24.

Q. F. S. F. Q.

DISSERTATIO GRADUALIS,

LUNULAS

QUASDAM

CIRCULARES QUADRABILES

EXHIBENS,

QUAM,

Consensu Ampliss. Fac. Philos. in Reg. Acad. Aboënsi,

PRÆSIDE

MARTINO JOHANNE WALLENIO,

MATHEM. PROFESS. REG. & ORDIN.

FAC. PHIL. h. t. DECANO,

Publico examini submittit

DANIEL WIJNQUIST,

WIBURGENSIS.

In Audit. Maj. d. XXIII. Junii Anni MDCCLXVI.

H. A. M. S.

ABOÆ,

Impressit JOH. CHRISTOPH. FRENCKELL.

D. D.

§. I.

Lunula sensu generalissimo denotare potest figuram, duabus lineis curvis, in superficie quacunque descriptis & sibi occurrentibus, terminatam; atque, pro diversa hujus superficiei indole, vel *plana*, vel *sphærica* (*a*) &c. vocari (*b*).

(*a*) Quadraturam quarundam *Lunularum Sphæricarum* proposuit LEIBNITIUS in Actis Erud. Lips. A. 1692. p. 277.

(*b*) Eatenus quoque superficies *Ungularum* curvatas, ad classem Lunularum referre licet.

§. II.

Pro varia curvarum (§. I.) natura, *Lunulæ planæ* varias iterum sortiuntur denominationes (*c*). Non autem nisi Lunulæ circulares nostræ nunc erunt considerationis.

(c) *Lunulæ Ellipticæ quadrabiles* exhibentur in *Kongl. Vet. Acad. Handl.* 1757. p. 218. seqq. *Lunularum Cyclo-parabolicarum* i. e. arcu circulari & arcu parabolæ contentarum, mentionem fecit WOLFIUS in *Act. Erud. Lips.* 1715. p. 213. 217.

§. III.

Lunula Circularis (*) nobis est Spatium ACBD duobus arcubus circularibus, convexo ACB & concavo (*d*) ADB, in plano communi descriptis atque se mutuo secantibus (*e*) comprehensum. Vocari etjam a nonnullis interdum solet *Meniscus*.

(*) Teste KRAFFT (in *Instit. Geom. Sublimior.* T. I. §. 165.) theoriam Lunularum generalem & elegantem dedit quondam in Exercitationibus Mathematicis, Venetiis A. 1724 editis, atque, inter alia, methodum determinandi omnes innumeras Lunulas quadrabiles proposuit DAN. BERNOULLI. Ratio generalis id præstandi continetur quoque in §.§. 5-7, 21. dissertationis cujusdam (vid. *Comment. Petrop. T. IX. p.* 207. *seqq.*) L. EULERI occupati in solvendo Problemate quodam Geometrico circa Lunulas a circulis formatas, cujus particularem solutionem antea dederat modo nominatus BERNOULLI.

(*d*) Altero scil. convexitatem, altero concavitatem, extrorsum vertente; neque enim, quod sciam, figura utrinque convexa, sensu maxime proprio Lunula dici svevit; ut taceam nondum adparuisse quadraturam ullius spatii ex duobus segmentis circularibus conflati.

(*e*) His omnibus opus est determinationibus junctim sumendis, ut hæc Lunula & plana esse intelligatur, & cum a circulo integro tum a spatio qvovis annulari discernatur. Et quamvis viderimus etjam Lunulæ nomine nonnunquam (ut in *Act. Erud. Lips.* 1709. p. 81. & KRAFFT. Instit. Geom. Sublim.

lim. T. I. §. 181.) venire spatium, inter peripherias integras duorum circulorum, quarum altera alteram intus tangit, interjectum: in definita tamen vocis acceptione nunc manebimus. Cæterum quæ in §§. 4 - 9. de his Lunulis dicentur, eorum vel omni vel plenaria demonstratione supersedemus; quia partim perfacile ex primis Geometriæ elementis fluunt, partim ad caput tractationis nostræ haud pertinent.

§. IV.

Sunto (*f*) E, F (Fig. 1. 3. 4. 5. 6.) centra circulorum ACB, ADB, respective: recta linea FEDC per hæc centra transiens *Axis Lunulæ* merito dicatur; quippe quæ bifariam, in partes scil. æquales, similes & utrinque similiter positas dividit Lunulam ipsam ejusque arcus, immo totam figuram, ut angulos AEB, AFB, qui *anguli convexitatis* & *concavitatis* dicentur (*g*); Sectores AEBCA, AFBDA; Segmenta ABDA, ABCA; chordam denique circulis communem videlicet rectam AB seu *Basin* Lunulæ, atque huic perpendicularis est. Spatium igitur mixtilineum ACD vel BCD *Semilunula* vocari poterit.

(*f*) Vid. EUCL. Elem. Lib. III. Prop. 5. (*g*) Ut &, alio quidem respectu, *anguli Sectorum* EUCL. Elem. VI. 33. Cæterum fieri potest ut horum angulorum vel alteruter vel uterque duos rectos superet, qualis quidem *gibbus* seu *convexus* passim dicitur (Gallice *Angle rentrant*). Semisses autem eorum AEC, AFC non possunt non singulæ esse duobus rectis minores, seu anguli sensu maxime proprio; quales specifico nomine *concavi* (*Angles saillans*) nonnunquam vocantur.

§. V.

Angulus curvilineus CAD (vel CBD), qui *angulus Lunulæ* vocari poterit, æqualis censendus est angulo rectilineo EAF quem efficiunt radii EA, FA circulorum ad alterutrum intersectionis (§. 3.) punctum A ducti (*b*).

(*b*) Confr. EUCL. Elem. Libr. III. Prop. 16.

§. VI.

Arcus Lunulæ integri non possunt non & *inæquales* esse & *dissimiles*. Scilicet arcus *convexus* & longitudine major erit *concavo*; & majorem ad totam circuli peripheriam habebit proportionem, seu (§. 4) *angulus convexitatis major* erit *angulo concavitatis* (*i*); & (*k*) semidifferentia eorum ipse *angulus Lunulæ* (§. 5.). Dissimiles ergo etjam erunt Sectores EACB & FADB horumque dimidii EAC & FAD.

(*i*) Scilicet dum centris E, F per A describuntur intra angulum AFE vel AEC arcus circulares AC, AD: erit (EUCLID. Elem. III. 7.) FA vel FD < FC; unde patet istorum arcuum adeoque & (§. 4.) integrorum Lunulæ arcuum priorem fore extrorsum convexum, posteriorem concavum. At ibi ad centrum insistit externus Trianguli AEF angulus AEC, huic internus AFE. Ergo &c. EUCL. Elem. I. 16. VI. 33. Cor. 1. (*k*) EUCL. Elem. I. 32.

§. VII.

Si *radius concavitatis* fuerit major (minor) radio *convexitatis*; erit maxima Lunulæ latitudo CD, quæ simpliciter *Latitudo Lunulæ* dicatur, æqualis distantiæ centrorum EF, demtâ (additâ) radiorum differentiâ. Vel generatim CD = EF + EA — FA, i. e. prodibit latitudo Lunulæ, si distantiæ centrorum adjiciatur radius convexitatis & subtrahatur radius concavitatis.

§. VIII.

Quod si ambo radii fuerint æquales, quo in casu *Lunula Æquicurva* vocari posset: erit *latitudo* ejus (§. 7.) æqualis *distantiæ centrorum*, & summa arcuum, seu *perimeter Lunulæ*, toti *peripheriæ circuli*; adeo ut alter alterius sit supplementum ad totam peripheriam; *convexus* quidem semicirculo major, *concavus* semicirculo minor (*l*).

(*l*) Confr. §. 6.

§. IX.

Duo circuli integri semet secando duas efficiunt *Lunulas oppositas*; quibus ergo communia sunt arcuum centra, axis, basis & æquales anguli (§. 5.). At arcus convexus alterius est suplementum arcus concavi alterius ad totam circumferentiam, & semisumma latitudinum (§. 7.) æqualis distantiæ centrorum; suntque hæ Lunulæ & inæquales & dissimiles, nisi (§. 8.) æquicurvæ fuerint.

§. X.

