

A. S. R. M.
DISSERTATIO

DE

COMBINATIO- NIBUS,

Quam,

*Consensu Ampliss. SENATUS Philosoph. in Reg. ad Au-
ram Academia,*

Sub PRÆSIDIO

MARTINI JOHANNIS WALLENII,

MATH. PROFESS. REG. & ORD.

PRO GRADU

Publicæ Disquisitioni Submittit

JACOBUS WEGELIUS

OSTROBOTNIENSIS.

IN AUDIT. MAJORI, DIE XVII. JUNII ANNI MDCCCLXIX,

Tempore ante meridiem solito.

ABOÆ, Typis Joh. CHRISTOPH. FRENCKELL.



§. I.

De praesenti hoc argumento multi scripsere, neque omnes uno eodemque modo. Et quidem alii ex professo, ut dicitur, ac fuse hanc doctrinam tractarunt, ut PASCAL (*a*), MONTMORT (*b*), Jac. BERNOULLI (*c*), DE MOIVRE (*d*); alii, in suis Systematibus vel Compendiis Mathematicis, brevius; alii denique peculiaria eo pertinentia Problemata solverunt (*e*). Quemadmodum vero nonnulli exemplis particularibus vel singularibus præcipue immorantur; ita eorum, qui regulas generales tradunt, haud pauci neque genuina & vere analytica eas inveniendi methodo utuntur, sed conjectando quasi assumtas vel potius ab aliis acceptas proponunt, neque ulla idonea ac sufficienti demonstratione muniunt, ad inductionem maxime incompletam, vel si mavis, examen in casu quolibet instituendum, provocasse contenti. Et quamvis

non

non omnino desint adcuratæ, sufficientes & ingeniosæ demonstrationes; eadem tamen, quantum quidem mihi constat, operosæ, difficiles atque ambagi- bus impeditæ videntur (*). Quamobrem optavi, ut pulchra hæc Combinationum doctrina, cui resolu- lutione variarum quæstionum elegantium & calculus probabilitatum innititur, quam fieri possit, simplex, plana, dilucida, directa, minus longe petita & a theoriis aliis independens redderetur. Quod igitur, in faciliorem meam ipsius intelligentiam, hac de re institutum qualecumque, minime quidem arduum, tentamen benignis oculis judicioque B. L. jam sub- jicitur, vitio mihi haud versum iri spero.

(a) In tractatu: *Triangle Arithmetique*. (b) *Es-
say sur l' Analyse des Jeux de Hazard*. (c) In *Arte
Conjectandi*. (d) *Doctrine of Chances*. (e) ex. gr. EL-
VIUS in Act. Upsal. 1737. p. 271. sqq.

(*) Vid. e. g. KÆSTNER *Analys. Endl. Größen*
§. §. 736—740, cujus quidem tractationis rationes &
fundamenta ab aliis doctrinis sat arduis, scilicet
inde usque a §. §. 724—733, arcessuntur.

§. II.

Res (*) quotlibet, quas litteris $abc \dots ik$ desi-
gnabimus & quarum numerus sit $= n$, combinari
dicuntur, quando ex iis aliquot junctim sumuntur,
ut inde aliæ atque aliæ nascantur biniones (dy-
ades) vel terniones (triades) vel quaterniones (te-
rades) vel quiniones (pentades) &c. Qui hoc pa-
sto oriuntur rerum quasi manipuli, generaliter, pro-

re nata, tum (ut hoc vocabulo uti liceat) *polyades*,
 tum, ad communem loquendi usum, *Combina-*
tiones vocentur. Denominentur autem a multitudi-
 ne rerum singulas polyades seu manipulos constitu-
 entium; scilicet Combinations institui dicantur se-
 cundum vel per 2, 3, 4, 5 - - - m, prout polyas
 quælibet componitur ex rebus numero 2, 3, 4, 5 -
 - - m. Hic igitur numerus (integer quidem, ut
 sponte patet), quem generatim & indeterminate lit-
 tera m indigitamus, *nomen*, *denominator*, *index* vel
 (**) *exponens* combinationis commode adpellari pot-
 erit, quatenus ipsam combinationis speciem quasi
 & formam definit, indicando scilicet quot rerum
 propositarum conjungi in unum debeant.

Cor. Oportet m esse minorem n, saltem (cfr. §.
 IV. & Cor.) non majorem.

