4

# METHODUS INTEGRANDI ÆQUATIONES QUASDAM DIFFERENTIALES TERTII ORDINIS.

---

*Conſ. Ampl. Fac. Phil. Aboënſ.*

AUCTORE

**JOHANNE HENRICO LINDQVIST,**

Math. Doc.

RESPONDENTE

JOHANNE TENNBERG,

Stipend. Regio, Tavaſt.

Die 25 Maji 1774.

*Publice Examinanda.*

---

ABOÆ,

Typis JOHANNIS CHRISTOPHORI FRENCKELL.

S:Æ R:Æ M:TIS

*SUMMÆ FIDEI VIRO,*

REGIS REGNIQUE SVIO-GOTHICI SENATORI,

REGIÆ CANCELLARIÆ PRÆSIDI,

ACADEMIÆ ABOËNSIS CANCELLARIO,

ORDINUMQUE REGIORUM EQUITI ET COMMENDATORI,

*ILLUSTRISSIMO* ATQUE *EXCELLENTISSIMO*

COMITI AC DOMINO,

# DN. ULRICO SCHEFFER,

*MÆCENATI SUMMO.*

*ILLUSTRISSIME* ATQUE *EXCELLENTISSIME*

COMES,

*GRATIOSISSIME* DOMINE.

*S*ummo ILLUSTRISSIMÆ EXCELLENTIÆ TUÆ *in litterarum cultores favore, incomparabilique in Musas inprimis Auraicas benevolentia fretus,*

*fretus, incomtam hanc dissertatiunculam* EXCELLENTISSIMI TUI NOMINIS *splendore illustrare ausus sum, &, ut in* TUUM, MÆCENAS SUMME, *patrocinium atque clientelam me commendatum gratiosissime habeas, supplex veneror*

ILLUSTRISSIMÆ TUÆ EXCELLENTIÆ

*Cliens devotissimus*
JOH. H. LINDQVIST.

Licet multam Mathematici recentiori ævo operam collocaverint in excolendo *Calculo Integrali* sive methodo ex data relatione fluxionum inveniendi relationem quantitatum fluentium, hunc tamen calculum ceteris disciplinis Mathematicis quoad gradum perfectionis longe posteriorem adhuc esse fateri cogimur. Si eas solummodo consideremus æquationes differentiales, quæ non nisi duas involvunt quantitates variabiles, multa quidem eaque omnino egregia de harum integratione detecta summorum Geometrarum sagacitati debemus, quæ vero si cum iis comparentur, quæ adhuc in desideratis sunt, elegantissimam hanc doctrinam in plurimis deficientem videmus. Hoc ut de integratione æquationum differentialium primi ordinis valet, ita majori jure de æquationibus differentio-differentialibus seu secundi ordinis dicendum erit, maximo vero de æquationibus ordinum altiorum, quippe in quarum integratione parum adhuc præstitum est. Laudatæ hujus Scientiæ & elegantia & eximio tam in reliqua Mathesi, quam in Physica, usu permoti etiam nos statuimus vires hac in re periclitari, Tuis, B. L. oculis jam subjicientes quædam de integratione æquationum differentialium tertii ordinis, sub quo titulo nobis veniunt æquationes, in quibus fluxiones tertiæ, non vero altiores, occurrunt, nullo habito respectu dimensionum, ad quas differentialia inferiora in iis assurgant. Non vero existimes, hæc in lucem a nobis proferri eo animo, ut de incrementis Calculi Integralis nos aliquid mereri arbitremur. Tantilla enim hæc sunt, ut, si de augenda scientia quæstio sit, in censum venire nequeant. Satis habemus, si aliis ansam qualemcunque præbeamus præstantiora efficiendi. De occasione autem tractatiunculæ hujus conscribendæ, methodique nostræ indole in genere pauca præmittere lubet. Innotuit nobis ex litteris a Cel. Prof. LEXELL jam anno 1770 d. 25 Junii ad Cel. Prof. PLANMAN datis, Illum invenisse integrale hujus æquationis: $dyd^3y + ad^2y^2 + bdy^2d^2y + cdy^4 = o$. Ipsam vero suam integrationem cum simul non exponeret, hac de re inquirentibus nobis ante triennium contigit, unica adhibita substitutione redigere hanc æquationem ad aliam primi gradus per se integrabilem. Postea cum facto periculo plures etiam alias æquationes tertii ordinis hac methodo facile integrari posse animadverteremus, eandem exemplis quibusdam illustratam publici jam juris facere decrevimus. Consistit autem methodus nostra



in

in eo, ut pro transformatione illa communiter usitata, qua æquatio differentialis tertii ordinis inter $y$ variabiliter & $x$ uniformiter fluentes, substitutionibus successivis ex. gr. $dy = pdx$ & $dp = qdx$, reducitur ad aliam primas solum fluxiones continentem, in qua vero plures occurrunt variabiles denuo exterminandæ, potius adhibenda sit hujusmodi substitutio: $d^2y = pdy^2$, vel $d^2y = pdydx$ vel generatim $d^2y = pdy^n dx^{2-n}$, $d^2y = py^m dy^n dx^{2-n}$ &c. quo pacto fluxiones secundæ & tertiæ simul exterminantur & æquatio eruitur, in quam unica solum nova variabilis $p$ incurrit. Quoties hoc modo æquatio obtinetur integrationem sponte admittens, methodum nostram non sine aliquo calculi compendio adhiberi posse judicamus. Hinc simul colligere licet, methodum nostram tam generalem non esse, ut ad omnes æquationes tertii ordinis extendi queat; neque vero adhuc detecta est forma substitutionum, quæ in omni casu adhiberi posset.

