14

F. N.

Dissertatio Academica

Sistens

Theoriam Linearum Parallelarum,

Quam

Cons. Ampl. Facult. Philos. Aboëns.

Præside

M. Joh. Henr. Lindquist,

Math. Prof. Reg. & Ord. nec non Reg. Acad. Scient. Svec. Membro,

Pro Gradu Philosophico

Publicæ Censuræ Submittit

Erlandus Rosenback,

Stipend. Reg. Satacund.

In Auditorio Majori Die XXIII Maji MDCCLXXXIX.

Horis ante merid. consvet.

Aboæ Typis Frenckellianis.

§. I.

In theoria linearum parallelarum, quam (*Elem. Geom. Lib. I*) tradit Euclides, reprehendi præcipue solet Axioma Ejus XI, (vel, ut alii numerant, XIII) quo statuit, duas lineas rectas, in quas incidens recta quædam tertia angulos interiores ad easdem partes duobus rectis minores fecerit, in infinitum productas inter se coincidere. Hoc cum sine demonstratione assumendum non esse jam dudum agnoverint Mathematici, ad ejusdem veritatem evincendam alia admittere coacti sunt axiomata, quæ tamen fere omnia æque ad ipsum illud Euclideum, demonstratione indigere deprehensa sunt. Difficultatem vero maximam hac in re oriri censemus ex ipsa definitione Euclidis, qua parallelas dicit lineas rectas, quæ in eodem jacentes plano, atque ex utraque parte in infinitum productæ, in neutram sibi coincidunt. Hæc videlicet abstrusa nimis est, nec satis apta, quæ ad eruendas linearum parallelarum proprietates principii loco ponatur. Simplicior autem & magis nativa nobis videtur notio illa vulgaris, qua parallelæ dicun-

tur

tur lineæ, quæ in eodem plano positæ æqualibus ubique intervallis a se invicem distant, (unde etjam lineæ *æquidistantes* latine appellari solent). Hanc quidem definitionem jam pridem assumserunt plerique, practicæ imprimis Geometriæ Scriptores. Hi vero cum multa vel plane non, vel saltim insufficienter demonstrata admiserint, hinc forte factum est, ut theoria parallelarum, hac præstructa notione, ἀκρίβειαν geometricam respuere censeretur. Ipsius vero definitionis hanc non esse culpam, præsenti specimine ostendere tentabimus. Distantiam scilicet puncti a linea recta definimus per brevissimam lineam, quæ ad rectam hanc ab isto puncto duci potest; & *datæ rectæ parallelam* dicimus *lineam, si & in eodem cum illa plano existat, & singulorum ejus punctorum a recta ista æqualis sit distantia*. Hac igitur supposita definitione, præter notiones communes a nemine in dubium vocatas atque primas XXVI propositiones *Elem.* EUCLIDIS, nulla alia demonstrandi principia præmittentes, Theoriam linearum parallelarum evolvere conabimur. Ubique vero lineas in eodem plano positas intelligimus, quod hic semel monuisse sufficiat, ne crebris repetitionibus prolixiores fiamus. Brevitatis studio etjam littera *R* angulum rectum, atque in citationibus (quando ad demonstrationes intelligendas eas adferre necessarium sit) *Pr.* propositiones Libri I. Elem. Eucl. nobis denotant.

§. II. Lemma. *Si in △ PCD (Fig. 1.) ang. D sit rectus vel obtusus, latus huic oppositum PC majus erit utrovis reliquorum laterum CD vel PD.* Nam ob ang. D = vel > R est ang. CPD < R (Pr. 17), adeoque ang. CPD < CDP & (Pr. 19) CD < CP. Pariter demonstratur esse PD < CP.

§. III. Lemma. *Quæ ad datam rectam AB (Fig. 1.) ex puncto extra eandem dato C ducitur perpendicularis recta CD minima est omnium linearum, quæ ex C ad AB duci possunt.* Nam ob ang. D = R, ducta ex C ad AB quævis alia recta PC erit > CD (§. 2.); inter eosdem vero terminos lineam rectam esse brevissimam, ex ipsa lineæ rectæ definitione manifestum est. Ergo.