Si æquales construi possint Sectores circulares EAC, FAD: sequitur, utrinque aut (Fig. 1. 3. 4.)

 abla-

ablato communi, aut (Fig. 5.) addito, si quod Sectores illos & axem interjacet, spatio mixtilineo EAD, aut denique, si res tulerit, facta tum subtractione, tum additione, fore Semilunulam *ACD* = Triangulo rectilineo EAF; adeoque dabitur perfecta *Quadratura* hujus ipsius *Lunulæ*. Non posse igitur ullam Lunulam æquicurvam (§. 8.) hoc quidem pacto quadrari, patet, §. 6.

§. XI.

Dato radio, Sectores circulares sunt (*m*) ut anguli ipsorum; dato autem angulo, ut quadrata radiorum (*n*); quare neutro dato, seu generatim erunt ut anguli & quadrata radiorum conjunctim, i. e. Sectores EAC & FAD in ratione composita ang. AEC $\times$ AE^2 : ang. AFC $\times$ AF^2.

(*m*) EUCL. Elem. L. VI. Prop. 33. Cor. 1. (*n*) Cfr. EUCL. Elem. L. XII. Prop. 2.

§. XII.

Ad obtinendam igitur (§. 10.) *æqualitatem Sectorum circularium* dissimilium (§. 6.) efficiendum est ut (§. 11.) *anguli* eorum sint in *ratione duplicata inversa radiorum*. Sic æquates tum demum erunt Sectores EAC & FAD si ang. AEC : ang. AFC :: AF^2 : AE^2, scilicet anguli convexitatis & concavitatis inverse ut quadrata ex radiis Sectorum.

Schol. Sunt vero tunc etjam *Arcus* AC & AD, seu ACB & ADB, *inverse* ut radii eorum AE, AF. Sunt enim semper

Secto-

Sectores in ratione composita radiorum atque arcuum. Cfr. ARCHIMED. *de Circulo & adscr.*

§. XIII.

Data ergo seu assumta ratione aliqua angulorum convexitatis & concavitatis (§. 4.) quæ ratio sit $= m:n$ & quidem (§. 6.) $m > n$: eo redit negotium ut (§. 12.) constituatur Triangulum rectilineum AEF, cujus angulus externus AEC sit ad oppositum internum AFE ut $m:n$, simulque quadrata laterum istis angulis oppositorum $AFq : AEq$ in eadem ratione $m:n$, vel latera ipsa $AF : AE :: \sqrt{m} : \sqrt{n} :: m : \sqrt{mn} :: \sqrt{mn} : n$. Vel quod eodem recidit (*o*); inveniendum est specie Triangulum AEF, in quo sint duo anguli interni $EAF : AFE :: m - n : n$ atque latera primo nominatum angulum EAF comprehendentia $AF : AE :: \sqrt{m} : \sqrt{n}$. Sic obtinebitur *Lunula* perfecte *quadrabilis*, cujus quidem angulus (§§. 5. 6.) sit ad semissem anguli concavitatis ut $m - n : n$.

(*o*) EUCL. Elem. L. V. 17. I. 32.

Schol. Brevitati studentes, ejusmodi tantum, quæ rectâ & circulo absolvi possunt, ideoque præcipuo quodam jure Geometricæ vocari merentur, constructiones comminiscemur; seu eas tantum Lunulas quadrabiles describendi rationem trademus, quarum delineatio non plura quam Euclidea ista supponit Postulata. Considerabimus scilicet potissimum & speciatim quinque hos casus ubi $m : n = 2:1$, $3:1$, $3:2$, $5:1$, $5:3$. Neque enim pauciores (*) neque, puto, plures Lunulæ quadrabiles construi regulâ & circino possunt. Utrum vero eas omnes sigillatim pertractaverit vel BERNOUL-

LI

LI (§. 3. not. *) vel alius quispiam? nobis haud innotuit. Cæterum quamvis data ratione *m* : *n*, non amplius, si quidem scopo proposito (§. 10.) satisfieri debet, arbitraria sed omnimode determinata sit ratio *AF* : *AE* : constructiones tamen Trianguli nostri *AEF* proponemus generaliores, assumendo primum rationem *AF* : *AE* laterum quamcunque, & a ratione *m* : *n* haud pendentem. Demonstrationes autem syntheticas, ex Analysibus nostris Geometricis haud difficulter concinnandas, ut & diversas constructionum modificationes, brevitatis studio omittemus.

(*) Id tamen satis diserte adserit KRAFFT (Geomet. Subl. T. I. §. 167.) his verbis: *Plures* (duabus illis prioribus, quas consideraverat) *ejusmodi Lunulæ inveniri possunt, si assumantur rationes aliæ* (quam 2 : 1 & 3 : 1.) *numeris expressæ; sed æquationes prodeunt sic ad* NB. *altiores etiam perpetuo dimensiones assurgentes, atque adeo minus concinnæ.* Quàm minus recte vel adposite hæc dixerit, judicari poterit ex sequentibus nostris §§. 20. 22. 24. 27.

CASUS I. Fig. 1.

§. XIV. Si ponatur (§. 13.) $m : n :: 2 : 1$. erit ang. EAF $=$ AFE; adeoque Triangulum AEF æquicrurum. Et quemadmodum generatim constructu facillimum est Triangulum æquicrurum, data ratione baseos AF & cruris AE vel EF: sic & speciatim dum rationem AF : AE oportet esse subduplicatam ipsius ($m : n =$) 2 : 1. Scilicet (§. 12. 13.) $AF^2 = 2AE^2 =$ (ob AE $=$ EF) $AE^2 + EF^2$; ergo (*p*) ang. AEF rectus. Fiat ergo rectæ AE, magnitudinis datæ vel arbitrariæ, perpendicularis & æqualis EF; tum centris E & F

de-

describendi per A seu intervallis EA & FA, arcus circulares (*) ACB & ADB comprehendent *Lunulam quadrabilem* simplicissimam & maxime concinnam ACBDA, quæ, ab inventore, HIPPOCRATIS cognominatur, & quidem speciatim *Lunula Quadrantalis.* Est nimirum arcus convexus ACB Semicirculus, concavus ADB Quadrans circuli, Lunula ipsa $=$ Triangulo AFB $=$ AE*q*.

Coroll. Posito *radio convexitatis* AE $= 1$: erit *radius concavitatis* AF $= \sqrt{2}$, *Distantia centrorum* EF $= 1$, *Basis Lunulæ* AB $= 2$, *Latitudo* CD $= 2 - \sqrt{2}$ (§. 7.).

(*p*) EUCL. Elem. Lib. I. prop. 48.

(*) Ita scilicet, ut arcus uterque & punctum F cadant ad opposìtas rectæ AB partes; quod etiam ubique in sequentibus circa constructiones cæterarum Lunularum est intelligendum, ne confundatur Lunula construenda cum altera ipsi opposita cfr. §§. 9. 28.

§. XV.

De hac Lunula Quadrantali præterea memoratu dignum est (*): quod *recta* quæcunque *e centro F* concavitatis per eam *ducta FHK* tum *arcus proportionaliter secet*, ita ut partes resectæ AMK & AH, vel KB & HB, sint totis ACB, ADB proportionales, tum *ab ipsa Lunula portionem* AMKH vel KBH *quadrabilem* abscindat. Fiat enim recta ANO perpendicularis ad FK, jungatur AK, jungi etiam intelligantur EK, FO. Ob AE $=$ EF, cadit F in peripheriam circuli ACB continuatam; quare (*q*) ang. *AEK* $= 2$AFK $=$ *AFO* (*r*), arcus AMK AHO ($= 2$AH)

 simi-

similes ideoque proportionales radiis suis AE, AF. Ergo *AMK* : *AH* : : 2*AE* : *AF* : : arc. *ACB* : *ADB*. Porro segmenta circularia AMK, AHO, ob similitudinem (dem.) arcuum, similia, sunt ut quadrata radiorum AEq : AFq : : (§. 14.) 1 : 2, seu Segm. AMK = $\frac{1}{2}$ AHO = AHN; adjecto igitur utrinque spatio AHK, erit portio Lunulæ *AMKH* = triangulo *ANK* rectilineo. Cæterum ob (q) ang. AKF = $\frac{1}{2}$ AEF semirecto, similia sunt triangula ANK AFB rectangula & quidem æquicrura; proinde (*f*) triang. *ANK* : tr. *AFB* : : AKq : ABq : : ((*s*) ductâ KL perpendiculari ad AB) AB × AL : ABq : : (*t*) *AL* : *AB* : : tr. *AFL* : tr. *AFB*. Ergo quoque portio Lunulæ *AMKH* = tr. *ALF*, & *BHK* = *BLF*.