Schol. Latior est hæc & usitior, qua nunc uti-
 mur, *Combinationis* notio. Strictior est, qua ponit-
 ur m = 2; cui acceptio conformati sunt specificæ
denominationes *Conternationum*, *Conquaternationum*
 &c. prout fuerit m = 3, 4 &c.

(*) *Quantitates* dicit WOLFIUS in *Elem. Algebr.*
 §. 219. 220. 222. ut & §. 129, minus apte qui-
 dem; nulla enim quantitatis in rebus combinandis
 ratio habetur vel haberi potest aut debet.

(**) Ut WOLF. loc. cit. §. 219.

Dictas illas polyades, etiamsi ejusdem fuerint
denominationis, diversas tamen aliquo modo esse o-
 portet

portet (§. II.). Duplici autem respectu eas inter se differre concipimus; videlicet vel ipsis *rebus* tanquam partibus componentibus; vel modo compositionis, ordine nimirum, quo res illæ semet excipiunt. *Absolutas* igitur vocare liceat polyades seu Combinaciones, quæ priori modo, sive in totum sive ex parte, differunt; *Relativas* autem, quatenus alterutro vel utroque simul. Sensu igitur *absoluto* polyades *A* & *B* tum demum diversæ censemur: si in *A* adfuerit rerum *ab* - - - *k* aliqua vel plures, quæ non ingreditur alteram *B*; alioquin non pro diversis sed iisdem habentur *A* & *B*. *Relative* autem diversas dicimus *A* & *B*, dummodo res, tum hanc tum illam componentes, non eodem plane ordine semet insequantur in *A* atque in *B*. Sic ex. gr. *adg*, *agd*, *gda* &c. unam eandemque constituunt ternionem *absolutam*, at alias atque alias terniones *relativas*.

Cor. Polyas quælibet *absoluta* tot comprehendit polyades *relativas*, ejusdem denominationis *m* (§. II.), quot modis res, quarum numerus = *m*, invicem permutari possunt, hoc est, transponi vel si mavis disponi, inter se collocari, ordo earum mutari seu variari, adeo ut alia atque alia serie semet excipiant. Ex. gr. permutationes omnes trium rerum *abc* possibles sunt sex, hæc nimirum: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* (cfr. §. IV. §. Cor.); quamobrem ex una eademque ternione *absoluta* sex diversæ oriuntur terniones *relativæ*.

Schol. I. Quoniam (§. II. *) litteræ *abc* - - - *k* non quantitates, saltem non qua tales, nedium speciatim

ciatim numeros denotant: nemini, puto, cum eorum aliquas immediate juxta se positas viderit, in mentem veniet, multiplicationem, quemadmodum quantitatibus Algebraicis usu venit, eo ipso indigari; quin potius nihil aliud denotari intelliget quam vel solam rerum positarum congeriem vel, pro re nata, insimul ordinem eas intercedentem. Cæterum multiplicationem interposito punto designabimus.

Schol. II. Qui simpliciter de Combinationibus præcipiant, equidem, quod sciam, nullam habere solent rationem *ordinis*, quo collocentur res in unum combinandæ, sed de iis tantum, quas *absolutas* diximus, combinationibus quærunt. Maluimus tamen allatam istam adhibere divisionem, non novitatis studio sed distinctionis cauſsa, utque nostro, quo in sequentib⁹ uteatur, concipiendi & ratiocionandi modo optime convenientem.

§. IV.

Quot possibles sint Combinationes Relativæ (§. III.), ab *m* denominatae (§. II.), rerum abc...ik, quarum numerus sit *n*, invenire.

a) Ponatur primo *m* = 2, seu quæratur quot formari queant biniones Relativæ. Quia rerum illarum una aliqua ex. gr. *a*, singulis reliquarum *bc*. . . *k* semel, nec nisi semel, jungi potest hoc quidem pacto ut *a* præcedat ex. gr. seu anteriorem occupet locum: tot fieri oportet biniones ab *a* incipientes *ab*, *ac* . . . *ak*, quot erant res istæ reliquæ *b*, *c* . . . *k*, scilicet numero *n* — 1. Quod de *a* diximus,

mus, æque valere patet de singulis propositarum rerum $abc \dots k$. Harum vero numerus est n . Multiplicata igitur per n binionum ab α incipientium multitudine modo inventa $n - 1$, prodibit utique omnium binionum relativarum numerus $= n \cdot n - 1$.

