5.

D. J.

SPECIMEN ACADEMICUM
SISTENS

ANALYSIN GEOMETRICAM NONNULLORUM PROBLEMATUM

ARITHMETICÆ UNIVERSALIS
NEWTONI,

QUOD,

Suffr. Ampliss. Facult. Philos. in Reg. Acad. Aboënsi,

PRÆSIDE

MARTINO JOHANNE WALLENIO,

MATHES. PROFESSORE REG. & ORDIN.

Publico Examini modeste subjicit

JOHANNES CAROLUS NYCOPENSIS,
BOREA-FENNO,

DIE XXX. MAJI, ANNI MDCCLIX.
L. H. Q. S.

ABOÆ, Impressit Direct. & Typogr. Reg. Magn. Duc.
Finland. JACOB MERCKELL.

VIRO

NOBILISSIMO atque AMPLISSIMO,

DN. NICOLAO HASSELBOM,

JUDICI PROVINCIALI Æquissimo,

PATRONO & PROMOTORI Propensissimo.

NE mireris, MÆCENAS Optime, quod exercitium hoc levidense atque omni nitore destitutum, TIBI offerre, TUOque Nomine ornare sustineam. Svadet enim hoc ipsum non temeritas aliqua aut mei fiducia, sed sola pietas & reverentia Nominis TUI summa. Quippe cum favorem illum prorsus incomparabilem,

quo

quo Parentes meos carissimos, dum viverent, indulgentissime amplexus es, venerabundam in memoriam revoco, cumque beneficia, post prӕmaturum obitum eorum, in me cumulata, quӕ certè tot & tanta fuere, ut parentis fere desiderium exstingvant, ӕqua pensito lance; non possum quin arrepta prӕsenti hac occasione, qualemcunque hunc ingenii foetum TIBI sacrando, pium & gratissimum animum meum quodammodo declarem. Humillime itaque rogo, digneris serena fronte vile hoc munusculum respicere, atque in perpetuӕ venerationis τεκμήριον *accipere; simulque me ipsum atque fata mea, fortunӕ ludibriis exposita, sicut huc usque, ita & in posterum Tibi commendata habere. Quod superest, Summum rerum Arbitrum pro omnigena TUA & Nobilissimӕ familiӕ TUӔ prosperitate, calidissimis defatigare suspiriis nunquam desistam.*

NOBILISSIMI atque AMPLISSIMI

NOMINIS TUI

Cultor & cliens devotissimus,

J. C. NYCOPENSIS.

VIRO Admodum Reverendo atque Præclarissimo,

Dn. Mag. HENRICO ALANO,

Ecclesiarum, quæ DEO in Vehmo & Localax colliguntur, PASTORI longe meritissimo, adjacentis districtus PRÆPOSITO gravissimo, AVUNCULO summa animi veneratione colendo.

VIRO Plurimum Reverendo atque Præclarissimo,

Dn. NICOLAO HEDEEN,

PASTORI in Læthala & Hinnerjoki Vigilantissimo, AVUNCULO pia mente venerando.

VIRO Plurimum Reverendo atque Præclarissimo,

Dn. Mag. JONÆ DAHLGREEN,

Archi-Præpositi Aboënf. ADJUNCTO dignissimo, AVUNCULO Dilectissimo.

SI magnitudinem ac multitudinem beneficiorum, quæ in me Fratremque meum amantissimum contulistis, Avunculi Indulgentissimi, turpi involverem silentio, saltem publicè meo qualicunque non celebrarem præconio, omnium & viderer & essem ingratissimus. Verum

rum deest mihi facundia, desunt verba. Quæ enim tanta excellentia ingenii, quæ tanta dicendi copia, quâ quis possit Vestra in nos merita non dicam dignè prædicare, sed numerando percensere. Vòs enim, Avunculi Dilectissimi, nobis, defuncto parente utroque, fortunæ fluctibus jactatis, omni fere ope humana destitutis, ideoque tot periculis, tot calamitatibus & casibus obnoxiis, gubernante providentia Divina, dextram porrexistis. Vos, non tantum in domum Vestram nosmet recepistis, sed etiam omnium rerum ad vitæ usum pertinentium copiam suppeditastis. Insuper informationi bonarum artium & disciplinarum, quæ viam ad veram panderet felicitatem, nos tradendos curastis. Vos denique tanto amore nosmet amplexi estis, ut vix unquam majori liberos Vestros prosequi potueritis. Mirum igitur Vobis ne videatur, quod pro tot & tantis leve hoc munusculum chartaceum, cum meliora haud suppetant, loco certissimi pignoris perpetuæ observantiæ & affectus tenerrimi, Vobis dicatum velim; quod ut benigno adspiciatis vultu & pietate offerentis metiamini, inprimis jam enixè contendo. De cetero Supremum Numen ardentissimis solicitabo precibus, velit Vos in annos bene multos conservare, quo Ecclesia, Res publica, Honestissima Vestra familia, omnesque propinqui & amici, emolumentum, decus atque solatium habeant longè maximum! Quoad vixero, permansurus sum

NOMINUM VESTRORUM

humillimus & observantissimus cultor

J. C. NYCOPENSIS.

Krono = Befallningsmannen.
Wälärebornе. Och. Högwälaktad.

