15

Diſſertatio Aſtronomica

De

Interpolatione

Pro inveniendo Loco Lunæ
Ex Ephemeridibus.

Quam
Conſ. Ampl. Fac. Phil. Aboënſ.
Præſide

M. JOH. HENR. LINDQUIST,
Math. Prof. Reg. & Ord. nec non Reg. Acad. Scient. Svec. Membro,

Pro Gradu Philoſophico
Publicæ cenſuræ ſubmittit

JOHANNES ÆJMELÆUS,
Stipend. Reg. Oſtrobotn.

In Auditorio sup. die XV. Junii MDCCLXXXIX.

H.a.n.S.

Aboæ, Typis Frenckellianis.

§. I.

In Ephemeridibus Aſtronomicis noſtri temporis loca Lunæ pro duabus diverſis horis ſingulorum dierum aſſignari ſolent. Ad locum vero ejusdem pro dato quovis alio tempore ex his definiendum ſimplex regula proportionum non ſufficit, ſed interpolationem magis compoſitam poſtulant inæqualitates motuum hujus Planetæ. Quæ pro hac interpolatione inſtituenda communiter traduntur regulæ, omnes fere ſub hac generali comprehenduntur formula: $y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$, in qua radix x tempus deſignat, & functio y longitudinem vel latitudinem, aut vice verſa; cujus videlicet ope ex datis quatuor locis lunæ, quintus quivis intermedius ſatis exacte determinari poteſt. Ad calculum vero faciliorem reddendum varii varias hujus formulæ transformationes tentarunt, quas jam recenſere imperata nobis brevitas non permittit, paucis ſolummodo hoc Specimine Academico expoſituri rationem, qua interpolationem hanc commodiſſime fieri poſſe judicemus.

§. II.

Quum diverſa ſit conſtructio Ephemeridum Aſtronomicarum, diverſas quoque interpolationum regulas usus earundem exigit. Primo igitur ostendemus, qua methodo, pro dato quovis tempore, (quod quidem ad meridianum illius loci, pro quo computatæ sunt ipsæ Ephemerides, reducendum esse, vel nobis non monentibus intelligitur,) Longitudo Lunæ inveniri possit ex Calendariis, in quibus, (ut v. g. in *the Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris* Londinensium, atque *Connoissance des mouvemens célestes* Parisiensium) pro momentis meridiei atque mediæ noctis seu pro horis 0 & 12 Astronomicis singulorum dierum exhibentur longitudines ejusdem. Hunc in finem sumantur in Ephemeridibus Longitudines Lunæ duæ proxime antecedentes & duæ sequentes. Sint scilicet

pro temporibus	$T - 12^h$;	T;	$T + 12^h$;	$T + 24^h$;
Longitudines Lunæ	$'L$;	L;	L' ;	L'' ;
quarum differ. primæ	$'D$;	D ;	D': atque	
differentiæ 2dæ.		m ;	n ;	adeo ut

sit $L - {'L} = {'D}$; $L' - L = D$; $L'' - L' = D'$ & pariter $D - {'D} = m$ atque $D' - D = n$. Posito itaque $\frac{D}{12} = \lambda$, erit $'L = L - 12\lambda + m$; $L' = L + 12\lambda$, & $L'' = L + 24\lambda + n$. His datis ut pro tempore quovis intermedio $T + x$ inveniatur Lunæ Longitudo $= L + y$, sequentem assumimus æquationem $y = Ax + Bx\,(12 - x)\,(24 - x) + Cx\,(12 - x)\,(12 + x)$; in qua si successive ponatur 1:o $x = 12$ & $y = 12\,\lambda$; 2:o $x = -12$; & $y = -12\,\lambda + m$; 3:o $x = 24$ & $y = 24\,\lambda + n$, tres obtinentur æquationes pro coëfficientibus A, B, C determinandis, scilicet: $A = \lambda$;

B

$B = -\frac{m}{12.\,24.\,30}$ & $C = -\frac{n}{12.\,24.\,36}$. Hinc si compendii caussa statuamus

$$P = \frac{x(12-x)(24-x)}{12.\,24.\,36} \;\&\; Q = \frac{x(12-x)(12+x)}{12.\,24.\,36};$$

erit $y = \lambda x - mP - nQ$.