(*) Cfr. sis, WHISTON *Schol.* 2. ad. EUCL. *El. Lib. XII. prop.* 2. (q) EUCL. El. III. 20. (r) EUCL. El. III. 3. 30. 27. vel IV. 33. (*f*) VI. 19. (*s*) III. 31. VI. Cor. 8. 17. (*t*) VI. 1.

Coroll. Quælibet hujus Lunulæ portio, ut BYZ vel KHYZ, aut unâ aut duabus rectis FK FZ, e centro F concavitatis ductis definita, & quadrabilis est & divisibilis in ratione (rectis lineis) data quacunque, vel in partes datæ magnitudinis (justo non majores). Secta videlicet basi BU vel UL in data ratione, e punctis divisionum ducenda ad eam perpendicula definient in arcu convexo puncta jungenda cum ipso F. *Basin* autem portionis voco partem baseos Lunulæ interjacentem perpendicula KL ZU in eam ab extremis K, Z, arcus convexi KZ ducta.

§. XVI.

Neque prætermittendæ hoc loco sunt, utpote

quæ

quæ etiam arcus convexos habent Semicirculares, *Lunulæ conjugatæ*, quarum quadraturam primus detexisse fertur idem HIPPOCRATES Chius. Sit (Fig. 2.) ADTP semicirculus super hypotenusa AP trianguli rectanguli ABP constitutus (*u*): sint porro ACB & BSP semicirculi diametris AB & BP seu cathetis descripti. Est itaque (*v*) area semicirculi ADP = semicirculis ACB + BSP. Ablatis igitur utrinque spatiis communibus nim. segmentis ADB & BTP, binæ Lunulæ superstites ACBDA BSPTB simul sumtæ æquales sunt Triang. rectilineari *ABP* (*).

(*u*) Cfr. EUCL. El. III. 19. (*v*) EUCL. El. VI. 31. XII. 2. (*) Non ideo tamen singulæ quadraturam admittunt: quando enim scalenum est Triangulum ABP, Lunulæ hæ dissimiles sunt, nec proinde comparari inter se possunt. Quod si autem Isosceles fuerit Triang. ABP, Lunulæ conjugatæ & æquales & similes erunt & quidem quadrantales §. 14.

CASUS II. Fig. 3.

§. XVII. Si $m : n :: 3 : 1$, resolvendum est hoc PROBLEMA. *Datis duobus lateribus AF, AE vel ratione eorum, construere Triangulum AFE, cujus angulus externus AEC, alterutri istorum laterum oppositus, sit triplus interni oppositi F & basi EF adjacentis; seu (§. 13.) cujus angulus FAE ad verticem sit duplus alterutrius anguli F ad basin.*

Analysis. Quia (hyp.) ang. FAE = 2AFE: bisectus intelligatur ang. FAE rectâ AP; erit ang. PAE = PAF = AFE; AP (*w*) = PF; ang. APE = (*x*)

2AFE = FAE; Triang. APE ∽ FAE, unde in utroque eadem erit ratio summæ laterum ad basin, scilicet *AF* + *AE* : *EF* :: (AP + PE seu) EF : AE; adeoque in quæsito triangulo AFE basis *EF* erit media proportionalis inter summam laterum *AF* + *AE* atque latus angulo F oppositum *AE*; unde facilis emergit Constructio. Proinde etjam

(w) EUCL. El. I. 6. (x) I. 32.

§. XVIII.

Lunula quadrabilis, cujus angulus convexitatis triplus sit anguli concavitatis, construi sequentem in modum poterit (*). Rectæ *AE*, quæ sit radius convexitatis vel datus vel pro arbitrio sumendus, fiat in A perpendicularis HI, in qua utrinque a puncto A capiantur AH = AK = AE; centro H radio HK describatur circulus, qui rectam EA versus A producendam secabit in Q. Super diametro EQ describe semicirculum qui secet ipsam HI in L. Tum centro A radio AQ & centro E radio EL descriptis circulis sibi occursuris (**) in F, denique centris E & F describantur per A circuli, quorum arcus ACB ADB formabunt Lunulam ACBDA desideratam.

Est enim (*y*) EL media proportionalis inter AE & EQ, i. e. (Constr.) EF media proportionalis inter AE & AF + AE ideoque (§. 17.) exterior Tr:li AFE angulus *AEC* triplus interioris *F*. Porro quia (Constr.) HQ = HK = 2AH; erit $HQ^2 = 4AH^2$; hinc $HQ^2 - AH^2$ seu (*z*) $AQ^2 = 3AH^2 = 3AE^2$, i. e.

*AF*²

$AF^2 = 3AE^2$. Ergo (§. 13.) Lunula hæc erit dupla Trianguli rectilinei AEF.

(*) Aliam constructionem calculo Algebraico elicitam sed vix æque concinnam affert KRAFFT *Geom. Subl. T. I.* §. 167. (**) Hos circulos se necessario secturos esse facile probatur. Nam quia $AE < EL$, erit 1:mo $AE < AQ + EL$; & porro $AE + EL > 2AE$; at $AQ < (HQ = HK =) 2AE$; consequenter $AE + EL > AQ$ seu 2:do $AE > AQ - EL$. Cum ergo distantia centrorum AE sit minor quam summa & major quam differentia radiorum AQ EL, oportet circulos se mutuo secare. (y) EUCL. El. III. 31. VI. 8. (z) EUCL. El. I. 47.

Coroll. 1. Quia (*a*) AL est media proportionalis inter AE & AQ, & $AQ > AE$ (quia $AQ^2 = 3AE^2$): erit $AL > AE$, hinc $AL^2 > AE^2$, ideoque $AL^2 + AE^2$ seu $EL^2 > 2AE^2$, unde $EL^2 + AE^2 > 3AE^2$. At $AQ^2 = 3AE^2$; ergo $AQ^2 < EL^2 + AE^2$, h. e. $AF^2 < AE^2 + EF^2$. Ergo (*b*) angulus AEF acutus; adeoque dimidius ang. convexitatis AEC erit obtusus & arcus convexus ACB semicirculo major. cfr. Cor. 2.

Coroll. 2. Posito $AE = 1$, est $AFq = (AQ^2 = 3AE^2 =) 3$, & $EFq = (ELq = AE . EQ =) 1 + \surd 3$; datur ergo in numeris ratio laterum Trianguli AEF. Hinc vario modo per calculum Trigonometricum inveniri possunt anguli. In præsenti autem casu maxime commodus & simplex est, qui sequitur. In Triangulo PAF æquicruro est Sinus totus, quem semper ponimus $= 1$, ad $Cos F$ :: 2PF : AF ::

(c) $2EF : AF + AE :: $ (§. 17.) $2AE : EF$. Ergo *Cos F* $= \frac{EF}{2AE} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{3}}$. Hujus logarithmus quàm fieri potest tum facile tum exacte sic invenietur. Quia (*) generatim $\text{Sin}\,\mathfrak{A} + \text{Sin}\,\mathfrak{B} = 2\,\text{Sin}\,\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{2} \times \text{Cos}\,\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{2}$; Atqui $1 = 2\,\textit{Sin}\,30°$ & $\sqrt{3} = 2\,\textit{Sin}\,60°$; erit $\text{Cos}\,F^2 = \frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{\text{Sin}\,30° + \text{Sin}\,60°}{2} = \text{Sin}\,45° \times \text{Cos}\,15°$; adeoque Log *Cos F* $= \frac{1}{2}$ (Log Sin 45° + Log Cos 15°) $=$ 9.9166977, posito, ut in Tabulis solet, Sinus totius Logarithmo 10. Ergo $F = 34°\ 22'$ (**) fere, 3F seu AEC $=$ 103° 6, arcus convexus ACB = 206° 11', 2F seu FAE $=$ 68° 44' $=$ ADB arcui concavo. De cætero quia $\text{Sin}^2 = 1 - \text{Cos}^2$, erit $\text{Sin}\,F = \frac{1}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}}$.

Coroll. 3. *Latitudo* Lunulæ hujus (§. 7.) *CD* est $= 1 + \sqrt{1+\sqrt{3}} - \sqrt{3}$. Et quia recta AB : AF :: 2 Sin F : 1, fit *Basis Lunulæ AB* $= \sqrt{3}.\sqrt{3-\sqrt{3}} = \sqrt{9-3\sqrt{3}} = \sqrt{9-\sqrt{27}}$. Denique *Area Lunulæ* $= 2\,\triangle\,AEF = \frac{1}{2}\,AB \times EF = \frac{1}{2}\sqrt{3}.\sqrt{3-\sqrt{3}}.\sqrt{1+\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{108} = \sqrt[4]{\frac{27}{4}}$.

