Dissertatio Astronomica

De

Methodo Inveniendi LATITUDINEM LOCI Ex observatis duabus Solis vel Stellæ cujusdam Altitudinibus.

Cujus

Particulam Posteriorem

Cons. Ampl. Fac. Philos. Aboëns.

Præside

Mag. JOH. HENR. LINDQUIST,

Math. Prof. R. & O. nec non R. Acad. Scient. Svec. Membro.

Pro Laurea

Publice ventilandam sistit

ANDREAS JOHANNES METHER,

end. Reg. Tavastensis.

In Auditorio Minori Die XVI Junii An. MDCCXCII.

H. A. M. C.

ABOÆ Typis FRENCKELLIANIS.

§. VI.

Ut commode adhiberi possit indirecta illa Problematis nostri solutio Douwesiana (§. §. IV. V) allata, pluresque evitentur calculi repetitiones, cautione aliqua in seligendis observationibus opus est. Dispiciendum itaque erit, quantus ex assumto quovis errore latitudinis suppositæ in singulis casibus oriatur error latitudinis secundum hanc methodum computatæ. Sit igitur latitudo supposita $= p$ & vera $= y$, latitudo vero qualis secundum regulas §. §. IV. V. traditas invenitur $= y'$, sintque harum differentiæ $y - p = u$ & $y' - y = w$: ponaturque angulus horarius ZPM (Figg. 1. 2.) qualis ex supposita latitudine $= p$ deducitur $= z$, verus autem hujus anguli valor $= z + \xi$. Quum admodum exiguæ supponantur quantitates u, w, & ξ, relatio earundem ad modum differentialium facillime investigatur. Quamobrem quum sit $Cosp\ Sinz = (Cosp + u)\ Sin(z + \xi)$, erit $\xi = utgptgz$. Hoc autem valore ipsius ξ substituto in æquatione:

Cos

$Cos(y - D) - Cos(y' - D) = 2 Cos D \, Cos y \, Sin \tfrac{1}{2}(z - m)^2$
$- 2 Cos D \, Cos(p + u) Sin \tfrac{1}{2}(z + \xi - m)^2$,
facta reductione obtinetur $w Sin(y' - D) =$
$= u Cos D \, Sin p \, (tg \, z Sin(z - m) - 2 Sin \tfrac{1}{2}(z - m)^2)$.
Hinc denique ob $Sin(z - m) = 2 Sin \tfrac{1}{2}(z - m) Cos \tfrac{1}{2}(z - m)$ nec non $tg z \, Cos \tfrac{1}{2}(z - m) - Sin \tfrac{1}{2}(z - m)$
$= \frac{Sin \tfrac{1}{2}(z + m)}{Cos z}$ invenitur

$$w = \frac{2 u \, Cos D \, Sin p \, Sin \tfrac{1}{2}(z - m) \, Sin \tfrac{1}{2}(z + m)}{Cos z \, Sin(y - D)}$$

Ex hac formula perspicitur, non sine errore adhiberi posse methodum istam *Douwesianam*, quoties admodum exigua fuerit sideris culminantis distantia a vertice; & quidem ita ut evanescente prorsus $y - D$, reliquis manentibus foret $w = \infty$. Quam ob caussam in hujusmodi casibus consultius erit secundum directam methodum Trigonometricam (§. 11.) calculos subducere. Quando autem major intercedit differentia inter elevationem Poli & Declinationem stellæ, commode adhiberi poterit methodus *Douwesiana*, & quidem ceteris paribus eo exactior hæc erit, quo propius ad ipsum tempus culminationis instituta fuerit alterutra observationum. Quinimo datis p & D semper ita sumi poterunt m & z, vel tempora observationum angulis horariis $z - m$ & $z + m$ respondentia ita eligi, ut ratio $w : u$ minor fiat data quavis ratione $1 : n$. Quum videlicet sit $\frac{w \, Sin(p - D)}{u \, Sin p \, Cos D} = \frac{2 Sin \tfrac{1}{2}(z - m)}{Cos z} \frac{Sin \tfrac{1}{2}(z + m)}{}$