Cor. Ex $n - 1$ rebus formari possunt biniones relativæ $n - 1$. $n - 2$.

8) Universim: Numerus combinationum quæsitus dicatur N . Si $n - 1$ res (ut $bc \dots k$) combinari possunt in \mathfrak{N} (neque plures quam \mathfrak{N}) polyades relatives, quarum communis denominator sit $m - 1$: poterit α (nova res prioribus accedens seu $n : ma$) cuilibet harum polyadum semel, neque plures, adjungi hæc lege ut anticum ex. gr. seu primum teneat locum. Quo facto habemus totidem scilicet \mathfrak{N} polyades nominis $(m - 1 + 1 =)m$, α in fronte gerentes (*). Si igitur, quod ipsi α contingere concepimus, idem ad unam quamlibet rerum $abc \dots k$, quarum omnium numerus est n , singulatim applicari (mutatis mutandis) intelligatur: evidens est posse n res modis $n \cdot \mathfrak{N}$, non autem pluribus, relative diversis combinari secundum m , seu esse $N = n \cdot \mathfrak{N}$. Generali hoc principio sic quidem adstructo: si jam statuatur

$\gamma) m = 3$, adeo ut $m - 1 = 2$, erit (α . Cor.) $\mathfrak{N} = n - 1$. $n - 2$, adeoque (β) $N = n \cdot n - 1 \cdot n - 2$.

Cor. $n - 1$ res dant terniones relatives $n - 2$.
 $n - 2$. $n - 3$, Quamobrem

δ) Si $m=4$ seu $m-1=3$, fit (γ Cor. coll. 6.)
 $\mathfrak{N}=\underline{n-1} \cdot \underline{n-2} \cdot \underline{n-3}$, consequenter (β) $N=n$,
 $n-1 \cdot n-2 \cdot n-3$.

¶ε) Similiter opus, quo usque libet, facile quidem urgeri potest. At satis jam se prodit ($a. y. d.$) hæc regula generalis: Sumatur $N=facto$ ex tot factoribus quot unitates continet exponens combinationis, & quorum factorum maximus sit ipse rerum combinandarum numerus, cæteri continue decrescent unitate. Quæ regula, si vel conjectando duntaxat assumta fuerit, facillime ex unico isto principio (β) extra dubitationem collocatur sequenti modo:

ζ) Regulam (ϵ) hanc, si recte se habeat dum exponens est numerus aliquis determinatus, dico veram adhuc esse exponente isto unitate aucto, ideoque etiam hoc novo exponente iterum unitate aucto, atque sic deinceps; consequenter si assumatur exponens quicunque major primum posito. Valeat enim propositio (ϵ) pro exponente $m-1$, i. e. sit tunc combinationum numerus $\mathfrak{N}=\underline{n-1} \cdot \underline{n-2} \cdot \underline{n-3} \cdots \underline{n-m+1}$; erit ergo $n \cdot \mathfrak{N}$ seu (θ) combinationum nominis m numerus $N=\underline{n} \cdot \underline{n-1} \cdot \underline{n-2} \cdots \underline{n-m+1} \cdot \underline{n-m+2} \cdots \underline{n-1} \cdot n$; quæ iterum est eadem ipsissima regula (ϵ) pro exponente scilicet m . Cumque ($a. y. d.$) hæc regula valeat posito $m=2, 3, 4$: oportet eam universali-
 ter

) * * 9 * *

ter veram esse. Quin immo, quia per se patet
eam veram esse posito $m=1$, inde mox sequitur
(*q. s.*) eam in omni casu recte se habere.

Cor. Posito m , quām esse potest maximo, scil.
 $=n$, patet (*§. III. & Cor.*) Combinations relatives
nihil aliud esse quam *Permutationes omnium rerum*
propositarum. Erunt igitur n rerum possibiles o-
mnes *Permutationes* numero 1. 2. 3. 4 - - - $n-1$. n .