§. IV. Hinc (§§. 1. 3.) sequitur, *datæ rectæ AB (Fig. 2.) parallelam* esse *lineam CD, si ex singulis hujus punctis ad illam (Pr. 12) ductæ rectæ perpendiculares æquales sint.*

§. V. Si igitur recta datæ longitudinis PQ (Fig. 2.) in plano ita moveatur, ut semper rectæ AB perpendicularis maneat, uno termino P in AB incedente, alter ejus terminus Q describet ipsi AB parallelam lineam CD. Vel si figura quævis EFG, cujus latus EG est linea recta, super datam rectam AB ita moveatur, ut huic semper applicatum sit latus idem EG, datum quodvis in hac figura punctum Q describet

lineam

lineam ipsi AB parallelam. Recta enim QP ipsi EG perpendicularis, etjam ad angulos rectos ipsi AB ubique insistit. Hinc manifestum est, datæ rectæ AB per datum quodvis extra eandem punctum C fieri posse parallelam aliquam lineam CD. Atque hac ratione lineas parallelas describendi etjam in practicis haud raro utimur. Existente autem AB recta, ipsam CD etjam fore lineam rectam (quod gratis a plerisque Geometris assumitur), in sequentibus demonstrabimus, evolutis prius generalioribus quibusdam harum linearum proprietatibus.

§. VI. *Coroll.* Quæ ad rectam AB ex quovis hujus puncto M erigitur perpendicularis MN, in infinitum producta occurret cuivis ad illam parallelæ CD. Facta enim (versus partem ipsius CD) MN = PQ, (§. 5.) erit punctum N in linea CD.

§. VII. Lemma. *Si recta CP (Fig. 1.) insistens rectæ AB angulos deinceps faciat inæquales*, unum CPB acutum & alterum CPA obtusum, *quæ ex quovis illius puncto C ad hanc demittitur perpendicularis CD cadet ad partes anguli acuti CPB.* Si enim ad alteram partem quædam recta CE' fieri posset perpendicularis ipsi AB, in Δ CPE foret ang. CPE + CEP > 2R, quod repugnat (Pr. 17).

§. VIII. Lemma. *Duæ rectæ eidem tertiæ perpendiculares, utrinque in infinitum productæ, nunquam co-*

incidunt. Si enim (Fig. 1.) rectæ CD & CP ipsi AB perpendiculares, coinciderent in aliquo puncto C, foret in Δ CPD ang. D + P = 2R contra Pr. 17.

§. IX. Hinc si in quadrilatero CAPQ (Fig. 2.), cujus duo anguli CAP & APQ sunt recti, ad latus his angulis interjacens AP ex quovis hujus puncto K erigatur perpendicularis KL, hæc infinite producta in aliquo puncto L occurret lateri opposito CQ. Lateribus enim AC, QP occurrere nequit (§. 8), nec ipsam AP in aliquo puncto prætet K secare potest (Axiom.). Ergo producta ultra quadrilaterum CAPQ transibit per aliquod punctum lateris reliqui CQ. Et hoc quidem generaliter obtinere manifestum est, sive latus illud reliqvum CQ fuerit linea recta sive curva.

