8.

D. J.

DISSERTATIONIS PHYSICO-MATHEMATICÆ
DE

PROJECTIONE CORPORUM,

ADMISSA
HYPOTHESI GRAVITATIS GALILÆANA
ET
RESISTENTIA MEDII NULLA,

PARTEM PRIOREM
Venia Ampliss. Facult. Philosoph. in Regia Academia Aboënsi,
PRÆSIDE

MARTINO JOHANNE WALLENIO,
MATHES. PROFESSORE REG. & ORDIN.

Publico examini modeste sistit

STIPENDIARIUS REGIUS,
HENRICUS BERG,
OSTROBOTNIENSIS,

Die XX. Decembr. Anni MDCCLIX.
L. H. Q. S.

ABOÆ, Impressit Direct. & Typogr. Reg. Magn. Duc. Finland. JACOB MERCKELL.

S:Æ R:Æ MAJ:tis
MAXIME FIDEI VIRO
REVERENDISSIMO PATRI ac DOMINO

D:NO CAROLO FRID. MENNANDER,

S. S. Theologiæ DOCTORI
CONSUMMATISSIMO,
Diœceseos Aboënsis EPISCOPO
EMINENTISSIMO,
Regiæ ibid. Academiæ PRO-CANCELLARIO
MAGNIFICENTISSIMO,
Vener. Consist. Ecclesiastici PRÆSIDI
GRAVISSIMO,
Scholarum per Diœcesin EPHORO
ADCURATISSIMO,
Reg. Acad. Scient. Holm. MEMBRO
MAXIME INCLYTO,

MÆCENATI SUMMO.

QUod inter ardua atque illustria, quibus quotidie distineris, TUA negotia, respicere haud gravaris conatus eorum, qui musis litant; equidem eo alacrius aram propiuquo benignitatis TUÆ, quo majora fa-

voris

voris, immortali memoriæ consecrandi, in me exstare voluisti documenta. Juvenem præclaræ indolis, curâ, quam ipsius habes, prorsus paterna TIBI *obstrictissimum, litteris moribusq; instituendum mihi ante annum tradidisti. Spem meam nutantem confirmasti & ad quævis meliora erexisti. Accipe itaque munusculum, quod* TIBI, *Eminentissime PRÆSUL, pia mente offero, in perpetuam submissæ venerationis tesseram. Divinum Numen, quod solum pia vota & desideria explere novit,* TE, TUAM *vitam* TUA*que conamina præclara beet, fortunet, prosperet, ne præmature desideret Ecclesia Christi Lumen clarissimum, Res cum publica tum litteraria præsidium firmissimum, Familia* TUA *nobilissima tutelam exoptatissimam, clientes, quotquot sumus, patrocinium certissimum. Sic voveo dum vixero*

REVERENDISSIMI NOMINIS TUI

cultor & cliens devotissimus

HENRICUS BERG.

VIRO Admodum Reverendo atque Præclarissimo,

D:NO MAG. PETRO NIC. MATHESIO,

Præposito & Pastori in Pyhäjoki gravissimo Fautori quavis animi veneratione colendo.

Justo quidem serius mihi obtingit facultas pietatem erga TE, admodum REVERNDE VIR, meam publice declarandi. Quæ vero moram injecerint, TE, scilicet cui rationes rei meæ domisticæ probe notæ sunt, minime latere potest. Vagiens enim Patre orbatus fatum, quod orbitatem non raro comitatur, obstitit, quo minus æquo cursu ad metam accederem. Ast quàm impensè præmaturam doleo mortem Parentis carissimi, tam venerabundus memoriam recolo eorum, quos mihi Parentis loco colere licuit. Inprimis, quod partem paternæ curæ in TE derivatam voluisti, gratissima mente repeto. Digneris itaque oro atque obtestor, primitias hasce qualescunque studiorum meorum excipere ceu perennes observantiæ meæ indices. De cætero meum erit, DEUM T. O. M. calidissimis solicitare precibus velit TE omni felicitatis flore beatum quam diutissime servare in Nominis sui gloriam, Ecclesiæ & Reipublicæ emolumentum, TUUM TUORUMque gaudium & solatium.

Admodum Reverendi NOMINS TUI

cultor observantissimus
HENRICUS BERG.

Admodum Reverendo atque Præclarissimo VIRO

D:NO MAG. JACOBO SALMEN,

Præposito & Pastori in Paldamo longe meritissimo, ut antea studiorum meorum Moderatori optimo, ita jam Fautori quavis observantia colendo.

IN lætioribus fatis meis hoc saltem numerare debeo, quod memoriam gratissimam TUORUM erga me beneficiorum publice testari liceat. Merita TUA in Rem publicam & literariam atque Ecclesiam lubens taceo, quippe quorum præconium & facundiam requirit & dicendi copiam; Si quæ ego TIBI debeo non quidem digne prædicare, sed tantum recensere possem, satis potuisse mihi viderer. Namque cum tam eruditionis TUÆ, quam virtutum TUARUM præstantium celebri fama correptus ad TE properarem, tirocinium studiorum, jam tum inceptorum, TE Duce, continuaturus, humaniter me excepisti, præceptis vivendi me instruxisti, publice & privatim solida TUA eruditione beasti, ad quævis honesta & utilia efficaciter incitasti, religiosam pietatem ante omnia commendasti, vitâ & doctrina idem docuisti. Itaque ergo sereno vultu respice surculum, opusculum scilicet hocce humillime TIBI dicatum, cujus Sator ipse fuisti. Quod reliquum est, Supremum Numen ardentissimis compellabo precibus, velit TE per longas annorum series omni felicitatis genere cumulatissimum conservare donec hicce bonis satiatus uberiorem messem, virtutum TUARUM certissima præmia, in Cœlis reportes.

ADMODUM REVERENDI NOMINIS TUI

cultor observantissimus
HENRICUS BERG.

VIRO Perquam Reverendo atque Doctissimo

D:no PETRO WEGELIO,

Sacellano in Hapajärvi Meritissimo.

VIRO Perquam Reverendo & Doctissimo

D:no ARONI WILANDRO,

Sacellano in Ouhlais Dignissimo.

VIRO Perquam Reverendo & Doctissimo

D:no JOHANNI WILANDRO,

Sacellano in Calajoki Dignissimo

FAUTORIBUS OPTIMIS, ÆSTUMATISSIMIS,

VIRO Perquam Reverendo & Doctissimo

ADAMO BERG,

Sacellano in Pyhäjärvi Vigilantissimo,

FRATRI CARISSIMO.

Quo jucundius est merita reminisci benefactorum, eô lubentius arripio occasionem significatione grati animi Nomina VESTRA prosequendi. Tenellam enim meam ætatem eruditione VESTRA haud vulgari, sinceris consiliis, opera, impensis exemplisque virtuti consecrastis ac litteris. Hinc quævis temporum intervalla non potuerunt non referre svavissimam effigiem & Nominum VESTRORUM & beneficiorum, quam quominus hisce lineolis nativo nitori reddere possim, cum ipsa rei amplitudo impedit tum potissimum tenuis mea svada. Eo vero ardentius ad aram Summi Numinis confugiam compellans, jubeat VOS quam diutissime salvos & sospites esse!

NOMINUM VESTRORUM

cultor officiocissimus
HENRICUS BERG.

I. N. J.

CUm ſit doctrina de motu corporum projectorum a GALILÆO Galilæi, qui genuinam ejus theoriam primus condidit, atque plurimis poſt eum Scriptoribus Phyſico-Mathematicis egregie exculta & promota, adeo ut in ea vix quidquam deſiderari amplius videatur; mirabuntur forte nonnulli, rem antehac ſæpius & feliciter actam, iterum iterumque agi, aut me tantum mihi ſumere putabunt, ut is haberi vellem, qui vel aliorum inventa reformaverit, vel magnum aliquod momentum ad rem præſentem attulerit. Aſt quam inſigni utilitate & jucunditate ſe commendat conſideratio cum motus univerſim tum ſpeciatim corporum projectorum, tam facilem ſuſcepti conſilii æſtimationem fore ſperamus. Præterea, quæ eſt mathematum fœcunditas, ne in hac quidem parte, utut ad uſum vitæ humanæ & rei militaris inprimis apta, ideoque a viris perſpicaciſſimis multoties tractata, rem omnem ita penitus confectam quisquam exiſtimet, ut nihil omnino adjici vel ſaltem alia ratione proponi queat. Quemadmodum itaque aliorum in hanc quoque cultioris Phyſicæ partem merita, veneratione, qua decet, proſequimur; ita noſtris tamen qualibuscunque meditationibus locum aliquem relictum ſimul rati atque hujus argumenti dignitate adducti, ad idem animum intendere conſtituimus. Dedimus autem, ut plura de inſtituti ratione non dicamus, inter alia in id præcipue operam, ut problematum huc pertinentium ſolutiones arithmeticæ, quæ in praxi quidem inprimis vel unice adhibendæ ſunt, ſatis expeditæ evaderent, eumque in finem formulas ad calculum, in majoribus etiam numeris & quoties idem absque Logarithmis difficilius procederet, facilius ſimul & adcuratius inſtituendum, quam potuimus, maxime adcommodatas exhibuimus, adjectis exercitii gratia illuſtrationibus, quibus uſus earum & adplicatio oſtenditur. Ut vero, B. L. innocuis hiſce conatibus mitiorem præbeas cenſuram, eſt quod omni ſtudio contendimus.

