Dissertatio Mathematica
De
Quadratura Parabolæ.

Quam
Cons. Ampl. Fac. Philos. Aboëns.
Præside
Mag. *Johanne Henrico Lindqvist,*
Math. Profess. Reg. & Ord. nec non Reg. Acad. Scient. Svec. Membro
Pro Laurea
Publice Examinandam sistit
Jacobus Johannes Lagerström,
Satacundensis.
In *Auditorio Majori* die III. Decembr.
MDCCLXXXV.
Horis ante meridiem consvetis.

Aboæ, Typis Viduæ R. Acad. Typogr. *J. C. Frenckell.*

Quadrare Curvam eſt invenire figuram rectilineam, ſpatio iſti curvilineo æqualem. Omnium autem curvarum ut ſimpliciſſima eſt Circulus, ita præ ceteris hujus etjam quadraturæ inveniendæ operam dederunt Geometræ. ANAXAGORAM jam ſuo ævo hac de re meditatum fuiſſe proditur, & HIPPOCRATES CHIUS Lunulam circularem quadrabilem primus invenit, quæ ab illo nomen ſortita, *Lunula Hippocratis* dicitur. Abſoluta vero Circuli quadratura quum non ſuccederet, eandem per approximationem invenire primus geometrice docuit Princeps ille antiquioris ævi Mathematicus ARCHIMEDES. Hic namque in ſuo de *Circuli Dimenſione* Libello, quadraturæ atque rectificationis hujus curvæ mutuum nexum detexit, Circulum ſcil. æquari oſtendens Triangulo, cujus baſis peripheriæ ejusdem atque altitudo ſemidiametro æqualis eſt, rationemque demonſtravit circumferentiæ ad diametrum minorem eſſe quam $3\frac{1}{7}$ ad 1. ſeu 22 : 7, majorem vero quam $3\frac{10}{71}$ ad 1. ſeu 223 : 71, indicata ſimul methodo generali, qua limitibus utcunque arctioribus hæc proportio circumſcribi poſſit. Quæ vero omnium primo detecta fuit curva, abſolutam atque generalem admittens quadraturam, eſt *Parabola Conica*,

Se-

Sectio Coni rectanguli veteribus dicta. Hujus nimirum segmentum quodvis ad triangulum, cujus eadem est basis eademque altitudo, eam habet rationem quam 4 ad 3. Egregii hujus inventi Auctor est idem ille ARCHIMEDES, ejusque ipse dedit descriptionem in Libro de *Quadratura Parabolæ*, ubi ex iis, quæ in libris suis de *æqueponderantibus* stabiliverat, principiis mechanicis atque centri gravitatis proprietatibus, quadraturam hanc primo deductam, alia magis directa & mere geometrica demonstratione, ex summatione progressionum geometricarum petita, ulterius munivit. Postea ab aliis eadem res tot diversis comprobata est methodis, ut harum quidem recensionem unum volumen vix comprehendere queat; in cujus rei exemplum nominasse sufficiat TORRICELLIUM, qui peculiari tractatu viginti septem diversis modis eandem Parabolæ quadraturam deduxit (cfr. G. W. KRAFFT *Instit. Geom. Sublim.* §. 12). Inventa tandem recentiori ævo Methodo Fluxionum, cujus ope maximo compendio & quasi ludendo hæc eadem quadratura elici potest, nihil in hac re amplius desiderari videbitur. Interim tamen quum ob elegantiam suam singularemque evidentiam magnopere se commendet methodus illa geometrica veteribus usitata, ulteriorem ejusdem culturam minime negligendam arbitramur. Quumque ex prælectionibus Cl. Præsidis in Doctrinam Sectionum Conicarum didicerimus peculiarem quandam *Parabolæ Conicæ* proprietatem, ex qua concinne admodum atque directe nostro quidem judicio, ejus *Quadratura* eruitur, materiam hanc Specimine Academico jam paucis exponere atque illustrare statuimus, operam nostram iis haud displicituram sperantes, qui plures nosse cupiant vias, ad eandem metam ducentes.

DEFINITIO.

Figura rectilinea Parabolæ *inscripta* dicitur, quando perimeter hujus per vertices singulorum illius figuræ angulorum transit. *Circumscripta* vero, cujus unumquodque latus (productum, si opus fuerit,) Parabolam contingit. Utramque *per eadem puncta* descriptam dicimus, quando latera figuræ circumscriptæ singula in singulis verticibus figuræ inscriptæ Parabolam contingunt.

AXIOMA.

Segmentum parabolicum quodvis majus est figura rectilinea in eodem segmento inscripta. Pariter figura quævis mixtilinea, a duabus tangentibus & arcu parabolico comprehensa, major est figura rectilinea circa eundem arcum parabolæ circumscripta.

LEMMATA.

1. Ductis ex puncto quocunque Parabolæ tangente & ordinata ad diametrum, est portio diametri in-

inter verticem & tangentem intercepta æqualis abscissæ per ordinatam ab eodem vertice.

2. In Parabola quævis recta diametro parallela est pariter ipsa diameter, bifariam secans omnes sibi ordinatim adplicatas seu rectæ in vertice ejusdem Parabolam contingenti parallelas.