## §. I.

$$dyd^3y + ad^2y^2 + bdy^2d^2y + cdy^4 = 0.$$

Hanc æquationem: $dyd^3y + ad^2y^2 + bdy^2d^2y + cdy^4 = 0$, vel ideo primo loco integrandam nobis proponimus, quod occasione hinc accepta in methodum inciderimus, cujus usum in integrandis æquationibus differentialibus tertii ordinis exemplis quibusdam jam illustrabimus.

Ad inveniendum igitur ejus integrale, ponimus

mus $d^2y = pdy^2$, unde fit $d^3y = dpdy^2 + 2p^2dy^3$, quibus ipsarum $d^2y$ & $d^3y$ valoribus in æquatione proposita substitutis, facta debita reductione obtinetur æquatio:

$$dy + \frac{dp}{\overline{a+2}.pp + bp + c} = 0,$$

in qua variabiles jam sunt separatæ, quæque ideo per se integrabilis est.

Potuisset etiam generatim poni $d^2y = pdy^m dx^{2-m}$, denotante $dx$ fluxionem constantem, qua facta substitutione hæc erueretur æquatio:
$dp + \overline{a+m}\, p^2 dy^{m-1} dx^{2-m} + bpdy + cdy^{3-m} dx^{m-2} = 0$; in qua vero æquatione si absque nova substitutione variabiles separentur, mox patet statuendum esse $m = 2$, quo facto eadem quæ antea obtinetur æquatio integrabilis.

Ut jam detegatur relatio inter ipsas fluentes $x$ & $y$, ex integrata æquatione: $dy + \frac{dp}{\overline{a+2}\, pp + bp + c} = 0$, eruatur valor ipsius $p$, quo substituto in $d^2y = pdy^2$ vel $\frac{d^2y}{dy} = pdy$, denuo integrando obtinetur $L\frac{Ady}{dx} = \int pdy$ seu $dx = AN^{-\int pdy} dy$, (denotante L logarithmum hyperbolicum, N numerum, cujus logarithmus hyperbolicus $= 1$, & A quantitatem quamvis constantem), unde relatio inter $x$

 & $y$

& $y$ determinari potest. In eo igitur cardo rei præcipue versatur, ut inveniatur valor novæ illius variabilis $p$, quocirca sequentes seorsim considerandi sunt Casus:

*Cas. I.* Si $b^2 > 4c.\overline{a+2}$, statuatur $b^2 - 4c.\overline{a+2} = n^2$ & fiet $dy = -\frac{dp}{\overline{a+2}\,pp+bp+c} = -\frac{4c\,dp}{(\overline{b+n}\,p+2c)(\overline{b-n}\,p+2c)}$, seu $n\,dy = \frac{\overline{b-n}\,dp}{\overline{b-n}\,p+2c} - \frac{\overline{b+n}\,dp}{\overline{b+n}\,p+2c}$, unde integrando $CN^{ny} = \frac{(b-n)p+2c}{\overline{b+n}.p+2c}$ & $p = \frac{2c(CN^{ny}-1)}{b-n-\overline{b+n}.CN^{ny}}$, denotante $C$ constantem arbitrariam. Hinc porro habetur $\frac{d^2y}{dy} = \frac{2c\,dy(CN^{ny}-1)}{b-n-\overline{b+n}\,CN^{ny}} = -\frac{2c\,dy}{b-n} - \frac{\overline{b+n}.\,n\,CN^{ny}dy}{\overline{a+2}(b-n-\overline{b+n}\,CN^{ny})}$, cujus integrale est: $dx = \frac{AN^{\frac{2cy}{b-n}}dy}{(b-n-(b+n)CN^{ny})^{1:(a+2)}}$.

*Cas. 2.* Si $b^2 < 4c.\overline{a+2}$, statuatur $4c.\overline{a+2} - b^2 = r^2$, & hac transformatione utendum erit: $-dy = \frac{dp}{\overline{a+2}\,pp+bp+c} = \frac{4(a+2)}{rr}.\frac{dp}{1+\left(\frac{2(a+2)p+b}{r}\right)^2}$ cujus integrale est: $\frac{r(C-y)}{2} = Arc.Tang.\frac{2.(a+2).p+b}{r}$,

 existen-

existente Sinu Toto $= 1$. Hinc vero prodit $p = \frac{-1}{2(a+2)}\left(b - r\,Tang.\,\frac{r(C-y)}{2}\right)$, & $\frac{d^2y}{dy} = \frac{-b\,dy}{2(a+2)} + \frac{r\,dy}{2(a+2)}\,Tg\,\frac{r.(C-y)}{2}$, unde integrando $dx = \frac{AN^{by:2(a+2)}dy}{\left(Cos.\frac{r.(C-y)}{2}\right)^{1:(a+2)}}$.