§. X. Theorema. *Si rectæ AB (Fig. 2.) parallela sit linea CD, quæ ex quibusvis hujus punctis C, Q ad AB ducuntur perpendiculares CA, QP, angulos ad lineam CD ubique & ad utramque partem efficient æquales, scil. ang. ACD = PQD = CQP.* Facta enim PM = AP & ducta MN perpendiculari ad PM ipsi CD (§. 6.) occurente in N, si quadrilaterum QPMN applicetur quadrilatero CAPQ posito puncto P super A & recta PM super AP, ob PM = AP cadet M in P. Ob angulos vero ad A, P & M rectos adeoque æquales, latera QP, MN figuræ QPMN cadent in latera CA, QP figuræ CAQP, & ob CA =

QP

QP=MN (§. 4.) puncta illius Q, N cadent in puncta hujus C, Q respective. Sumto autem in AP quovis puncto K, si fiat PT = AK & ad AB ducantur perpendiculares KL & TS, eodem modo demonstratur punctum S cadere in L, quod cum de omnibus reliquis punctis in QN & CQ valeat, sequitur lineam QN congruere ipsi CQ. Quamobrem conguent etjam anguli NQP, QCA, adeoque æquales erunt. Similiter si manente latere communi QP, situ inverso applicetur quadrilaterum QPMN quadrilatero QPAC, demonstrabitur cadere punctum M in A & N in C, atque (pro quovis puncto K facto PY=PK ductisque perpendiculis KL, YX) punctum X in L, adeoque angulos NQP, CQP congruere & æquales esse. Pro quibusvis igitur punctis C, Q, erit ang. ACQ = NQP = CQP.

§. XI. Theor. *Linea CD (Fig. 2.) rectæ AB parallela, ipsa etjam recta est.* Aut enim linea CD ex diversis portionibus rectilineis, non in directum positis constabit, aut ex partibus aliis rectis, aliis curvis, aut tota curva erit, aut tota recta.

1:o Partes vero ejus CQ, QN diversæ rectæ esse nequeunt; ex punctis enim C, Q & quovis ipsius CQ puncto L ad AB ductis perpendiculis CA, QP & LK, qvum sint anguli CLK, QLK (§. 10.) æquales adeoque recti, & ang. CQP = QLK (§. 10.), etjam ang. CQP rectus erit. Pariter erit ang. NQP = R,

adeo-

adeoque ang. CQP + NQP = 2R & CQ, QN in directum positæ (Pr. 14).

2:o Si pars alia CQ recta, alia QD curva foret, ductis ex C, Q ad AB perpendiculis CA, QP, & facto PM = AP atque erecto ex M ad AB perpendiculo MN, eodem ratiocinio ac in §. 10. demonstraretur, congruere posse rectam CQ curvæ QN, quod oppido absurdum est.

3:o Si tota CD (Fig. 3. 4.) curva foret, ex quovis ejus puncto Q ducta ad AB perpendiculari QP & ex eodem Q ad QP perpendiculari EF, ob ang. EQP (= R) = FQP & ang. CQP = DQP (§. 10.), linea CQD aut tota cadet inter EF & AB, aut tota ad alteram partem ipsius EF. Si prius, (Fig. 3.) sumtum in QD punctum *q* ipsi Q utcunque proximum cadet inter EF & AB, adeoque ob ang. FQP = R, recta QG ex Q per *q* ducta faciet angulum GQP < R. Quamobrem demissum ex P in QG perpendiculum PM cadet ad partes ipsius ang. PQG (§. 7.) & ob ang. MPB < (QPB =) R, perpendiculum MN ex M in AB ductum cadet versus ang. MPB (§. 7). Erit igitur (§. 2.) MN < (PM <) QP. Et sumto in QG inter Q & M puncto quovis K, si fiat KL normalis ad AB & ducatur recta PK; ob ang. PKQ > PMQ (Pr. 16.) adeoque PKQ > R, erit (§. 2.) KL < (KP <) MN. Qvumque ob ang. PMG = R, sit ang. NMG < R, eodem ratiocinio demonstrabitur, progrediendo ex Q

versus

versus G continue decrescere rectæ QG distantiam ab AB. Quamobrem puncti q utcunque proximi ad Q distantia ab AB $<$ QP, quod repugnat (§. 4). Non igitur cadet linea CQD inter EF & AB.

