28

Dissertatio Mathematica
Sistens

Examen Methodi Æquationes Algebraicas resolvendi, a Cel. L. BENDAVID nuper propositæ,

QUAM
Cons. Ampl. Facult. Philos. Aboëns.
PRÆSIDE
Mag. JOHANNE HENRICO LINDQUIST,
Math. Prof. R. & O. nec non R. Acad. Scient. Stockh. & R. Soc. Sc. Upsal. Membro,

Pro Gradu Philosophico
publicæ censuræ submittit
JOHANNES FRIDERICUS AHLSTEDT,
Stipend. Reg. Satacundensis,

In Audit. Majori d. 28 Febr. 1798.
h. a. m. consvetis.

ABOÆ TYPIS FRENCKELLIANIS,

§. I

In *IntelligenzBlatt der Allgem. Literatur Zeitung* (quod *Jenæ* editur) *N:o 147 d. 18 Novembris* 1797 describitur Methodus æquationes Algebraicas altiorum ordinum resolvendi, quam excogitaverat & Mathematum cultoribus examinandam proposuerat Cel. LAZARUS BENDAVID, Auctor scriptis variis Metaphysicis in Germania inclytus & Philosophiæ *Kantianæ* assertor industrius. Hoc certe inventum, si quantum speciei, tantum haberet veritatis, maximi æstimandum foret. Ast dolendum, methodum hanc, fundamentis male positis superstructam, nec errorum quoad conclusiones exsortem, in æquationibus ultra gradum tertium altioribus fallere, quod Specimine hoc Academico paucis demonstrare constituimus.

§. 2.

Primo autem a nobis recensenda est ipsa Cel. Auctoris methodus, antequam examen ejus suscipiamus. Quumque non prolixum sit Ejus hac de re Schediasma, istud totum hic præmittere lubet. Ita vero in *IntelligenzBlatt* (l. c. p. 1223, 1224), legitur:

Neue

Neue Erfindung.

Ich bin endlich so glücklich gewesen, eine Methode zur Auflösung der Gleichungen zu finden, die allgemein zu seyn scheint, da ich schon die Wurzeln von Gleichungen vom siebenten Grade angeben kann. Ob meine Formeln reductibel sind, davon bin ich selbst noch nicht unterrichtet, indem ich bloss zur Auflösung allgemeiner höherer Gleichungen schreite, ohne mir die zeit zu gönnen, meine Formeln an Zahlengleichungen zu versuchen. Den Liebhabern der Mathematik, denen es gewiss lieb seyn muss, diese grosse Lucke in der Algebra ausfullen zu konnen, lege ich meine Methode zur untersuchung vor.

Ich stelle mir jede Gleichung in der das Glied Tx fehlt, als allgemein vor. Diess zu können, muss man bekantermassen im Stande seyn, das gedachte Glied allgemein wegzuschaffen, oder, bey einer Gl. vom Grade n, eine andere vom Grade $(n-1)$ aufzulösen. Nun können wir aber quadratische Gl. vollständig auflösen. Folglich in Gl. vom dritten Grade das Glied bx wegschaffen. Wird nun dadurch die Auflösung der Gl. vom dritten Grade möglich; so gehet die wegschaffung des Gliedes cx in Gl. vom vierten Grade auch von Statten, und so fort ins unendliche.

Nun nehme ich an $nx + m = x$, erhebe diese Gl. auf die Potenz, die meine zur auflösung vorgegebene Gl. hat, und verfahre dann auf eine art, von der ich hier am 5:ten Grade ein Beyspiel geben will, theils um zu zeigen, dass meine Methode weiter führt, als alle bisher erfundenen, theils auch weil die Wegschaffung des Gliedes dx so wohl, als die Bestimmung des Werthes von m nur die Auflösung einer biquadratischen Gl. fodert, die schon längst bekannt ist.