*Cas.* 3. Si $b^2 = 4c.(a+2)$, fiet $dy = -\frac{4c\,dp}{(bp+2c)^2}$, cujus integrale est: $C + by = \frac{4c}{bp+2c}$, unde $p = \frac{4c}{b(C+by)} - \frac{2c}{b}$, adeoque $dx = \frac{AN^{\frac{2cy}{b}}dy}{(C+by)^{1:(a+2)}}$.

*Cas.* 4. Si $a+2=0$, seu integranda sit æquatio: $dyd^3y - 2d^2y^2 + bdy^2d^2y + cdy^4 = 0$ erit $dy + \frac{dp}{bp+c} = 0$, adeoque $CN^{-by} = bp + c$ seu $p = \frac{CN^{-by} - c}{b}$ & $\frac{d^2y}{dy} = \frac{CN^{-by}\,dy}{b} - \frac{c\,dy}{b}$, unde $L\frac{A\,dx}{dy} = \frac{cy}{b} + \frac{CN^{-by}}{bb}$.

*Cas.* 5. Si $c = 0$, seu proposita sit æquatio:

$ayd^3y$

$dyd^3y + ad^2y^2 + bdy^2d^2y = 0$; erit $dy = \frac{-dp}{p(a+2p+b)} = \frac{a+2}{b}.\frac{dp}{a+2p+b} - \frac{dp}{bp}$, unde $\frac{(a+2)p+b}{p} = CN^{by}$, $p = \frac{b}{CN^{by}-a-2}$, $\frac{d^2y}{dy} = \frac{bdy}{CN^{by}-a-2}$, & $\left(\frac{Adx}{dy}\right)^{a+2} = \frac{N^{by}}{a+2-CN^{by}}$.

Hæc vero æquatio: $dyd^3y + ad^2y^2 + bdy^2d^2y = 0$ divisa solummodo per $dyd^2y$, absque ulla substitutione, per se integrabilis redditur. Fit enim $\frac{d^3y}{d^2y} + \frac{ad^2y}{dy} + bdy = 0$, cujus integrale est $N^{by}dy^a d^2y = Cdx^{a+2}$ seu $\frac{dy^{a+1}d^2y}{dx^{a+2}} = CN^{-by}dy$. Hæc rursus integrata dat $\frac{bdy^{a+2}}{(a+2)dx^{a+2}} = A - CN^{-by}$, quæ solis constantibus differt a priori.

*Cas.* 6. Si simul fuerit $a+2=0$ & $c=0$ seu integrale quæratur æquationis: $dyd^3y - 2d^2y^2 + bdy^2d^2y = 0$, erit $bdy + dp:p = 0$, $p = CN^{-by}$, $d^2y:dy = CN^{-by}dy$ & $bL(Adx:dy) = CN^{-by}$. Hæc autem æquatio $dyd^3y - 2d^2y^2 + bdy^2d^2y = 0$ pariter divisa per $dyd^2y$ statim fit per se integrabilis. Prodit nimirum $d^3y:d^2y - 2d^2y:dy + bdy = 0$, unde $N^{by}d^2y:dy^2 = C$ & $bL(Adx:dy) = CN^{-by}$.

*Cas.* 7. Si $a+2 = b = 0$ seu integranda sit

æqua-

æquatio $dyd^3y - 2d^2y^2 + cdy^4 = 0$, erit $cdy + dp = 0$, $p = C - cy$, $d^2y:dy = Cdy - cydy$ & $dx^2 = AN^{cyy-2Cy}dy^2$.

*Cas.* 8. Si $b = c = 0$ seu integranda proponatur æquatio $dyd^3y + ad^2y^2 = 0$, fit $dp + (a+2)p^2dy = 0$, unde $p = 1:(C + (a+2)y)$ & $dx = Ady:(C + (a+2)y)^{1:a+2}$.

*Cas.* 9. Si $a + 2 = b = c = 0$, seu integranda sit æquatio $dyd^3y = 2d^2y^2$, ob $dp = 0$ fit $p = C$, adeoque $dx = AN^{-Cy}dy$; idem quod ex *Cas.* 7. etiam colligere licet.

*Schol. I.* Patet hinc, qua ratione æquatio nostra in Casu quovis reducatur ad æquationem primi gradus, in qua $dx:dy$ semper æquatur functioni cuidam ipsius $y$. Postrema hæc æquatio aliquando quidem facillime integrari potest, ex. gr. in *Cas.* 8 & 9, item in *Cas.* 1. quoties fuerit $2c:(b-n) = n$, &c. Non vero patet adhuc via integrationem hanc generatim instituendi. Sufficit nobis obtinuisse æquationem primi ordinis, in qua variabiles sunt separatæ, & ex qua sic relatio inter fluentes $x$ & $y$ saltim per quadraturas erui potest.