Hr. SIMON GRÖNING.

Gunstige. Gynnare.

Et. Stampadt. Linne.
Är. Ej.
Tilräckeligit.
At. Afskildra. Eder. Godhet.
Än. Mindre.
Framte. Deremot. Swarande. Tacksamhet.
Min.
Wälmening. Är. Dock. Menlös.
Min. Afsikt. Oförfalskad.
I. Det.
Jag. Upoffrar.
Eder.
Närwarande. Blad.
Til. Wedermäle.
Af.
Min. Odödeliga Erkänsla.
Mot. Ätnjutna. Wälgärningar.
Säsom. Ock.
Af. Den. Wördnad.
Hwarmed.
Jag. Städse. Framhärdar.

Herr. Befallningsmannens.

Ödmiuke Tienare,
J. C. NYCOPENSIS.

D. D.

QUamvis in confesso sit, Analysi Algebraica, ceu certissimo & maximè universali inveniendi instrumento, res Mathematicas arduas & longe difficillimas expediri posse; perperam tamen existimaverit quispiam, negligendam ideo aut segnius tractandam esse Analysin Geometricam; quin potius non modo suum huic locum relinquendum, sed eandem quoque sedulò excolendam esse, consentiunt, quotquot de his rebus rectius judicare didicerunt. Hæc certe præ illa tum indoli objecti sui maxime accommodata, tum nativæ cogitandi ac ratiocinandi facultati conformis, intellectus culturam inprimis promovet & præcipua quadam evidentia sese commendat. Quid? quod maximo sæpe compendio & singulari concinnitate solvat, quæ operosius multo & methodo non æquè naturali per calculum essent investiganda. Cum itaque mecum statuerim aliquid speciminis Academici loco in publicum emittere, operæ pretium duxi quantillas ingenii vires in isthoc negotio exercere, eumque in finem periculum facere analyseos geometricæ faciliorum quorundam problematum ex Illuſtr. NEWTONI Arithmetica Univerſali, capite quidem illo, quod *de reſolutione Quæſtionum Geometricarum* agit, deſumtorum; & quidem adjecta plerumque compoſitione ſeu demonſtrationibus ſyntheticis. Illa inquam problemata ab ipſo algebraicè, in hiſce autem pagellis absque ejusmodi calculo ſolvuntur. Quod inſtitutum improbatum haud iri, eo confidentius ſperamus, quo certius eſt, ipſo NEWTONO teſte, etiam in *problematibus, quæ prima fronte difficilia videntur, non ſemper ad algebram eſſe recurrendum.* Apprimè etiam huc faciunt verba ſummi Mathematici Noſtratis, Regiæ Cancellariæ Conſiliarii, Generoſ. Dn. KLINGENSTIERNA, Actis Stockh. A. 1749. p. 286. inſerta, quibus inter Analyſin Geometricam atque algebraicam gravis & ſententioſa inſtituitur comparatio.

Neque tamen diffitemur, binorum ultimorum problematum analyſes, qua partem, a forma analyſeos algebraicæ non adeo multum abludere.

Niſi vero ἀγεωμέτρητον foret Sectiones Conicas adſciſcere in quæſtionibus, quæ per rectam & circulum expediri poſſunt, proclive fuiſſet, facillima analyſi geometrica ſolutiones exhibere variorum problematum, illarum curvarum ſubſidio peragendas; e. g. X:mi ope Ellipſeos, XLIII:tii ope Parabolæ, XXI:mi vel XLV:ti ope Hyperbolæ, XLVI:ti per Parabolam & Hyperbolam aut vero duas potius Parabolas; XLVII:i per binas Hyperbolas. Porro in gratiam eorum, quibus forte volupe fuerit meditationes has noſtras cum ſolutionibus eorundem problematum

tum algebraicis conferre, ipsum vero NEWTONUM adire non licuerit, monuisse non pigebit, pleraque hæc problemata (exceptis tamen VII:mo, VIII:vo, X:mo & XII:mo, quæ apud NEWTONUM sunt XXXIX, XLI, XLIV & XLVI,) etiam in *Introduct. in Algebram* a *Dn Bar.* PALMQUIST lingva vernacula conscripta, *Part. II.* §§. *23. 28. 29. 30. 39. 40. 41. 42.* occurrere. De cætero tuam B. L. æquanimitatem imploramus, ut pro consveto favore, juvenile & innoxium hoc tentamen æqui bonique consulas.