 $= Cos m$

$= \frac{Cos\,m}{Cos\,z} - 1$; si statuatur $\frac{Sin\,(p - D)}{n\,Sin\,p\,Cos\,D} = r$, & sumatur $\frac{w}{u} < \frac{1}{n}$ denotante n numerum datum, erit $\frac{Cos\,m}{Cos\,z} < 1 + r$ seu $Cos\,z > \frac{Cos\,m}{1 + r}$; unde porro deducitur $tg\,\frac{1}{2}(z + m)\; tg\,\frac{1}{2}(z - m) < \frac{r}{2 + r}$ seu $tg\,\frac{1}{2}(z + m) < \frac{r\,Cotg\,\frac{1}{2}(z - m)}{2 + r}$. Hinc pro dato quovis m (vel $z - m$) definiuntur limites ipsius z (vel $z + m$) tales ut fiat $w < \frac{u}{n}$. Ex his principiis deducuntur, immo generaliores reddi possunt regulae, quas pro applicatione Methodi Douwesianae tradit Cel. MASKELYNE in *the Explanation and use of the Tables requisite to be used with the nautical Ephemeris.* Edit. 2. p. 21. 22.

§. VII.

Alia *Douwesianae* fere similis, verum multo compendiosior obtinetur regula latitudinem veram per approximationem inveniendi, si loco ipsius altitudinis meridianae stellae observatae investigetur excessus, quo altitudo haec superat majorem altitudinum datarum, qui excessus dicatur x. Hic vero ut concinniores reddantur formulae, praestat loco ipsarum altitudinum α & β earundem adhibere complementa, quae dicantur a & b, adeo ut sit $a = AZ$ (Figg. 1. 2.) $= 90^\circ - \alpha$ & $b = BZ = 90^\circ - \beta$, iisdem ac supra de cetero retentis denominationibus. Ex iis igitur quae antea demonstravivimus, liquet fore $Cos y Cos D Sin m Sin z = Sin \frac{1}{2}(a+b) Sin \frac{1}{2}(a-b)$ & $Cos(y-D) = Cos a + 2 Cos y Cos D Sin \frac{1}{2}(z-m)^2$ seu $Cos(y-D) - Cos a = 2 Cos y Cos D Sin \frac{1}{2}(z-m)^2 = 2 Sin \frac{1}{2}(a-y+D) Sin \frac{1}{2}(a+y-D)$. Est autem (hyp.) $x = a - y + D$; ergo $Sin \frac{1}{2} x Sin \frac{1}{2}(a+y-D) = Cos y Cos D Sin \frac{1}{2}(z-m)^2$. In prima & ultima harum aequationum, si pro y substituatur eidem quam proxime aequalis p, sequentes obtinentur formulae, quarum ope x investigari potest:

I.) $\gamma = Cos p \; Cos D$

II.) $Sin z = \dfrac{Sin \frac{1}{2}(a+b) Sin \frac{1}{2}(b-a)}{\gamma \; Sin m}$

III.) $Sin \frac{1}{2} x = \dfrac{\gamma \; Sin \frac{1}{2}(z-m)^2}{Sin \frac{1}{2}(a+p-D)}$

IV.) $y = a + D - x$.

Circa applicationem vero hujus methodi eadem observanda sunt, quae (§. VI.) de methodo *Douwesiana* monuimus, quippe cui quoad exactitudinem fere aequipollet. Aliquanto quidem major est illius aberratio in casu, quo una ante, altera post transitum stellae per meridianum instituta est observatio; minor autem, ubi utraque altitudo ad eandem partem meridiani observata est. Tanto magis vero haec nostra methodus *Douwesianam* concinnitate superat, calculumque admittit vulgarium tabularum logarithmicarum ope absolvendum, sine ulteriore quadam substitutione, qualem (§. V) methodus DOUWESII postulat; quamobrem illam præ hac commendare non dubitamus, præsertim si prope ad tempus culminationis alterutra observationum facta fuerit. De cetero in utraque methodo, quoties ob majorem differentiam $y - p$ calculum repetere opus est, si quantitatibus in prima observatione occurrentibus p, γ & z respondeant in secunda p', γ' & z' respective, aliquanto compendiosius invenientur γ' & z', si, existente $p' > p$ sumatur $L\,Cos\,p - L\,Cos\,p' = k$; quo facto erit $L\gamma' = L\gamma - k$, & $L\,Sin\,z' = L\,Sin\,z + k$. Vicissim vero quando est $p' < p$, sumto $L\,Cos\,p' - L\,Cos\,p = k'$, erit $L\gamma' = L\gamma + k'$, & $L\,Sin\,z' = L\,Sin\,z - k'$. Ob exiguam videlicet differentiam ipsorum p & p', logarithmi k & k' plerumque paucis figuris constant, quamobrem investigatio ipsorum γ' & z' hac ratione brevior evadit. Idem compendium in reliquis repetitionibus, quoties locum habent, observandum est.