(*) Hoc pacto obtineri hujus generis polyades
omnes possibiles, simul tamen *relative diversas* (*§. III.*)
seu neque justo *pauciores* neque tamen *superflua*:
ad vim argumentationis nostræ rite adtendenti adeo
non obscurum putamus, ut vix explicatori probatio-
ne egeat. Si enim dixeris aliquam nominis m polyad-
em, α in fronte gerentem, ut $a f - - d$, aut desiderari
aut bis saepiusve occurrere inter inventas vel memo-
ratas: inde mox sequeretur, sublato α , residuum po-
lyadem $f - - d$, quæ quidem est nominis $m-1$, aut
omnino non aut plus semel comprehendendi allumto
isto polyadum homonymarum numero N . At utra-
que consequentia repugnat hypothesisi, puta præ-
suppositæ conditioni numeri N . Ergo.

§. V.

Combinationum numerum absolutum definire,
denotantibus n & m ut antea. Diviso numero
combinationum relativo (*§. IV. s. vel q.*) per
numerum (*§. IV. q. Cor.*) permutationum re-
rum

rum m , obtinetur (§. III. Cor.) numerus quæsitus
 $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdots n - m + 2 \cdot n - m + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots m - 1 \cdot m}$
cujus formulæ vim seu significatum jam facile est
verbis enunciare. (cfr. §. IV. s. & Exempl. §. IX.).

Schol. Eadem hæc formula generatim exhibet singulos *Numeros Figuratos* ordinis quidem $m+1$, (exceptis tamen qui ordinis primi dicuntur & sunt solæ unitates). Sic ex. gr. $\frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$ sistit numeros figuratos qui III:ti ordinis vel *Triangulares* vocantur. At de numeris figuratis agere, istamque formulam universalem ex genesi eorum deducere, nostrī non est instituti; vid. autem, si placet, Jac. BERNOULLI *Art. Conjectandi P. II. Cap. III. HAUSEN Elem. Math. Arithm. Prop. 23. KÆSTNER loc. supra cit. §§. 727—733. PALMQUIST Bibang til Algebra §§. 1. 2. 11.*

Cor. Si ponatur (ut in §. IV. Cor.) $m = n$, formula dat $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdots 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n - 1 \cdot n} = 1$, ut opertum. Res enim non omnes simul non nisi unico modo absoluto, i. e. (§. III.) dum nulla habetur ratio ordinis ipsas intercedentis, sumi posse, per se est manifestum.

§. VI.

In præcedentibus ubique supposuimus, indicem com.

combinationis m habere unicum aliquem valorem, seu singulas polyades ex rebus æque multis componi. Quodsi autem ipsi m tribuantur successive plures valores, in serie numerorum naturali progredi entes 1, 2, 3, &c: quæstio institui potest de numero omnium combinationum, quæ non unius tantum, sed etiam diversi cujuscunque nominis sunt. Ad hanc quæstionem resolvendam poterit quidem in dato quocunque casu, i. e. quando n determinatum aliquem numerum designat, pro singulis ipsius m valoribus (1, 2, 3 &c.) computari combinationes, sive absolutæ (§. V.) sive relativæ (§. IV.) sive tandem inventi numeri omnes in summam colligi. Hanc autem summam, dum de omnibus, quæ possibles sunt, combinationibus *absolutis* agitur, expeditius invenire, saltem brevissima quadam & concinna formula generali exprimere quoque licet. Etenim in præsenti hoc casu *omnes possibles* ipsius m valores sunt 1, 2, 3 &c, usque ad n (cfr. §. V. Cor.). Intelligatur nunc binomium $p+q$ ad potentiam n

evectionum, erit per Theorema binominale $\frac{n}{p+q} = np^n - 1 q + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} \cdot p^{n-2} q^2 + \dots$

$$p^n = np^n - 1 q + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2} \cdot p^{n-3} q^3 + \dots$$

$$p^n = 3q^3 + \dots, \text{ ita ut } \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdots n - m + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots m}$$

$p^n - mq^m$ sit hujus seriei terminus generalis & quidem m :us. Sunt igitur singulorum terminorum

coëfficientes ipsissimi isti (§ V. cfr. Cor.) combinationum numeri pro singulis indicis m valoribus; consequenter summa omnium coëfficientium ipse numerus totalis de quo nunc quæritur. Positis jam $p=1$ & $q=1$, termini seriei non differunt ab ipsis coëfficientibus, adeoque summa coëfficientium tunc sit ipsa seriei hujus indeterminatæ Summa $= p+q^n-q^n = \overline{1+1}^n - 1 = 2^n - 1$. Ergo quæsitus omnium omnis generis combinationum numerus absolutus $= 2^n - 1$.