Also! $nx + m = x$; Daher

$$n^5 x^5 + 5 n^4 x^4 m + 10 n^3 x^3 m^2 + 10 n^2 x^2 m^3 + 5 n x m^4 + m^5 = x^5$$

Diess schreibe ich folgender gestalt:

$$n^5 x_5 + 5 n^4 x^4 m + 15 n_3 x_3 m^2 + 15 n^2 x^2 m^3 + 5 n x m^4$$
$$- 5 n^3 x^3 m^2 - 10 n^2 x^2 m^3 - 5 n x m^4$$
$$+ 5 n^2 x^2 m^3 + 5 n x m^4 + m^5 = x^5$$

oder in dem ich x^5 herüberbringe und die Gl. = o setze

$$(n^5 - 1) x^5 + 5 n x m (n x + m)^3 - 5 n x m^2 (n x + m)^2$$
$$+ 5 n x m^3 (n x + m) + m^5 = 0$$

oder endlich, da man $n x + m = x$ setzen, und das Ganze durch $n 5 - 1$ theilen kann:

$$x^5 + \frac{5 n m x^4}{n_5 - 1} - \frac{5 n m^2 x^3}{n^5 - 1} \pm \frac{5 n m^3 x^2}{n^5 - 1} + \frac{m_5}{n^5 - 1} = o$$

Da nun in dieser Gl. das Glied Tx fehlt, so halte ich sie zusammen mit der allgemeinen

$$x^5 \pm a x^4 - b x^3 + c x^2 \pm e = o$$

Daraus

$$5 n m = a n^5 - a. \text{ (A)}$$
$$5 n m^2 = b n^5 - b. \text{ (B)}$$
$$5 n m^3 = c n^5 - c. \text{ (C)}$$
$$m^5 = e n^5 - e. \text{ (D)}$$

Aus D kann n bestimmt werden, $n^5 = \frac{m^5 \pm e}{e}$; und

$$n = \sqrt[5]{\left(\frac{m^5 + e}{e}\right)}$$

Setzt man diesen werth von n^5 und von n in A, B, C; und $m^5 = p$, so erhält man:

$$\text{(E) } 3125\, p \pm 3125\, e - a^5\, e p^4 = o$$
$$\text{(F) } 3125\, p \pm 3125\, e - b^5\, e p^3 = o$$
$$\text{(G) } 3125\, p \pm 3125\, e - c^5\, e p^2 = o$$

Also giebt F − E − G

$$a^5\, e p^4 - b^5\, e p^3 \pm c^5\, e p^2 - 3125\, p - 3125\, e = o$$

Eine Gleichung von 4 Grade aus der p gefunden werden kann. Alsdann wird $m = \sqrt[5]{p}$, und $n = \sqrt[5]{\left(\frac{p \pm e}{e}\right)}$.

$$\text{Folglich } x = \frac{m}{1 - n} = \frac{\sqrt[5]{p}}{1 - \sqrt[5]{\left(\frac{p \pm e}{e}\right)}}$$

Diess stimmt auch ganz mit dem zusammen, was EULER in den Abhandlungen der Petersburger Akademie gemuthmasst hat; dass nämlich

lich die Auflösung einer jeden Gl. vom Grade n, die Auflösung aller vorhergehenden niedern voraus setze.

Berlin, den 14 Oct. 1797.

L. Bendavid.

§. 3.

In omni æquatione algebraica ordinis r, admissa resolutione æquationis inferioris ordinis $r-1$, tolli posse terminum penultimum, notissimum est. Aequationem igitur quamvis quinti gradus ad hanc reduci posse formam:

$$(\text{I.})\quad x^5 + ax^4 - bx^3 + cx^2 + e = o$$

facile concedimus. Hanc æquationem I. Cel. BENDAVID comparat cum æquatione

$$(\text{II.})\quad x^5 + \frac{5nmx^4}{n^5-1} - \frac{5nm^2x^3}{n^5-1} + \frac{5nm^3x^2}{n^5-1} + \frac{m^5}{n^5-1} = o,$$

quam ex assumta (III): $nx+m = x$ eruerat, & hinc infert vel potius supponit, coëfficientes utriusque æqv. I & II, singulos singulis respective æquales esse, unde quatuor istas sibi fingit æquationes A, B, C & D (§. 2), quamvis non nisi duas incognitas m & n determinandas habeat. In hac vero suppositione principium invenitur erroris, quo methodus nostri Auctoris laborat. Ratio, qua deceptus falsam adeo hypothesin admiserit, ex sequente Theoremate minus recte intellecto petenda nobis videtur, cujus igitur verum sensum plenius hic exponere haud abs re erit.