§. I.

Hypotheses: 1) Gravitatem eſſe uniformem ſeu eadem vi conſtante, corpus projectum, in ſingulis ſemitæ ſuæ punctis, quovis momento urgere, & quidem 2) ſecundum directiones parallelas, ſcilicet perpendiculares ad horizontem ejus loci, unde fit projectio. 3) Moveri corpus projectum in vacuo vel medio non reſiſtente.

Axiomata. 1) Grave ſurſum vel deorſum verticaliter projectum, in hoc caſu directionem non mutat; in illo eâdem, qua adſcenderat, viâ redit. 2) Utcunque vero projiciatur (niſi, præter gravitatis ſtatis & projectionis vires, nova aliqua acceſſerit,) in eodem ſemper manet plano verticali, transeunte ſcilicet per lineam directionis, ſecundum quam fuit impulſum. Hæc ex *Hypotheſi* 2. ſponte fluunt.

§. II.

LEMMA. *In Parabola parametri diverſarum diametrorum ſunt inter ſe in ratione duplicata inverſa ſinuum angulorum ordinatarum.*

Eſto (*Fig.* 1. *n.* 1.) CAM parabola, cujus axis AB, alia quæcunque diameter CE, focus F. In axe BA producto capiatur AD=AF, & per D ducatur ipſi BD perpendicularis recta DG, viz directrix parabolæ, cui occurrat EC producta in G. Per A ducta AH, parallela directrici, occurrat ipſi CG in H, nec non junctæ FG in S, & jungatur CS. His poſitis, per proprietatem parabolæ erit 4AD ſeu 4GH=axis lateri recto, ut & 4FC ſeu 4CG= lateri recto diametri CE, ideoque hæ parametri ſunt inter ſe, ut GH & GC. Jam propter parallelas AS DG, & æquales AD AF, erit GS=SF; conſequenter ob æqualia nimirum (*Eucl.* I.8.) △△ GSC CSF, rectus eſt angulus GSC, atque recta CS, quippe biſecans angulum FCG, parabolam in C tangit, ideoque ordinatim applicatæ ad diametrum CE parallelæ ſunt ipſi CS, adeo ut ſit angulus GCS= angulo ordinatarum. Porro (*Eucl. VI.* 8. *Cor.*) in △ GCS rectangulo, proportionales ſunt CG, GS, GH; quapropter (*Eucl. V. Def.* 10. coll. *VI.* 20. *Cor.* 2.) ratio CG: GH, quam ſciz habet parameter diametri CE ad parametrum axis, duplicata eſt rationis

 CG: GS,

CG : GS, i. e. ejus, quam habet sinus totus ad sinum anguli ordinationis GCS. Idem sic quoque ostenditur: tangat CS parabolam in C & occurrat axi producto in T, erit angulus CTB = angulo ordinatarum ad diametrum CE, sitque CB perpendicularis ad axem. Quare propter BT = 2AB (ut ex Conicis constat,) erit $BTq = 4ABq$; & ex natura parabolæ $4DA \times AB = CBq$. Est jam parameter axis ad latus rectum diametri CE, i. e. 4DA: 4DB vel $4DA + 4AB$ (:: $4DA \times AB : 4DA \times AB + 4ABq$ :: $CBq : CBq + BTq$ ::) $CBq : CTq$ :: quadratum sinus anguli CTB: quadratum sinus totius. Sint jam duæ quælibet diametri, quarum parametri dicantur p, π, atque sinus angulorum ordinatarum f, s, respective. Posito sinu toto = S, & parametro axis = P, erit (*per demonstr.*) $p : P :: SS : ff$: nec non $P : \pi :: ss : SS$, ergo $p : \pi :: ss : ff$. *Q. E. D.*

COROLL. 1. In diversis parabolis, quarum parametri principales dicantur P, Π, sint p, π parametri pertinentes ad alias quaslibet diametros (unam viz in utraque parabola) efficientes cum ordinatis suis angulos, quorum sinus sint f, s, respective. Quia $P : p :: ff : SS$ atque $\Pi : \pi :: ss : SS$, deducitur inde $p : \pi :: Pss : \Pi ff$, i. e. in diversis parabolis parametri quævis sunt in ratione composita ex directa parametrorum principalium atque inversa duplicata sinuum angulorum ordinatarum. Hinc

COR. 2. In parabolis diversis parametri diametrorum, secantium ordinatas suas sub eodem angulo, sunt inter se ut parametri axium.

Cor. 3. Ast si (*Cor.* 1.) $p = \pi$, fiet $P : \Pi :: ff : ss$. Si igitur in parabolis diversis sumantur diametri, quæ parametros habeant æquales; parametri axium erunt in ratione duplicata directa sinuum angulorum ordinatarum ad diametros prædictas.

Schol. Quomodo præsens propositio ad reliquas etiam Sectiones Conicas adplicanda sit, occasione sic quidem data ostendere lubet. Nimirum *in Ellipsi vel Hyperbola parametri, ad diversas diametros relata, sunt inter se in ratione inversa composita ex triplicata ipsarum diametrorum & duplicata sinuum angulorum ordinatarum.* Sint enim p, π parametri quarumvis diametrorum D, Δ; his conjugatæ d, δ; sinus angulorum ordinatarum f, s, respective; sinus totus $= 1$. Constat in Ellipsi vel Hyperbola æqualia esse parallelogramma sub diametris quibusvis conjugatis D & d, Δ & δ; atque si sumantur D & Δ pro basibus horum parallelogrammorum, erunt eorundem altitudines fd & $s\delta$; ergo $fd\,D = s\delta\Delta$, ideoque $d : \delta :: s\,\Delta : f\,D$ & $dd : \delta\delta :: ss\,\Delta\Delta : ff\,DD$. Est autem $p = \frac{dd}{D}$ & $\pi = \frac{\delta\delta}{\Delta}$; consequenter $p : \pi :: (\Delta dd : D\delta\delta ::)\ ss\,\Delta^3 : ff\,D^3$. *Q. E. D.*

§. III. *Fig.* 1. *n.* 1.

Theorema. *Si corpus gravitate uniformi, secundum directiones parallelas sollicitatum, e puncto C in quacunque directione CK vel horizontaliter vel oblique projicitur; sublata medii resistentiâ, motu suo describet Parabolam CLM, quam in puncto C tangit linea directionis CK, cujus porro diameter est recta verticalis CE, per C transiens, & latus rectum, ad hanc*

 diame

diametrum pertinens, quadruplum altitudinis verticalis GC, per quam cadendo, grave illam, quâ projicitur, celeritatem adquireret. Interea dum grave motu a sola vi projectionis producto, & quidem æquabili, progrederetur in recta CK (*per leg. mot. primam*) ejus partem quamcunque CK absolvens, posset, sola gravitate urgente, verticaliter descendere per altitudinem aliquam, quæ sit CO. Et quia vis gravitatis non impedit, quo minus corpus projectum eodem tempore æque removeatur a recta CE, ac si gravitatis expers fuisset; neque vis projectionis obstat, quin per gravitatem suam tantundem recedat a recta CK, ac si vis illa secundum CK non accessisset; sequitur, si ductæ fuerint per O & K rectæ OL KL parallelæ ipsis CK CO & concurrentes in L: corpus binis istis viribus conjunctis agitatum eodem illo tempore perventurum ad punctum L. At ob vim gravitatis (*hypoth.*) uniformem, motus gravis libere cadentis erit æquabiliter acceleratus, ideoque (*per princip. Mechan.*) altitudines GC CO, ab initio motus emetiendæ, sunt ut quadrata temporum per GC & CO. Enim vero quia eodem tempore, quo ex G ad C cadendo seu motu uniformiter accelerato perveniret, posset celeritate sic accepta æquabiliter motum absolvere (*vi princ. Mechan.*) spatium $=2GC$; & tempus per CO est$=$tempori per CK, quod spatium CK (*hypoth*) eadem hac velocitate percurrendum est; tempora autem motuum æquabilium, celeritate existente eâdem, sunt in ratione

spatio-

ſpatiorum; erunt tempora per GC & CO ut $2GC$ & (CK vel *Eucl. I. 34.*) *OL*. Ergo GC : CO :: 4GC*q* : OL*q*, unde erit $OLq = 4GC \times CO$; conſequenter locus omnium punctorum *L* ſeu ſemita gravis projecti *Parabola*, cujus diameter eſt CE, latus rectum ad hanc diametrum pertinens $= 4$CG, atque ad eandem ordinatim applicata *LO*, cui proinde parallela CK, per verticem C traſiens, parabolam continget. *Q. E. D.*

SCHOL. I. Si actio gravitatis & omni tempore & in diverſis a ſuperficie telluris diſtantiis eadem manet atque invariata, nec præterea reſiſtentiæ aëris ulla habetur ratio; gravia omnia, ex certa aliqua altitudine cadendo, determinatum celeritatis gradum ſemper nanciſcuntur, eatenus itaque velocitatem quamlibet aut vim, quæ eandem projecto conciliare valet, ex altitudine, quam diximus, æſtimare licet. Neque vero, niſi data hac altitudine, ſemita gravis projecti omni modo determinari poteſt. Quomodo itaque altitudo, cuilibet celeritati ſic quidem debita, ſit invenienda, infra dicemus §. 5.

