23

Dissertatio Mathematica
De
Sectionibus Ellipsoidicis,

Quam

Cons. Ampl. Facult. Philos. Aboëns.

Præside

Mag. JOH. HENR. LINDQUIST,
Math. Prof. R. & O. atque R. Acad. Scient. Svec. Membro,

Publice ventilandam sistit

CAROLUS GUSTAVUS UTTER,
Stipend. Reg. Satacundensis,

In Auditorio Minori die XIV. Junii MDCCXCIV.

H. A. M. S.

ABOÆ TYPIS FRENCKELLIANIS.

Viro

Plurimum Reverendo atque Præclarissimo

D:no Mag. JACOBO UTTER,

Vicario-Pastori ac Sacellano in Eura & Kiukais Meritissimo,

Parenti Indulgentissimo,

Hoc Specimen Academicum, in pignus animi gratissimi & filiali pietate perpetuum arsuri, sacratum voluit, debuit

Optimi Parentis

Filius obsequentissimus
CAROLUS GUSTAVUS UTTER.

§. 1.

Figura solida, quam Ellipsis Apolloniana circa fixum alterutrum axem gyrando describit, Sphæroides ellipticum, vel uno nomine *Ellipsoides* dicitur; quod quidem aut *oblongum* est aut *compressum*, prout circa axem vel majorem vel minorem rotatio ista facta fuerit. Figuram Ellipsoidis oblongi telluri nostræ tribuerat CASSINI, mensuris minus exactis deceptus. Alii, NEWTONUM secuti, & legibus æquilibrii & observationibus convenientiorem assumserunt hypothesin, qua figura terræ statuitur esse Ellipsoides compressum. Et quamvis adhuc sub judice de vera telluris figura litem esse agnoscamus, hujus tamen hypotheseos in Astronomia & Geographia etiamnum communis fere est usus, tum ob calculi concinnitatem quam admittit, quum ob minus notabilem & plerumque fere contemnendum errorem, quo a veritate abludit figura terræ ellipsoidica compressa, dummodo proportio axium debite determinetur. Quamobrem hujusmodi corporum Mathematicorum varias proprietates diligentius investigare, permultum interest.

Ex ipsa quidem Ellipsoidum genesi mox manifestum est, omnes eorum Sectiones a planis axi isti fixo normaliter insistentibus factas, circulares fore; Sectionem vero quamvis, quæ fit secundum hunc axem, esse ipsam Ellipsin generantem. Reliquas etiam superficiei ellipsoidicæ cum plano quocunque intersectiones ellipticas esse, ARCHIMEDES *in libro de Conoidibus & Sphæroidibus* jam docuit. Quomodo autem pro data quavis positione plani secantis, harum ellipsium dimensiones seu axes determinari & ad calculum revocari commode possint, Specimine hoc Academico paucis disquirere constituimus.

§. II. Fig. 1.

LEMMATA. Si in Ellipsi ADBE, cujus sint axes AB, DE & centrum C, ex dato quocunque puncto L ducatur diameter LCM & huic conjugata RCS, atque ad idem Ellipseos punctum L agatur normalis LP, axibus in P, Q & diametro RS in N occurrens, ponaturque semiaxis DC $= a$; AC $= na$ (seu ratio axium DE: AB : : 1 : n); angulus a normali LP & axe DE interceptus LPD $= L$; angulus LCD $= N$; & præterea assumatur angulus M talis, ut sit *Tang.* M : *TgL* : : n : 1; posito ubique Sinu toto $=1$, erit

1:o $Tang\, N = n\, Tg M = n^2\, Tg L$; 2:o $CL = \frac{a Cos M}{Cos N} = \frac{na Sin M}{Sin N}$;
3:o $CS = \frac{a Sin M}{Sin L} = \frac{na Cos M}{Cos. L}$; 4:o $LP = \frac{na Sin M}{Sin L} = \frac{n^2 a Cos M}{Cos L}$;
5:o $LQ = \frac{a Cos M}{Cos L} = \frac{a Sin M}{n Sin L}$; 6:o $LN = \frac{na Sin L}{Sin M} = \frac{a Cos L}{Cos M}$;
7:o $CP = (1-n^2)\, a Cos M$; 8:o $CQ = \frac{(1-n^2)\, a Sin M}{n}$;
9:o $CN = (1-n^2)\, a Sin L Cos M$.