3. Vicissim chorda quævis Parabolæ ordinatim adplicata est diametro, eandem chordam bisecanti.

4. Ordinatarum ad quamvis Parabolæ Diametrum quadrata sunt ut abscissæ a vertice ejusdem diametri.

5. Recta a puncto quovis parabolæ ad focum ducta æqualis est perpendiculari ab eodem puncto ad Directricem seu Lineam Sublimitatis demissæ.

6. Tangens in quovis Parabolæ puncto bifariam secat angulum interceptum rectis ad focum, & perpendiculari ad Directricem ab eodem puncto ductis.

Scholion. Notissimæ sunt & maxime vulgares, his Lemmatibus contentæ Parabolæ Conicæ proprietates, quarum qui desideraverit demonstrationes, eas apud quosvis Sectionum Conicarum Scriptores inveniet.

Propositio I.

Duabus lineis rectis Parabolam contingentibus, quæ puncta contactuum conjungit recta ordinatim adplicata erit Diametro per intersectionem contingentium ductæ.

Demonstr. Parabolam *BAC* (*Fig. 1.*) in punctis *B* & *C* contingant rectæ *BD* & *CD*, ex quarum intersectione *D* ducta sit Diameter *DF*, chordæ *BC* occurrens in *F*: dico chordam hanc in *F* bifariam secari. Si enim negas, bisecta sit chorda *BC* in alio aliquo puncto *Q*, per quod ducta diameter (adeoque per Lemma 2. ipsi *DF* parallela) *RQ* tangentibus *BD* & *CD* occurrat in *R* & *K* respective. Huic igitur diametro *RQ*, cujus dicatur vertex *V*, ordinatim adplicata erit *BC* (*Lemm. 3.*), unde (*Lemm. 1.*) ob contingentem *BR* erit $VR = VQ$, & ob contingentem *CK* pariter $VK = VQ$, adeoque foret *VK* ipsi *VR* seu pars toti æqualis, quod est absurdum. Nequit itaque *BC* ab alia quadam diametro præter *DF* bifariam secari, quare (*Lemm. 3.*) ipsi *DF* erit ordinatim adplicata *Q. E. D.*

Prop. 2.

Triangulum quodvis Parabolæ inscriptum duplum est Trianguli per eadem puncta Parabolæ circumscripti.

Dem. Sit Parabolæ *BEC* (*Fig. 1.*) inscriptum Triangulum *ABC* &, ductis per singulos hujus verti-

ces

ces tangentibus *HK*, *BD* & *CD*, fiat eidem circumscriptum Triangulum *HKD*: demonstrandum est, fore $\Delta\, ABC = 2\, \Delta\, HKD$. Si enim per intersectiones tangentium *H*, *D*, *K* ducantur Diametri *HN*, *DF*, *KQ*, his (*Prop.* 1.) ordinatim adplicata erunt latera trianguli inscripti *AB*, *BC*, *AC*, adeoque ab iisdem diametris bisecta in *M*, *F*, *L* respective. Ducta porro per *A* diametro *AP*, ob *HN*, *AP* & *KQ* parallelas (*Lemm.* 2.), bifariam sectæ (*Eucl. VI*: 2.) erunt etjam *BP* in *N* & *PC* in *Q*, quamobrem $BC = 2\, NQ$. Si igitur per *A* agatur ipsi *BC* parallela seu diametro *DF* ordinata *AG*, junctis *G*, *N* nec non *G*, *Q*, erit (*Eucl. VI*: 1.) $\Delta\, ABC = 2\, \Delta\, GNQ$. Quum vero per puncta parabolæ *A*, *B* ductæ sint tangentes *AK*, *BD* diametro *DF* occurrentes in *T*, *D*, nec non per eadem puncta eidem diametro ordinatæ *AG*, *BF*, erit (*Lemm.* 1.) $ET = EG$ & $ED = EF$, adeoque $TD = GF$. Quumque præterea ipsi *DF* parallelæ sint *HN* & *KQ*, erit (*Eucl. I*: 38.) $\Delta\, HDT = \Delta\, NGF$ atque $\Delta\, DTK = \Delta\, GFQ$, unde æqualia æqualibus addendo, fiet $\Delta\, HDK = \Delta\, NGQ$, sed $\Delta\, ABC = 2\, \Delta\, NGQ$ (*dem*), ergo erit $\Delta\, ABC = 2\, \Delta\, HDK$. Q. E. D.

Prop. 3.

Figura quævis rectilinea Parabolæ inscripta dupla est figuræ per eadem puncta circumscriptæ.

Dem.