PROBLEMA I. *Fig. 1.*

Datis Trianguli angulorum uno, perimetro & perpendiculo in basin, h. e. *latus angulo dato oppositum, invenire Triangulum.* Est hoc Probl. IV:tum NEWTONI Lib. & loc. cit., ubi vero speciatim de △:lo Rectangulo ita enunciatur: *Dato Trianguli Rectanguli perimetro & perpendiculo, invenire* △:lum. Idem nos, universaliter jam propositum, sequentem in modum solvimus.

ANALYSIS. Factum puta, sciz. esto ABC △:lum quæsitum, habens angulum ACB = *acb* dato, atque perpendiculum CD = rectæ datæ EF; & in basi AB utrinque producta, capiantur AE = AC, BG = BC, & jungantur CE, CG. Igitur recta EG, quam positione datam sumere licet, datur magnitudine, æqualis videlicet perimetro; atque (*α*) isoscelium △△:orum ACE, BCG, anguli exteriores (*β*) CAB,

 CBA,

CBA, dupli sunt angulorum ACE, BCG. Quare, propter datam summam angulorum CAB & CBA, æqualem sciz. (β) complemento dati *acb* vel ACB ad duos rectos, datur summa angulorum ACE, BCG, ideoque totus ang. *ECG*. Tangit proinde punctum C circumferentiam positione datam, circuli sciz. cuius segmentum super EG descriptum capit angulum = ECG (γ. δ.). Idem vero punctum C tangit rectam positione datam, viz. parallelam ipsi EG & ab illa distantem intervallo = EF. Datur ergo punctum C ideoque, propter data etiam puncta E, G, dantur rectæ CE, CG, & anguli CEG, CGE, seu his æquales (α) ECA, GCB, consequenter rectæ CA, CB positione, indeque AB puncta & ipsum △*lum* ACB. *Q.E.I.*

SYNTHESIS. Producta *ac* versus L, biseca angulum *bcL* recta *cM*. Fac perimetro = EG rectam, super qua describe (δ) circuli, cujus centrum sit O, segmentum ENG, capiens angulum = *acM*. Statue EF ad angulos rectos ipsi EG, & per F ipsi EG parallelam age FC, quæ circumferentiæ descriptæ occurrat in C, & jungantur CE, CG. Duc jam rectas *CA*, *CB*, sic (ε) ut fiat angulus ECA = CEG, & GCB = G, (aut vero quod perinde est (ζ. η.) biseca CE, CG, perpendicularibus seu rectis OH, OI per O ductis, quæ determinabunt in EG puncta A, B, & jungantur CA, CB,). Dico factum. Cum enim △*li* CEG angulus *ECG* sit (per constr. δ) = *acM*, erit (β. ϑ.) (CEG + CGE seu) *ECA* + *GCB* = (LcM vel) *Mcb*, ideoque reliquus *ACB* =

acb dato. Patet etiam (ι) esse AC=AE & BC=BG, ideoque CA+AB+BC= perimetro datæ EG, ut & (κ) perpendiculum CD esse = EF dato. *Q. E. F. & D.* Manifestum vero est rectam FC occurrere peripheriæ prædicti circuli, si EF non excedat segmenti altitudinem KN, (esto nimirum recta OKN perpendicularis ad EG,) & eandem quidem tangere in N atque △ ACB fore æquicrurum, si EF=KN; & quia in eodem hoc casu æquales fiunt anguli CEG, CGE, uterque sciz. = *KGN* = ½ *LcM*, atque KOE vel KOG = (λ) 2 KGN = LcM; cumque sit GK: KN:: sin. KOG: sin. vers. KOG vel :: sin. tot. : tang. KGN; sequitur: ut problema sit possibile, debere *dimidiam perimetrum ad altitudinem △li, non minorem habere rationem, quam habet sinus rectus ad sinum versum semisummæ angulorum incognitorum seu complementi semissis anguli dati, aut vero quam sinus totus ad tangentem dimidii istius complementi.*

Si angulus datus *acb* fuerit rectus, requiritur ut segmentum ENG capiat angulum sesquirectum; quare bisectæ EG in K fiat perpendicularis KO=KE vel KG, atque centro O intervallo OE vel OG describatur circulus ENG, &c. Nam propter EOG, ut facile patet, jam quidem rectum, qui ad circumferentiam arcui ENG insistere concipitur, semirectus (λ) erit, consequenter (μ) ang. ECG sesquirectus, ut oportuit.