Quodsi autem casus $m=1$ exulare jubeatur, ut certe proprie loquendo non combinantur res quando singulæ separatim sumuntur: fit dictarum combinationum numerus $= 2^n - n - 1$. Conf. WOLF. loc. cit. §. 220.

§. VII.

Hactenus res ita combinari intelleximus, ut nulla nisi semel unam eandemque polyadem ingrediatur. Nunc autem progrediamur ad casus memorandos, ubi res qualibet non modo semel occurrit; sed & bis, dein ter, porro quater, tum quinques &c. tandemque toties repetita, quoties eam capere potest polyas aliqua, seu quoties admittit combinationis denominator m ; qui quidem in hac hypothesi quantumvis magnus & major ipso n esse potest. Primo igitur: si exponenti m unicus competit valor, & n res ita combinandæ sunt, ut singulæ ejam sepius, quoties quidem licet, repetantur; quæritur relati-

tivus combinationum numerus. Q. Suntō, ut antea, res $abc \dots k$, earumque numerus n . Designet P relativum numerum hujusmodi, de quibus nunc loquimur, combinationum, sed convenientem exponenti $m-1$; puta si n res relative (§. III.) combinentur in polyades nominis $m-1$, quas inter polyades ad sint etjam omnes illæ, quæ res propositas, quot unquam fieri potest modis, repetitas & permutatas contineant: esto P multitudo harum omnium polyadum ab $m-1$ denominatarum; quemadmodum Q denotat numerum similiter affectarum, sed nominis m , polyadum, itidem ex n rebus oriundarum. His probe notatis:

a) Dico fore $Q = n.P$. Etenim si singulis dictarum nominis $m-1$ polyadum præfigatur a : oriuntur P polyades nominis m . Pariter iisdem nominis $m-1$ polyadibus præfigi intelligantur successive b , $c \dots k$. Cum igitur rerum $abc \dots k$ multitudo sit n : obtinentur utique hoc pacto $n.P$ polyades nominis m . Has autem relative inter se differre, neque his ita ortis plures dari posse, rem perpendenti obscurum esse nequit. (cfr. §. IV. not. *). Jam vero

b) Si $m=2$ adeoque $m-1=1$, per se patet fore P, scilicet in hoc casu monadum numerum, $=n$, unde $Q = (nP) = n^2$. Vel, si mavis, idem sequenti modo reperitur. Dyadum, quas nulla res nisi semel ingreditur, numerus relativus est (§. IV.) $n.n-1$. His iam annumerentur quæ prodeunt rem quamlibet cum seipsa combinando, videlicet $aa, bb, cc \dots kk$, quarum dyadum multitudo utique est n . Ergo $Q = n. n-1 + n = n^2$.

γ) Quoniam posito $m=3$ seu $m-1=2$, est (ε)
 $P=n^2$, erit (α) $Q=(n \cdot n^2 \cdot \dots) n^3$. Hinc pro $m=4$,
 sit similiter $Q=(n \cdot n^3 \cdot \dots) n^4$; atque sic deinceps,
 adeo ut generatim $Q=n^m$. Cfr. WOLF, loc. cit. §. 222.
Exemplum vid. sub §. VIII.

§. VIII.

Si jam ex n rebus formandæ sunt polyades *relative*, quarum exponentes sint successive 1, 2, 3, 4 &c. usque ad m , & quidem hoc pacto, ut singulæ res etiam saepius repetantur: queritur *Relativus omnium possibilium Combinationum numerus*. Est hic (§. VII.) $=n^2 + n^3 + n^4 + \dots + n^m$, cuius Progressionis Geometricæ summa est $=n^2 \cdot \frac{n^m - 1}{n - 1}$.

Cor. Addito omnium monadum numero n , seu casu, quo singulæ res ponuntur solæ: prodit universus omnium tum monadum tum polyadum numerus $nn \cdot \frac{n^m - 1 - 1}{n - 1} + n = n \cdot \frac{n^m - 1}{n - 1}$. cfr. WOLF. loc. cit. §. 222.