Dem. In perimetro Parabolæ *BEC* (*Fig.* 2.) positi sint singuli anguli figuræ rectilineæ *BAEFC*, & per singula hæc puncta ducantur rectæ Parabolam contingentes *BGD*, *GAH*, *HEK*, *KFL* & *DLC*, comprehendentes figuram *DGHKLD*: dico figuram *BAEFC* esse duplam figuræ hujus *DGHKLD*. Ductis namque ex alterutro ang. *C* illius figuræ ad reliquos angulos *A*, *E* rectis *CA*, *CE*, productisque tangentibus *GH*, *HK* per hos angulos *A*, *E* transeuntibus, donec rectæ *CD* parabolam in *C* contingenti occurrant in punctis *I*, *O*, erunt singula triangula in figura inscripta *BAC*, *CAE*, *EFC*, dupla singulorum in circumscripta figura *GDI*, *IHO*, *OKL* respective (*Prop.* 2.); quare aggregatum illorum duplum erit aggregati horum seu figura inscripta *BAEFC* dupla circumscriptæ *DGHKL*. *Q. E. D.*

Scholion. Ex elegantissima, quæ hac propositione continetur, Parabolæ proprietate facillimum est hujus curvæ quadraturam elicere. Manentibus enim chorda *BC* nec non tangentibus *BD*, *CD* per puncta Parabolæ *B* & *C* ductis, si continua arcuum *BA*, *AE* &c. divisione, continuo imminuantur singula latera figuræ utriusque inscriptæ & circumscriptæ, eorundem vero augeatur numerus idque in infinitum; patet, figuram inscriptam ultimo desinere in segmentum a chorda *BC* & arcu parabolico *BAC* contentum, circumscriptam vero in figuram mixtilineam a tangentibus *BD*, *CD* & eodem arcu comprehensam. Unde Segmengmentum illud figuræ hujus mixtilineæ duplum erit, adeoque utriusque aggregatum seu Triangulum rectilineum *BDC* sesquialterum erit Segmenti parabolici *BAC*. Si vero hæc demonstrandi ratio, utpote ideæ cuidam infiniti superstructa, nimis abstrusa videatur, haud difficile erit, ex eadem proprietate Parabolæ aliam demonstrationem magis elementarem concinnare ope theorematis sequentis.

Prop. 4.

Triangula, quorum quodvis recta arcum parabolicum subtendente & binis tangentibus per terminos hujus ductis comprehenditur, sunt in ratione triplicata intervallorum, quibus Diametri per eosdem terminos transeuntes a se invicem distant.

Dem. Sint Parabolæ *BAE (Fig. 3.)* binæ chordæ *BA*, *AE* & per puncta *B*, *A*, *E* ductæ tangentes *BG*, *GAH*, *HE*, nec non diametri *BX*, *AY*, *EZ*: ostendendum est Triangula *BGA*, *AHE* esse in triplicata ratione intervallorum, quibus distant diametri *BX* ab *AY* & *AY* ab *EZ*. Productis enim tangentibus, donec diametris occurrant, scil. *BG* ipsi *AY* in *T*, & *GH* ipsis *BX*, *EZ* in *M*, *N* respective, ductisque per *B* & *E* diametro *AY* ordinatis *BP* & *EQ*; erit *MBPA* parallelogrammum *(Lemm. 2.)* adeoque *MB* = *AP (Eucl. I: 34.)* = *AT (Lemm. 1.)* & Δ *MAB*

$=\Delta$ *ABP* $=\Delta$ *ABT* $=\frac{1}{2}$ *Pgr. MAPB* (*Eucl. I: 34. 38.*). Sed ob *AT* & *MB* æquales & parallelas in $\Delta\Delta$ *AGT*, *MGB* erit (*Eucl. I: 29. 26.*) *AG* $=$ *MG* & *BG* $=$ *GT*, unde Δ *AGB* $=\Delta$ *MGB* $=\Delta$ *AGT*, quare Δ *AGB* erit dimidium ſingulorum æqualium $\Delta\Delta$ *AMB*, *ABP*, *ABT*, adeoque quadrans Parallelogrammi *MAPB*. Similiter oſtenditur eſſe Δ *AHE* $=\frac{1}{2}$ *ANE* $=\frac{1}{2}$ *AQE* $=\frac{1}{4}$ *Pgr. ANEQ*. Erit igitur Δ *AGB* : Δ *AHE* : : *Pgr. MAPB* : *Pgr. ANEQ* (*Eucl. VI: 15.*). Hæc vero Parallelogramma quum ob parallelas *MN*, *BP*, *QE*, pariter ac parallelas *MB*, *AQ*, *NE* ſint æquiangula, erunt (*Eucl. VI: 23.*) in ratione laterum *BP* : *QE* & *AP* : *AQ* compoſita. Sunt autem *AP* & *AQ* ut quadrata ordinatarum *BP* & *EQ* (*Lemm. 4.*) ſeu ratio *AP* : *AQ* duplicata rationis *BP* : *EQ*; quare ex his *BP* : *QE* & *AP* : *AQ* compoſita ratio erit triplicata ipſius *BP* : *QE* ſeu (*Eucl. V: 7.*) rationis *MA* : *AN*. Ergo Triangula *BGA*, *AHE* erunt in triplicata ratione ipſarum *MA*, *AN* ſeu intervallorum inter Diametros *MX*, *AY*, *NZ*; hæc enim intervalla, quippe quæ perpendiculis inter easdem diametros ductis menſurantur, ſunt ipſis *MA*, *AN* proportionalia. *Q. E. D.*

Scholion 1. Ducta quavis recta *XZ*, diametris *BX*, *AY*, *EZ* occurrens in *X*, *Y*, *Z*, quum ſit *XY* : *YZ* : : *MA* : *AN*; erunt quoque $\Delta\Delta$ *BGA*, *AHE* in ratione triplicata ipſarum *XY*, *YZ*.