Theorema. Si existentibus A, B, C, - - - K, L, M; &

α, β,

$\alpha, \beta, \gamma, \text{---} \varkappa, \lambda, \mu$ constantibus, quantitatis cujusvis variabilis z duæ sint functiones similes hujus modi: $Z = A + Bz + Cz^2 + \text{---} + Kz^{r-2} + Lz^{r-1} + Mz^r$, & $Z' = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \text{---} + \varkappa z^{r-2} + \lambda z^{r-1} + \mu z^r$, atque hæ semper æquales seu, pro quovis ipsius z valore, $Z = Z'$; æquales etiam in utraque functione erunt similium potestatum z coëfficientes, seu sequentes obtinebunt æquationes (M'): $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, $\text{---} K = \varkappa$, $L = \lambda$ & $M = \mu$.

Veritas hujus Theorematis sic evinci solet: Quum sit z variabilis & pro quocunque hujus valore sit $Z = Z'$, sed facto $z = 0$, fiat $Z = A$ & $Z' = \alpha$, sequitur esse $A = \alpha$. Porro quum $A = \alpha$ (dem.) & generatim $Z = Z'$ (hyp.) sequitur iterum pro omni valore ipsius z fore

$$\frac{Z - A}{z} = \frac{Z' - \alpha}{z}, \text{ seu}$$

$$(\text{N.})\ B + Cz + \ldots + Lz^{r-2} + Mz^{r-1} = \beta + \gamma z \ldots + \lambda z^{r-2} + \mu z^{r-1};$$

ex qua æqv. facto $z = 0$, eruitur $B = \beta$. Simili modo reliquorum coëfficientium homologorum æqualitas demonstratur. (cfr. EULERI *Introd. in Anal. infin. Tom. I. §. 214* aliosque passim).

In hac demonstratione supponitur z ea ratione variabilis, ut etiam fieri possit $= 0$. Si vero ipsa quantitas z per aliam quandam variabilem v ita determinetur, ut variationes illius quantumvis innumeræ, omnes intra datos limites contineantur (ex. gr.

ſi fuerit $z = a + \sqrt{(b^2 - v^2)}$; demonſtratio iſta non ſufficit, quamobrem Theorema hoc ſequenti modo generalius probandum eſſe nobis videtur.

Quum quantitas quælibet variabilis inſtar fluentis conſiderari poſſit, fluentiumque æqualium æquales ſint fluxiones; erit $dZ = dZ'$ atque (aſſumta z uniformiter fluente ſeu poſita dz conſtante, adeoque evaneſcentibus $d^2 z$, $d^3 z$ &c.), erit $d^2 Z = d^2 Z'$ & generatim $d^m Z = d^m Z'$. Quumque ob $d(z^n) = n z^{n-1} dz$, & $d^2 z = 0$, fit $d^2(z^n) = n\overline{n-1}\, z^{n-2} dz$ & in genere $d^i(z^n) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-i+1)$ $z^{n-i} dz^i$; ſequitur fore $d^r Z = r.(r-1)(r-2) \ldots 3.2.1\, M dz^r = d^r Z' = r.(r-1) \ldots 3.2.1\, \mu dz^r$ adeoque $M = \mu$. Pariter ob $d^{r-1} Z = d^{r-1} Z'$, & $M = \mu$ (dem) fit $L = \lambda$; qua ratione regrediendo usque ad $A = \alpha$ omnes æqualitates M' demonſtrantur, idque generatim, utcunque fuerit r numerus dato quovis major.