SCHOL. Quemadmodum pro construendo Triangulo Rectangulo, datis perimetro & perpendiculo in hypothenusam

 demisso,

demisso, *Newtonus* calculo hanc elicuit Regulam: *Summam perimetri & perpendiculi esse ad perimetrum ut dimidium perimetri ad hypothenusam*; sic pro triangulo quocunque, simile sed generalius hoc invenimus Theorema: *Ut summa perimetri & tertia proportionalis tangenti dimidii anguli dati, sinui toti atque altitudini △:li, se habet ad perimetrum, ita semiperimeter ad basin.*

PROBLEMA II. *Fig. 2.* (*Newt. Probl. X.*)

Datis Trianguli basi AB, summa laterum AC + CB, & angulo verticali ACB, determinare latera vel ipsum Triangulum.

ANALYSIS. Descriptum sit, super data basi AB, △ ABC; in uno BC laterum producto capiatur CD = CA, & jungatur AD. Erit itaque BD = AC + CB, ang. datus ACB (*a*. β) duplus anguli ADB, qui proinde datur; & locus verticis C erit circumferentia positione data, pariterque locus puncti D alia itidem positione data, sciz. (γ. δ) circulorum, quorum segmenta super AB constituta capiant angulos datis æquales. At ob datam BD = summæ laterum AC + CB & punctum B datum, locatur punctum D etiam in alia circumferentia positione data, circuli sciz. cujus centrum B, radius = BD. Datur ergo punctum D, indeqne recta BD, quæ cum sit alter locus ipsius C, dabitur vertex C & ipsum △:lum ACB.

Aliter. Vertex B unius angulorum ad basin, & alterutrum BC laterum dentur positione. Descriptum puta △ ABC, & producatur ut antea

BC versus D, ut fiat CD = CA, & jungatur DA. Datur itaque BD positione & magnitudine. Datur vero etiam ang. BDA quippe dimidius anguli BCA dati. Ergo datur positione recta DA, quæ est locus puncti A. At quia datur basis BA magnitudine & punctum B positione, datur etiam alius puncti A locus, sciz. circumferentia circuli centro B radio = BA descripti. Dantur ergo A, BA positione ut & (quia datur DA atque ang. DAC = sciz. ADB dato,) AC, reliqua.

SYNTHESIS. Super data basi AB constituto (δ) circuli segmento AEB, quod capiat angulum = dato ACB, biseca (ι) circumferentiam AEB in E; centro E intervallo EA vel EB describe circulum, cui in D occurrat alius centro B radio = summæ laterum descriptus, & junge BD (vel, quod eodem redit, in prædicto circulo, cujus centrum E, aptetur (ξ) recta BD = summæ laterum datæ). Occurrat autem BD circumferentiæ AEB in C. Junge denique AC; erit ACB △:lum desideratum. Nam ang. ACB = ((ο) AEB = (λ)) 2 ADB; At (β) ACB = ADB + DAC. Ergo ADB = DAC, ideoque CA = CD, & AC + CB = BD = summæ datæ; insuper vero angulus ACB (per constr.) = dato. *Q.E.D.*

Alia & fere paulo commodior constructio fluit ex analysi posteriori. Exponatur recta BD = summæ laterum datæ; fiat ang. BDF = dato. Bisecetur ang. BDF recta DG. Centro B radio = basi datæ describatur circulus, qui in A occurrat rectæ

DG

DG indefinitæ. Ducatur ex A ad B recta AB & ipsi FD parallela AC. Dico factum. Præterquam enim quod sit (π) ang. *ACB* = BDF = dato, & AB = basi datæ; erit ang. CDA = (per constr. ADF = (π)) DAC, unde (ι) AC = CD indeque AC + CB = BD = summæ datæ laterum.