Praxin hujus methodi eodem, quo in §. §. II & IV usi sumus, exemplo illustrabimus.

$p = 50°\ 40''$	$L\,Cos\,p = \overline{1}.8019735$
$D = -20°$	$L\,Cos\,D = \overline{1}.9729858$
$a = 70°\ 10'$	$L\gamma = \overline{1}.7749593$
$b = 72°\ 47'$	$-L\gamma = 0.2250407$
$\frac{1}{2}(a+b) = 71°\ 33$	$-L\,Sin\,m = 0.8843023$
$\frac{1}{2}(b-a) = 1°\ 14'$	$L\,Sin\,\frac{1}{2}(a+b) = \overline{1}.9770832$
$m = 7°\ 30$	$L\,Sin\,\frac{1}{2}(b-a) = \overline{2}.3329243$
$z = 15°\ 13'\ 40''$	$L\,Sin\,z = \overline{1}.4193505$
$z - m = 7°\ 43'\ 40''$	

$L\gamma = \overline{1}.7749593$

$\frac{1}{2}(z - m) = 3^\circ 51' 50''$ $2 L Sin \frac{1}{2}(z - m) = \overline{3}.6571456$

$a + p - D = 140^\circ 59'$ $- L Sin \frac{1}{2}(a + p - D) = 0.0256758$

$\frac{1}{2}(a + p - D) = 70^\circ 29' 30''$ $L\, Sin\, \frac{1}{2} x = \overline{3}.4577807$

$\frac{1}{2} x = 9' 52''$

$a + D = 50^\circ 19'$

$x = 19' 44''$

$y = 49^\circ 59' 16''$

Repetendo jam calculum posita $p' = 49^\circ 59' 16''$ erit $L\, Cos p' = \overline{1}.8081778$ adeoque $k' = 0.0062043$

$z' = 15^\circ 0' 29''$ $L\, Sin\, z' = \overline{1}.4131462$

$m = 7^\circ 30'$ $L\gamma' = \overline{1}.7811636$

$z' - m = 7^\circ 30' 20''$ $2 L Sin \frac{1}{2}(z' - m) = \overline{3}.6318392$

$\frac{1}{2}(z' - m) = 3^\circ 45' 10''$ $- L Sin \frac{1}{2}(a + p - D) = 0.0265959$

$a + p' - D = 140^\circ 18' 16''$ $L\, Sin\, \frac{1}{2} x = \overline{3}.4395987$

$\frac{1}{2}(a + p' - D) = 70^\circ 9' 8''$ $\frac{1}{2} x = 9' 27'', 5$

$a + D = 50^\circ 19'$

$x = 18' 55''$

$y = 50^\circ 0' 5''$

Hac ratione igitur eadem omnino invenitur latitudo quam supra (§. II.) methodo directa obtinuimus.

§. VIII.

In casu speciali, quo $D = o$ seu sidus observatum in ipso æquatore positum est, facillima invenitur problematis nostri solutio directa. Prioribus etenim adhibitis denominationibus, in hoc casu est $Sin\,\alpha = Cos\,y\, Cos(z - m)$ & $Sin\,\beta = Cos\,y\, Cos(z + m)$, unde $Sin\,\alpha$

$: Sin\,\beta$

$: Sin\beta :: Cos(z-m) : Cos(z+m)$ & comp. atque div. $tg\frac{1}{2}(\alpha+\beta) : tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta) :: Cotg m : Tg z$. Nulla igitur existente Declinatione sideris obbservati, commodissime investigatur latitudo loci secundum has formulas:

$$tg. z = Cotg m\, Tg\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) Cotg\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \;\&$$

$$Cos y = \frac{Sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\, Cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{Sin\, m}$$

§. IX.