Demonſtrationes horum Lemmatum videre licet in *Diſſ. qua reſolvuntur nonnulla Problemata, poſita figura telluris ellipſoidica, Præſide Cel.* M. J. Wallenio Aboæ 1767 a Th. Mattheiszen edita.

§. III. Fig. 2.

Theor. *Si Ellipſoides revolutione ellipſeos ADBE circa axem AB genitum, ſecetur plano quovis GQHO, ſectio erit Ellipſis.*

Dem. Ex centro Ellipſoidis C in planum ſecans agatur recta perpendicularis CF & per hanc atque axem AB ducatur planum, cujus igitur cum ellipſoide interſectio eſt ipſa ellipſis generans ADBE (§. 1), ipſumque hoc planum ADBE ad planum GQHO perpendiculare (*Eucl.* XI. 18). In communi horum planorum interſectione GH ſumatur punctum quodcunque P, per quod fiat ad axem AB perpendiculare planum UQVO, ſecans planum ADB in recta

UV & axem AB in N. Hujus igitur plani cum dato ellipſoide interſectio UQVO eſt circulus, diametro UV & centro N deſcriptus (§. 1). Planorum vero GQHO & UQVO communis ſectio OPQ quum (*Eucl.* XI. 19) ſit plano ADBE, adeoque etiam rectis GH & UV perpendicularis, in circulo UQVO erit OP = PQ (*Eucl.* III. 3) & PQ^2 (= OP. PQ) = UP. PV (*Eucl.* III. 35). Si jam in Ellipſi ADBE per datum punctum C ductæ ſint rectæ DE & RS ipſis UV & GH reſpective parallelæ, per communem Sectionum Conicarum proprietatem, erit UP. PV: GP. PH: : DC. CE: RC. CS, adeoque ratio UP. PV: GP. PH conſtans. Quamobrem, quum (dem) UP. PV = PQ^2, ubicunque in recta GH ſumtum fuerit punctum P, etiam conſtans erit ratio PQ^2: GP. PH. Sectio igitur GQHO erit Ellipſis.

Coroll. Quum (dem) ſit OP = PQ & angulus QPH rectus, adeoque in Sectione GQHO omnes ipſi OQ paralellæ ad angulos rectos biſecentur a recta GH ſeu ab interſectione communi plani GQHO cum plano per axem perpendiculariter eidem inſiſtente, ſequitur hanc rectam GH eſſe axem ellipſeos GQHO.

Scholion. Hæc eſt propoſitio XV:a *Libri de Conoid. & Sphæroid.* Archimedis. Et quamvis plures ejus condi poſſent demonſtrationes: hanc tamen, ab Archimedea parum recedentem, ut maxime concinnam adferre maluimus.

§. IV. Fig. 2.

PROBL. *Si Ellipsoides datum secetur plano per centrum; data inclinatione plani secantis ad axem* (*) *Ellipsoidis, invenire axes ipsius sectionis.*

Sol. & Dem. Sit planum secans RTS, cui ut in §. praeced. per centrum C & axem AB perpendicularis fiat ellipsis ADBE, quae planum illud RTS secet recta RCS. Haec igitur recta RS erit (§. 3. *Cor.*) axis Sectionis RTS & C ejus centrum; ductaque in plano RTS ex C ipsi RS perpendicularis CT erit semiaxis ipsi RS in sectione ista conjugatus. Datis jam semidiametro aequatoris DC $= a$, semiaxe AC $= na$, & inclinatione plani RTS ad axem seu angulo ACR $= \lambda$, inveniendi sunt Ellipseos RTS semiaxes CR & CT. Et quidem mox manifestum est, fore (*Eucl.* XI. 19. 13.) CT communem plani RTS & aequatoris intersectionem, adeoque CT ($=$ CD) $= a$, quod generaliter valet, qualiscunque fuerit inclinatio ista λ. Ad alterum vero semiaxem CR inveniendum, primo computandus est angulus, qui dicatur μ, talis ut sit $Tg\mu$