Hujus formulæ ope Longitudo quæsita $L + y$ facile supputari potest. Ejus videlicet terminus λx simplicem partem proportionalem continet, reliqui vero mP & nQ correctiones ex differentiis secundis oriundas. Ipsæ etiam quantitates P & Q commode in unica Tabula repræsentari possunt; quum pro x substituendo $12-x$, P transformetur in Q & vicissim. Specimen hujusmodi tabulæ pro singulis horis integris hic adferre lubet, in qua ΔP & ΔQ differentias primas ipsarum P & Q designant:

x	P		ΔP	x	P		ΔP
0	0.0000	12	0.0244	6	0.0625	6	0.0051
1	0.0244	11	0.0180	7	0.0574	5	0.0080
2	0.0424	10	0.0123	8	0.0494	4	0.0103
3	0.0547	9	0.0070	9	0.0391	3	0.0121
4	0.0617	8	0.0024	10	0.0270	2	0.0132
5	0.0641	7		11	0.0138	1	0.0138
6	0.0625	6	0.0016	12	0.0000	0	
	Q	x	ΔQ		Q	x	ΔQ

Exempl. Sit invenienda longitudo Lunæ pro A. 1788. m. Martii $14^d\ 5^h\ 24'$ temp. ver. ad merid. Grenovic.

novic. datis ex *Nautical Almanac* pro eodem Anno sequentibus:

Mart	Longit.	Diff. I.	Diff. II.
$13^d\ 12^h$	$2^s\ 8^\circ\ 19'\ 4''$		
		$6^\circ\ 56'\ 5''$	
14. 0.	2. 15. 15. 9		$2'\ 20'' = 140''$
		6. 58. 25	
14. 12.	2. 22. 13. 34		$2.\ 23 = 143''$
		7. 0. 48	
15. 0.	2. 29. 14. 22		

Est igitur $D = 6^\circ\ 58'\ 25''$, adeoque $\lambda = 34'\ 52'',1$; $m = 140''$; $n = 143''$: $x = 5^h\ 24' = 5,4$. Hinc

$$\lambda x = 5,4 \times 34'\ 52,''1 = 3^\circ\ 8'\ 17,''3$$
$$-mP = -140'' \times 0.065 = \qquad -9.\ 1$$
$$-nQ = -143'' \times 0,059 = \qquad -2.\ 5$$
$$y = 3\ 8\ 6''$$
$$L = 2^s.\ 15.^\circ 15.'\ 9''$$
$$L + y = 2.\ 18.\ 23.\ 15.$$

§. III.

In Ephemeridibus Berolinensibus (*Astronomisches Jahrbuch*) Longitudo Lunæ non nisi pro momento mediæ noctis seu pro 12^h (ad merid. Berol.) cujusvis diei computata invenitur, addito simul motu ejus horario seu variatione longitudinis ab hora 12:ma ad horam 13:am. Hinc ex motu lunæ in spatio 25 horarum invenienda est pro quovis tempore intermedio longitudo ejus

jus, quod nobis videtur sequenti modo aptissime fieri posse.

Sit pro tempore T data longitudo lunæ $= L$ & pro $T + 24^h$ Longitudo $= L'$, atque incrementum longitudinis ejus a tempore T ad $T + 1^h = h$, & a $T + 24^h$ ad $T + 25^h = h'$; unde pro tempore $T + x$ computanda erit Lunæ longitudo $= L + y$. Ponatur compendii caussa $\frac{L' + h' - L}{25} = \lambda$; $h - \lambda = m$ & $\lambda - h' = n$; atque ad inveniendum y assumatur æquatio: $y = Ax + Bx(25 - x)(24 - x) + Cx(25 - x)(x - 1)$; in qua eadem methodo ac in §. præc. coëfficientes A, B, C determinando, obtinetur $A = \lambda$; $B = \frac{m}{23.24}$ & $C = \frac{n}{23.24}$. Ponendo igitur ulterius

$$P = \frac{x(25 - x)(24 - x)}{23. \quad 24}, \quad \& \quad Q = \frac{x(25 - x)(x - 1)}{23. \quad 24}$$

erit $y = \lambda x + mP + nQ$.