Quum in problemate nostro binæ supponantur in eodem loco observatæ altitudines sideris cujusdam, nullus primo intuitu videtur esse ejus usus in re nautica, quoniam tamdiu in uno loco vix unquam manet navis, ut hujusmodi observationum instituendarum occasio detur. Interim tamen cum pro intervallo temporis, quo inter has observationes opus est, parum a se invicem distent diversa loca navis; haud difficile erit ex altitudine in uno observata altitudinem invenire, quæ in altero loco eodem temporis momento obtinebit, si præter distantiam locorum & angulum rhombi in quo movetur navis, pro altitudine reducenda simul observetur saltim quam proxime angulus azimuthalis. Si igitur in loco, cujus Zenith Z, (Fig. 3.) observata sit altitudo $= 90° - AZ$, & in altero loco, existente zenith in z', altitudo $= 90° - BZ'$, simulque observati sint angulus azimuthalis $BZ'P$ & angulus rhombi $ZZ'P$ nec non arcus ZZ' (qui scilicet tot continet minuta prima, quot milliarium maritiritimorum est distantia inter utrumque locum); ex his datis nec non cognita præterea declinatione stellæ atque tempore inter utramque observationem, sive huic (§. 1.) respondente angulo horario, latitudo loci, cujus vertex est z, determinari potest. Descripto scilicet polo *B* arcu *Z'K*, ob datos angulos *BZ'P* & *PZ'Z* (hyp.) nec non $BZ'K = 90°$, datur angulus *KZ'Z*; quamobrem in $\Delta ZZ'K$ (quod rectilineum sine errore censeri poterit) ob angulum ad *K* rectum invenitur $KZ = ZZ'. \mathrm{Sin} KZ'Z$. Hic arcus *KZ* dato *BZ'* additus vel ab eodem subtractus, prout *B* & *Z'* vel ad eandem vel ad diversas partes meridiani *EZP* sita fuerint, dabit *BZ* seu distantiam puncti *B* a Zenith Z, unde porro secundum methodos supra traditas pro hoc vertice Z latitudo computatur.

Si vero fuerit angulus $ZZ'P = 90°$ seu latitudo utriusque loci eadem, facilius poterit etjam sine observato angulo azimuthali ZZ'P, reductio ista institui, si manente utraque altitudine invariata solummodo corrigatur angulus horarius *m*. Existente scilicet (Fig. 4.) ZZ' arcu Circuli ad æquatorem paralleli, seu Z'P = ZP, & facto $\angle ZPB = \angle Z'PB'$ adeoque $\angle B'PB = Z'PZ$ nec non $PB' = PB$; erit $\Delta Z'PB' \sim \& = \Delta ZPB$, adeoque $BZ = B'Z'$. Evidens igitur est loca stellæ A & B' sub diversis verticibus Z & Z' æqualiter a polo distantibus observata, eandem determinatura esse latitudinem ac loca ejus A & B sub eodem vertice Z. Quamobrem ex dato arcu ZZ' & cognita quam proxime latitudine $= p$, primo computando angulum $Z'PZ = Z'Z. Cos p$, latitudo loci vera seu hujus complementum ZP pari ratione, ac ex observationibus in eodem loco Z factis, investigari potest, si retenta utraque datarum altitudinum, loco observati anguli horarii $APB' = 2m$ sumatur ang. $APB = 2m \mp Z'Z\ Cos p$, adhibito scilicet signo superiori, ubi puncta B' & Z' ad eandem, inferiori vero ubi ad diversas meridiani EZP partes cadunt. Hunc solum casum specialem, quo scilicet est $Z'P = ZP$, in reductione observationum sub diversis verticibus factarum considerat Cl. CHIERLIN, & præterea loco $\angle B'PB = z'z\ Cos p$ generatim assumit $\angle B'PB = Z'Z$, ut ex regulis & exemplis ad finem libri Ejus: *Sjömäns Dagelige Assistent* videre licet; quæ vero methodus notabilem haud raro gignere potest errorem.

Exempl. 1. Sub latitudine æstimata $= 59° 30'$ Bor. hora circiter I. p. m. existente declinatione Solis Bor. $= 4° 40'$ observata sit altitudo ejus $= 33° 40'$. Post interjectum tempus $= 1^h 47' 38''$ & emensum iter $56 \frac{2}{3}$ milliar. marit. in rhombo SW seu sub angulo EZZ' (Fig. 3.) $=$ PZ'Z $= 45°$, iterum observatur altitudo solis $= 27° 12'$ & azimuth ejus Bor. seu $\angle$ PZ'B $= 133° 25'$. In hoc casu erit $\angle$ ZZ'K $=$ PZ'B $+$ ZZ'B $- 90° = 88° 25'$, adeoque ZK $= 56', 67\ Sin\ 88° 25' = 56' 33''$. Quumque Z' & B ambo ad eandem partem ipsius EZP sita sint, BZ $=$ BZ' $+$ ZK $= 62° 48' + 56' 33'' = 63° 44' 33''$. Hac reductione facta secundum methodos superiores invenitur vera latitudo loci $= 60°$.