(*a*) EUCL. VI. 13. (*b*) I. 48. II. 12. (*c*) VI. 3.

(*) *Inledn. til Trigon. Plana Prop.* 7. & quia anguli $\mathfrak{A}$, $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{2}$, $\mathfrak{B}$ sunt æquidifferentes.

(**) Hic angulus vel eum metiens arcus a KRAFFT (Geom. Subl. T. I. §. 167.) assumitur 34° 16', unde in arcum ACB redundaret error circiter 35'.

CASUS III. Fig. 4.

§. XIX. Quando $m : n :: 3 : 2$, en aliud priori affine

PROBLEMA *Triangulum AEF constituere, cujus bina latera AF, AE sint in data ratione, atque angulus AFE ad basin duplus anguli ad verticem A* (*).

Analysis. Bisecante recta FG angulum AFE, est GFE = GFA = A, FGE = 2A = AFE, AG = GF; Tr:lum FGE ∽ AFE ideoque AF + FE : AE :: (FG + GE seu) AE : EF; quare rectangulum $\overline{AF + FE} \times FE = AEq$. Assumtâ igitur rectarum AF AE alterutra pro lubitu, quo ipso ob datam (hyp.) earum rationem dabitur & altera: datur dictum rectangulum magnitudine; quippe (dem.) = AE*q* dato. Eo itaque reducta est quæstio, ut inveniantur latera FE & AF + FE rectanguli magnitudine dati, quorum datur differentia AF. Unde hæc deducitur

Constructio. Jungantur ad angulos rectos vel datæ vel in data ratione sumendæ rectæ AF AE'; Bisectâ AF in H, in HF productâ capiatur HU = HE', tum centris A & F intervallis AE' & FU describendi circuli, si sibi occurrant in puncto aliquo E, obtinetur quæsitum Triangulum AFE. Vel si placet, jungatur HE, a qua abscindatur HK = HA, tumque ex rectis AF AE' E'K (super AE' tanquam basi) construetur par Triangulum A*f*E'.

Nam si centro H radio HU = HE', super UA producta descriptus concipiatur semicirculus UEO; erit

erit (*d*) $AU \times AO = AEq$ i. e. quia (constr.) AO $= FU = FE$, $\overline{AF + FE} \times FE = AEq$, ut oportuit. Sic & (*e*) sequitur esse $\overline{Af + fE'} \times fE' = AEq$. Cæterum identitas Tr:lorum AFE AfE' seu consensus constructionis utriusque vel inde mox patet, quod utraque ipsarum E'K (seu E'f) & FU (seu FE) sit æqualis differentiæ ipsarum HE' & HA. Pari simplicitate se commendant binæ hæ constructiones, nisi forte quod vel prior vel posterior tantillum præferenda videatur, prout super recta positione data vel AF vel AE' construendum sit desideratum Triangulum. Intelligitur ex jam dictis quomodo

(*) Hoc problemate tanquam magis generali comprehenditur EUCL. Elem. L. IV. Prop. 10, ubi ratio laterum ponitur ratio æqualitatis. (*d*) cfr. EUCL. II. 14.
(*e*) ex III. 16. 36.

§. XX.

Construenda sit Lunula, cujus angulus convexitatis sit ad angulum concavitatis ut 3 : 2.

Ductis ad angulum rectum duabus rectis æqualibus AL LN longitudinis arbitrariæ, sumatur in LN productâ ipsi AN æqualis LF; junctæ AF fiat perpendicularis AE' = AN. Bisectâ AF in H, in HF productâ capiatur HU = HE'; dein centro F radio FU & centro A radio AN vel AE' describantur circuli, qui se mutuo secabunt (*) in E. Denique centris F, E per A describantur circuli: horum arcus, qui ab F versus E cadunt, *Lunulam* ACBDA

ACBDA desideratam comprehendent (**). Est enim $AEq = LFq = ANq = ALq + LNq = 2ALq$, & $AFq = ALq + LFq = 3ALq$; adeoque $AFq : AEq :: 3 : 2$. Præterea ex constructione collata cum §. 20. sequitur esse ang. $AFE = 2FAE$ seu $AEC : AFE :: 3 : 2 :: AFq : AEq$. Constat ergo propositum (§§. 12. 10.).

Coroll. 1. Quia (dem.) $FL^2 = AN^2 = 2ALq$, $AF^2 = 3AL^2$, $HU^2 = HE'^2 = HA^2 + AE'^2 = \frac{1}{4} AF^2 + AN^2 = \frac{3}{4} AL^2 + 2AL^2 = \frac{11}{4} AL^2$, $HF^2 = \frac{1}{4} AF^2 = \frac{3}{4} AL^2$: erunt $AF = AL . \sqrt{3}$, AN seu $AE = AL . \sqrt{2}$, $HU - HF$ i. e. FU seu $EF = AL . \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{2}$; adeoque AF, AE, EF inter se ut $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{11} - \sqrt{3}$, seu ut $\sqrt{12}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{11} - \sqrt{3}$; & quadrata earum ut 12, 8 & $(11 + 3 - 2\sqrt{33} =)$ $14 - 2\sqrt{33}$ $(= 14 - \sqrt{132}) < (14 - \sqrt{121} = 14 - 11 =) 3$. Ergo quia $12 > 8 + 3$, a fortiori erit $AF^2 > AE^2 + EF^2$; consequenter ang AEF obtusus, AEC acutus & arcus convexus ACB semicirculo minor.

Coroll. 2. Ob Isosceles Tr. GAF, est $Cos\, FAE = \frac{AF}{2AG} = (c) \frac{AF + FE}{2AE} = (\text{Cor. } 1.) \frac{\sqrt{11} + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{22} + \sqrt{6}}{8}$, cui Cosinui respondent 26° 49′ circiter. Hinc 2FAE seu AFC = 53° 38′ & 3FAE vel AEC = 80° 26; arcus convexus ACB = 160° 53′, concavus ADB = 107° 16′. De cætero prodit $Sin\, FAE = \frac{\sqrt{9 - \sqrt{33}}}{4}$.

Coroll. 3. Posito radio convexitatis $AE = 1$: fit *radius*

 conca-

concavitatis $AF = \sqrt{\tfrac{3}{2}}$; *distantia centrorum* $EF = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{22} - \sqrt{6}}{4}$; *Latitudo Lunulæ* (§. 7.) $CD = 1 - \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}{2\sqrt{2}} = 1 - \frac{3\sqrt{6} - \sqrt{22}}{4}$; *Basis* $AB = (2AF \times Sin\ AFE = 4\,AF.\ Sin\ \tfrac{1}{2}\ AFE.\ Cos\ \tfrac{1}{2}\ AFE =$ Cor. 2) $\frac{3 + \sqrt{33}}{8}. \sqrt{9 - \sqrt{33}}$; *Area* $= 2$ Triang. $AFE = \tfrac{1}{2}\ AB \times EF = \tfrac{1}{8} \sqrt{6\,(9 - \sqrt{33})}$.

(*) Quia scilicet $AF > AN > FU$, & $AN + FU > AF$. Nam per Cor. 1. hujus §phi sunt AF, AN, FU ut $\sqrt{12}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{11} - \sqrt{3}$. At $\sqrt{8} > (\sqrt{\tfrac{64}{9}} =)\ \tfrac{8}{3}$, $\sqrt{11} > (\sqrt{9} =)\ 3$, $\sqrt{3} < (\sqrt{4} =)\ 2$; ideoque $\sqrt{8} + \sqrt{11} - \sqrt{3} > (\tfrac{8}{3} + 3 - 2 = \tfrac{11}{3} = \sqrt{\tfrac{121}{9}} > \sqrt{\tfrac{108}{9}} =)\ \sqrt{12}$.

(**) Sponte patet eandem seu geminam huic Lunulam mox obtineri, si centris U, F, intervallis FL, FA describantur versus FU circuli, adeo ut inventione puncti E seu constructione Tr:li AEF opus non sit, quam ideo tantum adhibuimus, ut §phus hæc præcedenti melius responderet.

(*e*) EUCL. Elem. VI. 3.

CASUS IV. Fig. 5.

§. XXI. Esto $m : n :: 5 : 1$ seu ang $FAE = 4AFE$, unde exsurgit hoc

PROBLEMA. *Data ratione laterum* $AF : AE = a : b$, *construere Tr:lum* AFE, *cujus angulus* FAE *ad verticem sit quadruplus anguli* AFE *ad basin* EF.