In hac formula terminus primus λx ex motu Lunæ medio intra horas illas 25 determinatur (nec in inveniendo λ moram faciet divisio per 25, quum sit $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$), reliqui autem termini mP & nQ inæqualitates involvunt, quas in hoc temporis spatio motus Lunæ subit. Qvumque P & Q sint eædem functiones ipsarum x & $25 - x$ respective; hic (pariter ac in §. præc.) commode utraque in eandem Tabulam referri potest, qualis pro singulis horis integris est sequens:

x	P		ΔP	x	P		ΔP
0	0.0000	25	1.0000	13	3.1087	12	0.3188
1	1.0000	24	0.8333	14	2.7899	11	0.3442
2	1.8333	23	0.6776	15	2.4457	10	0.3587
3	2.5109	22	0.5326	16	2.0870	9	0.3623
4	3.0435	21	0.3985	17	1.7247	8	0.3551
5	3.4420	20	0.2754	18	1.3696	7	0.3369
6	3.7174	19	0.1630	19	1.0327	6	0.3080
7	3.8804	18	0.0616	20	0.7246	5	0.2681
8	3.9420	17	═══	21	0.4565	4	0.2174
9	3.9130	16	0.0290	22	0.2391	3	0.1558
10	3.8043	15	0.1087	23	0.0833	2	0.0833
11	3.6268	14	0.1775	24	0.0000	1	═══
12	3.3913	13	0.2355	25	0.0000	0	0.0000
			0.2826				
	Q	x	ΔQ		Q	x	ΔQ

Exempli gratia sit invenienda longitudo Lunæ pro A. 1789. m. Maji $8^d\ 22^h\ 15'\ 15''$ t. v. ad merid. Berol. Ex *Astron. Jahrb.* pro hoc anno & mense $8^d\ 12^h = T$, est $L = 7^s\ 13°\ 9'\ 45''$; $L' = 7^s\ 26°\ 57'\ 59''$; $h = 34'\ 52''$ & $h' = 34'\ 8''$. Hinc $L' + h' - L = 25\,\lambda = 14°\ 22'\ 22''$; $\lambda = 34'\ 29,''\ 7$; $m = 22,''\ 3$; $n = 21,''\ 7$; $x = 10^h\ 15'\ 15'' = 10,254$; $P = 3,759$ & $Q = 2.533$.

$$\begin{array}{lrl} \lambda x = 10,254 \times 34'\ 29,''\ 7 = & 5°\ 53'\ 42'' \\ mP = 3,759 \times 22,''\ 3 = & +\ \ 1.\ 24 \\ nQ = 2,533 \times 21,''\ 7 = & +\ \ \ \ 55 \\ \hline y = & 5°\ 56'\ 1'' \\ L = & 7^s\ 13°\ \ 9'\ 45,'' \\ \hline \end{array}$$

adeoque longit. quæsita $= 7^s\ 19°\ 5'\ 46''$, eadem exaᵭte, quam pro isto temporis momento invenerat Cel. Bode Astron. Jahrb. 1789. p. 82.

§. IV.