SCHOL. 2. Si grave e puncto C emiſſum, plano alicui (non verticali) per C transeunti, ſupra quod adſcenderat primum, rurſus occurrat in alio puncto, ut L; longitudo rectæ *CL* generaliter quidem dici poteſt amplitudo jactus in iſto plano. In ſequentibus tamen, ubi de *amplitudine jactus in plano* quodam ſermo fuerit, ſupponimus hoc perpendiculare eſſe ad planum projectionis, viz (§. 1. Axiom. 2.) ad planum verticale, per lineam directionis CT tranſiens, adeo ut angulus GCL metiatur inclinationem lineæ verticalis ad prius illud planum. Et quidem, ſi projectum plano horizontali per C ducto occurrat in N, diſtantia *CN* vocatur ſimpliciter *jactus amplitudo*; atque *AB*,

diſtantia

distantia puncti semitæ altissimi, seu (ut facile intelligitur) ipsius verticis principalis parabolæ, a plano isto horizontali, *altitudo jactus*. Inclinatio denique lineæ directionis ad planum horizontale, seu ipse angulus *NCT*, *angulus elevationis* audit.

Cor. 1. Quia mutatâ utcunque lineâ directionis CK, manentibus autem C & CG, parameter ad punctum C pertinens, semper est = 4CG constanti; erit recta GD, quæ a puncto G ipsi CG ad rectos angulos in plano projectionis ducitur, directrix communis omnibus parabolis, data illa vi in eodem plano describendis.

Cor. 2. Et quia distantia Foci a puncto parabolæ quocunque æqualis est quartæ parti parametri, ad punctum illud pertinentis; oportet, facta quaquaversum projectione, focos omnium parabolarum eâdem illa vi describendarum, cadere in superficiem sphæræ, cujus centrum C, semidiameter CG. Si autem unum idemque fuerit planum omnium projectionum, locus focorum erit peripheria circuli, centro C radio CG in eodem plano descripti.

Cor. 3. Datis puncto C, altitudine GC & directione CK vel angulo elevationis NCT, designari potest semita projecti. Data enim positione diametro CE, ejus vertice C, parametro = 4CG & angulo ordinatarum = GCK, parabola construi potest. Id autem commodissime fiet hunc in modum: a puncto G ducatur ad datam positione rectam CK perpendicularis GSF, & fiat SF = SG. Dein Foco F

& di-

& directrice GD, quæ nimirum ipsi GC ad rectos angulos ducta sit, describatur parabola, erit hæc semita gravis projecti. Nam ex æqualitate ΔΔ:lorum CSF, CSG erit CF=CG, & recta CS bisecabit angulum FCG; quare punctum C est in hac parabola, eandemque tangit CS.

Cor. 4. Si grave e puncto quocunque G Directricis parabolæ MAN decidat, & postquam parabolom in C attigit, motus ejus (cæteroquin non mutatus) secundum tangentem CK inflectatur, in ipsa hac parabola incedet, nimirum in ejus portione cadente ad eandem rectæ GC partem, ad quam cadit CK.

Cor. 5. Corporis, quod, ex dictis in propositione caussis, in parabola movetur, velocitas in ipso curvæ vertice (principali nimirum seu vertice axis) minima est; in æqualibus utrinque ab axe distantiis eadem; eo autem major, quo magis ipsum ab axe distat. Et quidem velocitates in diversis parabolæ punctis C, A, L, sunt in ratione subduplicata perpendiculorum CG AD LI, ad directricem ductorum seu parametrorum ad puncta ista CAL pertinentium, vel (§. 2.) in ratione inversa simplici sinuum angulorum, quos lineæ directionis cum verticalibus efficiunt. Cum enim corporis, quando ad L pervenit, motus dirigatur secundum tangentem per L ductam, habebit in puncto L eam celeritatem, qua ex L projectum eandem parabolam describeret; eâdem scilicet in utroque casu existente (ex *hypoth.* & *Cor. præc.*) semita, directione

& actione gravitatis, eadem utique erit velocitas, quæ sciz (*Cor. præc.*) adquiritur cadendo per altitudinem IL, ac proinde proportionalis ipsi √LI. Et quia angulus GCT est ipsius NCT complementum ad rectum; simul patet: ut gravia portiones unius ejusdemque parabolæ describant, cosinus angulorum elevationis esse debere in ratione inversa celeritatum, quibus projiciuntur.

§. IV. *Fig. 1. n. 1.*

PROBLEMA. *Datis directione CT & impetu gravis ex C projecti, videlicet* (§. 3. Schol. 1.) *altitudine GC celeritati ejus debita, invenire altitudinem & amplitudinem jactus.* Facile hæc determinantur per sequentem constructionem, etiam non descriptâ (§. *præc. Cor. 3.*) ipsa projecti semitâ. Ducatur ex puncto G ipsi CT perperdicularis GS, & ex puncto occursus S ad GC perpendicularis SH, erit CH æqualis altitudini & 4SH amplitudini jactus. Nam producto GS ad F, ut sit SF=SG, erit (§. *præc. Cor. 3.*) F focus parabolæ, semitam projecti constituentis, atque GD, ipsi CG perpendicularis, ejusdem directrix. Si itaque FD FR parallelæ ducantur ipsis CG GD & producatur HS, ut occurrat ipsi DF in A; ob æquales GS SF, & parallelas HSA, FR, GD, nec non FD GR, erit AF=AD; ideoque A vertex axis & AB vel *CH* altitudo jactus, ut & HS=$\frac{1}{2}$FR vel $\frac{1}{2}$CB; At CB est dimidia jactus amplitudo. Patet ergo propositum.

Hæc etiam calculo facile inveniuntur. Nam si a data altitudine GC, quæ dicatur a, auferatur DA, relinquitur jactus altitudo AB, quæ dicatur g; at posito (*) sinu toto $= s$ & angulo elevationis $= \alpha$, est (§. 2.) GC : DA :: 1 : s^2 GCT seu $cos^2\,\alpha$, unde convertendo GC : GC — DA vel g :: 1 : 1 — $cos^2\,\alpha$, hoc est :: 1 : $s^2\,\alpha$, adeo ut sit $g = a s^2\,\alpha$. Vel brevius: quia (*Eucl. VI. 8. Cor.*) ∺ GC, CS, CH, erit (*Eucl. VI. 20. Cor. 2.*) GC (a) : CH (g) :: GCq : CSq :: 1 : s^2 CGS seu $s^2\,\alpha$. Præterea est quoque GC : CH :: 2 *sin. tot* : sin vers. 2α. Si enim super GC descriptus intelligatur semicirculus, transibit is per verticem anguli recti CSG, eritque sic CH sinus versus arcus, quem subtendit chorda CS in illo circulo, adeoque etiam (*Eucl: III. 20.*) anguli $=$ 2CGS $=$ (*Eucl. III. 32.*) 2SCB $= 2\alpha$ Cfr. etiam, si placet, infr. §. 7. Constat itaque hoc

THEOREMA. I. *Altitudo respondens celeritati, qua grave projicitur, est ad altitudinem jactus in ratione duplicata sinus totius ad sinum anguli elevationis;* atque si grave secundum varias directiones, eâdem semper velocitate projiciatur, *altitudines jactuum*

 sunt

(*) Compendii alicujus caussa ubique etiam in seq. ponimus sinum totum $= 1$, qui proinde, dum ut factor vel divisor formulas ingreditur, non quidem expressus adparet; facile tamen ex servanda terminorum homogeneitate intelligitur, ubi idem aut quæ ejus potestas inseri debeat. Porro litera s præfixa literæ, a qua angulus aliquis denominatur, denotet anguli illius sinum, *cos* cosinum *tang* tangentem, *cot* cotangentem; atque $s^2\,\alpha$, $cos^2\,\beta$, quadrata sinus anguli α & cosinus ang. β, & sic in cæteris.

sunt in ratione duplicata sinuum angulorum elevationis. Est etiam (quæ tamen regula calculum non æque expeditum reddit) *altitudo data ad altitudinem jactus, ut duplus sinus totus ad sinum versum dupli anguli elevationis*, ideoque posita eadem vi projectionis, *altitudines jactuum sunt inter se ut sinus versi duplorum angulorum elevationis.*

Porro quia (per naturam Parabolæ) $CBq = 4DA \times AB$, atque (per demonstr.) $DA = a\,cos^2\,\alpha$ & $AB = a.\,s^2\,\alpha$, erit $CB = 2as\alpha.\,cos\alpha =$ (per El. Trig. planæ) $as2\alpha$, ideoque 2CB seu CN *amplitudo jactus*, quam vocabimus $d, = 2as2\alpha$. Vel sic: in Δ:lo rectangulo CRF est CF:FR seu CG:CB id est $a:\frac{1}{2}d::1:sFCR$ vel $s2GCT$, aut quia $2GCT + 2\alpha = 2$ rectis, ideoque $s2GCT = s2\alpha$, $CG:CB::1:s2\alpha$, & $2CB = CN = d = 2as2\alpha$. Unde consit

Theorema II. *Ut sinus totus ad sinum dupli anguli elevationis, ita est dupla altitudo respondens celeritati projectionis, ad amplitudinem jactus: & celeritate eâdem manente, amplitudines jactuum sunt ut sinus duplorum angulorum elevationis.*

Cor. 1. Quia $s2\alpha$ maximus est, sciz ipse sinus totus, quando $\alpha = 45°$, eo autem minor, quo magis a 45° recedit; liquet projectionis amplitudinem d maximam fore & quidem $= 2a$, angulo elevationis existente semirecto, atque minorem semper fieri prout a semirecto magis differt.