Exempl.

Exempl. 2. Exiſtente declinatione ſolis Bor. = 11° 17′ atque latitudine ſecundum conjecturam = 46° 50′ Bor. horologio indicante $10^h 26'$ a. m. obſervata ſit altitudo ſolis = 49° 13′. Poſt emenſum vero iter 30 mill. ſub angulo Z′ZP = 90° (Fig. 4.) verſus occidentem, $2^h 43'$ poſt merid. inventa ſit altitudo illius = 41° 13′. Ex datis ZZ′ = 30′ & *p* = 46° 50′ invenitur ∠ ZPZ′ = 20′ 30″ = BPB′. Intervallo temporis $4^h 17'$ reſpondet ∠ APB′ = 64° 15′, quamobrem erit ∠ APB = 63° 54′ 30″, quo invento, ſicut ſupra computatur latitudo correcta = 46° 48′.

§. X.

Quum hæc methodus latitudinem ex duabus obſervationibus colligendi, temporis intervallum inter utramque datum ſupponat, exacta vero temporis menſura, præſertim in navi fluctibus maris agitato difficillime obtineatur; examinandum erit, quantus ex dato errore temporis obſervati in caſu quovis proveniat error latitudinis, ut appareat, quale hinc methodo noſtræ ſtatuendum ſit pretium. Manentibus igitur utraque altitudine obſervata & declinatione ſideris, ſi angulus horarius = $2m$ augeatur quantitate exigua = $2dm$, quæritur quanta hinc oritur ipſius latitudinis variatio dy. Prioribus adhibitis denominationibus erit

$$\frac{Sin\,\alpha - Sin\,\beta}{2\,Cos\,D} = Cos\,y\;Sin\,m\;Sin\,z \;\&$$

$$\frac{Sin\,\alpha + Sin\,\beta}{2\,Cos\,D} = Cos\,y\;Cos\,m\;Cos\,z + tg\,D\;Sin\,y.$$

 Has

Has æquationes differentiando obtinetur

$dz \, Cotg z = dy \, tg y - dm \, Cotg m$, &

$-dz Cos y \, Cos m \, Sin z = dy (Sin y \, Cos m \, Cos z - Cos y \, tg D) + dm \, Cos y \, Sin m \, Cos z$; ex quibus exterminando dz factaque debita reductione, prodit $dy (tg y \, Cos m - tg D \, Cos z)$

$$= \frac{dm \, Sin (z + m) \, Sin (z - m)}{Sin \, m}$$

Ut vero hinc facilius supputari possit vatio $dy : dm$, ponatur $\frac{Cotg D \, Cos m \, tg y}{Sin \, z} = Cotg \psi$.

Hac videlicet facta substitutione, eruitur

$$dy = \frac{dm \, Cotg D \, Sin \psi \, Sin (z + m) \, Sin (z - m)}{Sin \, m \, Sin (z - \psi)}$$

Aliter ratio ista $dy : dm$ ita detegitur: Si ex datis locis stellæ A, B & Polo P (Fig. 4.) inventus sit locus verticis z; quæritur locus z′ in quem migrat zenith, dum reliquis manentibus punctum B transfertur in B', facto $\angle BPB' = 2dm$. Arcubus BB′, ZZ′, GZ′, BH & Z′Q polis P, A, B, Z′ & P respective descriptis, erit BG (= BZ′) = Z′H &(ob invariatas altitudines) BZ = B′Z′; adeoque GZ = B′H. Est vero $BB' = 2dm \, Sin BP$; B′H = $BB' Cos BB'H = 2 dm \, Sin BP \, Sin ZBP = 2 dm \, Sin$ PZ Sin BZP = GZ;

$$ZZ' = \frac{GZ}{Cos GZZ'} = \frac{2dm \, Sin PZ \, Sin BZP}{Sin \, AZB}, \; ZQ = ZZ' Cos Z'ZQ$$

$= ZZ' \, Sin \, EZA = ZZ' \, Sin \, AZP = dy$. Ergo

$$dy = \frac{2 \, dm \, Cos y \, Sin BZP \, Sin AZP}{Sin \, AZB}$$

Se-

Secundum hanc formulam ratio $dy:dm$ ope angulorum azimuthalium facillime computatur.