*Schol.* 2. Integrationem æquationis: $dyd^3y + ad^2y^2 + bdy^2d^2y + cdy^4 = 0$ primus, quod quidem nobis constat, præstitit Cel. Prof. LEXELL. Methodum, quam adhibuit, uberius expositam videre licet in *Nov. Comment. Petrop. Tom. XIV Part. I.*

Assu-

Aſſumit nim. ejus integrale eſſe hanc æquationem: $d^2y + \alpha dy^2 = \beta N^{\lambda y} dy^m dx^{2-m}$, quæ differentiata & cum priori comparata præbet $m = a$, $\lambda = (-b \pm n):2$, (poſito $b^2 - 4c.\overline{a+2} = n^2$) & $\alpha = -c:\lambda$. Hinc pro duplici valore ipſius $\lambda$ duæ ſequentes oriuntur æquationes differentio-differentiales:

$$d^2y + 2c\,dy^2:(b-n) = AN^{(-b+n)y:2} dy^{-a} dx^{a+2}, \text{ \&}$$
$$d^2y + 2c\,dy^2:(b+n) = BN^{(-b-n)y:2} dy^{-a} dx^{a+2},$$

quarum poſterior ſi a priori ſubtrahatur, reſiduum dabit integrale quæſitum: $n\,dy^{a+2}:(a+2) = N^{by:2} dx^{a+2}(AN^{ny:2} - BN^{-ny:2})$, cujus cum integrali ſupra (*Caſ. 1.*) invento convenientia facile patet.

*Schol.* 3. Aliam ejusdem æquationis integrationem dedit Cel. Prof. MELANDER in *Kongl. Wet. Acad. Handl.* pro Anno 1772, p. 92, quæ ita ſe habet. Poſita $dy = dx:u$, fit $d^2y = -dx\,du:u^2$ & $d^3y = -dx\,d^2u:u^2 + 2dx\,du^2:u^3$, quibus valoribus in æquatione data ſubſtitutis, oritur: $u\,d^2u - (a+2)\,du^2 + b\,dx\,du - c\,dx^2 = 0$. Sumta porro $du + p\,dx = 0$, adeoque $d^2u = -dp\,dx$, obtinetur $u\,dp + dx:((a+2)p^2 + bp + c) = 0$, unde (ob $dx = -du:p$) ſequitur $du:u = p\,dp:((a+2)pp + bp + c)$, vel (ob $dx:u = dy$), $dy + dp:((a+2)pp + bp + c = 0$, eadem omnino æquatio, quam nos ſupra per ſubſtitutionem $d^2y = p\,dy^2$ obtinuimus.

## §. II.

$$dy^{2n-3} d^3y + a\,d^2y^n + b\,dy^2 d^2y^{n-1} + c\,dy^4 d^2y^{n-2} + \ldots + g\,dy^{2n-4} d^2y^2 + h\,dy^{2n-2} d^2y + k\,dy^{2n} = 0.$$

Ex integratione æquationis $dy\,d^3y + ad^2y^2 + bdy^2d^2y + cdy^4 = 0$ (§. 1.) tradita facile patet, eadem methodo commode integrari poſſe etiam hanc æquationem generaliorem: $dy^{2n-3}d^3y + ad^2y^n + bdy^2d^2y^{n-1} + cdy^4d^2y^{n-2} + \text{------} + gdy^{2n-4}d^2y^2 + hdy^{2n-2}d^2y + kdy^{2n} = 0$, quæ ſub hac quoque forma repræſentari poteſt: $d^3y : dy^3 + ad^2y^n : dy^{2n} + bd^2y^{n-1} : dy^{2n-2} + cd^2y^{n-2} : dy^{2n-4} + \text{-----} + g\,d^2y^2 : dy^4 + hd^2y : dy^2 + k = 0$. Ponendo enim $d^2y = pdy^2$, adeoque $d^3y = dpdy^2 + 2p^2dy^3$, æquatio illa transformatur in $dp + dy\,(ap^n + bp^{n-1} + cp^{n-2} + \cdots + (g+2)p^2 + hp + k) = 0$; ex qua, ſi $ap^n + bp^{n-1} + cp^{n-2} + \cdots + (g+2)p^2 + hp + k$ ſtatuatur $= 1:\pi$, obtinetur $y = C - \int \pi dp$, atque (ob $d^2y:dy = pdy = -\pi pdp$), $dx = AN^{\int \pi pdp}\pi dp$, ſumta ut antea fluxione $dx$ conſtante. Itaque cum ſit $\pi$ functio ipſius $p$, relatio inter $x$ & $y$ mediante $p$ innoteſcit.

## §. III.

$$dyd^3y + ad^2y^2 + bdxdyd^2y + cdx^2dy^2 = 0.$$

Si, exiſtente $dx$ fluxione conſtante, integranda proponatur æquatio: $dyd^3y + ad^2y^2 + bdxdyd^2y + cdx^2dy^2 = 0$; ſtatuatur $d^2y = pdxdy$ & hinc $d^3y = dpdxdy + p^2dx^2dy$. His autem valoribus ipſarum $d^2y$ & $d^3y$ in data æquatione ſubſtitutis, eruitur æquatio per ſe integrabilis:

$$dx + \frac{dp}{a + 1pp + bp + c} = 0.$$

Ex hac æquatione integrata inveniatur $p = X$ functioni cuidam ipsius $x$, quo facto habetur $d^2y:dy = Xdx$, adeoque $l(dy:dx) = \int Xdx$, vel (si $\int Xdx$ statuatur $= Lz$) $dy = zdx$ & $y = \int zdx + C$, unde relatio inter $x$ & $y$ constat. Quo pacto autem inveniri queat functio illa $X$, superfluum erit ostendere, quum eadem methodus, qua supra (§ I.) valorem ipsius $p$ per $y$ investigavimus, etiam hic obtineat.