Ana-

Analysis. Rectæ AQ, AP, AR dividant ang FAE in qvatuor partes inter se adeoque (hyp.) singulas angulo AFE æquales: erit sic (*d*) AQ = FQ, AR = QR; Tr. AER ∽ FEA & Tr. AEP ∽ QEA, unde ∺ EF, EA, ER & ∺ EQ, EA, EP, ideoque (*e*) $EF : EP :: EQ : ER ::$ (EF − EQ : EP − ER, i. e.) $FQ : PR :: a + b : b :: FR \times FQ : FR \times PR$, quæ igitur ratio datur. At, ob Tr. ARP ∽ FRA, est $FR \times PR = (AR^2 =) QR^2$. Datur itaque ratio $FR \times FQ : QR^2 = a + b : b$. Hinc, si QR pro arbitrio assumatur ut data, datur rectangulum FR × FQ magnitudine, & laterum differentia QR, unde (cfr. §. 19.) dabuntur ipsa, & denique tota figura atque Triang. FAE.

Constructio. Statuantur rectæ $QR = a$ & $RE = b$ in directum; in EQ productâ capiatur QS quarta proportionalis ipsis ER, RQ, EQ; super diametro RS fiat semicirculus, qui in *u* secet rectam ipsi RS in Q perpendicularem. Bisectâ QR in O, capiatur $OF = OU$. Denique centro Q radio QF atque centro R radio RQ describantur circuli, quorum intersectio sit *A* (secabunt autem sese hi circuli si fuerit FQ < 2QR): tum junctis AF, AE, vel AR, AE: Triangulum AEF vel REA proposito satisfaciet.

Nam (*f*) $\overline{SQ \times QR} = \overline{QU^2} = OU^2 - OQ^2 = OF^2 - OQ^2 = \overline{OF + OQ} \times \overline{OF - OQ} = FR \times FQ$. At $SQ \times QR : QR^2 :: SQ : QR ::$ (constr.) $EQ : ER$

 :: *a*

$:: a + b : b$. Ergo $FR \times FQ : QR^2 :: a + b : b$ ut oportuit. Cætera ex analysi patent. Jam facile erit

(*d*) EUCL. El. I. 5. 32. VI. 4. (*e*) vel per VI. 3. V. 18. (*f*) II. 14.

§. XXII.

Construere Lunulam quadrabilem habituram angulum convexitatis quintuplum anguli concavitatis.

Nimirum rectæ ER pro lubitu sumendæ fiat perpendicularis $EN = 2ER$, & in ER productâ, capiatur $RQ = RN$. Datis sic QRE punctis, determinentur, ut in §. præcedenti, puncta F, *A* (*). Tum centris E & F describendi per A circuli formabunt (intra angulum AFE & huic geminum atque ab altera rectæ FE parte similiter positum BFE) requisitam *Lunulam* ACBDA. Etenim $QR^2 = RN^2 = ER^2 + EN^2 = ER^2 + 4ER^2 = 5ER^2$; atque angul. $AEC = AFE + FAE =$ (§. 21.) $AFE + 4AFE = 5AFE$. Ergo (§. 13.) Lunula = 2 Tr. AFE.

Coroll. 1. Posito $ER = 1$, est $AR = QR = \sqrt{5}$, $\frac{EQ \, . \, QR}{ER}$ seu $QS = 5 + \sqrt{5}$, $RQ \, . \, QS = 5 + 5\sqrt{5} = QU^2$, $OU^2 = QU^2 + QO^2 = QU^2 + \frac{1}{4}QR^2 = \frac{25}{4} + 5\sqrt{5} = OF^2$, $OF - \frac{1}{2}QR$ seu $FQ = \frac{1}{2}\sqrt{25 + 20\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2}\sqrt{5}\,(\sqrt{5 + 4\sqrt{5}} - 1)$, $ER + \frac{1}{2}QR + OF = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{25 + 20\sqrt{5}} = EF = EF \times ER = AEq$. Sunt itaque △li ARE latera ER AR AE, vel illi similis △li FAE latera *AE AF EF* inter se ut 1, $\sqrt{5}$, $\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{25 + 20\sqrt{5}}}$ respective.

Coroll.

Coroll. 2. Quia (Cor. 1.) $EF^2 : AE^2 + AF^2 :: 1 + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{25 + 20\sqrt{5}} : 6$; atqui $\frac{1}{2}\sqrt{5} > (\frac{1}{2}\sqrt{4} =)\ 1$, & $\frac{1}{2}\sqrt{25 + 20\sqrt{5}} > (\frac{1}{2}\sqrt{25 + 20.2} = \frac{1}{2}\sqrt{65} > \frac{1}{2}\sqrt{64} = \frac{8}{2} =)\ 4$: erit $EF^2 > AE^2 + AF^2$, adeoque ang FAE multoque magis *AEC* obtusus, & arcus convexus *ACB* semicirculo major. Atque ob $FE > FA$ vel FD, cadet centrum E intra ipsam Lunulam, secus quam in casibus superioribus.

Coroll. 3. Cum in Tr:lo æquicruro ARQ sit Cos RQA $= \frac{AQ}{2QR} = \frac{FQ}{2QR}$: prodit (Cor. 1.) hujus anguli $= 2$ AFE $= \frac{1}{2}$ FAE $= \frac{2}{3}$ AEC Cosinus $= \frac{1}{4}\sqrt{5 + 4\sqrt{5}} - \frac{1}{4} =$ Cos $46^\circ\ 52'$ circiter. Sunt itaque proxime arcus convexus ACB $= 234^\circ\ 20'$ & concavus ADB $= 46^\circ\ 52'$.

Coroll. 4. Assumto ex. gr. radio convexitatis $AE = 1$: exprimi possent, numeris quidem surdis exacte, rationalibus autem quam proxime, hujus etiam Lunulæ Latitudo, Basis atque Area.

(*) Per *Cor.* 1. est $FQ : 2QR :: \sqrt{5 + 4\sqrt{5}} - 1 : 4$. At $4\sqrt{5} = \sqrt{80} < 9$, quare $\sqrt{5 + 4\sqrt{5}} < (\sqrt{14} <)\ 4$, ideoque $\sqrt{5 + 4\sqrt{5}} - 1 < 3 < 4$. Ergo $FQ < 2QR$, consequenter (§. præced.) circuli, suo occursu punctum A definituri, se omnino secabunt.

CASUS V. Fig. 6.

§. XXIII. Denique casus $m : n :: 5 : 3$ resolvitur in hoc

PROBLEMA. *Exhibere Triangulum AEF, cujus angulus EFA ad basin EF sit sesquialter anguli EAF ad verticem, data ratione laterum AF : AE = a : b.*

Analysis. Puta factum & angulum AFE rectis FO FP divisum in tres partes æquales, singulas ergo (hyp.) = ½ EAF. Erit sic ang AFO = OAF = EFP, *OF* (*g*) = *OA*, Tr. EAF ∽ EFP ideoque *AF* : *AE* : : PF : FE : : (*h*) *PO* : *OE* : : *a* : *b*. Præterea (*h*) OF seu AO : AF : : PO : PA. Hinc (*i*) *AO* : *AE* : : *POq* : *EO* × *AP*. Si jam EO OP, quarum (dem.) datur ratio, ponantur datæ: datur ipsis tertia proportionalis, quæ sit *PS*, atque punctum *S*; & ob (*k*) OPq = EO × PS, erit (dem.) *AO* : *AE* : : (EO × PS : EO × AP : :) *PS* : *AP* ideoque AO : (AE — AO =) EO : : PS : (AP — PS =) AS quare *AO* × *AS* = EO × PS = *OPq*. Datur ergo magnitudine rectangulum sub rectis AO & AS, quarum (dem.) datur differentia OS; unde (cfr. §. 19.) dabuntur ipsæ, A punctum, *OF* = OA, AE adeoque (ob datam rationem AF : AE,) *AF*, vel & EF, quippe quæ (ob Tr. EFP ∽ EAF) erit media proportionalis inter datas AE & EP, consequenter *F* punctum & Tr:lum AEF vel FEP. Hinc ratio patet *Constructionis*, quam ad specialem nostrum casum statim aptabimus, videlicet

(*g*) EUCL. I. 5. (*h*) VI. 3. (*i*) VI. 22. 1.
(*k*) VI. 17.

§. XXVI.

§. XXIV.