Cor. 2. Sint A & α duo diversi anguli elevationis; erit $s2A = s2\alpha$ in illo casu, ubi $2A + 2\alpha = 180°$, hoc est $A + \alpha = 90°$ vel unus angulorum

A, α,

A, a, tantum excedit 45°, quantum alter deficit a 45°. Ergo eâdem manente projecti celeritate, sub angulis elevationis a semirecto æqualiter differentibus, amplitudines jactuum sunt æquales.

COR. 3. Cum sit $d = 4asa.\ cosa$ & $g = as^2a$, deducitur inde $d:g::(4cosa:sa::$ per *El. Trig.*) $4: tanga :: 4\, cota : 1$; quod etiam facilius & immediate inde sequitur, quod in △:lo rectangulo CBT sit CB ($\frac{1}{2}d$): BT (= per propr. parabolæ 2AB = $2g$) :: $1 : tanga :: cota : 1$. Præterea ex natura parabolæ 4AD × AB = CBq id est $4(a-g)\, g = \frac{1}{4}dd$. Habemus itaque has formulas: I. $g = as^2a$, II. $d = 2as2a$, III. $4g = d.\ tanga$ vel $d = 4g.\ cota$, nec non IV. $dd = 16ag - 16gg$; per quas & adscita (saltem quoties a quæstionem ingreditur) ope tabularum sinuum & tangentium, expedite solvuntur varia de projectione gravium problemata, sciz datis duabus quibusvis quantitatum $a\, d\, g\, a$, aut vero datâ earum una nec non ratione inter duas ipsarum $a\, d\, g$, inveniuntur reliquæ. Ex. gr. sit datâ vi feriendus scopus N in plano per C horizontali situs. Propter datas jam a & d, statim innotescunt directiones desideratæ ope formulæ II:dæ; est nimirum $s2a = d:2a$, qui $s2a$ sic inventus respondet duobus arcubus, qui simul sumti semicirculum efficiunt, atque dimidiati dant binas elevationes proposito satisfacientes (*Cor.* 2.) Vicissim, data directione, vis ad scopum illum attingendum requisita determinatur inde, quod sit $a = d:2s2a$. Si grave dato impetu projectum pertigerit ad distantiam horizonta-

 lem

lem d, & volupe fuerit ſcire, ad quantam altitudinem idem adſcenderit? primum quæri poſſunt, uti jam dictum, bini valores α, unde porro reperitur duplex itidem ipſius g valor, ſciz $=(a ſ^2 \alpha$ per form. I. vel potius, form. III.) $\frac{1}{4} d. \, tang \alpha$; aut vero immediate ex form. IV. obtinetur $g = \frac{1}{2} a \pm \frac{1}{2} \sqrt{aa - \frac{1}{4} dd}$. Quando a & g dantur, babetur (form. IV. I.) $d = 4 \sqrt{g(a-g)}$ atque $ſ\alpha = \sqrt{(g:a)}$ Datis autem d, g, reperiuntur $a = g + dd:16g$, $tang. \alpha = 4g:d$. Cæterum manifeſtum eſt, data tantum proportione inter binas ipſarum a, d, g, inveniri α.

Cor. 4. Si quæratur angulus elevationis, ſub quo grave projiciendum eſt, ut amplitudo d fiat $= a$; quia (per hypoth. & formulam II. Cor. præc.) jam oportet eſſe $2aſ2\alpha = a$, erit $ſ2\alpha = \frac{1}{2}$, ergo $2\alpha = 30^\circ$ vel 150° & $\alpha = 15^\circ$ vel 75°. Si oporteat eſſe $g = d$; propter $tang. \alpha$ tunc $= 4$ (vi formulæ III.) erit $\alpha = 75^\circ 57' 54''$.

Cor. 5. Exiſtente angulo elevationis ſemirecto, vel (*Cor.* 1.) jactu horizontali longiſſimo, erit hujus amplitudo quadrupla altitudinis, quia in hoc caſu eſt $tang \alpha = 1$. ideoque (per form. III. *Cor.* 3.) $d = 4g$. Unde, vel quia in hoc caſu $d = 2a$ (Cor. 1.) ſequitur focum parabolæ tunc quidem cadere in ipſam lineam horizontalem CN. Cfr. infr. §. 7. *Cor.* 4.

Cor. 6. Binarum quarumlibet, quæ (*Cor.* 2.) eadem vi in diverſis directionibus CT, Ct (Fig. 1.

n. 2.) fiunt ejusdemque sunt amplitudinis, projectionum altitudines simul sumtæ æquales sunt datæ GC. Etenim ductis ad CT Ct perpendicularibus CS Cs, & per puncta occursus S s ad CG aliis SH sh, ut sint (per *Probl. huj.* §.) *CH* & *Ch* altitudines jactuum; erit (*hyp.* & *Eucl.* 1. 26.) in △△ CGS CGs, GS = Cs, unde porro in △△ GHS CHs, *GH* = *Ch*, ideoque CH + *Ch* = (CH + HG) = *CG*. Idem hoc inde patet, quia summa binorum ipsius *g* valorum $\frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\surd(aa - \frac{1}{4}dd)$ (Cor. 2.) sit *a*, nec non ex form. 1. vi cujus & quia in hoc casu (*Cor.* 2.) unus angulorum elevationis est alterius complementum, summa utriusque *g* erit $= a\,s^2\alpha + a.\,cos^2\alpha$; at $s^2\alpha + cos^2\alpha = 1$; ergo &c.

Illustratio.

Sit $a = 4500$ ped., angulus elevationis $\alpha = 35°$; quærantur d, g. $2a = 9000$, $2\alpha = 70°$

add. $\begin{cases} \text{Log. } 2a = 3.9542425 \\ \text{L. } s\, 2\alpha = 9.9729858 \end{cases}$

13.9272283

subtr. L. *sin. tot.* = 10.

L. $d = 3.9272283$

$d = 8457{,}2$ ped.

ad. $\begin{cases} \text{Log. } a = 3.6532125 \\ 2\text{L.} s\alpha = \text{L.} s^2\alpha = 19.5171826 \end{cases}$

23.1703951

subtr. 2L. *sin. tot.* = 20.

L. $g = 3.1703951$

$g = 1480{,}4$ ped.

Sit $a = 4500'$, $d = 6000$, quærantur α & g

L. *sin. tot.* + L. $d = 13.7781512$ $\quad \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}d = 3750$, $\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}d = 750$

subtr. L. $2a = 3.9542425$

L. $s\, 2\alpha = 9.8239087$

$2\alpha = 41°48'37''$ vel $138°11'23''$

$\alpha = 20°54'19''$ vel $69°5'41'$

add. $\begin{cases} \text{L. } 3750 = 3.5740313 \\ \text{L. } 750 = 2.8750613 \end{cases}$

6.4490926.

L. $\frac{1}{2}\sqrt{aa - \frac{1}{4}dd} = 3.2245463$

L. tang.

$L. tang. a = 9.5820274$ vel 10.4179726 $\frac{1}{2}\sqrt{aa - \frac{1}{4}dd} = 1677,08$

$L. \frac{1}{4}d = \underline{3.1760913}$ $\quad \underline{3.1760913}$ Et quia $\frac{1}{2}a = 2250$, erit

$\quad 12.7581187 \quad 13.5940639$ $\quad g = 2250 \pm 1677,08 =$

$- L. \mathit{s. tot.} = \underline{10.} \quad \underline{10.}$ $\quad = 572,92$ vel $3927,08$

$L. g = 2.7581187 \quad 3.5940639$

$g = 572,95$ vel $3927,03$

Esto $d = 6000$, $g = 695'$; quærantur a & a. $\frac{1}{4}d = 1500$, $4g = 2780$

$2 L. \frac{1}{4}d = 6.3521826$ $\quad 10 + L. 4g = 13.4440448$

subtr. $L. g = \underline{2.8419848}$ $\quad$ subtr. $L. d = \underline{3.7781512}$

$L. \frac{dd}{16g} = 3.5101978$ $\quad L. tang. a = 9.6658936$

sive

add. $\begin{cases} \frac{dd}{16g} = 3237,4 \\ g = \underline{695} \end{cases}$ $\quad 10 + L. \frac{d}{4g} = L. cot. a = 10.3341064$

$a = 3932,4$ $\quad a = 24°51'35''$

Quæratur secundum quam directionem grave sit projiciendum, ut adscendat ad altitudinem $\frac{3}{4}$ ejus, ad quam verticaliter sursum eodem impetu projectum pertingeret. Est jam $\frac{g}{a} = \frac{3}{4} = 0.75$, cujus Log. $= -1.8750613$

add. 2. $L. \mathit{sin. tot.} = \underline{20.}$

19.8750613, cujus dimidius, 9.9375303 est Log. $\mathit{s}a$, unde $a = 60°$

§. V.