$= n$

(*) Brevitatis caussa axem istum fixum AB, circa quem in genesi Ellipsoidis gyrari ellipsis genitrix adsumitur, simpliciter *Axem*, & alterum illi conjugatum DE *Diametrum Aequatoris*, ipsumque circulum hac diametro descriptum *Aequatorem* appellabimus; quae vero denominationes, etsi ex Astronomia & Geographia mutuatae, generalem doctrinae hujus applicationem non restringent.

$= n\, Tg\lambda$: quo facto (*Lemm.* 2 vel 3. §. 2) habetur $CR = \frac{a \, Sin\, \mu}{Sin\, \lambda}$ seu $CR = \frac{na \, Cos\, \mu}{Cos\, \lambda}$.

Scholion. Quum Ellipsium areæ sint in ratione composita axium, sequitur in dato Ellipsoide Sectionem per centrum esse proportionalem ipsi CR. Quamobrem omnium harum Sectionum maxima in Ellipsoide oblongo erit ipsa Ellipsis genitrix, in compresso vero æquator.

§. V. Fig. 2.

THEOR. *Si Ellipsoides secetur planis parallelis, sectiones erunt similes* (h. e. axes illarum erunt in eadem ratione).

Dem. Sint plana secantia parallela GXH & RTS, & fiat ut prius per axem AB Ellipsis ADBE plano GXH, adeoque & plano RTS perpendicularis, quæ data plana secet in in rectis GH & RS. Erunt igitur GH & RS axes istarum sectionum (§. 3. *Cor.*) & quidem inter se æquidistantes (*Eucl.* XI. 16). Bisectis porro RS in C & GH in K, si per C, K ducatur recta LM, erit LM diameter in Ellipsi ADBE, atque GH & RS huic ordinatim applicatæ. Quamobrem per naturam Ellipseos erit $GK^2 : RC^2 :: LK.KM : LC.CM$. Si denique per LM plano ADBE normale erigatur planum LXTM, plana GXH & RTS secans in KX & CT, erit etiam sectio LTM Ellipsis

(§.

(§. 3.) & LM hujus axis (§. 3. *Cor.*), cui (ob angulos LKX & LCT rectos) ordinatim applicatæ sunt KX & CT; quare iterum $KX^2 : CT^2 :: LK. KM : LC. CM.$ Hinc (*Eucl.* V. 11) $GK^2 : RC^2 :: KX^2 : CT^2$ & (*Eucl.* VI. 22. V. 16) GK : KX :: RC : CT. Sunt autem GK, KX semiaxes sectionis GXH, & RC, CT ipsius RTS. Ergo.

Scholion. Hinc manifestum est, sectionum inter se parallelarum maximam esse illam, quæ per Centrum Ellipsoidis transit.

§. VI. Fig. 1.

Probl. *Si Ellipsoides datum plano utcunque secetur, data positione plani secantis, invenire axes sectionis.*

Sol. & *Dem.* Sit planum secans GXH, cui e centro Ellipsoidis C agatur perpendicularis recta CF eidem occurrens in F. Per axem AB & rectam C ducatur planum, cujus cum Ellipsoide intersectio ADBE est (§. 1) ipsa Ellipsis genitrix. Hujus vero cum plano dato GXH communis intersectio GH producta (si opus fuerit) occurrat axi in O & superficiei ellipsoidis in G, H, atque bisecta recta GH in K, in sectione GXH ex K ipsi GH erigatur normalis KX; quibus factis erit (§. 3 *Corol.*) *K* centrum & G*K*, *K*X semiaxes sectionis GXH. Si igitur ponatur semidiameter æquatoris $CD = a$, semiaxis $AC = na$,