Lunula quadrabilis, cujus angulus convexitatis sit ad angulum concavitatis ut 5 : 3, describi hoc modo poterit: In recta indefinita EU sumantur EH : HK :: 3 : 5; super EK, ad quam erigantur perpendiculares HO & KL, describatur semicirculus cui occurrat HO in O; per puncta EO ducatur recta indefinita EOLA, in qua capiantur ipsi OK æquales OP, LS; bisecetur OS vel PL in *M* & abscindatur *MA* = MK; per punctum *A* sic inventum fiat ipsi AE perpendicularis vel (*l*) ipsi OK parallela, occursura ipsi EU in *N*; tum centris O & A, radiis OA & AN describantur circuli; hi occursu suo (*) definient punctum *F*; centris denique EF describendi per A circuli formabunt Lunulam desideratam ACBDA.

Nam OPq = OKq = (*m*) EK × KH, & EOq = EK × EH, ideoque OPq : OEq :: KH : HE :: 5 : 3. Porro (*n*) ∺ EO, OK vel OP, OL, atque (ob LS = OP) PS = OL, ergo ∺ *EO*, *OP*, *PS*; & (*o*) *OA* × *AS* = (MAq − MOq = MKq − MOq = OKq =) *OP*q; denique AE : AF (= AN) :: EO : (OK =) OP, & OF = OA: quare (§. præc.) ang EFA = $\frac{3}{2}$ EAF. Ergo ang *AEC* : *AFE* :: 5 : 3 :: (dem. OPq : OEq ::) *AFq* : *AEq*, quod erat faciendum (§. 13.).

Coroll.

Coroll. 1. In æquicruro Triangulo AOF est Sinus totus 1 : 2 Cos EAF : : AO vel OF : AF : : (*p*) OP : AP = AO — OP unde $1 + 2$ Cos EAF $= \frac{AO}{OP} = \frac{AO}{OK} = \frac{OM + MK}{OK}$ $= \frac{OM + \sqrt{OMq + OKq}}{OK} = \frac{OS + \sqrt{OSq + 4\,OPq}}{2OP} =$ (quia EO : OP : : OP : PS : : *EO* + *OP* : OP + PS seu *OS* adeoque $\frac{OS}{OP} = \frac{EO + OP}{EO}$,) $\frac{1}{2} + \frac{OP + \sqrt{(EO + OP)q + 4\,EOq.}}{2EO}$ Hinc, quia EO : OP : : $\sqrt{3} : \sqrt{5}$, prodit Cos EAF $= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{20 + 2\sqrt{15}}}{4\sqrt{3}}$ $- \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{60 + 6\sqrt{15}} - 3}{12} = 0.8330387$, quare *EAF* $= 33° 35' 16''$, AFE $= 50° 22' 54''$, *AEC* $= 83° 58' 10''$.

Coroll. 2. Valet hic quoque Cor. 4. §. 22.

(*) Per Coroll. 1. est AF seu AN : 2AO : : $\sqrt{15} + \sqrt{60 + 6\sqrt{15}} - 3 : 12$. At $\sqrt{15} < 4$ ideoque $\sqrt{15} + \sqrt{60 + 6\sqrt{15}} - 3 < (4 + \sqrt{84} - 3 = 1 + \sqrt{84} < 1 + 10 =)\ 11 < 12$. Ergo AN < 2AO, quapropter secabunt se dicti circuli.

(*l*) EUCL.

(l) EUCL. III. 31. (m) III. 31. VI. 8. 17. (n) VI. 8. (o) II. 6. (p) VI. 3.

§. XXV.

Habemus ergo quinque Lunulas quadrabiles, rectâ & circulo construendas. Has eo ordine proposuimus, quo minores sunt numeri rationem $m:n$ exprimentes, atque I:mam, II:dam, III:tiam, IV:tam, V:tam vocabimus. Quod si autem ratio habenda sit quantitatis $\frac{m}{n}$, quæ exponens est proportionis $m:n$ & *Denominator Lunulæ* quadrabilis dici posset: hoc ordine III, V, I, II, IV essent collocandæ. Ullam III:tiæ, IV:tæ & V:æ mentionem factam non vidimus. Cæterum ut quinque harum Lunularum comparatio, qua singulas dimensiones, eo facilius, si placet, instituatur: subjungimus hoc loco Tabellam, quæ istas dimensiones numeris prope veris exhibet, posito quidem radio convexitatis AE omnibus illis Lunulis communi & = 1.

Lunulae	I.	II.	III.	IV.	V.
Arcus convexus ACB	180°	206° 11'	160° 53'	234° 20'	167° 56'
Arcus concavus ADB	90°	68° 44'	107° 16'	46° 52'	100° 46'
Radius concavit. AF	1.414	1.732	1.225	2.236	1.291
Distantia Centror. EF	1.000	1.651	0.560	2.509	0.718
Basis AB	2.000	1.948	1.960	1.779	1.989
Latitudo CD	0.586	0.919	0.336	1.273	0.427
Area	1.000	1.613	0.552	2.232	0.714

§. XXVI.

Quoniam (El. Trig. Pl.) in omni Tr:lo rectilineo ut AEF est AF : AE :: Sin AEC : Sin AFC : si generaliter definiri possent bini anguli qui sint in ratione duplicata Sinuum suorum, haberentur (§§. 10. 12.) innumeræ Lunulæ circulares quadrabiles. Permultum vero abest ut hoc in quovis casu assignabili præstari queat. Quod si tamen proposita fuerit ratio (§. 13.) $m:n$, angulorum scilicet convexitatis & concavitatis, rationalis: (sunto etjam m, n numeri integri inter se primi): eatenus solubile est Problema, ut exhiberi possit æquatio solitaria seu determinata & quidem finita seu Algebraica, a cujus constructione pendebit ipsa Lunulæ delineatio. Cum enim notantibus $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$ angulos vel arcus circulares, atque s ipsius $\mathfrak{A}$ Sinum, z Cosinum, sit (*) Sin $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = s.$ Cos $\mathfrak{B} + z.$ Sin $\mathfrak{B}$, & Cos $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = z.$ Cos $\mathfrak{B} - s.$ Sin $\mathfrak{B}$: patet, ponendo successive $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, $2\mathfrak{A}$, $3\mathfrak{A}$ &c., prodituros Sinus atque Cosinus ipsorum $2\mathfrak{A}$, $3\mathfrak{A}$, $4\mathfrak{A}$ &c. scilicet anguli dupli, tripli, quadrupli & demum utcunque multipli per s & z, nempe Sinum & Cosinum anguli simpli, expressos (†). Et quidem, quod indicasse tantum sufficiat, has sic obtinendas Sinuum pro angulis multiplis expressiones ingrediuntur potestates ipsius s non nisi impares; quamobrem, cum quælibet potestas impar proveniat ex multiplicatione ipsius s in potestatem ejus proxime inferiorem adeoque parem, & omnis potentia ejus par sit etjam dignitas (stricte talis, scilicet integra, non fracta) ipsius ss, pro quo ss substitui poterit $1 - zz$: sequitur, Sinus angulorum multiplorum $m\mathfrak{A}$ & $n\mathfrak{A}$ hac forma sisti posse: Sin $m\mathfrak{A} = Z.s$ & Sin $n\mathfrak{A} = Z'.s$ (**) ita ut Z

$$= \frac{\text{Sin } m\mathfrak{A}}{s} \;\&\; Z' = \frac{\text{Sin } n\mathfrak{A}}{s}$$

sint ipsius z functiones & quidem rationales atque integræ. Statuatur jam angulorum quærendorum AEC, AFC mensura (hyp.) communis $\mathfrak{A}$, seu AEC $= m\mathfrak{A}$ & AFC $= n\mathfrak{A}$: vi eorum, quæ dicta sunt, requiritur ut $Z : Z' :: \sqrt{m} : \sqrt{n}$; ideoque (Æ) $Z\sqrt{n} = Z'\sqrt{m}$, quæ est æquatio desiderata unicam quantitatem incognitam z involvens, &, si construi queat, constructa dat z Cosinum anguli $\mathfrak{A}$; quo ipso datur $\mathfrak{A}$, acutus scilicet sumendus ne fiat $m\mathfrak{A}$ major duobus rectis, quamobrem rejiciendæ sunt istius æquationis radices negativæ. Dantur itaque hoc pacto etiam ipsius $\mathfrak{A}$ multipli $m\mathfrak{A}$, $\overline{m - n}.\mathfrak{A}$ i. e. AEC, EAF, quorum alteruter una cum ratione data AF : AE $= \sqrt{m} : \sqrt{n}$ definit speciem Tr:li AEF, adeo ut Lunula quæsita jam constructu sit facilis. Enimvero æquatio Æ præterquam in paucis neque, puto, pluribus quam quinque illis casibus simplicioribus supra pertractatis, vel cubica vel superioris adhuc gradus fieri deprehenditur; proinde difficilius, atque regula tantum & circino omnino non, construenda.