Hinc etjam si in alterutra observata altitudine, error quidam admittatur, inveniri poterit, quantum hic error afficiat latitudinem quæsitam; ex data scilicet variatione altitudinis investigatur variatio anguli horarii, unde porro secundum formulam allatam invenitur variatio latitudinis. Idem vero directe ita detegitur: Si reliquis manentibus altitudo β augeatur quantitate exigua $d\beta$, sumaturque (Fig. 3.) ZK $=$ $d\beta$ & Polis A, B & P respective describantur arcus ZZ′, KZ′ & Z′Q, erit ZQ quæsitum latitudinis augmentum. Est autem $d\beta = zk = zz'$. Cos BZZ′ $=$ ZZ′ Sin AZB, & $dy =$ ZQ $=$ ZZ′ Cos Z′ ZQ $=$ ZZ′ Sin EZA $=$ ZZ′ Sin AZP, adeoque $dy : d\beta :: Sin$ AZP : Sin AZB, seu

$$dy = \frac{d\beta \, Sin\, AZP}{Sin\, AZB}.$$

Simili ratiocinio, si loco altitudinis α sumatur $\alpha + d\alpha$, ceteris manentibus, demonstratur fore variationem latitudinis

$$dy = -\frac{d\alpha \, Sin\, BZP}{Sin\, AZB}.$$

Si igitur in utraque altitudine α & β atque angulo horario $2m$, simul obtineant errores $d\alpha$, $d\beta$ & $2dm$ respective, orietur error latitudinis

$$dy = \frac{2dm\, Cos\, y\, Sin\, BZP\, Sin\, AZP - d\alpha\, Sin\, BZP + d\beta\, Sin\, AZP}{Sin\, AZB}.$$

Hu-

Hujus formulæ ope in casu quovis judicium ferri poterit de exactitudine, qua ex observatis duabus altitudinibus latitudo loci determinatur. Et quidem manifestum fit, optimo successu hanc methodum adhiberi posse, si una altitudo, quantum fieri potest, proxime ad meridianum, altera vero circiter in primo verticali observetur. Angulo enim EZA evanescente & facto AZB $= 90°$, patet omnem errorum $d\beta$ & $2dm$ effectum evanescere, solumque errorem $d\alpha$ remanere. Quo igitur in casu hæc latitudinis inveniendæ ratio eandem (immo certo respectu majorem) præbet exactitudinem, ac vulgaris methodus altitudinum meridianarum.

Si binæ istæ altitudines ex quibus latitudo colligenda est, æquales fuerint (*) existente $d\alpha = d\beta$, erit $d\beta$ Sin AZP $-$ $d\alpha Sin$ AZP $= 0$. Hoc in casu ob Sin AZP $= Sin$ BZP $= Sin \frac{1}{2}$ AZB fit $dy = dm\ Cos y\ Tg \frac{1}{2}$ AZB, adeoque eo minor, quo ad meridianum propius utraque observatio facta sit.

Generatim ex datis limitibus errorum, qui in altitudinibus observandis & mensura temporis locum habere possunt, in casu quovis secundum formulam allatam ita sumere licet angulos AZP & BZP, ut minimus fiat

(*) In casu, quo $\alpha = \beta$, facilis est problematis nostri solutio directa, in ΔAPZ (Fig. 2.) ex datis duobus lateribus ($AZ = 90° - \alpha$ & $AP = 90° - D$) atque angulo $APZ = m$ secundum vulgares regulas Trigometricas computando latus tertium $PZ = 90° - y$. Patet enim ob $AZ = BZ$ & $AP = BP$ fore $z = 0$ & $\because APZ = BPZ = m$.

fiat error *dy* & latitudo haud raro majore certitudine quam ſecundum methodum vulgarem determinetur. Quibus igitur adhibitis cautionibus, contra methodum noſtram non valebunt objectiones factæ in *Nouveau Traité de Navigation par M.* BOUGUER, *revu & abregé par M.* DE LA CAILLE *§.§.5 26.528 Edit. 1769.*

§. XI.