*Schol.* Exinde, quod ex hac æquatione: $dyd^3y + ad^2y^2 + bdxdyd^2y + cdx^2dy^2 = 0$ eodem prorsus modo determinetur $y$ per $x$, quo ex æquatione: $dyd^3y + ad^2y^2 + bdy^2d^2y + cdy^4 = 0$ (§. I.) determinavimus $x$ per $y$, suspicari licet, binas has æquationes inter se convenire. Hæc autem earum convenientia ut innotescat, ponamus $dx = dy:t = dt:u = du:v$, unde (ob constantem $dx$) $dy = tdx$, $d^2y = udx^2$ & $d^3y = vdx^3$, quibus in æquatione: $dyd^3y + ad^2y^2 + bdxdyd^2y + cdx^2dy^2 = 0$ substitutis, prodit $tv + au^2 + btu + ct^2 = 0$ forma finita, in qua consideratio fluxionis constantis non amplius obtinet. Sumtis igitur de novo differentialibus, ita ut statuatur $dy$ constans, $dx$ vero variabilis, fiet $t = dy:dx$, $u = dt:dx = - dyd^2x:dx^3$, & $v = du:dx = - dyd^3x:dx^4 + 3dyd^2x^2:dx^5$. His valoribus pro $t$, $u$ & $v$ in æquatione $tv + au^2 + btu + ct^2 = 0$ substitutis, oritur æquatio: $dxd^3x - (a+3)$

 $d^2x^2$

$d^2x^2 + bdx^2d^2x - cdx^4 = 0$, cujus integratio ex §. 1. constat.

## §. IV.

$$dx^{n-2}dy^{n-1}d^3y + ad^2y^n + bdxdyd^2y^{n-1} + cdx^2 dy^2d^2y^{n-2} + \ldots\ldots + gdx^{n-2}dy^{n-2}d^2y^2 + hdx^{n-1}dy^{n-1}d^2y + kdx^ndy^n = 0.$$

Ad integrandam hanc æquationem: $dx^{n-2}dy^{n-1} d^3y + ad^2y^n + bdxdyd^2y^{n-1} + cdx^2dy^2 d^2y^{n-1} + \ldots + gdx^{n-2}dy^{n-2}d^2y^2 + hdx^{n-1} dy^{n-1}d^2y + kdx^ndy^n = 0$, vel $d^3y:dx^2dy + ad^2y^n : dx^ndy^n + bd^2y^{n-1}:dx^{n-1}dy^{n-1} + cd^2y^{n-2} : dx^{n-2}dy^{n-2} + \ldots + gd^2y^2:dx^2dy^2 + hd^2y : dxdy + k = 0$, in qua $dx$ est constans, apprime etiam conducit hæc substitutio $d^2y = pdxdy$ seu $d^2y:dxdy = p$. Cum enim hinc fiat $d^3y:dx^2dy = dp:dx + p^2$, æquatio integranda in hanc abibit: $dp + dx(ap^n + bp^{n-1} + cp^{n-2} + \ldots + (g+1)p^2 + hp + k) = 0$, ex qua $x$ per $p$ determinatur. Valorem vero ipsius $dx$ inventum, in æquatione $d^2y:dy = pdx$ adhibendo, hancque integrando invenitur etiam relatio ipsius $y$ ad $p$, unde sic ipsarum $x$ & $y$ mutua relatio innotescit.

*Schol.* Potest autem æquationis hujus integrale etiam ex §. 2. obtineri. Sumtis enim fluxionibus (pariter ac in Schol. §. 3.) ita ut fiat $dy$ constans & $dx$ variabilis, æquatio hæc eandem induet formam, ac æquatio (§. 2.) integrata.