Schol. Possunt in constr. I:ma bina esse puncta D occursus circulorum centris E & B descriptorum, & in constr. II:da itidem duo puncta A occursus rectæ DG & circuli centro B descripti; perinde vero est, utrum illorum vel horum adhibeatur; idem enim, etiamsi positione diversum, obtinetur Δ:lum. Quando autem D vel A unicum exsistit, seu fit punctum contactus, facile ex constructione priori ($\varrho.\sigma$) æque ac posteriori (ʹ) intelligitur angulum BAD rectum esse, atque Δ:lum *ACB* isosceles. Et quia tunc etiam in constr. I. BD omnium maxima ($\xi.\upsilon$) est, vel in constr. II. BA minima; atque posito angulo BAD recto, est BD: BA :: sin. tot. : sinus ADB, sequitur: Ut problema solutu sit possibile, debere *basin ad summam laterum non minorem habere rationem, quam sinus dimidii anguli dati ad sinum totum.*

PROBLEMA III. *Fig. 3.*

Datis Trianguli ABC lateribus, invenire aream.

Pro hac determinanda formulam calculo algebraico erutam exhibet NEWTON. *Probl. XI.* circa finem. Ut autem methodo utamur Geometrica, sequens præmittimus Lemma: *Si rectæ AO, BO, bisecantes trianguli ABC angulum internum A, & externum CBM, concurrant* (id quod semper fiet ob ang. CBM > CAB (ϕ) ideoque & OBM > OAB,) *in* *in puncto O; demissis ex O perpendiculis OM, ON, ad latera △:li comprehendentia angulum illum internum, erit AM vel AN = semisummæ omnium laterum.* Nam ducta ex O ad latus tertium BC perpendiculari OL, erit (χ) in △△:lis OBM, OBL, *BM = BL* (& OM = OL; in △△:*lis* OAM, OAN, OM = ON, unde ON = OL ideoque) in △△:*lis* OCN, OCL, (ψ) *CN = CL*; quare BM + CN = BC ideoque *AM* + *AN* = AB + BC + CA. Ast in △△:*lis* OAM, OAN, est *AM = AN* (χ); ergo utraque ipsarum æqualis est semisummæ omnium laterum △:*li* ABC. Jam bisecentur △:*li* ABC duo quilibet anguli BAC, ABC, rectis, quæ conveniant in puncto K, ex quo ductæ ad singula latera perpendiculares KF, KG, KH, æquales erunt (ω) adeo ut, juncta insuper KC, resolvatur △:*lum* ABC in hæc tria AKB, BKC, CKA, habentia altitudinem communem = KF, sumtis sciz. AB, BC, CA, pro basibus singulorum respective; quæ proinde simul sumta æqualia sunt △:*lo* cujus basis est = AB + BC + CA & altitudo = KF, vel (ϰ) rectangulo sub KF & semisumma laterum △:*li* ABC, i. e. (*per Lemma præc.*) rectangulo *KF* ⨯ *AM*, cujus itaque valor est investigandus.

Quia quadrilateri BFKH anguli ad F & H recti sunt, erunt reliqui HKF & HBF = (duobus rectis =) HBM + HBF, quare æquales HKF, HBM ideoque & horum dimidii BKF, OBM. Ergo △△:*lorum* BFK, OBM æquiangulorum proportionalia sunt latera KF, FB, BM, MO, consequenter (ς) æqualia sunt rectangula *KF* ⨯ *OM*, *FBM*. Porro (*aa*) Rgl.

FAM : KF $\times$ AM : : AF : KF, & KF $\times$ AM : (KF $\times$ OM seu) Rgl. FBM : : AM : OM, atque propter parallelas KF, OM, est (ββ) AF : KF : : AM : OM; ergo & proportionalia sunt R:gla *FAM*, *KF* $\times$ *AM*, *FBM*, sciz. KF $\times$ AM seu (*per dem:*) area Δ:*li* ABC est media proportionalis inter R:gla FAM & FBM. Atque cum sint (ω) AF, FB, CH, æquales ipsis AG, BH, CG respective, erunt AB + CH = (semisummæ laterum Δ:*li* ABC = per demonstr.) AM, ideoque BM = CH = CG, & segmenta *AF*, *FB*, *BM* sunt differentiæ singulorum laterum a semisumma omnium *AM*. Unde fluit hæc Regula: Si dentur in numeris latera Trianguli, *a semisumma omnium subtrahantur singula, atque ex facto trium horum residuorum & ipsius semisummæ extrahatur radix quadratica; hæc* (γγ) *aream exprimit.*

Ex. gr. Si fuerint latera Trianguli 13′, 20′, 21′, erit horum semisumma 27, hujus a singulis lateribus differentiæ 14, 7, 6, & 27. 14. 7. 6. = 15876, cujus radix quadratica 126 est area Δ:*li* pedibus quadratis expressa.

SCHOL. Hujus propositionis demonstrationem allatæ non multum absimilem alicubi vidimus; jam vero non succurrit auctoris aut scripti nomen.