Si ponatur variabilis $z = x^n$, & functiones illæ æquales Z & Z' multiplicentur per x^m, poſitis m & n conſtantibus; manifeſtum eſt, ex data æqualitate: $Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \ldots + Mx^{m+rn} = \alpha x^m + \beta x^{m+n} + \gamma x^{m+2n} + \ldots + \mu x^{m+rn}$, etiam erui æquationes iſtas M'.

Quando igitur ex æqv. (P'): $A + Bz + Cz^2 + \ldots + Mz^r = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots + \mu z^r$, inferuntur æquationes (M')

$A = \alpha$,

$A = \alpha$, $B = \beta$, &c, semper supponitur z variabilis, h. e. talis ut quantitas quæcunque (vel absolute, vel saltim intra datos limites utcunque arctos sumta) loco z in æqv. P' substitui, adeoque ipsi z infiniti numero valores tribui queant. Ad æquationes vero Algebraicas determinatas, in quibus z constans est (alterutri videlicet æquationis radici æqualis), hoc Theorema a nemine extendi potest, qui simul non concedere velit, nullas hujus generis æquationes dari, nisi quarum sint coëfficientes singuli $= 0$. Nec nisi de z variabili enunciatur hoc Theorema ab Autoribus, quorum demonstrationes consulere nobis licuit, quamvis sine ista restrictione generatim ex æqv. P' deducere æqv. M' *omnibus Algebræ Scriptoribus familiare* statuat Cel. GREG. FONTANA in *Disquis. de Æquationibus Indefinitis* §. 17. (*Disquis. Phys. Mathem. Papiæ 1780 p. 295*); Cujus etiam Auctoris objectio contra demonstrationem nostri Theorematis EULERIANAM (*Introd. in Anal. inf.* T. I. §. 214.) facile corruit. Quando videlicet Ille (l. c. p. 298) contendit ex assumta $z = o$, tantum $A = \alpha$ deduci posse, ceteras vero æquationes M' non item; manifestum est, Eum supponere z constantem $= 0$, quum tamen ill. EULERUS (l. c.) expresse postulet, æquationem P' *subsistere debere, quemcunque valorem obtineat variabilis z.*

§. 4.

§. 4.

Ex Theoremate igitur (§. 3) allato, quippe quod de functionibus solummodo variabilium valet, de æqualitate coëfficientium homologorum in æqv. I & II nihil concludere licet. Quamobrem quum Cel. BENDAVID, hos æquales supponendo, quatvor istas æquationes A, B, C & D (§. 2) adstruat; necesse est ut totidem admittat in iisdem quantitates indeterminatas, adeoque præter incognitas m & n, ipsorum coëfficientium a, b, c & e binos per reliquos duos esse determinandos concedat. Si videlicet dividantur æqv. B per A, C per B, & D per C sequentes tres obtinentur ipsius m valores:

$m = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \sqrt{\frac{5e}{c}}$, adeoque (O′) $n = \frac{b^2 c}{5ae}$. His vero valoribus m in alterutra æqv. A - - D substitutis, mediante æqv. O′, facta debita reductione invenitur: (Q′) $b^2 = ac$, & (R′) $c^{10} = 3125\, e^4 (a^5 e + b^5)$.

Unde oppido patet, solutionem æquationis: $x^5 + ax^4 - bx^3 + cx^2 + e = o$, quam dedit Cel. BENDAVID, generalem minime censendam esse, verum ad hunc restringi casum specialissimum, quo relatio coëfficientium a, b, c, e per istas æqv. Q′ & R′ determinatur, quamobrem illius nullus fere est usus.

Animadvertisse videtur etiam Auctor ipse, problema sua methodo solvendum supponi plus quam determinatum, quum pro unica quantitate incognita