Si porro CD ad alteram partem caderet, (Fig. 4.) per quodvis ejus punctum q ex Q ducta recta QG faciet ang. GQP $>$ R; unde in QG sumta QS utcunque $>$ Qq & ex S ad AB demisso perpendiculo ST, facile demonstrari potest a Q versus S continue crescere rectæ QS distantiam ab AB. Ducta enim ex Q ad QG perpendicularis transibit aut per T, aut inter S & T, aut inter T & P. Si per S transierit, adeo ut ang. TQS = R, erit (§. 2.) ST $>$ (TQ $>$) QP. Et ex quovis ipsius QS puncto K ad AB demisso perpendiculo KL, ductaque recta QL, ob ang. LQS ($>$ TQS, adeoque) obtusum, erit (§. 2.) KL $>$ (LQ $>$) QP. Si vero perpendicularis illa transierit inter S & T, ducta TS, foret ang. TQS $>$ R; unde eo magis ST $>$ QP & KL $>$ QP. Si denique ducta ex Q ad QG perpendicularis QN secet ipsam PT in N, ex hoc puncto iterum erigatur ad AB normalis NM, rectæ QS (§. 9.) occurrens in M, & ex puncto quovis K inter Q & M sumto demittatur ad AB perpendiculum KL; quo facto simili ratiocinio probatur fore MN $>$ QP nec non KL $>$ QP. Qvumque sit ang. NMS ($>$ NQS Pr. 16, adeoque) obtusus, pari modo ulterius probatur a puncto M versus S recedendo continue augeri distantiam ab AB. Quodvis igitur ipsius QG punctum *q* inter Q & S ab AB distabit intervallo > QP, adeoque in linea per Q ducta ipsi AB parallela positum esse nequit. Quare nec linea CD cadet ad partem rectæ EF ipsi AB oppositam. Nec igitur (*dem.*) curva esse potest linea CQD; consequenter recta erit.

Schol. In sequentibus ubique de lineis loquentes, non nisi rectas intelligimus.

§ XII. Theor. *Lineæ parallelæ communia ubique habent perpendicula. Scil. Si CD ll AB (Fig. 5.) & ang. QPB = R, erit etjam ang. PQD = R.* Est enim CD recta (§. 11), & ang. PQD = PQC (§. 10). Ergo.

Aliter idem sic demonstratur: Si non sint anguli PQD, PQC recti, erit eorum alteruter PQD < R. Ducta igitur ex P ad CD perpendicularis PK cadet versus partes anguli PQD (§. 7), quamobrem fiet ang. KPB < R, atque ex K rursus ducta ad AB normalis KL cadet ad partes anguli KPB (§. 7). Hinc foret KL (< PK) < QP (§. 2.), quod repugnat (§. 4).

§. XIII. Theor. *Quæ eidem rectæ PQ (Fig. 5.) perpendiculariter insistunt lineæ AB, CD, sunt inter se parallelæ.* Si negas, sit per Q (§. 5.) alia quædam EF ll AB. Ergo ob ang. QPB = R (*hyp.*) erit ang.

FQP

FQP = R (§. 12.), adeoque foret ang. PQD (= R *hyp.*) = PQF, pars toti, quod fieri nequit. (*Axiom.*)

§. XIV. Hinc per datum punctum Q (Fig 2. 5.) datæ rectæ AB duci potest parallela CD, si fiat ex Q ad AB perpendicularis QP (Pr. 12) & ex eodem puncto Q ad QP perpendicularis CD (Pr. 11).

§. XV. Theor. *Quæ eidem rectæ PQ (Fig. 2) parallelæ sunt lineæ AC, MN, & inter se sunt parallelæ.* Ducta enim ex rectæ PQ puncto quovis P (Pr. 11.) ipsi QP perpendicularis AB lineis AC, MN occurret & his perpendiculariter insistet (§. 12.); quamobrem AC ∥ MN (§. 13).