Scho-

Scholion 2. Quoties igitur æqualia fuerint intervalla dictarum diametrorum seu *XY* = *YZ* (*Fig.* 3.), æqualia erunt quoque ΔΔ *BGA*, *AHE*. Hujus vero casus specialis demonstratio brevior & facilior ita adornari poterit. Sint (*Fig.* 2.) in Parabola *BEC* æqualia intervalla diametrorum *BM*, *AQ*, *EN*, adeoque portiones *BQ*, *QN* rectæ cujusvis *BC* ipsis interceptæ æquales; junctis *B* & *E*, ob parallelas *AQ*, *EN* æquales etjam (*Eucl.* VI: 2.) erunt *BR* & *RE*, quamobrem (*Lemm.* 3.) *BE* ordinata est diametro *AQ*. Productæ igitur tangentes *BG* & *EH* occurrunt diametro *AQ* pariter productæ in uno eodemque puncto *T* (*Prop.* 1.). Ob parallelas vero *BE* & *GH* (*Lemm.* 2.), erit (*Eucl.* VI: 4.) Δ *TRB* ∽ Δ *TAG* & Δ *TRE* ∽ Δ *TAH*, adeoque *BR* : *GA* (: : *RT* : *AT*) : : *RE* : *AH*. Quum vero sit *BR* = *RE* (*dem.*) erit quoque *GA* = *AH* (*Eucl.* V: 14.) adeoque (*Eucl.* I: 38.) Δ *BGA* = Δ *AHE*. Q. E. D.

Scholion 3. Si Parabolæ chorda quævis *BC* (*Fig.* 2.) in æquales secetur portiones quotcuncque *BQ*, *QN*, *NP*, *PC* & per singula puncta *B*, *Q*, *N*, *P*, *C* ducantur diametri, inter quarum vertices *B*, *A*, *E*, *F*, *C* constituantur Triangula *BGA*, *AHE*, *EKF*, *FLC*, chordis & tangentibus comprehensa, erunt (*Schol. præced.*) omnia hæc Triangula inter se æqualia. Eritque igitur Summa omnium horum Triangulorum æque multiplex Trianguli *BGA*, ac est chorda *BC* portionis *BQ*.

Scholion 4. Quum (*dem.*) ſit $\Delta\, BGA = \frac{1}{2}\, BTA$, ducta (*Fig. 2.*) AM per A tangenti BT parallela ſeu diametro BX ordinata & junctis M, Q nec non M, C, erit (*Eucl. I: 34. 38.*) $\Delta\, MQB = \Delta\, MAB = \Delta\, BTA$, adeoque $\Delta\, BGA = \frac{1}{2}\, \Delta\, BQM$. Eſt vero $\Delta\, MBC$: $\Delta\, MBQ$: : BC : BQ (*Eucl. VI: 1.*) in qua eadem ratione (*Schol. præc.*) quoque eſt Summa æqualium illorum Triangulorum BGA, AHE &c. ad $\Delta\, BGA$. Ergo erit Summa dictorum Triangulorum $= \frac{1}{2}\, \Delta\, MBC$.

Scholion 5. Datam igitur Parabolæ chordam quamcunque BC (*Fig. 2.*) facile eſt ſecare in tot partes æquales BQ, QN, NP &c. ut ductis per ſingula diviſionum puncta diametris & inter harum vertices conſtitutis ſicut ſupra Triangulis BGA, AHE, EKF &c., fiat horum Triangulorum Summa minor aſſignabili quovis ſpatio v. Ad rectam namque BC ſub dato angulo MBC, (quem ſcil. recta data BC & Diameter quælibet BM, comprehendunt) applicetur Parallelogrammum $BCTX = 4v$ (*Eucl. I: 44.*) & per X ducatur diametro BX ordinata XS, arcui parabolico occurrens in S, ac denique per S diameter SV datam chordam BC ſecans in V. Hoc facto ſecetur BC in partes æquales BQ, QN &c. quarum ſit quælibet $< BV$: atque erunt hæ BQ, QN &c. partes quæſitæ. Quum enim ſit $BQ < BV$, cadet Diameter AQ inter SV & BX, quamobrem erit $AM < SX$, adeoque $BM < BX$ & $\Delta\, BMC < BCX$. Sed Trian-

angu-

angulorum BGA, AHE &c. summa $= \frac{1}{2} \triangle MBC$ (*Schol.* 4.) & $\frac{1}{2} \triangle BCX = \frac{1}{4}$ *Pgr.* $BCYX = v$. Ergo erit ista summa $< v$. Posse vero rectam BC continua bisectione dividi in partes, quarum quælibet sit $< BV$, ex *Eucl.* X: 1. constat. Sed si eadem recta in ejusmodi partes ita divisa desideretur, ut simul minimus sit harum partium numerus, sumantur ipsius BV dupla, tripla & sic deinceps, quoad perveniatur ad primam ipsius multiplicium, quæ sit $> BC$. Sit ea BZ, & fiat BQ eadem pars ipsius BC ac est BV ipsius BZ; patet fore $BQ < BV$, quum sit (*Constr.*) $BC < BZ$. Nec dari partem quandam aliquotam ipsius BC, quæ sit $> BQ$, simulque $< BV$, inde constat, quod sit (*Constr.*) ipsius BV nulla multiplex simul $> BC$ & $< BZ$.