Problema. *Invenire altitudinem a, ex qua grave cadere deberet, ut eam, quacum projicitur, celeritatem adquirat.*

1. Si detur ipsa celeritas, sit hæc ea, quacum corpus uniformiter motum obsolvere possit spatium

tium s tempore dato t. Experimento explorata esse debet altitudo f, quam grave aliquo tempore m emetiri valet. Quia igitur velocitate hoc lapſu adquiſitâ corpus æquabiliter motum percurrere posſet eodem hoc tempore m ſpatium $= 2f$; erit illa ipſa velocitas ut $(2f:m)$. Et velocitas cadendo ex altitudine a adquirenda eſt ut $(s:t)$. Atqui celeritatum quadrata ſunt ut altitudines emenſæ, i. e. $(4ff:mm):(ss:tt)::f:a$, unde $a=(mmss:4ftt)$. Vel ſic: quia tempora ſunt in ratione ſubduplicata altitudinum, erit $\sqrt{f}:\sqrt{a}::m:m\sqrt{(a:f)}=$ tempori cadendi per a, & quo uniformiter motum corpus abſolvere poteſt ſpatium $=2a$, velocitate ſciz hoc lapſu genitâ. Eâdem vero (*hypoth*) percurrendum eſt ſpatium s tempore t, & in motu æquabili, eâdem exiſtente celeritate, ſpatia ſunt ut tempora, i. e. $s:2a::t:m\sqrt{(a:f)}$, unde iterum deducitur $a=(mmss:4ftt)$.

2. Si, ut poſuimus, conſtet, grave tempore m decidere poſſe ex altitudine f; & grave ſurſum verticaliter projiciatur ſimulque obſervetur tempus $2n$, quod inde ab ipſo projectionis momento præterlabitur usquedum in eundem (§. I. *Axiom. 1.*) locum reciderit: notum eſt, tempora adſcenſus atque deſcenſus per ſummam, ad quam grave pertingit, altitudinem, æqualia eſſe, ideoque utrumque $=n$. Cum itaque a ſit altitudo, quam grave cadendo emetirur tempore dato n, atque ſpatia cadendo deſcripta ſint ut quadrata temporum, innoteſcet eadem inferendo $mm:nn::f:a=(nnf:mm)$.

3. Enimvero cum (*num. 1.*) celeritas, qua grave projicitur, vix satis cognosci, in plerisque saltem casibus, queat, quippe quæ mensuranda esset ex motu uniformi rectilineo, qualis vel propter continuam gravitatis actionem, vel frictionem plani, super quo idem forte fieri supponeretur, aliasque plures caussas, ægre obtinetur; neque (*num. 2.*) præterquam quod exacta temporis mensura difficultatem pariat, projectio penitus verticalis commode satis & facile efficiatur; præstabit in multis saltem casibus, quantitatem ipsius *a* experimento alia adhuc ratione capiendo, investigare. Et quidem si grave sub dato quovis elevationis angulo projiciatur & mensuretur amplitudo hujus jactus inde (per §. *præc. Cor. 3.*) cognosci poterit *a*. Facillime vero & immediatè innotescit, si projectio facta fuerit sub angulo elevationis 15° vel 75°; in hoc viz casu est *a* æqualis ipsi amplitudini jactus (*Cor. 4.* §. *cit.*). Aut vero sumto angulo elevationis 45°, erit dimidia amplitudo æqualis ipsi *a* (§. *cit. Cor. 1.*) Et hanc quidem ultimum nominatam directionem ideo saltem eligere præstat, quod error aliquis circa eam forte commissus, errorem quam fieri potest minimè sensibilem in ipsa jactus amplitudine pariat; variat enim *d* ut *s2a* (§. 4. *Theor. 2.*)

Schol. Obsurvatum fuit, corpus, urgente vi gravitatis, ex quiete libere cadendo in Gallia tempore unius minuti secundi conficere spatium 15, 625. pedum Rhenan. (vid. Euleri *Mechan.* P. I. §. 223.) id est, (posita ratione pedis Svecani ad Rhenanum $= 1000 : 1057$. vid. *Kongl Sw. Wet. Acad. Hnadl.* 1740. pag. 208.) ped. Svec. $16\frac{33}{64} = f$,

cujus

cujus numeri logarithmus est 1. 2178950. Cum itaque jam sit $m = 1''$, adeo ut assumto etiam $t = 1''$ (designante sic quidem s spatium uno minuto secundo absolvendum) fiat $a = (ss:4f)$, nec non $a = nnf$; si dictus ille logarithmus auferatur a logarithmo duplicato ipsius $\frac{1}{2}s$, vel addatur duplo logarithmo ipsius n, (exprimente n numerum minutorum secundorum temporis observati), prodibit logarithmus altitudinis a in pedibus Svecanis expressæ.

SCHOL. 2. Ex his porro sequitur 1) Data in pedibus Svec. aliqua altitudine verticali a, per quam corpus ex quiete libere cadat; reperiri celeritatem hoc lapsu adquisitam, sciz spatium tempore $1'$ æquabiliter percurrendum, $s = 2\sqrt{af} =$ quam proxime $8, 125\sqrt{a}$. 2) Corpus, quod minutis secundis n libere descenderat, eam habiturum celeritatem, qua uno min. sec. æquabiliter motum conficiet spatium $s = 2nf = (1057n:32)$ ped. Svec. & vicissim 3) datâ illâ velocitate seu spatio s, fore $n = (s:2f)$ min. sec. 4) Ut corpus datam altitudinem a cadendo emetiatur, requiri tempus min. sec. $n = \sqrt{(a:f)}$ vel quam proxime $\sqrt{a:32,5}$, si a detur in ped. Svec.

ILLUSTRATIO.

Quæratur altitudo debita celeritati, qua 600. ped. Svec. tempore $1'$ conficiantur? quia jam $\frac{1}{2}s = 300$, erit $2.L.\frac{1}{2}s = 4.9542425$, unde ablato $L.f = 1.2178950$, relinquitur $L.a = 3.7363475$: est itaque $a = 5449$. ped. Svec.

Si corpus verticaliter sursum projectum elapso tempore $15''$ in terram reciderit, quæritur ad quantam altitudinem adscenderit & quæ fuerit projectionis velocitas? $n = 7,5$

$2n = 15$

$2.L.7,5 = 1.7501226$	$L.15 = 1.1760913$
add. $L.f = 1.2178950$	add. $L.f = 1.2178950$
$L.a = 2.9680176$	$L.s = 2.3939863$

$a =$

$a = 929$ ped. Svec. $s = 247,7$ ped. Svec.

Quæritur quantam grave, altitudinem 4500 ped. Svec. libero lapsu emensum, habeat celeritatem?

$4a = 18000$, cujus Log. $= 4.2552725$
add. L. $f = 1.2178950$

5.4731675, qui dimidiatus dat quæsitum Log. $s = 2.7365837$ adeoq; spatium 545, 2 ped. Svec. tempore $1''$ percurretur a corpore, adquisita velocitate æquabiliter moto.

Quæritur quanto tempore corpus, eâdem, qua prope superficiem Terræ, vi gravitatis continue impulsum, inde ad centrum usque Telluris (si vis ista ad illud punctum directè tenderet) cadendo perveniret? Assumta semidiametro terrestri $598\frac{1}{2}$ mill. Svec. (quanta circiter est maxima, nimirum semidiameter æquatoris, *Kongl. Sw. Wet. Acad. Handl.* 1750. p. 94.) erit $a = 36000 \times 598\frac{1}{2}$

add. { Log. $36000 = 4.5563025$
Log. $598\frac{1}{2} = 2.7770641$ }

L. $a = 7.3332666$
subtr. L. $f = 1.2178950$

6.1154716, cujus dimidio 3.0577358 respondent 1142, 18. min. sec. seu 19, $2''$. $10'''$. Conf. G. W. KRAFFT *Phys.* P. I. §. 147.

§. VI. *Fig. 2.*

LEMMA I. *Si angulus datus in duos* A *&* B *fuerit divisus, erit* $sA \times sB$ *eo majus, quo propius ad æqualitatem accedunt* A *&* B*; ac proinde maximum, quando* A = B. (*) Esto ACGB circuli alicujus segmen-

(*) Ope Methodi fluxionum universaliter constat, $s^m A \times s^n B$ esse maximum, quando fuerit *tang.* A : *tang.* B : : m : n. vid. MAC LAUR. *Treatise of Fluxions* §. 910.

gmentum capiens angulum = supplemento dati ad duos rectos; quare ductis a puncto C, in circumferentia istius segmenti utcunque assumto, ad data sic puncta AB rectis CA CB, erunt (*Eucl. I. 32.* & III. 21, dico autem angulos CAB, CBA simpliciter A, B) A + B = angulo dato, id quod hypothesis requirit. Et sunt (per princ. Trig. plan.) CB CA dupli sinus angulorum AB, Erit itaque) *s*A × *s*B ut AC × CB, h. e. (ob ang. ACB constantem) ut (*Eucl. VI. 23. Cor.*) △ABC, ideoque quia basis AB △:li eadem manet, ut (*Eucl. VI. 1. cor.*) ejus altitudo, quæ sit *CL*. Concurrat CL cum circuli diametro EF, parallela ipsi AB, in H, & ex centro O sit OG perpendicularis ad EF vel AB, occurrens circumferentiæ in G. Itaque propter constantem LH, crescit CL crescente CH, i. e. (*Eucl. III. 15.*) accedente puncto H propius ad O vel C ad G, quo ipso autem propius ad æqualitatem accedunt arcus CB CA, & ultimùm, cadente C in G, æquales fiunt (*Eucl. III. 3.*) Ergo pariter anguli AB (*Eucl. VI. 3.*)

Idem sic quoque ostenditur: Ducta diametro CK ut & rectâ BK, est (*Eucl. III. 27*) ang. A = CKB & (*Eucl. III. 31.*) ang. CLA = CBK, quare in △△CLA CBK, erit CL : AC :: CB : CK, unde (*Eucl. VI. 16.*) AC × CB seu 2*s*A × 2*s*B = CL × CK; quare, ob constantem CK, *s*A × *s*B crescit ut CL. &c. Et quidem si magis determinatus desideretur valor ipsius *s*A × *s*B, notandum, esse CL = CH — OD (vel CH + OL quando arcus AGB major est semicirculo, seu aug. A + B > recto). Si itaque radius $\frac{1}{2}$CK dicatur R, erit (per demonstr.) $2/A \times /B = R \times \overline{CH \pm OD}$. Est autem *CH* cosinus anguli COG = (*Eucl. III. 20*) 2CKG = differentiæ angulorum AB; quia sciz (*Eucl. III. 27.*) A = (CKB = GKB + CKG = (*Eucl. III. 27.*) AKG + CKG =) *B* + 2*CKG*. Et *OD* cosinus est anguli AOG = (AKB =) *A* + *B*. Unde patet.