§. XVI. Theor. *Perpendicula bina ex parallelis æquales abscindunt partes.* Si videlicet sit CD ∥ AB (Fig. 6.) & ang. CAP = R = QPA; erit CQ = AP. Nam ob ang. CAP = R = QPA, est (§. 13.) CA ∥ QP, (§. 6.) & hinc, ob ang. QCA = R (§. 12.), erit QC = PA (§. 4).

§. XVII. Theor. *Ad datam rectam AB (Fig. 5.) versus easdem partes erectis duobus perpendiculis PQ, LK æqualibus, quæ per horum terminos Q, K ducitur recta CD erit parallela ipsi AB.* Si enim non fuerit CD ∥ AB, sit per Q (§. §. 5. 14.) alia EF ∥ AB, & occurrat hæc EF ipsi LK (si opus est, productæ) in H.

 Erit

Erit igitur HL = QP (§. 4), adeoque ob KL = QP (*hyp.*), foret KL = HL, pars toti, quod absurdum.

§. XVIII. THEOR. *Recta AF* (*Fig. 6.*) *in duas parallelas AB, CD incidens, æquales efficit angulos alternos QAB = CQA.* Ductis enim ex A in CD & ex Q in AB perpendiculis AC & QP, recti erunt etjam anguli CAB & CQP (§. 12.) & CA = QP (§. 4.) nec non CQ = AP (§. 16.) unde ob latus AQ commune, in $\Delta\,\Delta$ CAQ, QAP, erit ang. CQA = QAP (Pr. 8).

§. XIX. THEOR. *Iisdem positis, erit angulus exterior FQD* (*Fig. 6.*) *æqualis interiori & ad easdem rectæ incidentis FA partes opposito angulo QAB, nec non anguli interiores ad easdem partes QAB, AQD duobus rectis æquales.* Nam ang. FQD = CQA (Pr. 15.) & QAB = CQA (§. 18.). Ergo FQD = QAB. Porro ob ang. QAB = CQA (§. 18), addito utrinque AQD, erit QAB + AQD (= CQA + AQD) = 2R (Pr. 13).

§. XX. THEOR. *Si in duas rectas AB, CD* (*Fig. 5.*) *incidens recta PQ æquales fecerit angulos alternos APQ = PQD: parallelæ erunt rectæ AB, CD.* Si enim non sit CD ∥ AB, sit per Q alia recta EF ∥ AB (§. 14). Ergo ang. PQF = APQ (§. 18). Sed APQ = PQD (*hyp*). Ergo foret ang. PQD angulo PQF æqualis, pars toti, quod absurdum.

§. XXI.

§. XXI. Theor. *Si recta AF (Fig. 6.) in rectas AB, CD incidens fecerit vel angulum exteriorem FQD æqualem interiori & opposito ad easdem partes FAB, vel angulos interiores ad easdem partes DQA, QAB duobus rectis æquales: lineæ AB, CD erunt parallelæ.* Nam si FQD = FAB, ob FQD = CQA (Pr. 15), erit ang. CQA = FAB. Et si ang. DQA + QAB = 2R = DQA + CQA, demto communi DQA, erit etjam CQA = QAB. In utroque igitur casu anguli alterni æquantur, quamobrem lineæ AB, CD erunt parallelæ (§. 20).

§. XXII. Theor. *Si recta AQ (Fig. 7.) sub angulo quovis dato QAP secet rectam AP, & in AQ sumantur portiones æquales AB = BD, adeoque AD = 2 AB, atque ex B, D ducantur ad AP perpendiculares BC, DE: erit DE = 2BC.* Demisso enim ex D in BC productam perpendiculo DF, in Δ Δ ABC, DBF erit AB = BD (*hyp.*), ang. ABC = FBD (Pr. 15.) & ang. ACB (= R) = DFB (constr.): Ergo CB = BF (Pr. 26.) adeoque FC = 2BC. Sed ob ang. DFC & FCE rectos est FD ll CE (§. 13.), adeoque (§. 4.) DE = FC = 2BC.