Scholion 6. Quæ in hac Prop. diximus de ratione Triangulorum BGA & AHE (*Fig.* 3.), valent etjam de $\triangle\triangle$ MAB & NAE, seu de ABP & AEQ, nec non de Parallelogrammis $MAPB$ & $NAQE$, quippe quorum eadem est proportio (*Eucl.* V: 15.); quoniam (*dem.*) est $\triangle BGA = \frac{1}{2} \triangle MAB = \frac{1}{2} \triangle ABP = \frac{1}{4}$ *Pgr.* $MAPB$, & $\triangle AHE = \frac{1}{2} \triangle NAE = \frac{1}{2} \triangle AEQ = \frac{1}{4}$ *Pgr.* $NAQE$.

Prop. 5.

Segmentum, arcu Parabolæ quovis & recta hunc subtendente contentum, duplum est spatii ab eodem arcu *cu & rectis in terminis ejus Parabolam contingentibus comprehensi.*

Dem. Subtendatur arcus Parabolicus BAC (*Fig.* 2.) recta BC, a cujus terminis B & C ductæ ſint tangentes BD & CD ſibi mutuo occurrentes in D, dicaturque Segmentum BEC compendii cauſſa s atque ſpatium $BECDB$, quod arcu & tangentibus continetur, f: dico eſſe $s = 2f$. Si enim non ſit $s = 2f$, erit aut $s > 2f$ aut $< 2f$. Sit primo $s > 2f$, ſitque eorum differentia $(s - 2f)$ æqualis ſpatio cuivis z, adeo ut $s = 2f + z$. Dividatur (ſicut docuimus *Prop.* 4. *Schol.* 5.) chorda BC in tot partes æquales BQ, QN, NP, PC, ut ductis per ſingula diviſionum puncta diametris BX, AQ, EN, FP, CT, & per harum vertices chordis BA, AE, EF, FC, nec non tangentibus BG, GH, HK, KL, LC, dato iſto ſpatio z minor fiat Triangulorum BGA, AHE, EKF, FLC ſumma. Dicamus brevitatis cauſſa hanc ſummam t, figuram vero ſegmento Parabolico inſcriptam $BAEFCB$, quæ ſcil. chordis continetur, i, nec non circumſcriptam ſeu tangentibus comprehenſam $GHKLDG$ c. Erit igitur $s + f = \Delta\, DBC = i + c + t$, quumque (*Hypoth.*) ſit $s = 2f + z$, nec non (*Prop.* 3.) $i = 2c$, addendo utrinque æqualibus illis f, his vero $c + t$, erit $s + f = 3f + z$ & $i + c + t = 3c + t$, adeoque $3f + z = 3c + t$. Jam vero eſt (*Axiom.*) $f > c$ & hinc $3f > 3c$, nec non (*Conſtr.*) $z > t$; ergo $3f + z > 3c + t$, quod repugnat (*dem.*). Nequit igitur eſſe $s > 2f$.

2:o Si ponatur $s < 2f$ seu $f > \frac{1}{2} s$, sit $f = \frac{1}{2} s + y$. Adhibita simili constructione (*Prop. 4. Schol. 5.*) fiat triangulorum BGA, AHE &c. Summa minor spatio dato y, dicanturque iterum hæc summa t, figura Parabolæ inscripta $BAEFCi$ & circumscripta $GHKLDGc$. Quum ut antea sit $s + f = \Delta\, DBC = i + c + t$, jam vero $f = \frac{1}{2} s + y$ (*Hypoth.*) atque $c = \frac{1}{2} i$ (*Prop. 3.*); add. utrinque æqualibus illis s, & his $i + t$, erit $s + f = \frac{3}{2} s + y$ & $i + c + t = \frac{3}{2} i + t$, ideoque $\frac{3}{2} s + y = \frac{3}{2} i + t$. Est autem $s > i$ (*Axiom.*), quamobrem $\frac{3}{2} s > \frac{3}{2} i$, & (*Constr.*) $y > t$, ergo $\frac{3}{2} s + y > \frac{3}{2} i + t$, quod iterum implicat (*dem.*). Nec igitur esse potest $s < 2f$. Quare erit $s = 2f$. *Q. E. D.*

Scholion 1. Ex hac *Prop.* facile elicitur quadratura cujusvis Segmenti Parabolici BEC. Quum enim (*dem.*) sit $s = 2f$ adeoque $s + f = \frac{3}{2} s$, erit $\Delta\, BCD$ sesquialterum Segmenti BEC, seu Segm. $BEC = \frac{2}{3}\, \Delta\, BDC$.