LEMMA II. $2fA \times fB = R \times (cos. \overline{A-B} \mp cos \overline{A+B})$, prout ang. datus A + B vel acutus fuerit vel obtusus. Designat autem semper A majorem, si A & B inæquales fuerint.

§. VII. *Fig. 1. 3. 5.*

PROBLEMA. *Si grave ex C in data directione CT projectum feriat vel ferire debeat objectum L, cujus datur apparens altitudo supra (vel profunditas infra) horizontem, videlicet (Fig. 5.) angulus PCl; (*) datâ distantiâ objecti, invenire vim, qua grave projiciendum est, vel vicissim, datâ projectionis celeritate, illam distantiam.*

I. *Constructio Geometrica 1.*) Doto puncto L &c. ducatur (*Fig. I. n. 1.*) ipsi CG, verticali in C & proinde positione datæ, parallela LK, cui occurrat CT in K. Abscindatur a CK ipsius quarta pars C*m* & ducatur *m*G faciens angulum K*m*G = LCG dato & occur-

(*) Supoonimus sciz, si observatus fuerit hic angulus, radios visorios ex L ad C provenientes refractionem non subire, sed secundum rectam lineam propagari; aut saltem correctâ refractione, verum obtineri angolum PC*l*.

occurrens ipsi CG in G; erit CG altitudo determinans impetum, qui ad projectionem requiritur. Nam si ducta fuerit ipsi CK parallela LO & occurrens ipsi GC in O; ob $\triangle\triangle$ LCO GmC æquiangula, erit CO:OL:: (Cm $= \frac{1}{4}$CK $=$) $\frac{1}{4}$OL:CG, quare 4CG $\times$ CO $=$ OLq, ideoque 4CG $=$ parametro ad punctum parabolæ C pertinenti, ut oportuit (§. 3.)

2. Quando (per hyp. & §. 3.) dantur altitudo CG, ut & recta horizontalis GD positione; fiat (*Fig.* 3.) ang. TCF $=$ TCG & CF $=$ CG. Per inventum sic punctum F, ducatur ad Cl perpendicularis recta HFR, quæ occurrat ipsi GD in H, & in HD capiatur HI $=$ HG. Ex puncto I ducta ipsi GI perpendicularis IL determinabit in Cl punctum quæsitum L & distantiam CL. Sumto enim (*Fig.* 5.) in recta HR, productâ si opus sit, puncto f ita, ut sit Rf $=$ RF, patet æquales esse rectas Cf CF CG, adeo ut puncta GFf, sint in circumferentia circuli, quam (*Eucl. III. 16. Cor.*) tangit HG; quare (*Eucl. III. 36.*) *HF* $\times$ *Hf* $=$ (HGq $=$ *per constr.*) *HIq*; unde rursus, (vi constructionis, & Eucl. III. 37, 19. 1. Cor.) sequitur: circuli per puncta IFf, non in directum posita, transeuntis (Confr. *Eucl. IV.* 5.) centrum esse L seu æquales esse LI LF Lf. Ergo propter CF $=$ CG, nec non LF $=$ LI, & ang. *GCT* $=$ *TCF*, erunt puncta CL in parabola, cujus focus F, directrix GD, & quam in C tangit recta CT. In eâdem vero prorsus parabolâ movetur (§. 3.) projectum, quod proinde feriet punctum L. Alia constructio infra (§. 9. *Cor.* 1.) occurret. In-

telligi-

telligitur autem ex hac jam allata, CL eo fieri majorem, quo major GI vel hujus dimidia GH. Crescit autem GH crescente CR, id est, decrescente angulo *l*CF vel *l*C*f*; quo itaque evanescente adeo ut CF C*f* cadant in ipsam C*l*, sive bisecante CT angulum GC*l*, oportet *CL* maximam esse. Porro patet unum idemque obtineri punctum L, etjamsi F & *f* situm invicem permutaverint, nimirum F vel ad unam vel ad alteram rectæ C*l* partem ceciderit, hoc est, sive angulus GCF minor sive major fuerit ipso GC*l*, modo eadem maneat eorum differientia, (est enim FC*l*$=$*f*C*l*) adeoque differentia inter ($\frac{1}{2}$ GCF seu) *GCT* & $\frac{1}{2}$ GC*l*. Scilicet posito CB bisecare angulum GC*l*, perinde in hoc negotio est sive CT cadat ut CT, sive ut C*t*, modo fuerit BCT $=$ BC*t*. Ex quibus manifestum fit (conf. *Cor.* 5. ut & §. 9. *Constr.* 2 & *Cor.* 2.)

Cor. 1. Data vi projectionis, jactum super rectâ quacunque positione datâ C*l* vel plano utcunque inclinato (cfr. §. 3. *Schol.* 2.) longissimum fore, si projectio facta fuerit secundum CB, quæ bisecat angulum GC*l*; atque.

Cor. 2. Unum idemque in C*l* attingi punctum L, vel æquales fore amplitudines jactuum, si grave projiciatur secundum directiones æqualiter utrinque remotas a recta dictum angulum bisecante, vel a directione langissimæ projectionis; neque plures quam duas ejusmodi esse posse directiones, quibus eâdem vi idem punctum L potest attingi. Hinc

Cor. 3. Angulum datum GCL $=$ esse summæ angulorum $GCT\ GCt$, si directionibus CT Ct idem punctum L attingitur; cum unus eorum tantum superet $\frac{1}{2}$GCL, quantum alter ab eodem deficit. Nimirum propter BCG $=$ BCl & BCT $=$ BCt, est GCT $=$ tCL ideoque $GCT + GCt = GCL$. Denique

Cor. 4. Quando jactus super Cl longissimus est, focum parabolæ, in qua tunc defertur grave projectum, cadere in ipsam Cl, & vice versa (demonstr. constr. 2 & Cor. 1.). Duarum vero (Cor. 2. 3.). parabolarum, quas grave, ex eodem puncto C eadem velocitate propulsum, describendo, eundem ferit scopum L, focos a recta CL æqualiter distare.

II. *Arithmeticæ* autem regulæ hæc problemata solvendi, sic eliciuntur: Per §. 3. est (*Fig.* 3. *n.* 1.) $4CG \times CO = OLq$ ideoque $\div\!\div 4CG, OL, CO$. At in $\triangle$ COL est (per Elem. Trig.) $CO : OL :: \int CLO$ vel $\int LCT : \int LCG$, quare $4CG : OL :: \int LCG : \int TCL$. Porro $OL : CL :: \int LCG : \int COL$ vel $\int GCT$. Ergo $4CG : CL :: \int^2 GCL : \int GCT \times \int TCL$. Si itaque dicantur $CG\, a$, $CL\, d$, ang. elevationis $TCP\, \alpha$, apparens altitudo (vel profunditas) objecti vel puncti L supra (infra) horizontem, nimirum angulus $LCP\, \beta$; quia $\int GCL = co\int \beta$, $\int GCT = co\int \alpha$, $TCL = \alpha - \beta$ vel $\alpha + \beta$, prout L vel supra vel infra planum, in puncto projectionis C horizontale, constituitur; existunt hinc formulæ $d = 4a . co\int \alpha . \int(\alpha \mp \beta) : co\int^2 \beta$ & $a = d . co\int^2 \beta : 4 co\int \alpha . \int(\alpha \mp \beta)$. Vel potius, si detur L per distantiam horizontalem CP, quæ dicatur b, vel altituditudinem perpendicularem LP, quæ sit $=c$, obtinetur, propter $b:d::cos\beta:1$ & $c:b::1:cot\beta$, $a=b\,cos\beta:4cos\alpha.\,s(\alpha\mp\beta)$ vel $=c.\,cos\beta.\,cot\beta:4cos\alpha.\,s(\alpha\mp\beta)$ Si projectio deorsum fiat secundum directionem horizonti obliquam, ubique pro $\alpha\mp\beta$ usu veniet $\beta-\alpha$.