§. XXIII. *Cor.* Hinc si porro in AQ sumatur DG = AD seu AG = 2AD, erit recta ex G ad AP ducta perpendicularis GH = 2DE, adeoque in AQ continue duplicando puncti distantiam ab A, duplicatur ejusdem puncti distantia ab AP. Ipsa igitur

AQ si infinite producatur, puncti Q distantia ab AP fieri potest data quavis linea major.

§. XXIV. Theor. *Si duarum parallelarum AB, CD (Fig. 8.) alterutram AB secet recta AQ: reliquam CD quoque secabit, si infinite producantur.* Ducto enim ex A in CD perpendiculo AC, produci potest (§. 23) AQ, donec demissa ex Q ad AB normalis QP fiat major data CA. Hoc vero facto, si a majori PQ abscindatur pars PK = CA: erit (§. 6) punctum K in linea CD (producta, si opus fuerit), adeoque puncta Q, A ad diversas ipsius CD partes cadent. Quamobrem AB ipsam CD in aliquo puncto L inter Q & A intermedio secabit.

§. XXV. Theor. *Si in duas rectas lineas CD, AB (Fig. 5.) incidens recta QP angulos interiores DQP, QPB ad easdem partes, duobus rectis minores fecerit: duæ illæ rectæ CD, AB in infinitum productæ coincident inter se ex ea parte, ad quam sunt anguli duobus rectis minores.* Hoc est vexatissimum illud axioma Euclideum (§. 1), cujus vero facilis jam nobis est ex præcedentibus demonstratio. Ducta videlicet per Q linea EF ‖ AB (§. 14), qvum sit ang. FQP + QPB = 2R (§. 19.) adeoque ang. FQP + QPB > DQP + QPB & ang. FQP > DQP; recta CD in Q secat ipsam EF. Quamobrem CD etjam secabit (§. 24) lineam AB, si infinite producantur. Horum vero intertersectio cadet ad partes angulorum DQP, QPB, qui duobus rectis minores sunt. Si enim ad alteram partem caderet, forent CQP, QPA duo anguli trianguli cujusdam rectilinei. Adeoque ang. CQP + QPA < 2R (Pr. 17). Sed ob ang. CQP + DQP + QPB + QPA = 4R (Pr. 13), & ang. DQP + QPB < 2R, erit ang. CQP + QPA > 2R. Ergo.

§. XXVI. Theor. *Rectæ CD, AB (Fig. 5.), quæ ex utraque parte in infinitum productæ, in neutram sibi coincidunt, æquidistantes sunt.* Si enim non sit CD ∥ AB, per quodvis illius punctum Q ducatur linea EF ∥ AB (§. 14). Hoc facto qvum CD in Q secet lineam EF, producta etjam secaret lineam AB (§. 24.), quod repugnat *(hyp.)*.

§. XXVII. Quum igitur lineæ, quarum ubique eadem est distantia, in infinitum productæ nunqvam coincidere possint, (si enim coinciderent, dato illo intervallo a se invicem amplius non distarent), & vicissim rectæ, quæ infinite productæ nunqvam sibi coincidunt, æquidistantes sint: manifesta hinc fit convenientia inter definitionem parallelarum Euclideam & notionem illam vulgarem (§. 1), quam nos in hac Theoria fundamenti loco posuimus. His vero demonstratis, reliquæ linearum parallelarum proprietates eodem modo ac apud Euclidem aliosque probantur, quibus igitur ulterius immorari supervacaneum ducimus.