distan-

distantia plani secantis GXH a centro C seu recta CF $= e$, & inclinatio hujus plani ad axem seu angulus HOB $= \lambda$, ex his datis invenire oportet G*K* & *KX*. Hunc in finem ducatur per puncta C, *K* recta LM & per C ipsi GH parallela RS, nec non Ellipsi ADBE ad punctum L normalis LQ, ipsis DE, AB & RS occurrens in punctis P, Q, N respective. Erit itaque in Ellipsi ADBE diametro LM ordinatim applicata GH, & RS diameter ipsi LM conjugata, quare $GK^2 : (LK.KM =) LC^2 - CK^2 :: RC^2 : LC^2$. Quum vero LQ normalis sit ad L, adeoque etiam ordinatis ad diametrum LM perpendicularis, erit LQ parallela rectæ FC, unde sequitur esse $\triangleleft$ FC*K* $\backsim$ $\triangleleft$ NLC & $\triangleleft$ OCF $\backsim$ $\triangleleft$ PQC, angulumque HOC $=$ CPQ $=$ LPD $= \lambda$. Si igitur quæratur angulus, qui dicatur μ, talis ut sit $Tg\mu = n\, Tg\lambda$, & ponatur angulus LCD $= v$, adeo ut (§. 2 *Lemm.* 1) $Tgv = n\, Tg\mu = n^2\, Tg\lambda$: erit $LC = \frac{a\, Cos\, \mu}{Cos\, v}$ (*Lemm.* 2); $RC = \frac{a\, Sin\, \mu}{Sin\, \lambda}$ (*Lemm.* 3); LN $= \frac{a\, Cos\, \lambda}{Cos\, \mu}$ (*Lemm.* 6), & ob $\triangleleft$ FC*K* $\backsim$ $\triangleleft$ NLC, LN: LC :: FC: C*K* seu $Cos\, \lambda\, Cos\, v : Cos\, \mu^2 :: e : CK$. Hinc si compendii caussa ponatur $\frac{e\, Cos\, \mu}{a\, Cos\, \lambda} = Sin\, \gamma$, erit $CK = \frac{a\, Cos\, \mu\, Sin\, \gamma}{Cos\, v}$, adeoque $\sqrt{(LC^2 - CK^2)} = \frac{a\, Cos\, \mu\, Cos\, \gamma}{Cos\, v}$; quibus valoribus in superiori analogia

sub-

ſubſtitutis, invenitur $GK = \frac{a \, Sin \, \mu \, Cof \, \gamma}{Sin \, \lambda}$. Quumque (§. §. 4. 5) ſit KX: GK: : CD: CR, erit $KX = a \, Cof \, \gamma$. Ex datis igitur a, n, e & λ, inveniuntur GK & KX ope ſequentium 4 formularum:

1:o $Tg\mu = n \, Tg\lambda$; 2:o $Sin \, \gamma = \frac{e \, Cof \, \mu}{a \, Cof \, \lambda}$;

3:o $GK = \frac{a \, Sin \, \mu \, Cof \, \gamma}{Sin \, \lambda}$; & 4:o $KX = a \, Cof \, \gamma$.

§. VII. Fig. 3.

Præter Sectiones, quæ fiunt per centrum Ellipſoidis, in diſquiſitionibus Aſtronomicis & Geographicis præcipui momenti ſunt iſtæ, quarum plana per lineam verticalem LO dati cujusdam loci L transeunt. In Ellipſoide igitur ſit ſemidiameter æquatoris CD $= a$, ſemiaxis AC $= \frac{1}{2}$ AB $= na$, BLA meridianus ellipticus Loci L, cujus latitudo (ſeu ang. LPD) $= L$, ſeceturque Ellipſoides ducto per LO plano HLXG, cujus ad meridianum inclinatio ſeu angulus XLD ſit $= \varphi$. Miſſo ex C in planum GLH perpendiculo CF & per OCF ducto plano; hujus cum plano GLH interſectio GH eſt (§. 3 *Cor.*) axis Ellipſeos GLH, cui conjugatus ſit ſemiaxis KX, qui determinatur biſecto GH in K, & facto angulo GKX recto. Ut jam ex datis a, n, L & φ inveniantur ſemiaxes ſectionis GK & KX, ducatur ex C in LO perpendiculum CN & jungantur F, N. Quum igitur (*Eucl.* I. 47)

