $f (= vi)$ gravitationis in loco observationis inferiori = gravitati, ad altitudinem supra mare verticalem h' , in latitudine λ ; habebimus utique:

$$E + (\Pi - E) \cdot \text{Sin } \lambda'^2 : E + (\Pi - E) \cdot \text{Sin } \lambda^2 :: \phi : \frac{a^2 f}{(a - h')^2};$$

hincque:

$$\frac{\phi}{f} = \frac{a^2}{(a - h')^2} \cdot \frac{E + (\Pi - E) \cdot \text{Sin } \lambda'^2}{E + (\Pi - E) \cdot \text{Sin } \lambda^2}$$

$$= (1 + \frac{2h'}{a} + \&c.) \cdot \frac{E + (\Pi - E) \cdot \text{Sin } \lambda'^2}{E + (\Pi - E) \cdot \text{Sin } \lambda^2};$$

qui transformatus ille est valor, quem quæsivimus, rationis $\frac{\phi}{f}$.

Altera, quam hoc loco proponamus oportet, observatio, ad curatiorem respicit altitudinem Barometri