$p'(=m^5)$ determinanda tres diversas æquationes E, F & G obtineat, [in quibus quidem æquationibus aliquis adest error calculi, quo videlicet recte subducto, erunt

$$(E')\ 3125\,e^4(p+e)-a^5p^4=o;$$
$$(F')\ 3125\,e^4(p+e)-b^5p^3=o;$$
$$(G')\ 3125\,e^4(p+e)-c^5p^2=o;]$$

isti vero vitio medelam allatam putat, cum tres hasce æquationes coalescentes faciat, sumendo $=E'+F'-G'$ unde calculo, ut monuimus, emendato prodit:

$$(H')\ a^5p^4-b^5p^3+c^5p^2-3125\,e^4(p+e)=o.$$

Ast quis non videt, veritatem hujus æqv. supponere veritatem singularum E', F', G', adeoque non nisi admissis conditionibus Q' & R' probari posse? De cetero eadem omnino ratione sumi posset $-E'+F'+G'$ seu

$$(K')\ a^5p^4-b^5p^3-c^5p^2+3125\,e^4(p+e)=o,$$

vel etiam $-E'-F'+G'$, hoc est:

$$(L')\ a^5p^4+b^5p^3-c^5p^2-3125\,e^4(p+e)=o;$$

Immo concinnius: $-2E'+F'+G'$ vel $-E'+2F'-G'$ vel $-E'-F'+2G'$, unde hæ tres æqv.

$$(S')\ 2a^5p^2-b^5p-c^5=o;\ (T')\ a^5p^2-2b^5p+c^5=o,$$
$$\&\ (U')\ a^5p^2+b^5p-2c^5=o;$$

vel etiam: $S'+T'$ aut $-T'+U'$, unde:

$$(V')\ a^5p-b^5=o,\ \&\ (X')\ b^5p-c^5=o;$$

quamobrem quum omnes has æqv. H', K', L', S', T', U', V', X' indifferenter adhibere liceat, necesse

est,

est, coëfficientes a, b, c & e ita comparatos supponi ut ex singulis istis æquationibus idem valor p prodeat, quod non nisi in casu specialissimo, quando scilicet æqv. Q′ & R′ locum obtinent, fieri potest.

§. 5.

Ex iis, quæ jam monuimus contra methodum æquationes qvinti gradus solvendi, a Cel. BENDAVID adhibitam, satis apparet, eandem utpote substitutioni $n x + m = x$ superstructam, nullis sufficere æquationibus reducendis, quæ gradum tertium excedunt. Restat igitur ut, quid circa æquationes cubicas hac methodo præstari possit, dispiciamus. Hujus autem ordinis æquationes generatim in hanc formam transformari possunt:

$(\mathfrak{A})\ x^3 + a x^2 + c = 0;$

& ex suppositione: $n x + m = x$, obtinetur

$$(\mathfrak{B})\ x^3 + \frac{3 m n x^2}{n^3 - 1} + \frac{m^3}{n^3 - 1} = 0.$$

Facto igitur $(\mathfrak{C})\ 3 m n = a(n^3 - 1)$ & $(\mathfrak{D})\ m^3 = c(n^3 - 1)$, identicæ fiunt æqv. $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$, adeoque idem in utraque erit valor ipsius x. Reductis autem æqv. $\mathfrak{C}$ & $\mathfrak{D}$ obtinetur:

$$(\mathfrak{E})\ m^3 = \frac{27 c^2}{2 a^3} \pm \frac{27 c}{a^3} \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} + \frac{a^3 c}{27}\right)},$$

$$\&\ (\mathfrak{F})\ n^3 = 1 + \frac{m^3}{c};$$

ex quibus itaque æquationibus $\mathfrak{E}$ & $\mathfrak{F}$ inveniuntur m & n, adeoque $x = \frac{m}{1-n}$. Manifeſtum vero eſt, calculum hac methodo inſtitutum prolixiorem, vel ſaltim non commodiorem fieri, quam qui ſubducitur ſecundum notisſimam regulam CARDANI. Præterea ſi poſito $x = y - \frac{1}{3}a$, æqv. $\mathfrak{A}$ in hanc redigatur formam: $y^3 + py + q = 0$; fiet $p = -\frac{1}{3}a^2$, & $q = c + \frac{2a^3}{27}$, unde porro ſequitur fore:

$$\sqrt{\left(\frac{c^2}{4} + \frac{c}{27}\right)} = \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)};$$

adeoque caſum ſic dictum irreductibilem in utraque æquationes cubicas reſolvendi methodo pariter occurrere.