PROBLEMA IV. *Fig. 1.* (*Newt. Probl. XV.*)

Invenire Triangulum ABC (sciz. speciem Δ:*li*) *cujus tria latera AB, BC, AC & perpendiculum CD sunt in Geometrica progressione.* Quia (*ex hyp.*) AB : BC : :

AC :

AC : CD, erit (ς) AB × CD = AC × CB; quare cum sit (ϰ) AB × CD = 2 △ ABC, erit Rgl. *AC × CB = 2 △ ABC.* Est vero etiam (ϰ) 2 △ ABC = parallelogrammo, cujus latera sunt AC CB & quæ comprehendunt angulum ACB; rectum itaque esse oportet angulum *ACB.* Hoc itaque jam posito, erit (δδ) ∺ AB, BC, BD; atque (ex hyp.) ∺ AB, BC, AC; ergo *AC = BD*, ideoque propter ∺ AB, AC, AD (δδ), erit ∺ *AB, BD, AD.* Unde hæc fluit constructio. Recta quæcunque AB, quæ pro maximo laterum sumenda, secetur (εε) secundum mediam & extremam rationem in D, erit pars major BD æqualis minimo AC laterum △:*li* quæsiti. Ex data igitur hypothenusa AB atque alio insuper latere AC, facile constituetur △:*lum* rectangulum; & hujus quidem latera atque perpendiculum in hypothenusam demissum erunt in proportione continua.

PROBLEMA V. *Fig. 4.* (*Newt. Probl. XXVI.*)

Invenire punctum D, a quo tres rectæ DA, DB, DC, ad totidem alias positione datas rectas HM, BI, GN, perpendiculariter demissæ, datam inter se rationem obtineant.

Factum puta, & protrahatur e rectis positione datis una BI donec reliquis occurrat in E, F; dantur itaque anguli HEF, GFE. Sint DK, DI parallelæ ipsis EF, EH; erit (π) ang. AKD = (AEB =) DIB, & in △△:*lis* æquiangulis DBI, DAK, (ββ. ζζ.) *DB : DA* :: DI : DK vel (ϰ) *EK : KD.* Datur autem

 (*hyp.*)

(*hyp.*) ratio DB : DA, ergo & EK : KD, quare ob datum quoque ang. EKD, supplementum viz. ipsius AEF (π), datur Δ:lum EKD (m) specie & anguli KED, (KDE vel) DEF, consequenter recta *ED* positione. Similiter ostendetur ex data ratione DB : DC, dari positione rectam *FD*. Datur ergo punctum *D*. Componetur itaque problema in hunc modum: posito perpendicula DB, DA, DC, inter se esse debere ut *a*, *b*, *c*; a puncto quocunque M rectæ EH, ducatur ipsi EF parallela ML & fiat *EM* : *ML* : : *a* : *b*. Invento sic puncto *L*, ducatur recta indefinita EL. Per punctum N pro arbitrio sumtum in recta FG, pariter fiat NO parallela ipsi EF, & *FN* : *NO* : : *a* : *c*. Ducatur *FO* recta, quæ occurrat ipsi EL in *D*; erit D punctum quæsitum. Nam *per constr.* & propter parallelas (99) ML, KD, est (33) *a* : *b* : : (EM : ML : : EK : KD : : DI : DK : :) *DB* : *DA*, ut ex præmissis constat. Et ductis e puncto D rectis, quæ sint ipsis EF, FG, parallelæ, eodem modo probatur esse *DB* : *DC* : : *a* : *c*. Q. E. D.

SCHOL. Facile intelligitur, non solum perpendicula, sed & rectas quaslibet alias, quæ a puncto *D* sic invento ducuntur & cum datis positione AE, EF, FG, datum quemcunque angulum efficiunt, datam servare rationem ipsarum *a*, *b*, *c*; adeoque problematis hujus, universalius etiam propositi, eandem esse solutionem. Cæterum quia, si sumatur ED pro sinu toto, DB DA sunt sinus angulorum DEB, DEA; allata constructione continetur solutio hujus problematis: angulum datum ita in duas partes secare, ut sinus angulorum partialium datam inter se rationem obtineant, conf. D:ni Præsidis Exercitat. Miscell. Mathem. Physic. Fascic. II. §. 42. pag. 37. coll. §. 15. pag. 15.