Aliter eædem hæ formulæ etiam ex *Constr.* 2. sequenti ratione derivantur (*Fig.* 3. *Coll.* 5.) Existente CG radio, est recta, quæ ducta concipiatur, GF$=2s$GCT, adeo ut posito sinu toto$=1$, sit GF $2CG\times s$GCT. Porro in $\triangle$ HGF (per El. Trig.) $GF:GH::sH:sGFH$. At quia quadrilateri CGHR anguli ad G & R recti sunt, reliqui simul sumti duos rectos efficient, ideoque erit sH$=s$GCL. Porro (*Eucl.* 1. 32.) HGF$+$GFH$=$ (DHR$=$GCL$=$) GCT$+$TCL, quorum HGF$=$GCT, cum sit CGF utriusque complementum ad rectum; consequenter $GFH=TCL$. Ergo, quia GI$=2$GH, erit $2CG\times s$GCT : GI :: sGCL : $2s$TCL. Ast GI : CL :: sGCL : 1. Unde rursus deducitur $4CG:CL::s^2GCL:sGCT\times sTCL$, quæ analogia formulas modo allatas suppeditat, uti jam ostensum fuit.

Cor. 5. Eâdem existente vi projectionis, amplitudines jactuum super plano inclinato CL (*Fig.* 3. 5.) sunt in ratione composita sinuum angulorum GCT, TCL, in quos directio CT, secundum quam projectio fit, dividit angulum GCL a rectâ verticali & CL formatum, sive ut $cos\,\alpha.\,s(\alpha\mp\beta)$, consequenter (§. 6. *Lem.* 1.) eo majores, quo propiores sunt directiones CTCt lineæ CB bisecanti angulum GCL. Unde iterum fluunt, quæ modo

(Cor.

(*Cor.* 1. & 2.). alia ratione ostensa sunt; & jactus quidem longissimus erit, si $a = 45^\circ \pm \frac{1}{2}\beta$. Ex generali nunc invento ipsius d valore etiam sequuntur ea, quæ speciatim de amplitudine jactuum horizontalium supra (§. 4.) diximus.

COR. 6. Quia manentibus CL & ang. GCL, CG eo est minor, quo majus $f\,GCT \times f\,TCL$ vel $cof\,\alpha.\, f\,(\alpha \mp \beta)$; ad datum scopum L a dato puncto C feriendum, eo minor requiritur vis, quo propius accedunt $CTCt$ ad lineam CB, quæ angulum GCL bifariam secat, & minimâ vi opus erit, si projectio fiat secundum illam ipsam lineam CB (§. 6. *Lem.* 1.). Atqui si hac vis directione attingitur punctum L, minore vi ullâ idem attingi nequit. Cum enim, cæteris paribus, d sit proportionalis ipsi a; minor aliquis impetus, ne quidem secundum CB, quæ tamen (Cor. 1.) jactum super Cl efficit longissimum, directus sufficiet.

COR. 7. Quia super CL est maxima (Cor. 1. 5.) jactus amplitudo $d : 4a :: f^2 \frac{1}{2} GCL : f^2 GCL$; atqui (per *El.* Trig.) $f\,GCL = 2\, f \frac{1}{2} GCL \times cof \frac{1}{2} GCL$, ideoque $f^2 GCL = 4 f^2 \frac{1}{2} GCL \times cof^2 \frac{1}{2} GCL$; erit in hoc casu $d = a : cof.^2 \frac{1}{2} GCL = a : cof^2 (45^\circ \mp \frac{1}{2}\beta) = a : f^2 (45^\circ \pm \frac{1}{2}\beta)$; Et minima vis (*Cor.* 5.) ad datum scopum L attingendum sufficiens, illa est, quæ determinatur per altitudinem $a = d.\, cof^2 \frac{1}{2} GCL = d.\, f^2 (45^\circ \pm \frac{1}{2}\beta)$. vel potius, si datur L non per d sed per b; quia $d : b :: 1 : f\,GCL$ vel $2 f \frac{1}{2} GCL \times cof \frac{1}{2} GCL$, & $cof : f :: cot : 1$, unde $d : b :: cot \frac{1}{2} GCL : 2\, cof^2 \frac{1}{2} GCL$; obtinetur in præsenti casu (vid. etiam

§. 9. Cor. 3.) $a = \frac{1}{2}b.\ \cot \frac{1}{2}GCL = \frac{1}{2}b.\ \tan (45^\circ \pm \frac{1}{2}\beta)$. Si autem datur L per c, fiet $a = \frac{1}{2}c.\ \cot \beta.\ \tan (45^\circ \pm \frac{1}{2}\beta)$

ILLUSTRATIO.

Sit $d = 4500$ ped. $\alpha = 55^\circ$ $\beta = 8^\circ$, unde $\alpha - \beta = 47^\circ$ & $\alpha + \beta = 63^\circ$

$L.4d = L.18000 = 4.2552725$ ⎫
$L.\cos\alpha = 9.7585913$ ⎭ add. (tale

add. $L.s47^\circ = 9.8641275$ Si L supra plan. in C horizon-

vel $L.s63^\circ = 9.9498809$ si vero infra idem adparet

23.8779913

vel 23.9637447

subtr. $2\,L.\cos\beta = 19.9915056$

$L\,d = 3.8864857$ vel 3.9722391

$CL = d = 7700$ in casu I:mo & $9380', 7$ in casu II:do.

Quæratur a, datis α & β ut supra atque præterea

$CP = b = 7625'$, sitque L elevatum supra horizontem	vel $PL = c = 1305', 58$, L vero infra horizontem conspiciatur
$L.4 = 0.6020600$	$L.4. = 0.6020600$
$L.\cos\alpha + L.67^\circ = 19.6227188$	$L.\cos\alpha + L.s63^\circ = 19.7084722$
20.2247788	20.3105322
$L.b = 3.8822385$ ⎫	$L.c = 3.1157944$ ⎫
$L.\cos.\beta = 9.9957528$ ⎬ add.	$L.\cos.\beta = 9.9957528$ ⎬ add.
$10.$ ⎭	$L.\cot.\beta = 10.8521975$ ⎭
23.8779913	23.9637457
subtr. 20.2247788	subtr. 20.3105322
$L.a = 3.6532125$	$L.a = 3.6532125$

$a = 4500'$ in utroque casu.

Manen-

Manentibus a & β, reperitur (*Cor.* 7.) maxima super plano elevato CL jactus amplitudo $= 7900,4$. Est enim $54^\circ + \frac{1}{2}\beta = 49^\circ$

$$20 + \mathrm{L}.a = 23.6532125$$
$$\text{subtr. } 2\,\mathrm{L}\,s\,49^\circ = \underline{19.7555598}$$
$$3.8976527 = \mathrm{L}.\,7900,4.$$

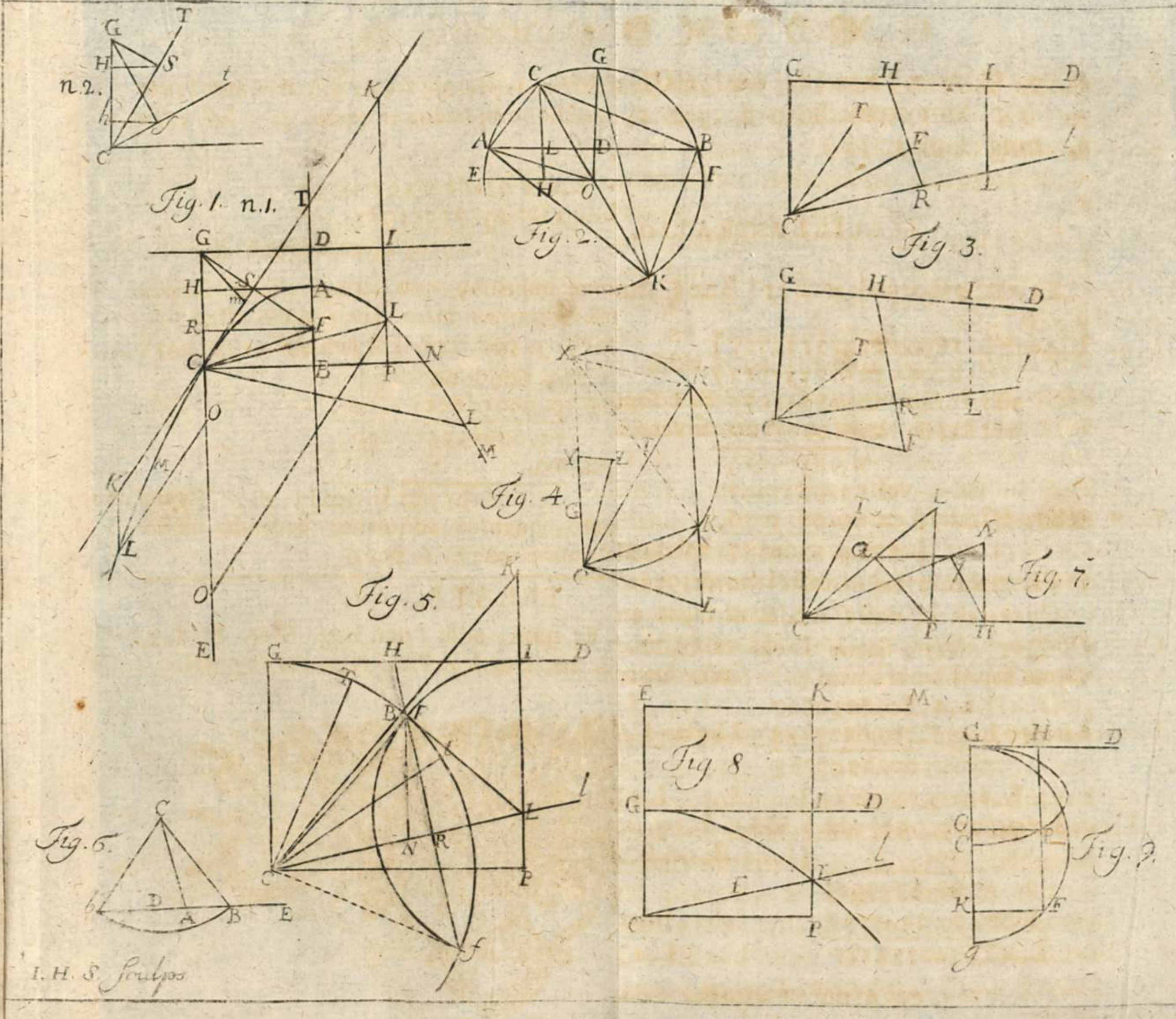
Quæritur minimus impetus, quo attingi potest scopus L, cujus profunditas adparens infra horizontem est $= 8^\circ = \beta$, posita CP $= 9289,5$. ped. $= b$. Est jam $45^\circ - \frac{1}{2}\beta = 41^\circ$