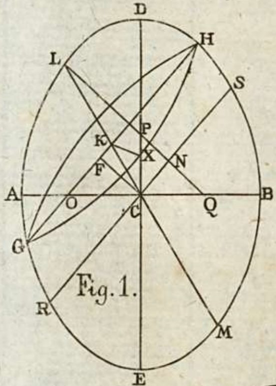

Fig. 1.

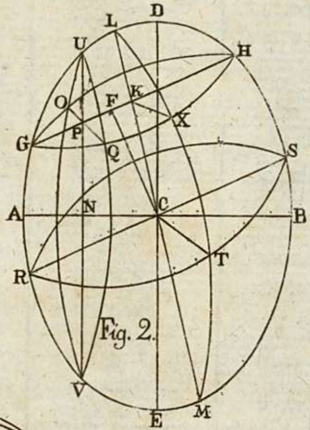

Fig. 2.

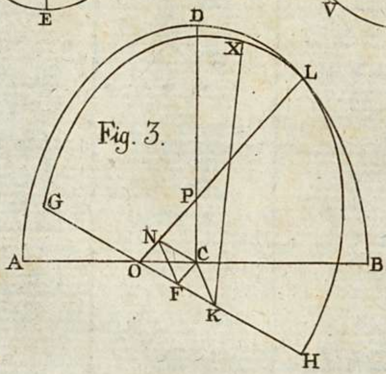

Fig. 3.

CL Schultz. sc.

I. 47) $CF^2 + FN^2 = CN^2$, & hinc $CF^2 + FN^2 + NO^2 = CN^2 + NO^2 = CO^2 = CF^2 + FO^2$, erit $FN^2 + NO^2 = FO^2$, adeoque (*Eucl.* I. 48) ang. FNO rectus. Erit itaque ang. $CNF = \phi$, & $CF = NC. Sin\,\phi$. Unde facto $n\,Tg\,L = Tg\,M$, ob $NC = (1 - n^2)\,a\,Sin\,L\,Cos\,M$ (§. 2. *Lemm.* 9), obtinetur $(1 - n^2)\,a\,Sin\,L\,Cos\,M\,Sin\,\phi = CF = e$. Porro si angulus COF dicatur λ, ob $CO = \frac{(1 - nn)\,a\,Sin\,M}{n}$ (§. 2. *Lemm.* 8) & CO: CF:: 1: $Sin\,\lambda$, erit $Sin\,\lambda = Cos\,L\,Sin\,\phi$. Inventis vero e & λ, applicando formulas §. præc. allatas ad hunc casum & debite reducendo, sequentes eruuntur regulæ, quibus solutio præsentis problematis absolvitur:

1:o $Tg\,M = n\,Tg\,L$; 2:o $Sin\,\lambda = Cos\,L\,Sin\,\phi$; 3:o $Tg\,\mu = n\,Tg\,\lambda$;

4:o $Sin\,\gamma = \frac{(1 - nn)\,Sin\,M\,Sin\,\mu}{nn}$; 5:o $KX = a\,Cos\,\gamma$;

6:o $GK = \frac{a\,Cos\,\gamma\,Sin\,\mu}{Sin\,\lambda}$.

Scholion. Si per punctum L concipiatur planum rectæ LO perpendiculare: manifestum est, hoc planum non nisi in puncto L superficiem Ellipsoidis contingere. Hujus igitur plani cum quovis per LO ducto plano HLG communis intersectio & perpendicularis erit ipsi LO, & sectionem HLG tanget in eodem puncto L. Quamobrem omnibus per LO transeuntibus Ellipsibus HLG ad punctum L communis erit normalis $LO = \frac{a\,Cos\,M}{Cos\,L} = \frac{a\,Sin\,M}{n\,Sin\,L}$ (§. 2. *Lemm.* 5).