(*) Vid.

(*) Vid. passim Scriptores Trigonometriæ, ex. gr. DE LA CAILLE Elem. Math. §. 742. cfr. sis, Inledn. til Trigonom. Plan. prop. 4.

(†) Lex generalis sic exprimendi Sinum vel Cosinum anguli quamcunque multipli, passim exposita reperitur, ut in WOLFII Elem. Math. T. I. p. m. 322. KÆSTNER *Anal. endl. Grössen* §. 176.

(**) Sic reperiuntur $\frac{\text{Sin } 2\mathfrak{A}}{s} = 2z$, $\frac{\text{Sin } 3\mathfrak{A}}{s} = 4zz - 1$, $\frac{\text{Sin } 4\mathfrak{A}}{s} = 8z^3 - 4z$, $\frac{\text{Sin } 5\mathfrak{A}}{s} = 16z^4 - 12zz + 1$, $\frac{\text{Sin } 6\mathfrak{A}}{s} = 32z^5 - 32z^3 + 6z$, & sic porro.

§. XXVII.

Ut hæc (§. 26.) Exemplis illustrentur: sunto

I:mo $m : n :: 2 : 1$, erit tunc (§. cit. not. **) $Z = 2z$, $Z' = 1$, unde æquat. III. $2z = \sqrt{2}$, seu $z = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \text{Cos } 45°$.

II:do $m : n :: 3 : 1$. quare $Z = 4zz - 1$, $Z' = 1$, adeoque $4zz - 1 = \sqrt{3}$, unde $z = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ ut supra §. 18. Cor. 2.

III:tio $m : n :: 3 : 2$ ut denuo $Z = 4zz - 1$. at $Z' = 2z$, hinc $\overline{4zz - 1}.\sqrt{2} = 2z\sqrt{3}$, seu $zz - \frac{z\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \tfrac{1}{4}$, cujus æquationis radicem affirmati-

 vam

vam sumendo, fit $z = \frac{\sqrt{11} + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ ut antea §. 20. Cor. 2.

IV:to $m:n::5:1$; reperitur æquatio $16z^4 - 12zz + 1 = \sqrt{5}$, cujus radices affirmativæ sunt $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5 + 4\sqrt{5}}}$; quarum posteriore, quia imaginaria, rejectâ, est $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 4\sqrt{5}}} = \text{Cos}\,\mathfrak{A}$; unde etjam $2\,\overline{\text{Cos}\,\mathfrak{A}}^2 - 1$ seu $\text{Cos}\,2\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{5 + 4\sqrt{5}} - 1}{4}$, ut supra. §. 22. Cor. 3.

V:to $m:n::5:3$. dat æquationem $16z^4 - 4(3 + \sqrt{\frac{5}{3}})zz + 1 + \sqrt{\frac{5}{3}} = 0$ biquadraticam, sed pariter, instar quadraticæ, resolubilem.

Ast si $m:n::4:1$, fit $4z^3 = 2z + 1$.
Si $m:n::4:3$, est $4z^3\sqrt{3} - 4zz = 2z\sqrt{3} - 1$.
Si $m:n::5:2$, prodit $16z^4 - 12zz = 2z\sqrt{\frac{5}{2}} - 1$.
Si $m:n::5:4$, oritur æquatio biquadratica, cujus nullus terminus deest.
Si $m:n::6:1$, Æ erit æquatio quinti gradus.

§. XXVIII.

Difficilius autem evadit hoc Problema de invenienda Lunula Circulari quadrabili, si data fuerit non ratio $m:n$, sed alia aliqua conditio, ex. gr.

gr. angulus aut convexitatis aut concavitatis aut Lunulæ, vel ratio baſeos ad latitudinem, &c. Verum his immorari nil attinet. Claudat igitur opellam noſtram ſequens obſervatio: *Lunulæ Oppoſitæ* (§. 9.) *ſimul quadrabiles eſſe nequeunt*, dum deſideratur quadratura circuli. Si enim daretur quadratura Lunulæ utriusque, data eo ipſo foret quadratura differentiæ earum, quæ cum ſit ipſa integrorum circulorum differentia (adjecto enim utrique Lunulæ ſeorſim ſpatio eas interjacente, prodeunt ipſi circuli) atque facile (*) deſcribi queat tertius circulus æqualis binorum illorum circulorum differentiæ: daretur omnino tertii hujus circuli quadratura, contra hypotheſin. Quid ſentiendum ſit, ſi evanuerit dicta differentia, ſeu Lunulæ fuerint æquicurvæ: verbo antea (§. 10.) monuimus.

(*) Cfr. EUCL. El. XII. 2. & VI. 31.

S. D. G.

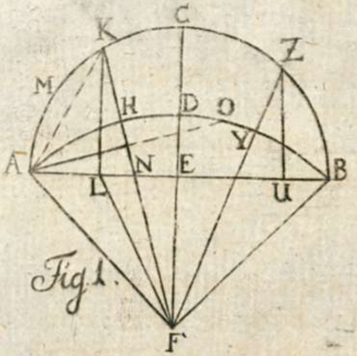

Fig. 1.

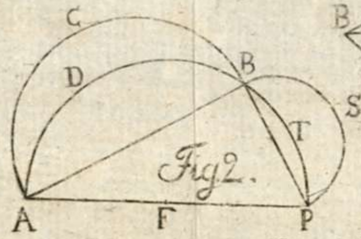

Fig. 2.

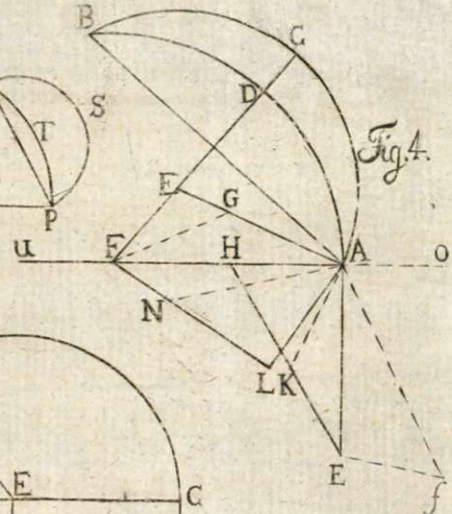

Fig. 4.

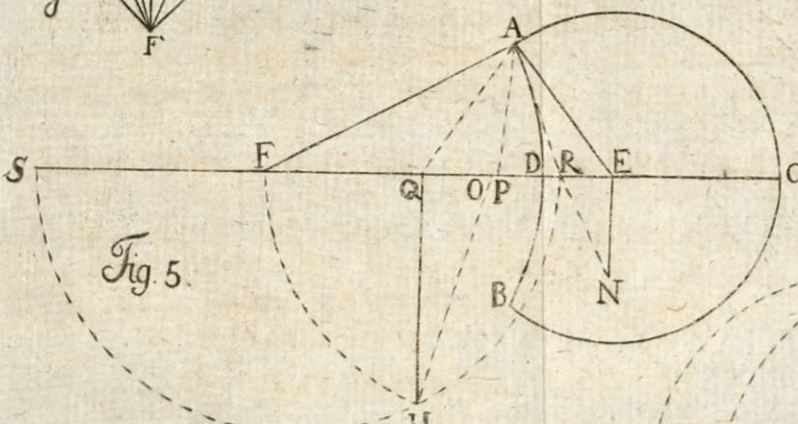

Fig. 5.

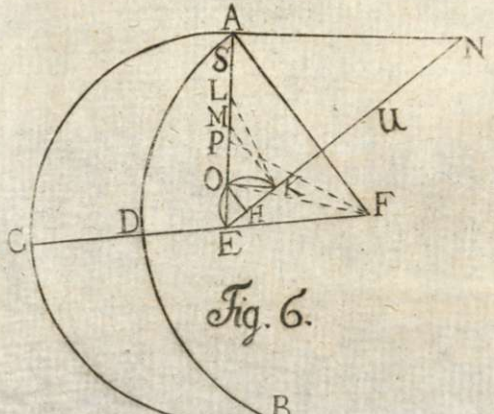

Fig. 6.