Suppoſuimus in problemate noſtro declinationem ſideris obſervati invariatam. Quum vero in inveſtiganda ſecundum hanc methodum latitudine loci, ſolis altitudines plerumque adhiberi ſoleant, cujus declinatio majorem aliquando variationem ſubit, quippe quæ tempore æquinoctiorum unum fere minutum quavis hora efficit; hujus variationis ratio non ſine errore negligi poſſe videtur. Generatim quidem, utcunque inæquales fuerint declinationes, ſecundum præcepta in Schol. 2. §. 11. tradita ex duabus obſervatis altitudinibus latitudinem colligere licet. Ut vero conſtet, an ad prolixiorem hanc methodum in caſu quodam recurrere opus ſit, diſpiciendum erit, quanta ex data variatione declinationis in genere oriatur variatio latitudinis ſecundum problema noſtrum ſupputatæ. Sit igitur (Fig. 3.) z locus verticis ex ſuppoſitis æqualibus punctorum A & B declinationibus ſecundum regulas ſuperiores inventus; z′ vero locus in quem migrat zenith, dum ceteris manentibus arcus PB augetur quantitate exigua $BB' = dD$. Si polis A, B, z′ & P deſcripti intelligantur arcus zz′, z′ K,

BL

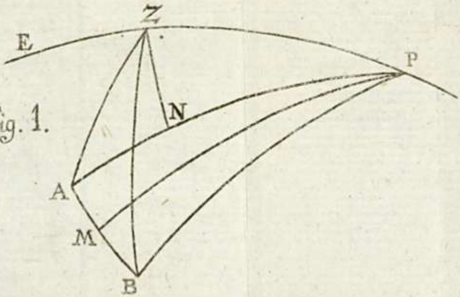

Fig. 1.

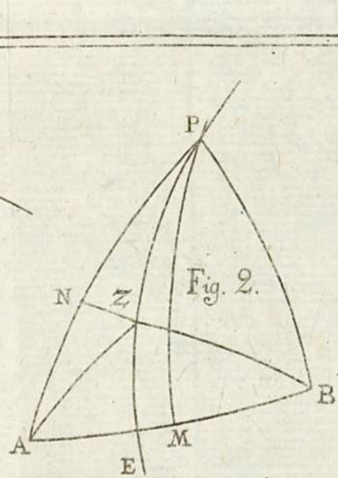

Fig. 2.

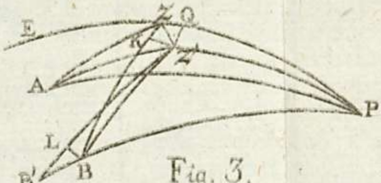

Fig. 3.

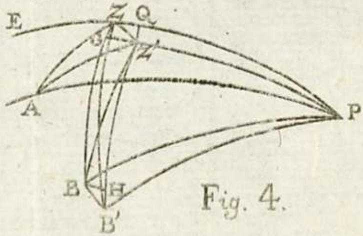

Fig. 4.

C: L: Schultze sculp:

BL & $z'Q$ respective; ob BK = BZ' = $Z'L$ & BZ = $B'Z'$, erit $B'L$ = KZ. Est autem $B'L = dD\, Cos\, ZBP$, $ZK = ZZ'\, Sin\, AZB$ & $ZQ = ZZ'\, Sin\, AZP = dy$. Ergo

$$dy = \frac{Cos\, ZBP.\; Sin\, AZP}{Sin\, AZB}\, dD.$$

Hinc patet, in casu, quo (§. X.) altitudinum datarum una proxime ad meridianum, altera ad primum verticalem observata est (in quo quidem casu maxima, quam in methodo nostra supponere licet, declinationis variatio locum habebit), errorem declinationis puncti B minime afficere latitudinem inventam, dummodo ipsius A declinatio = D exacte determinata sit.

Si manente puncti B declinatione = D, sumatur ipsius A declinatio = $D + dD$, simili ratiocinio demonstrabitur fore

$$dy = \frac{Cos\, ZAP.\; Sin\, BZP}{Sin\, AZB}\, dD.$$

Si vero sumatur media declinatio = D, adeo ut $90^\circ - AP = D + dD$ & $90^\circ - BP = D - dD$, erit

$$dy = \frac{dD\,(Cos\, ZBP\; Sin\, AZP + Cos\, ZAP\; Sin\, BZP)}{Sin\, AZB}.$$

Harum regularum ope, quoties major sit declinationis variatio, observationes eligi, atque calculus ita institui potest, ut error latitudinis minimus fiat.