Exemplum. Quæritur quot numeri scribi (secundum legem vulgo assumtam) possint ope n notarum numericarum, quarum una sit o (Zero, cyphra,) numeri inquam, quorum expressiones ingrediantur non nisi 1, 2, 3 --- m notæ? Numerorum, qui notis 1, 2, 3 --- m scribi possunt, multitudo foret (Cor. huj. §.) $n \cdot \frac{n^m - 1}{n - 1}$; nisi rejiciendæ essent expressiones

inci-

incipientes a cyphra vel cyphris. Tales expressiones ineptæ existunt, præfigendo o singulis, quæ ex n rebus formari possunt, tum monadibus tum polyadibus relativis, indices $1, 2, 3 \dots m-1$ habentibus, quarum quidem multitudo (Cor. huj. §.) est n .

$\frac{n^m - 1}{n - 1} - 1$. Præterea rejicienda quoque est ipsa mo-

nas o. Ergo multitudo quæsita erit $n \cdot \frac{n^m - 1}{n - 1} -$

$n \cdot \frac{n^m - 1}{n - 1} - 1 = n^m - 1$. Speciatim in recepta A.

rithmetica decadica, ubi $n = 10$, obtinetur $10^m - 1$, ut alioquin etiam constat; v. g. si $m = 4$, prodeunt $10^4 - 1 = 9999$.

Multo autem facilius per solam §. VII. resolvitur proposita quæstio. Cum enim ex n notis formari possint (§. cit.) n^m polyades relativæ nominis m , etjam quæ notas quovis modo possibili repetitas contineant; inter quas polyades nihil quidem valet illa quæ solis constat cyphris, cæteræ autem incipientes ab $1, 2, 3, \dots m-1$ cyphris, æquipollent numeris, qui notis $m-1, m-2, \dots 1$ scribi solent: patet utique fore multitudinem quæsิตam $= n^m - 1$.

§. IX.

Iisdem positis ac in §. VII, *Absolutus Combinacionum numerus erit* $= \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2 \cdots n+m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}$.

Huic

Huic propositioni, quam propria meditatione elicitem mihi communicavit Dn. Præses, demonstrandæ supersedentes, notamus tantum: hunc numerum non differre ab eo, qui indicat (§. V.) quoties $n+m-1$ res absolute combinari possint secundum m , ita quidem ut nulla iterato polyadem aliquam ingrediatur.

Exempl. Si $n=10$, $m=5$ obtinetur numerus quæsitus $= \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 11 \cdot 13 \cdot 14 = 2002$; contra, exclusis iis combinationibus, in quibus res reperuntur, supersunt (§. V.) tantum $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 9 \cdot 7 \cdot 4 = 252$.

Corroll. Si $m=n$, numerus quæsitus fit $= \frac{n+1 \cdot n+2 \cdots 2n-1}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}$.

§. X.

Adplicatio theoriæ Combinationum ad computandam multitudinem casuum sub datis conditionibus possibilium, atque gradus Probabilitatis inde estimandos, saepe difficultate non caret, etiamsi nulla habenda esset ratio gravium dubiorum, quæ de calculo probabilitatum movit magnus nostri ævi Mathematicus D' ALEMBERT (*). At in ipsa abstracta, quam his pagellis proponere nostri fuit instituti, combinationum doctrina, hæc si non plane necessaria, saltem

saltem ad perfectionem & elegantiam istius theoriæ pertinentia desideramus: scilicet formulis generalibus definire i:o *Relativum* numerum combinationum, quando (ut in §. VI.) indici tribuuntur alii atque alii valores, quorum maximus m sit sive $= n$ sive $< n$; h. e. (§. IV.) Summam Seriei 1, 1. 2, 1. 2. 3, 1. 2. 3. 4, - - - 1. 2. 3. 4. 5 - - - m , in qua terminorum numerus est m . II:do *Absolutum* numerum combinationum in eadem hypothesi, posito tamen (secus ac in §. VI.) maximo indice $m < n$; id est

(§. V.) Summam Seriei n , $\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}, \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,

- - - $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdots n-m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots m}$, habentis ter-

minorum numerum $m < n$. III:to *Absolutum* numerum combinationum in hypothesi §. VIII, i. e. (§.

IX.) Summam Seriei n , $\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}, \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,

- - - $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdots n-m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots m}$.

Cæterum quominus hæc desiderata resolvere co-nemur, proposita brevitas & angustia temporis pre-hibent.

(*) Opusc. Mathem. T. II. p. 1. seqq.