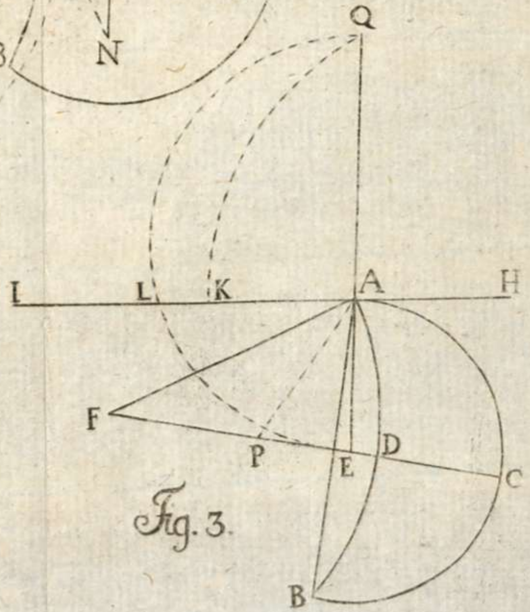

Fig. 3.

vam ſumendo, ſit $z = \dfrac{\sqrt{11} + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ ut antea §. 20. Cor. 2.

IV:to $m : n :: 5 : 1$; reperitur æquatio $16z^4 - 12zz + 1 = \sqrt{5}$, cujus radices affirmativæ ſunt $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5 + 4\sqrt{5}}}$; quarum poſteriore, quia imaginaria, rejectâ, eſt $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 4\sqrt{5}}} = \mathrm{Cos}\,\mathfrak{A}$; unde etjam $2\,\overline{\mathrm{Cos}\,\mathfrak{A}}^2 - 1$ ſeu $\mathrm{Cos}\,2\mathfrak{A} = \dfrac{\sqrt{5 + 4\sqrt{5}} - 1}{4}$, ut ſupra. §. 22. Cor. 3.

V:to $m : n :: 5 : 3$. dat æquationem $16z^4 - 4(3 + \sqrt{\frac{5}{3}})\,zz + 1 + \sqrt{\frac{5}{3}} = 0$ biquadraticam, ſed pariter, inſtar quadraticæ, reſolubilem.

Aſt ſi $m : n :: 4 : 1$, ſit $4z^3 = 2z + 1$.
Si $m : n :: 4 : 3$, eſt $4z^3\sqrt{3} - 4zz = 2z\sqrt{3} - 1$.
Si $m : n :: 5 : 2$, prodit $16z^4 - 12zz = 2z\sqrt{\frac{5}{2}} - 1$.
Si $m : n :: 5 : 4$, oritur æquatio biquadratica, cujus nullus terminus deeſt.
Si $m : n :: 6 : 1$, Æ erit æquatio quinti gradus.

§. XXVIII.

Difficilius autem evadit hoc Problema de inveniendo Lunula Circulari quadrabili, ſi data fuerit non ratio $m : n$, ſed alia aliqua conditio, ex. gr.

gr. angulus aut convexitatis aut concavitatis aut Lunulæ, vel ratio baseos ad latitudinem, &c. Verum his immorari nil attinet. Claudat igitur opellam nostram sequens observatio: *Lunulæ Oppositæ* (§. 9.) *simul quadrabiles esse nequeunt*, dum desideratur quadratura circuli. Si enim daretur quadratura Lunulæ utriusque, data eo ipso foret quadratura differentiæ earum, quæ cum sit ipsa integrorum circulorum differentia (adjecto enim utrique Lunulæ seorsim spatio eas interjacente, prodeunt ipsi circuli) atque facile (*) describi queat tertius circulus æqualis binorum illorum circulorum differentiæ: daretur omnino tertii hujus circuli quadratura, contra hypothesin. Quid sentiendum sit, si evanuerit dicta differentia, seu Lunulæ fuerint æquicurvæ: verbo antea (§. 10.) monuimus.

(*) Cfr. EUCL. El. XII. 2. & VI. 31.

S. D. G.

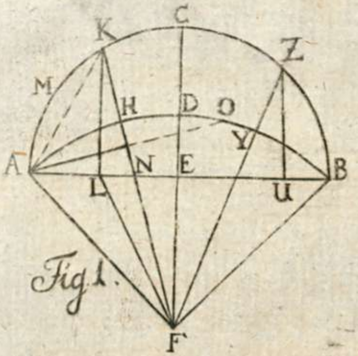

Fig. 1.

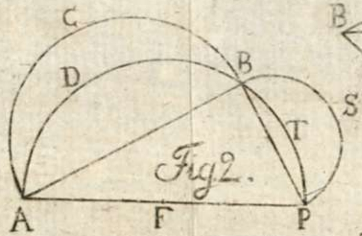

Fig. 2.

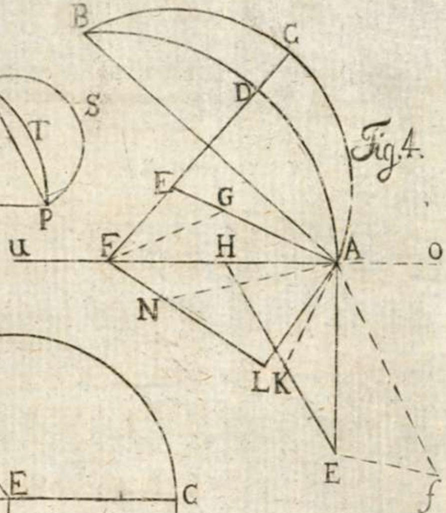

Fig. 4.

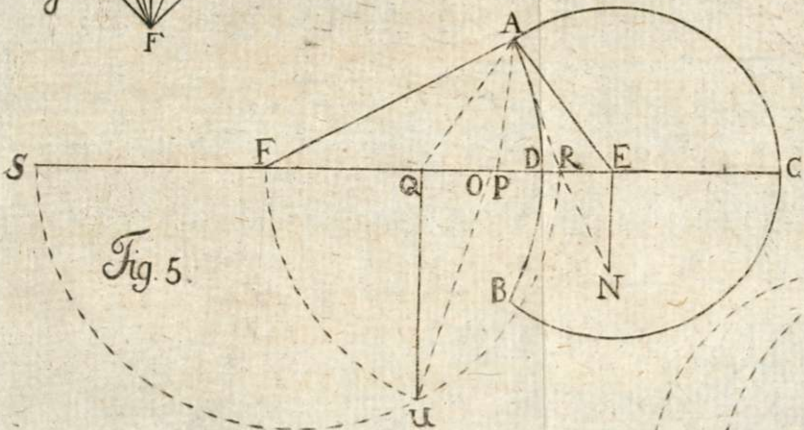

Fig. 5.

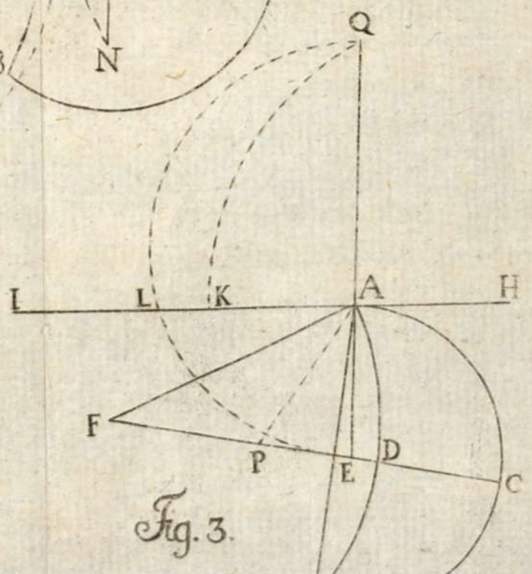

Fig. 3.

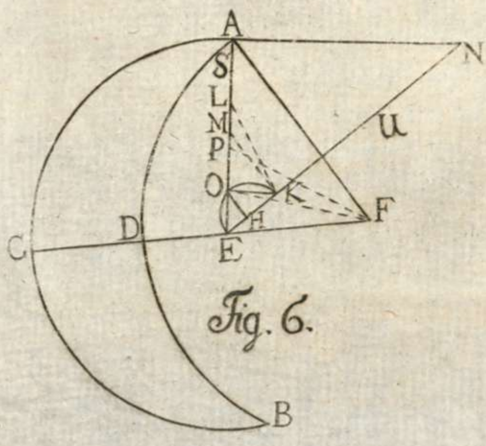

Fig. 6.