§. V,

## §. V.

$$dx^{2n}dyd^3y + adx^{2n}d^2y^2 + bdx^n dy^{n+2}d^2y + cdy^{2n+4} = 0.$$

Egregium porro usum præstat methodus nostra circa integrationem æquationis: $dx^{2n}dyd^3y + adx^{2n}d^2y^2 + bdx^n dy^{n+2}d^2y + cdy^{2n+4} = 0$. Posita enim $d^2y = pdy^m dx^{2-m}$, fit $d^3y = dpdy^m dx^{2-m} + mp^2 dy^{2m-1} dx^{2-m}$, unde $dpdx^{2n+2-m}dy^{m+1} + (a+m)p^2 dx^{2n+4-2m}dy^{2m} + bpdx^{n+2-m}dy^{n+2+m} + cyd^{2n+4} = 0$. In hac autem æquatione ut separari queant variabiles, sumatur $m = n+2$, quo facto prodit $dp + (dy^{n+1} : dx^n)((a+n+2)p^2 + bp + c) = 0$, vel (ob $d^2y = pdy^{n+2}:dx^n$, adeoque $dy^{n+1}:dx^n = d^2y:pdy$), $pdp + (d^2y:dy)((a+n+2)pp + bp + c) = 0$, unde hæc obtinetur æquatio per se integrabilis: $d^2y:dy + pdp:((a+n+2)pp + bp + c) = 0$. Ut igitur hinc eruatur relatio ipsarum $x$ & $y$ ad $p$, primo investigandum est integrale $\int pdp:((a+n+2)pp + bp + c)$, quod sit $= L\pi$; quo facto habetur $dx:dy = \pi$, adeoque ex $pdy^{n+2}:dx^n = d^2y$, fit $dy = \pi^{n-1}d\pi:p = \pi^n dp:((a+n+2)pp + bp + c)$, & $dx = \pi^n d\pi:p = \pi^{n+1}dp:((a+n+2)pp + bp + c)$, ex quibus æquationibus integratis relatio inter $x$ & $y$ determinatur. Ipsius autem $p$ functio $\pi$ pro diversa relatione coëfficientium $a+n+2$, $b$ & $c$ diversimode investigatur, quod hic brevitatis studio omittimus. Vide interim sis EULERI *Instit. Calc. Integr.* §. 74.

*Coroll.* Si in æquatione $dx^{2n}dyd^3y + adx^{2n}d^2y^2 + bdx^n dy^{n+2}d^2y + cdy^{2n+4} = 0$ statuatur $n = 0$, prodit æquatio $dyd^3y + ad^2y^2 + bdy^2d^2y + cdy^4 = 0$, cujus integrationem (§. 1.) dedimus. Si vero ponatur $n = -1$, oritur æquatio $dyd^3y + ad^2y^2 + bdxdyd^2y + cdx^2dy^2 = 0$, quam (§. 3.) integravimus.

## §. VI.

$$y^2 dy d^3 y + ay^2 d^2 y^2 + by dy^2 d^2 y + c dy^4 = 0.$$

Hactenus integrationem dedimus solum ejusmodi æquationum differentialium tertii ordinis, quæ meras fluxiones, non vero ipsas fluentes involvunt. Ut autem latius patere nostræ methodi usum appareat, quasdam afferre lubet æquationes, in quibus præter fluxiones etiam occurrunt quantitates fluentes. Sit igitur integranda æquatio: $y^2 dy d^3 y + ay^2 d^2 y^2 + by dy^2 d^2 y + c dy^4 = 0$. Hic ponimus $d^2 y = py^n dy^2$, unde $d^3 y = y^n dp dy^2 + 2p^2 y^{2n} dy^3 + npy^{n-1} dy^3$; quos valores in æquatione data substituendo, obtinemus: $y^{n+2} dp + ((a+2) p^2 y^{2n+2} + (b+n) py^{n+1} + c) dy = 0$, In hac vero æquatione si statuatur $n + 1 = 0$, variabiles mox separantur; sic enim prodit: $dy : y + dp : ((a+2) pp + (b-1) p + c) = 0$, unde integrando & reducendo (pariter ac in §. 1.) pro singulis casibus invenitur fluentium relatio. Scilicet, denotante $x$ quantitatem uniformiter fluentem, 1:o si sit $(b-1)^2 > 4c.(a+2)$, erit $dx = \frac{A y^{\frac{b-1-m}{2c}} dy}{(Cy^m - b + 1 + m)^{1:(a+2)}}$, posito $(b-1)^2 - 4c(a+2) = m^2$; 2:o Si $(b-1)^2 < 4c (a+2)$, erit $dx = Ay^{(b-1):2(a+2)} dy : Cos(C - \frac{1}{2} r Ly)^{1:(a+2)}$ existente $r^2 = 4c (a+2) - (b-1)^2$; 3:o Si $(b-1)^2 = 4c(a+2)$, erit $dx = Ay^{(b-1):2(a+2)} dy : (C + Ly)^{1:a+2}$; 4:o Si $a + 2 = 0$, erit $dx = Ay^{c:(b-1)} N^{Cy^{1-b}} dy$; 5:o Si $c = 0$, erit $dx = Ay^{(b-1):(a+2)} dy : (Cy^{b-1} - a - 2)^{1:a+2}$; 6:o Si $c = a + 2 = 0$, erit $dx = AN^{Cy^{1-b}} dy$; 7:o Si $b - 1 = c = 0$, erit $dx = Ady : (C + Ly)^{1:a+2}$; 8:o Si $b - 1 = a + 2 = 0$, erit $dx = Ay^C N^{cy} dy$ & denique 9:o Si $a + 2 = b - 1 = c = 0$, erit $dx = Ay^C dy$.

*Coroll.*

*Coroll.* 1. Hinc facile obtinetur integrale æquationis $y^2 d^3 y = \alpha dy^3$, cujus integrationem dedit Cel. Prof. MALLET in *Kongl. Wet. Acad. Handl.* pro anno 1766 pag. 194.