Scholion 2. Quum per demonstr. in *Prop. 4.* sit (*Fig. 3.*) $\Delta\, BGA = \frac{1}{2}\, \Delta\, MAB = \frac{1}{4}$ *Pgr.* $MAPB$, erit segmentum parabolicum $BA = \frac{1}{3}\, \Delta\, MAB = \frac{1}{6}$ *Pgr.* $MAPB$. Spatium vero parabolicum arcu BA, ordinata BP & abscissa AP comprehensum erit $= \frac{2}{3}$ *Pgr.* $MAPB$, quod scil. Parallelogrammum eadem abscissa eademque ordinata continetur.

Scholion 3. Potest etjam ex iis, quæ *Lemm. 5* & *6* continentur, Parabolæ proprietatibus, facile deduci

duci ejus quadratura. Si enim fuerit Parabolæ *AP* (*Fig. 4.*) vertex *A*, Axis *BM*, Focus *F* atque Directrix *BH*, ducaturque ejus tangens quæcunque *PT*, quæ cum arcu infinitesimo *PG* coincidat, ductis ex *P* & *G* ad Focum rectis *PF* & *GF*, nec non axi parallelis *PH*, *GO* atque demissis ex *G* in *PF* & *PH* perpendicularibus *GE* & *GK*, quum sit ang. *KPG* = ang. *EPG* (*Lemm. 6.*) adeoque in Triangulis rectangulis *PKG* & *PEG*, ob latus *PG* commune, *KG* = *GE* (*Eucl. I: 26.*), nec non *PH* = *PF* (*Lemm. 5.*), erit *PH*.*GK* = *PF*.*EG* adeoque (*Eucl. I: 41.*) = 2 Δ *PGF*, unde singula elementa infinitesima spatii mixtilinei *PABH* dupla erunt singulorum elementorum correspondentium Sectoris *PFA*, adeoque totum illud spatium *PABH* hujus Sectoris duplum. Si vero notionem hanc elementorum evanescentium evitare velis, facile erit iisdem principiis planiorem aliam superstruere demonstrationem, præmissa propositione sequente.

Prop. 6.

Ductis per duo quævis puncta Parabolæ diametris, nec non per alterutrum eorum tangente; comprehensum his diametris, tangente & directrice quadrilaterum duplum erit Trianguli, quod inter data illa puncta atque Focum constituitur.

Dem. In perimetro Parabolæ *AP* (*Fig. 4.*) sint data puncta *P*, *n*, per quæ transeant diametri (adeoque

que Directrici BH perpendiculares) PH, LS, ducaturque per alterutrum eorum P tangens PT, occurrens diametro LS in N & axi AM in T, junctis P, n, F; ostendendum est fore quadrilineum $PNSH = 2 \Delta PnF$. Ductis namque ex vertice parabolæ A ad axem AM, adeoque etjam ad diametrum PH, normali AC tangenti PT occurrente in U, atque per N, n, P ipsi AC parallelis NQ, nq, PLM, & per n, A tangenti PT parallelis pt, AD, nec non NR ex N normali ad PF: ob angulos PQN, PRN rectos adeoque æquales, atque ang. $NPQ =$ ang. NPR (*Lemm. 6.*) nec non latus PN commune, erit (*Eucl. I: 26.*) $NQ = NR$. Quumque etjam sit $PH = PF$ (*Lemm. 5.*) erit (*Eucl. I: 41.*) rectangulum $PHSL = 2 \Delta PNF$. Jam vero est $PC = MA$ (*Eucl. I: 34.*) $= AT$ (*Lemm. 1.*), & ob AT, PC parallelas sunt $\Delta\Delta$ PCU, TAU æquiangula, quamobrem etjam erunt æqualia. Addito igitur utrique quadrilatero $DPUA$, erit *Pgr.* $PTAD = \Delta DAC$. Ast ob parallelismum laterum sunt $\Delta\Delta$ pnq, DAC similia, adeoque (*Eucl. VI: 19.*) in ratione duplicata laterum pn, DA. Erit igitur (*Lemm. 4.*) $\Delta DAC : \Delta pnq :: DP : pP ::$ *Pgr.* $DPTA$: *Pgr.* $PTtp$ (*Eucl. VI: 1.*) unde, quum (*dem.*) $\Delta DAC =$ *Pgr.* $DPTA$, erit (*Eucl. V: 14.*) $\Delta pnq =$ *Pgr.* $PTtp$. Sed ob $pP = nN = qQ$ (*Eucl. I: 34.*) adeoque $pq = LN$, erit (*Eucl. I: 38.*) $\Delta LPN = \Delta pnq$; ergo $\Delta LPN =$ *Pgr.* $PTtp$. Quoniam vero (*Eucl. I: 41.*) est *Pgr.* $PNnp = 2 \Delta PNn$ & *Pgr.* $NTtn = 2 \Delta FNn$ atque

Summa △△ PNn, FNn æqualis est differentiæ, qua △ PNF excedit △ PnF, sequitur △ PLN esse duplum istius excessus Pn FN. Est autem (*dem.*) rectangulum PH SL duplum Trianguli PNF. Ergo etjam residuum quadrilaterum $PNSH$ duplum erit reliqui Trianguli PnF. *Q. E. D.*