$$\mathrm{L}.\,\tfrac{1}{2}b = 3.6669624$$
$$\text{add. Log. } tang.\,41^\circ = \underline{9.9391663\,1}$$
$$13.6061255$$
$$\text{subtr. L. } sin.\ tot. = \underline{10.}$$

$3.6061255 = \mathrm{L}.\ 4037,6.$ Tanto itaque opus est impetu, quantus adquiritur cadendo ex altitudine 4037, 6 ped.

ERRATA.

Pag. 6. lin. 8, 9. Et quia, add. (per Leg. Mot. II. §. 2. hyp. 2.) Pag. 16. l. 20.. Poe leg. Pro. l. 24 obs leg. abs.



n. 2.
Fig. 1. n. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
I. H. S. sculps.

§. 9. Cor. 3.) $a = \frac{1}{2} b. \cot \frac{1}{2} GCL = \frac{1}{2} b. \tang (45° \pm \frac{1}{2} \beta)$. Si autem datur L per c, fiet $a = \frac{1}{2} c. \cot \beta. \tang (45° \pm \frac{1}{2} \beta)$

ILLUSTRATIO.

Sit $a = 4500$ ped. $\alpha = 55°$ $\beta = 8°$, unde $\alpha - \beta = 47°$ & $\alpha + \beta = 63°$

L. 4a = L. 18000 = 4.2552725 } add.
L. cos α = 9.7585913 }
add. L. s 47° = 9.8641275 (tale Si L supra plan. in C horizon-
vel L. s 63° = 9.9498809 si vero infra idem adparet

23.8779913
vel 23.9637447
subtr. 2 L. cos β = 19.9915056
L d = 3.8864857 vel 3.9722391

CL = d = 7700 in casu I:mo & 9380', 7 in casu II:do.

Quæratur a, datis α & β ut supra atque præterea

CP = b = 7625', sitque L elevatum supra herizontem

L. 4 = 0.6020600
L. cos α + L. 67° = 19.6227188
20.2247788

L. b = 3.8822385 }
L. cos. β = 9.9957528 } add.
10. }
23.8779913
subtr. 20.2247788
L. a = 3.6532125

vel PL = c = 1305', 58, L vero infra horizontem conspiciatur

L. 4. = 0.6020600
L. cos α + L. s 63° = 19.7084722
20.3105322

L. c = 3.1157944 }
L. cos. β = 9.9957528 } add.
L. cot. β = 10.8521975 }
23.9637457
subtr. 20.3105322
L. a = 3.6532125

$a = 4500'$ in utroque casu.

Manen-

Manentibus a & β, reperitur (*Cor.* 7.) maxima ſuper plano elevato CL jactus amplitudo $= 7900,4$. Eſt enim $54^\circ + \frac{1}{2}\beta = 49^\circ$

$$20 + \text{L}.\,a = 23.6532125$$
$$\text{ſubtr. } 2\,\text{L}\,ſ\,49^\circ = \underline{19.7555598}$$
$$3.8976527 = \text{L}.\,7900,4.$$

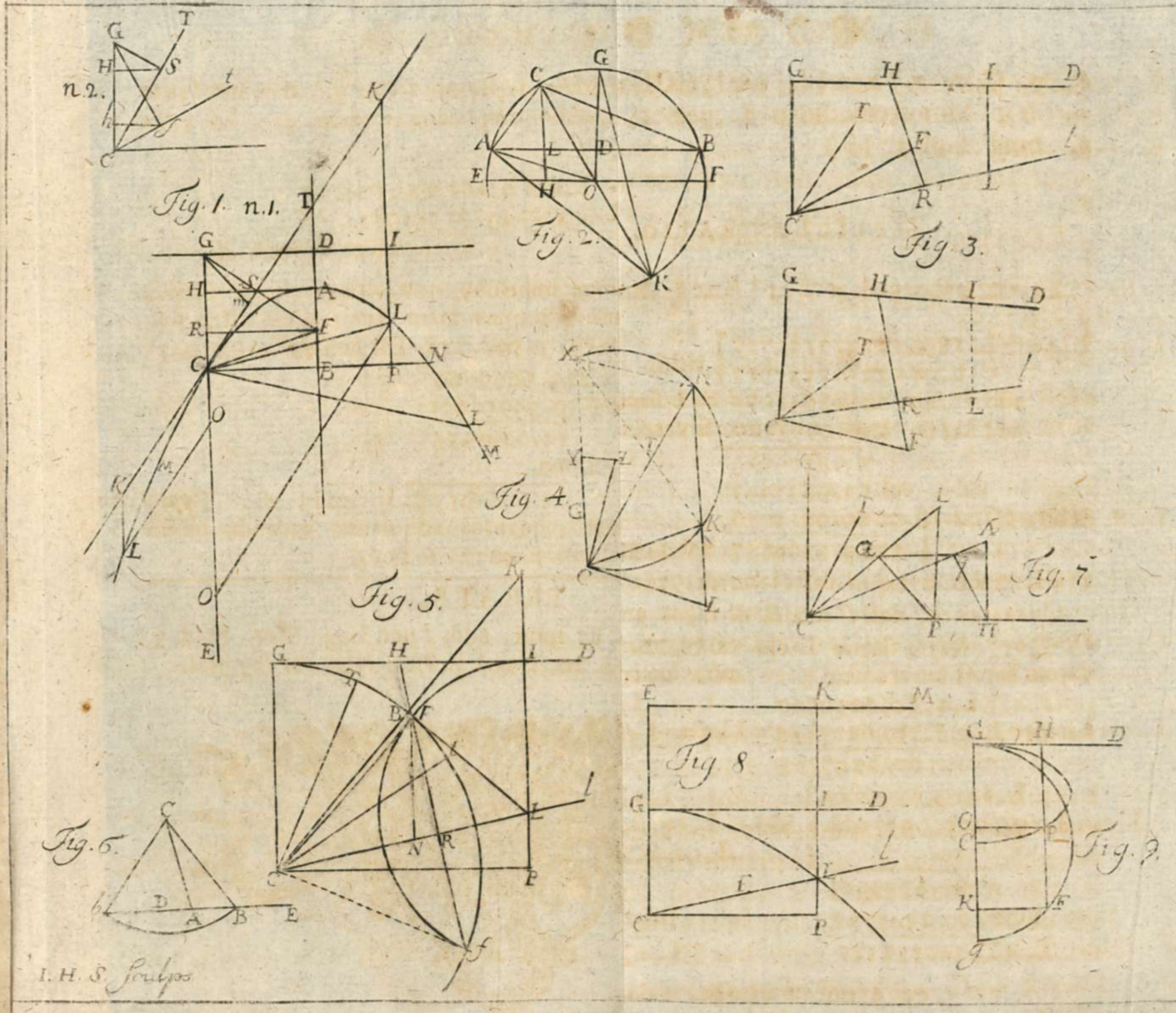
Quæritur minimus impetus, quo attingi poteſt ſcopus L, cujus profunditas adparens infra horizontem eſt $= 8^\circ = \beta$, poſita CP $= 9289,5$. ped. $= b$. Eſt jam $45^\circ - \frac{1}{2}\beta = 41^\circ$

$$\text{L}.\,\tfrac{1}{2}b = 3.6669624$$
$$\text{add. Log. } tang.\ 41^\circ = \underline{9.9391663\,1}$$
$$13.6061255$$
$$\text{ſubtr. L. } ſin.\ tot. = \underline{10.}$$
$$3.6061255 = \text{L}.\ 4037,6.$$

Tanto itaque opus eſt impetu, quantus adquiritur cadendo ex altitudine 4037, 6 ped.

ERRATA.

Pag. 6. lin. 8, 9. Et quia, add. (per Leg. Mot. II. §. 2. hyp. 2.) Pag. 16. l. 20.. Poe leg. Pro. l. 24 obſ leg. abſ.


n.2.
Fig. 1. n.1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig 8
Fig. 9.
I. H. S. Sculps