Quas pro longitudinibus Lunæ interpolandis (§. §. 2. 3.) attulimus regulas, eædem pro latitudine ejus ex *Nautical Almanac* Londinensium vel *Astronom. Jahrbuch* Berolinensium invenienda pariter valent; in his videlicet Ephemeridibus eadem prorsus ratione latitudines ac longitudines Lunæ exhibentur. Quum vero aliæ Ephemerides (v.g. *Connoissance des mouv. cél.*) unicam tantum pro quovis die lunæ latitudinem ob minores hujus variationes contineant, ut ad hunc casum aptetur regula §. 2. tradita pariter ac tabula ibidem allata, pro inveniendis ipsis λx, mP & nQ (§. 2) ponatur datus horarum numerus $= 2x$. Hoc ut unico exemplo illustremus, invenienda proponatur Latitudo Lunæ A. 1764. Martii $31^d\ 22^h\ 30'$ t. v. merid. Paris. Quum ex *Conn. des Mouv. Cél.* 1764 sit

	Lat. Lunæ	Diff. I.	Diff. II.
Mart. $30^d\ 0^h$	$1^\circ\ 27'\ 31''$ Austr.		
$31^d.\ 0$	0.20. 50	$1^\circ.\ 6'\ 41''$	$-1'47'' = -107''$
Apr. 1. 0	0.44. 4 Bor.	$1^\circ.\ 4.\ 54$	$-1'13'' = -73''$
2. 0	1. 47. 45	1. 3. 41	

$2x = 22^h\ 30'$; $x = 11^h\ 15' = 11,25$; $\lambda x = 1^\circ\ 0'\ 51''$; $-mP = +1''$ & $-nQ = +1''$; erit $y = +1^\circ\ 0'\ 53''$. Sed $L = -0^\circ\ 20'\ 50''$ (latitudine scil. australi signo $-$

notata); Ergo $L + y = 0^{\circ}\, 40'\, 3''$. Hæc interpolandi methodus pariter adhiberi poteſt ad determinandam horizontalem Lunæ Parallaxin atque Diametrum apparentem pro dato qvovis tempore.

§. V.

Secundum easdem interpolationum regulas etiam Aſcenſio recta atque Declinatio Lunæ inveniri poſſunt. Quum vero has exhibeant Ephemerides Aſtronomicæ ſolummodo in gradibus & minutis primis, neglectis ſecundis; quoties major exactitudo requiritur, ſatius erit pro dato tempore longitudinem & latitudinem Lunæ prius quærere, ac porro ex his atque ex data eclipticæ obliquitate ſecundum præcepta Trigonometriæ Sphæricæ, Aſc. rectam & Declinationem computare.

§. VI.

Ex iis quæ de determinanda longitudine Lunæ pro data hora x (§. §. 2. 3.) diximus, facile deducitur etiam regula pro computando motu ejus horario ſeu incremento longitudinis ab hora x ad horam $x + 1$. Retentis ſcil. iisdem ac antea denominationibus, pro caſu §. 2. erit hic motus horarius $= \lambda - m. \Delta P - n. \Delta Q$, & pro caſu §. 3. iſte motus erit $= \lambda + m \Delta P + n \Delta Q$. Sic ſi in Exemplo §. 3. deſideretur motus lunæ horarius ſe-

secundum longitudinem a $22^h\ 15'\ 15''$ ad $23^h\ 15'\ 15''$, erit

$$\lambda = 34'\ 29'',7$$
$$+ m\,\Delta P = -\,0,192 \times 22'',3 = -\ 4,3$$
$$+ n\,\Delta Q = +\,0.395 \times 21'',7 = +\ 8,6.$$

ergo quæsitus motus horarius $= 34'\ 34''$

Eodem modo variatio horaria latitudinis investigari potest.

§. VII.

Si quæratur tempus, quo Luna datam habeat longitudinem (vel latitudinem) $= M$, maxime directa quidem videtur methodus, quæ formulas interpolationum adhibet, in quibus longitudo (vel latitudo) radicem refert, tempus autem functionem inveniendam. Verum ob inæquales differentias longitudinum & latit. applicatio harum formularum admodum incommoda est. Præstat igitur indirecta uti methodo, per regulam proportionum primo quærendo Tempus T, quo datam longitudinem (vel lat.) M haberet luna, si æquabilis foret ejus motus inter duo illa temporum momenta, pro quibus dantur longitudines (vel latit.) in Ephemeridibus. Pro invento hoc tempore T porro investige-

tur