*Coroll.* 2. Pro casu autem simplicissimo $y^2 d^3 y = dy^3$, (cujus integrationem ab Illustr. KLINGENSTJERNA inventam refert Cel. MALLET l. c.) fit $\alpha y^{\frac{1}{2}} = \sin (C + \beta x)$, denotantibus $\alpha$, $\beta$ & $C$ constantes arbitrarias.

*Schol.* 1. Hujus æquationis: $y^2 dy d^3 y + a y^2 d^2 y^2 + b y dy^2 d^2 y + c dy^4 = 0$ integratio etiam ex §. 1. facile deducitur. Posita enim $y = N^z$, fit $dy : y = dz$, $d^2 y : y = d^2 z + dz^2$ & $d^3 y : y = d^3 z + 3 dz d^2 z + dz^3$, quibus valoribus in æquatione: $y^2 dy d^3 y + a y^2 d^2 y^2 + b y dy^2 d^2 y + c dy^4 = 0$ substitutis, oritur æquatio: $dz d^3 z + a d^2 z^2 + (b + 2a + 3) dz^2 d^2 z + (c + b + a + 1) dz^4 = 0$, cujus integratio ex §. 1. constat.

*Schol.* 2. Eadem substitutione: $d^2 y = p dy^2 : y$ hæc quoque æquatio generalis: $y^2 dy^{2n-3} d^3 y + a y^n d^2 y^n + b y^{n-1} dy^2 d^2 y^{n-1} + c y^{n-2} dy^4 d^2 y^{n-2} + \text{- - - - -} + g y^2 dy^{2n-4} d^2 y^2 + h y dy^{2n-2} d^2 y + k dy^{2n} = 0$, reducitur ad hanc: $y dp + dy (a p^n + b p^{n-1} + c p^{n-2} + \text{- - - - - - -} + (g + 2) p^2 + (b - 1) p + k) = 0$. Ejusdem vero æquationis integratio etiam per §. 2. peragi potest, si substituatur $N^z$ pro $y$.

*Schol.* 3. Quæ de æquationibus: $y^2 dy d^3 y + a y^2 d^2 y^2 + b y dy^2 d^2 y + c dy^4 = 0$, & $y^2 dy^{2n-3} d^3 y + a y^n d^2 y^n + b y^{n-1} dy^2 d^2 y^{n-1} + \text{- - - - -} + h y dy^{2n-2} d^2 y + k dy^{2n} = 0$ diximus, ea etiam valent de his æquationibus: $x^2 dy d^3 y + a x^2 d^2 y^2 + b x dx dy d^2 y + c dx^2 dy^2 = 0$ & $x^n dx^{n-2} dy^{n-1} d^3 y + a x^n d^2 y^n + b x^{n-1} dx dy d^2 y^{n-1} + c x^{n-2}$

$dx^2$

$dx^3 dy^2 d^2 y^{n-2} + \ldots + gx^2 dx^{n-2} dy^{n-2} d^2 y^2 + hx dx^{n-1} dy^{n-1} d^2 y + k dx^n dy^n = 0$, quippe quæ, mutatis (sicut in *Schol.* §. 3.) differentialibus, ita ut sumatur fluxio $dy$ constans, $dx$ autem variabilis, eandem cum prioribus formam induunt. Possunt vero hæ æquationes, absque ejusmodi transformatione, ad separationem variabilium directe etiam reduci, ponendo $d^2 y = p dx dy : x$.

## §. VII.

$$y d^3 y + a dy d^2 y + Y dx^2 dy = 0.$$

Si, denotante $Y$ functionem ipsius $y$, & $dx$ fluxionem constantem, integranda sit æquatio: $y d^3 y + a dy d^2 y + Y dx^2 dy = 0$, ponimus $d^2 y = p y^n dx^2$, adeoque $d^3 y = y^n dp dx^2 + n p y^{n-1} dx^2 dy$. Hac facta substitutione obtinetur æquatio: $y^{n+1} dp + (a+n) p y^n dy + Y dy = 0$, in qua si statuatur $n = -a$, medius terminus tollitur. Fit itaque $dp = - Y y^{a-1} dy$ & $p = C - \int Y y^{a-1} dy$. Hinc porro, ob $d^2 y = p dx^2 : y^a$, adeoque $dy d^2 y : dx^2 = p dy : y^a$, eruitur $dy d^2 y : dx^2 = (dy : y^a)\,(C - \int (Y dy : y^{1-1}))$ cujus integrale est: $dy^2 : 2 dx^2 = A - C y^{1-a} : (a-1) - \int y^{-a} dy \int Y y^{a-1} dy = A - C y^{1-a} : (a-1) + y^{1-a} \int Y y^{a-1} dy : (a-1) - \int Y dy : (a-1)$. Si vero fuerit $a = 1$, fiet $dy^2 : 2 dx^2 = A + C L y - \int (dy : y) \int Y dy = A + C L y - L y \int Y dy + \int Y L y dy$.