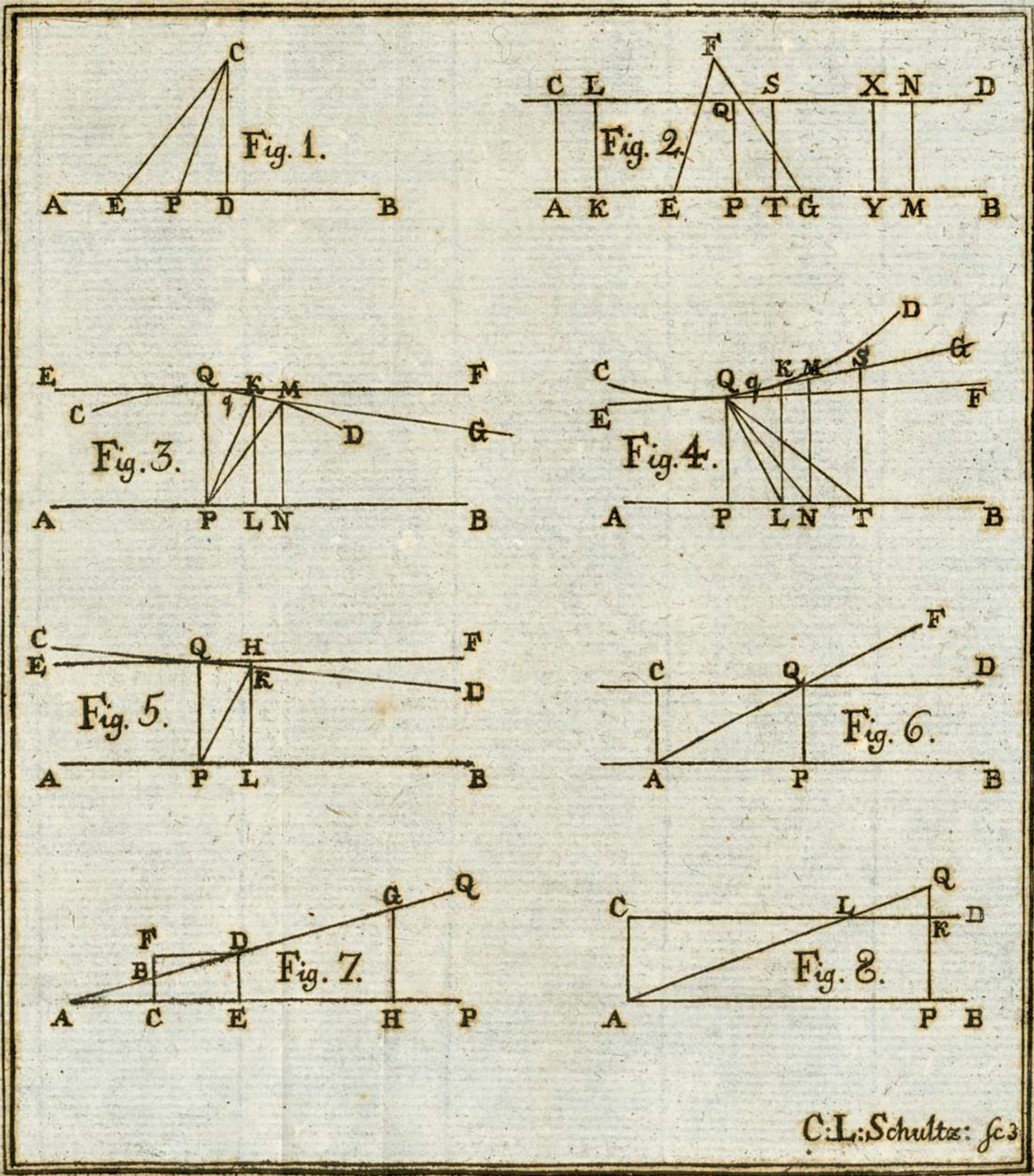

Fig. 1.
A E P D B C
Fig. 2.
F C L S X N D Q A K E P T G Y M B
Fig. 3.
E Q K M F C q D G A P L N B
Fig. 4.
D C K M S G Q q F E A P L N T B
Fig. 5.
C Q H F E K D A P L B
Fig. 6.
F C Q D A P B
Fig. 7.
G Q F D B A C E H P
Fig. 8.
Q C L D K A P B
C:L:Schultz: sc.