Scholion 1. Si in Directrice BC parabolæ AKD (*Fig. 5.*) quotcunque sumantur partes æquales CP, PN, NQ, QB & per singula divisionum puncta agantur Diametri CA, PE, NK, QG, BD, patet 1:o ductas per bina quævis parabolæ puncta A, K tangentes diametro intermediæ PE ab utroque puncto æqualiter distanti in eodem puncto H occurrere (*Lemm. 1.* & *3.*) quoniam recta conjungens K & A a diametro secetur in eadem ratione ac NC adeoque bifariam. 2:o Ductis inter vertices harum diametrorum chordis AE, EK, KG, GD atque tangentibus AH, HKL, LD, fore triangula AHE, HEK, KGL, GLD æqualia inter se & (applicata EV ordinatim diametro CA) singula = △ EAV (*Prop. 4. Schol. 6.*). 3:o Facta $CT = AV$ & junctis T, P nec non T, B, fore singula hæc Triangula = △ TCP, adeoque eorum summam = △ TCB. Unde 4:o liquet datam quamcunque Directricis portionem BC dividi posse in tot partes æquales CP, PN &c. ut per singula divisionum puncta ductis diametris CA, PE, NK &c. atque inter harum vertices constitutis triangulis AHE, HEK &c. quæ a chordis, tangentibus & ipsis diametris comprehendantur, fiat omnimnium horum triangulorum summa minor dato quovis spatio v. Ad datam scil. rectam BC in dato angulo ACB applicetur (*Eucl. I: 44.*) parallelogrammum $= 2v$, vel $\triangle RCB = v$, & datæ hinc rectæ RC in diametro CA æqualis sumatur abscissa AU, cui ordinetur US parabolæ occurrens in S, ducaturque per S diameter SM directricem secans in M; quo facto recta data BC dividatur (*Prop. 4. Schol. 5.*) in partes æquales CP, PN &c. quarum quælibet sit $\lessdot CM$. Facta namque constructione sicut supra, qūum sit $CP \lessdot CM$, adeoque $EV \lessdot SU$ & (*Lemm. 4.*) $AV \lessdot AU$, sed (*Constr.*) $TC = AV$ & $RC = AU$, erit $TC \lessdot RC$, ideoque $\triangle TCB \lessdot \triangle RCB$ seu Triangulorum AHE, HEK &c. summa $\lessdot v$.

Scholion 2. Ductis (*Fig. 5.*) ex Foco F rectis FA, FD & facta de cetero eadem constructione ac in *Schol. præced.* erit figura rectilinea $AHLDBC$ dupla figuræ rectilineæ $FAEKGD$, quum (*dem.*) quadrilatera $AHPC$, $HPNK$, $KNQL$, $LQBD$ singula respective dupla sint Triangulorum, quorum bases sunt chordæ AE, EK, KG, GD & vertex communis F.

PROP. 7.

Spatium, quod arcu quovis parabolico, diametris per hujus terminos transeuntibus atque directrice comprehenditur, duplum erit Sectoris eodem arcu & radiis ad focum ductis contenti.

Dem. Sit arcus parabolicus AKD (*Fig. 5.*) & per hujus terminos A, D agantur ad focum F radii AF, DF, nec non diametri AC, DB directrici BC occurrentes in C, B; dictis brevitatis caussa spatio $AKDBC$, quod arcu AKD, diametris AC & DB atque directrice BC terminatur, m, sectore vero Parabolico FAD, quod eodem arcu & radiis FA ac FD comprehenditur, s, demonstrabitur esse $m = 2s$. Si enim non fuerit $m =$ $2s$, erit spatium m duplo s aut majus aut minus. Sit 1:o $m > 2s$ & ponatur $m = 2s + x$, fiatque dato spatio x aequale $\triangle\, RCB$ dato angulo RCB super datam rectam CB constitutum. Potest itaque (*Prop. 6. Schol. 1.*) data BC in tot secari partes aequales, ut ductis per singula divisionum puncta diametris & constructis inter harum vertices Triangulis, quae chordis, diametris & tangentibus comprehendantur, fiat horum triangulorum summa $< \triangle\, RCB$. Sint partes istae CP, PN, NQ, QB atque dicta triangula AHE, EHK, KGL, LGD, quorum aggregatum dicatur t, adeo ut sit $x > t$. Quae hac facta constructione prodeunt figurae rectilineae $FAEKGD$ & $AHLDBC$, dicantur i & c respective. Erit igitur $i + c + t =$ Pentag. $FACBD = s + m$, quamobrem quum sit $c = 2i$ (*Prop. 6. Schol. 2.*) atque $m = 2s + x$ (*Hypoth.*), erit $i + c + t = 3i + t$, & $m + s = 3s + x$, adeoque $3i + t = 3s + x$. Quoniam vero est $s > i$ (*Axiom.*) adeoque $3s > 3i$, nec non (*Constr.*) $x > t$, erit quoque $3s + x > 3i + t$, quod cum sit contra demonstrata, nequit esse $m > 2s$.