## §. VIII.

$$y^4 dy d^3 y + a y^4 d^2 y^2 + b dy^4 = 0.$$

Magno quoque compendio, hujus methodi ope, detegi potest integrale æquationis: $y^4 dy d^3 y + a y^4 d^2 y^2 + b dy^4 = 0$. Hæc enim per substitutionem $d^2 y = p dy^2$ trans-

transformatur in $dp + (a+2)p^2dy + bdy:y4 = 0$, quæ æquationis *Riccatianæ* species est simplicissima, cujus integratio constat. Præbet nimirum $(a+2)yyp = y \pm (b(a+2))^{\frac{1}{2}}$ *Tang.* $(C \pm y^{-1}\sqrt{b(a+2)})$ Si vero $a+2=0$, fit $3y^3p = Cy^3 + b$. Unde cum sit $p$ functio ipsius $y$, integrata porro æquatione $d^2y:dy = pdy$, eruitur fluxio constans $dx = AN - \int pdy\,dy$.

*Schol.* Eandem formam etiam æquatio $x^4dyd^3y + ax^4d^2y^2 + bdx^2dy^2 = 0$ induet, si ita transformetur, ut sit $dy$ constans & $dx$ variabilis. Potest vero si mavis hæc æquatio directe per substitutionem $d^2y = pdxdy$ integrabilis reddi.

## §. IX.

Ex exemplis jam allatis satis constare putamus methodi nostræ indolem atque usum in integrandis æquationibus differentialibus tertii ordinis. Nec dubitamus, latius adhuc illam extendi posse, ita ut æquationum quoque altiorum integralia ejus ope facilius aliquando detegi queant. In hæc vero ulterius inquirere, præsentis instituti ratio non permittit. Coronidem huic tractatiunculæ imposituri, solummodo ostendemus, quomodo per hanc methodum in æquationem primi gradus transformari poterit hæc quarti ordinis:

$$d^4y + bdyd^3y + bd^2y^2 + cdy^2d^2y + edy^4 = 0,$$

cujus integrale primum pro illo casu, quo est $3e = c(a-b) - b(a-b)^2$, exhibetur a Cel. LEXELL in *Nov. Comment. Petrop. Tom. XIV. P. I. p.* 245, 246, generalis vero integratio adhuc desideratur. Posita $d^2y = pdy^2$, adeoque $d^3y = dpdy^2 + 2p^2dy^3$ & $d^4y = d^2pdy^2 + 6pdpdy^3 + 6p^3dy^4$, æquatio proposita migrat in $d^2p + (6p + a)dpdy + (6p^3 + (2a+b)p^2 + cp + e)dy^2 = 0$. Unde porro per substitutionem $dp = udy$ exterminando

 dy,

$dy$, eruitur æquatio differentialis primi ordinis: $udu + (7p+a)udp + (6p^3 + (2a+b)p^2 + cp + e)dp = 0$; ex qua si inveniri poterit $1:u =$ P functioni ipsius $p$, erit $y = C + \int P dp$ &, si $dx$ sit fluxio constans, $L(Ady:dx) = \int Pp dp$. De hac autem æquatione: $d^4 y + adyd^3 y + bd^2 y^2 + cdy^2 d^2 y + edy^4 = 0$, hic oblata occasione id etiam observare licet, quod in aliam ejusdem omnino formæ transmutari queat, in qua alteruter terminorum, excepto primo, tolli potest. Posita scilicet $N\lambda y dx = dv$, si sumantur differentialia ita ut statuatur $v$ uniformiter fluens, æquatio data in hanc abit: $d^4 y + (7\lambda + a) dyd^3 y + (4\lambda + b) d^2 y^2 + (18\lambda^2 + (4a + 2b)\lambda + c) dy^2 d^2 y + (6\lambda^3 + (2a+b)\lambda^2 + c\lambda + e) dy^4 = 0$, in qua ita determinari potest $\lambda$, ut alteruter coëfficientium evanescat. Quæ vero de æquatione: $d^4 y + adyd^3 y + bd^2 y^2 + cdy^2 d^2 y + edy^4 = 0$ diximus, valent etiam de hac: $y^3 d^4 y + ay^2 dyd^3 y + by^2 d^2 y^2 + cydy^2 d^2 y + edy^4 = 0$, quippe quæ, pro $y$ substituendo $N^z$, eandem cum priori formam assumit.

---

## *THESES RESPONDENTIS.*

Thes. 1. Essentiam corporis determinaturi, qui eam in extensione ponunt, egregie hallucinantur.

Thes. 2. Omnem in corporibus mutationem motu fieri, firma satis experientia non probatum est.

Thes. 3. Exinde quod motus relativus non detur sine absoluto, male concluditur, omne quod movetur corpus absolute moveri.

Thes. 4. In demonstratione propositionis XIII Libri tertii Elementorum EUCLIDIS, gratis ex prop. ejusdem libri XI:a assumitur, rectam, centra circulorum sese intus contingentium jungentem, productam in singula contactus puncta, si plura darentur, cadere.

Thes. 5. Analysis idearum in infinitum si absolute impossibilis statuatur, quædam simul ideæ confusæ Intellectui etiam infinito tribuendæ sunt.

Thes. 6. Scientiis solum utilibus perdiscendis ut tempus vitæ brevissimum impendamus, quis est, qui non urget? Quæ vero cognitio inutilis sit censenda, eo sæpe difficilius est dictu, quo certius constat, multas quas primum infructuosas judicavimus disquisitiones maximam nobis attulisse utilitatem.