PROBLEMA VI. *Fig.* 5. (*Newt. Probl. XXVII.*)

Invenire punctum D, a quo tres rectæ DA, DB, DC, ad data tria puncta A, B, C ductæ, datam inter se rationem habeant. Cum sint A, B, puncta data & *AD: BD* ratio data, erit locus puncti D circumferentia circuli, cujus constructio ex seq. *Probl. VII.* petenda, & centrum quidem in recta BA producta habentis, &c. Et quia etiam dantur puncta *B*, *C*, atque ratio *BD: CD*, per idem *Probl. VII.* describatur peripheria circuli alia, a cujus puncto quolibet ad B & C ductæ rectæ, datam hanc rationem servent. Occursus itaque horum circulorum erit punctum quæsitum *D* vel *d*; quod aut duplex erit aut unicum aut nullum, adeoque problema vel duas habet solutiones vel unam vel nullam, prout circuli sese aut secant aut tangunt aut vero plane sibi non occurrunt. Si alterutra rationum datarum fuerit ratio æqualitatis; locum unius circuli tenebit linea recta (Schol. I. probl. seq.); si utraque, casus is est, qui habetur in *Eucl. IV.* 5.

PROBLEMA VII. *Fig.* 6. (*Newt. Probl. XXXIX.*)

Si rectæ duæ AC & BC, a duobus positione datis punctis A & B, in data quavis ratione ad tertium quodvis punctum C ducantur; invenire locum puncti concursus C.

ANALYSIS. Junctam AB seca in E secundum rationem illam datam, erit E unum punctorum C, &, juncta CE, ang. ACE = BCE (88). Ducta sit,

ad AB productam, recta CG faciens angulum BCG $=$ A; unde erit ang. *CFG* $=$ ((β) A $+$ ACE $=$ BCG $+$ BCE $=$) *ECG*, ideoque (ι) *GC* $=$ *GE*. At ob æquiangula △△:*la* ACG, CBG, est (ββ) $\div$ GA, GC, GB,
(I)
seu $\div$ GA, GE, GB; hinc (μ) AE : EB :: AG : GE, & porro (κκ. ζζ.) convertendo, alternando & in-
(II)
vertendo, AE $-$ EB : AE :: AG $-$ GE : AG, i. e. $\div$ *AE* $-$ *EB*, *AE*, *AG*; quare ob datas AE & EB, datur *AG* ideoq; punctum *G*, & recta *GE* vel *GC* constans. Ergo locus punctorum C est circumferentia *Circuli* centro *G*, radio GE descripti. Et quidem ex præmissis (II. I.) Fit AE $-$ EB : EB :: AE : EG.

SYNTHESIS. Seca datam positione & magnitudine rectam AB in E secundum rationem datam, Fac EH $=$ EB & sume, in AB producta, ipsis AH, HE, AE, quartam proportionalem *EG*; denique centro *G* intervallo *GE* describe *Circulum* ECM, qui erit locus desideratus, hoc est, si ad quodvis in ejus circumferentia punctum C ducantur rectæ AC, BC, erit AC : BC in ratione data AE : EB. Junctis enim CG, CE; ob AE : EG :: (*Constr.*) AH : HE vel EB, erit (μ) *AG* : GE vel *GC* :: AE : EB :: ((λλ) AG $-$ AE : GE $-$ EB ::) GE vel *GC* : *GB*. Ergo in triangulis AGC, CGB, ob angulum G communem & $\div$ AG, GC, GB, erit (νν. ζζ) *AC* : *CB* :: (AG : GC :: *per dem.*) *AE* : *EB*. Q. E. D.

SCHOL. I. Sumenda est EG versus partem puncti B, si EB $<$ EA i. e. si oporteat esse BC $<$ AC. Quod si vero

data

data ratio fuerit æqualitatis, ob AH tunc = o, EG evadit infinita s. circulus ECM degenerat in lineam rectam, quæ datam AB ad rectos angulos bisecans, est locus quæsitus, id quod etiam per se manifestum (ζ). Cæterum præsens hoc problema locale, quod elegantem quandam circuli proprietatem sistit, nemo, quantum mihi quidem constat, absque calculi algebraici ope solutum dedit, quo etiam utitur *M. de L' Hôpital* in *Traité Anal. des Sect. Con. L. VIII.* §. 350. nec non *anal. des inf. pet.* §. 142.

Coroll. I. Si duo puncta in recta per centrum circuli ducta eum obtineant situm, ut semidiameter sit media proportionalis inter distantias eorum a centro; eorum a singulis peripheriæ punctis distantiæ erunt in ratione constante, in qua videlicet sunt istæ a centro distantiæ ad radium, vel in ratione subduplicata harum distantiarum.

Coroll. II. A quovis peripheriæ puncto C ductis ad diametrum perpendiculari CB & tangente CA; vel duabus rectis CB, CA, quæ cum tertia CE, ad punctum E occursus diametri & circuli ducta, efficiant angulos ECB ECA æquales; erunt punctorum A, B distantiæ a quovis peripheriæ puncto, in ratione AC:BC.