Sit

Sit 2:o $m < 2s$ seu $s > \frac{1}{2} m$, & ponatur $s = \frac{1}{2} m + x$. Facta simili constructione, retentisque iisdem denominationibus ac in casu priori, erit iterum $c + i + t = m + s$, quippe quorum utrumque æquatur figuræ pentagonæ *FACBD*. Jam vero est $i = \frac{1}{2} c$ (*Prop. 6. Schol. 2.*) atque $s = \frac{1}{2} m + x$, (*Hyp.*), ergo erit $c + i + t = \frac{3}{2} c + t$ & $m + s = \frac{3}{2} m + x$, adeoque $\frac{3}{2} c + t = \frac{3}{2} m + x$. Porro quum sit $m > c$ (*Axiom.*) & $x > t$ (*Constr.*) foret $\frac{3}{2} m + x > \frac{3}{2} c + t$, quod repugnat (*dem.*), quamobrem neque erit $m < 2s$. Sequitur itaque esse $m = 2s$. *Q. E. D.*

Scholion. Ex hac propositione deducitur quadratura cujusvis Sectoris parabolici *AFD*, radiis e Foco ductis *FA*, *FD* atque arcu his intercepto *AKD* comprehensi. Quum enim sit $m = 2s$ (*dem.*) adeoque $m + s = 3s$; sequitur Sectorem hunc esse trientem Figuræ pentagonæ *FACBD*, quæ iisdem radiis *FA*, *FD*, diametris *AC*, *DB*, atque Directrice *BC* continetur.

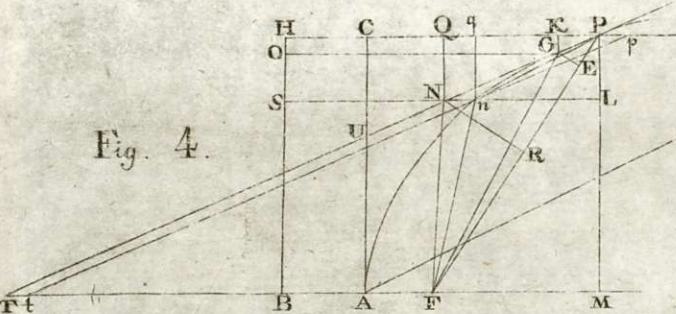

Fig. 4.

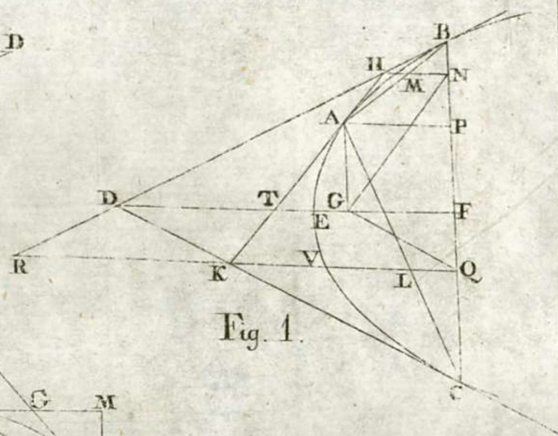

Fig. 1.

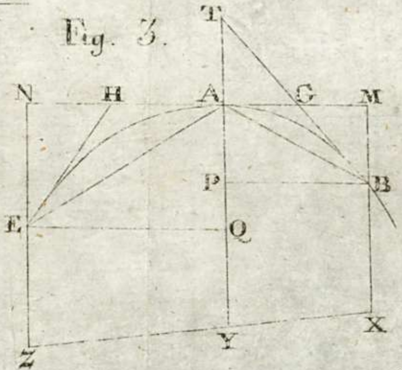

Fig. 3.

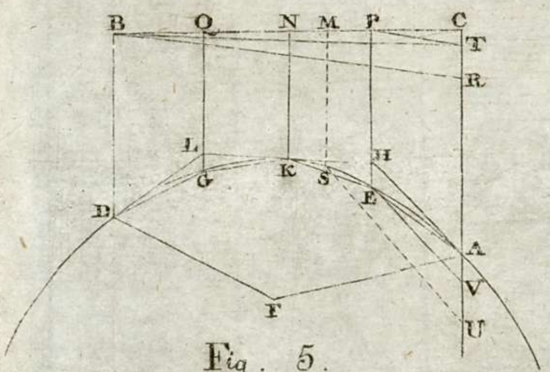

Fig. 5.

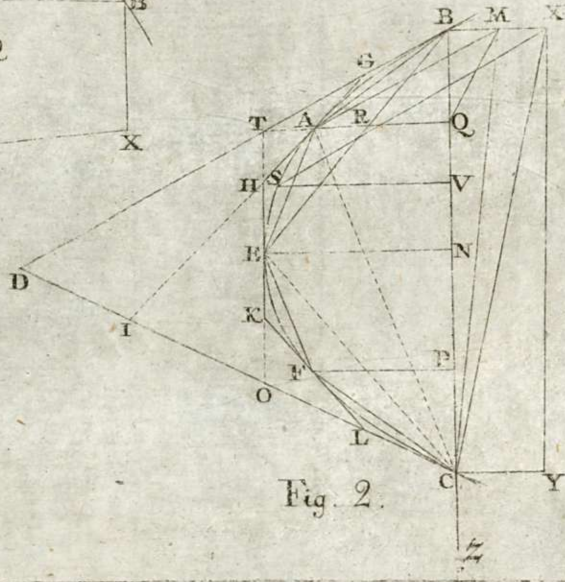

Fig. 2.

C. L. S. sc.