Coroll. III. Ut dato circulo ECM, cujus centrum G, inveniantur duo puncta A B, unde rectæ AC BC, ad singula peripheriæ puncta ductæ, servent datam rationem $d:e$; agatur ex centro recta quæcunque GA, & capiantur ipsis d, e & radio, nec non e, d & radio, quartæ proportionales GB GA; erunt A B puncta desiderata.

Schol. II.

SCHOL. II. Ut data in numeris ratione AC : CB & distantia punctorum AB, inveniatur radius circuli desiderati, inferendum est: ut factus ex summa & differentia datorum numerorum, ad factum ex ipsis, sic AB ad radium quæsitum.

PROBLEMA VIII. *Fig.* 7. (*Newt. Probl. XLI.*)

Invenire locum verticis D Trianguli ABD, cujus basis AB datur, & anguli ad basin A, DBA, datam habent differentiam.

ANALYSIS. Sit ang. DBA > A, & ducatur recta DE faciens angulum BDE = A, & occurrens ipsi AB productæ in E. Proinde ang. *DBA*—*A* = (DBA — BDE = (β)) *BED*, ideoque datus est ang. *BED*, æqualis sciz. datæ differentiæ angulorum ad basin. Et quia æquiangula sunt △△ AED, DEB, erit (ββ) ∵ AE, ED, EB, consequenter (μμ) rectangulum *AEB* = *EDq*; quare locabitur punctum D in *Hyperbola æquilatera*, cujus diameter transversa est AB, angulo ordinatarum existente = *BED* dato.

SYNTHESIS. Bisecta AB in C, ducatur per C recta FG faciens angulum ACF = dato, qui est differentia angulorum ad basin. Fiat CF = CG = CA, & diametris conjugatis AB, FG, quarum AB sit transversa, describatur *Hyperbola æquilatera*, cujus vertex sit B; erit hæc locus quæsitus; h. e. si ad quodvis ejus punctum D ductæ fuerint rectæ DA DB, erit excessus anguli DBA supra DAB æqualis ang. ACF. Ducta enim ad diametrum AB ipsi FG parallela DE, quæ proinde ordinatim applicata erit diametro AB; est (per naturam *Hyperb: æquilat.*)

AE

AE × EB = DEq, quapropter ($\mu\mu$) ∵ AE, DE, EB, & ($\pi\pi$) in △△:lis AED, DEB, ang. BDE = A; & propterea ang. *DBA* — *A* = (DBA — BDE = (β) BED =) *ACF* dato.

SCHOL. Si oporteat esse ang. A > DBA, locus punctorum D erit Hyperbola æquilatera priori opposita, cujus sciz. vertex sit A, &c. Cæterum allatam hujus problematis solutionem, ab eximio quodam Mathematico adhibitam, nostram nunc facere, ab instituto non alienum judicavimus.

PROBLEMA IX. *Fig.* 8. (*Newt. Probl. XLIII.*)

Circulum per data duo puncta A, B, describere, qui rectam FH positione datam contingat.

ANALYSIS. Iunctam AB biseca perpendiculari DL, eritque($\nu\nu$) in hac centrum circuli quæsiti, quod sit C, E vero punctum contactus circuli & rectæ FH, & jungatur CE. Producantur AB FH ad occursum in G; erit itaque ($\xi\xi$) rectangulum *AGB* = *GEq*; & ($\mu\mu$) GE media proportionalis inter *AG* & *GB*; quare cum dentur puncta A, B, G, ideoque rectæ AG GB, datur (oo) GE indeque punctum E. Datur porro angulus GEC sciz. rectus(7) ideoque recta EC positione. Ergo datur quoque centrum C, punctum sciz. concursus duarum rectarum DL EC, positione datarum.

SYNTHESIS. Inventis, ut modo dictum, DL positione & AG etiam magnitudine, describe super AG semicirculum, cui in K occurrat erigenda e puncto B ipsi AG perpendicularis BK. Cape in recta FH, protracta quoad opus fuerit, ad utramque partem puncti G, rectæ GK æquales GE, Ge, & a punctis E, e, erige perpendiculares, quæ occurrant rectæ DL in C, c. Circuli centris C, c, radiis CE ce descripti satisfacient proposito. Nam (*per constr:*) est (δδ. ββ) ∺AG, GK vel GE, GB, ideoque (μμ) Rgl. *AGB = GEq*. Iam per puncta data ABE circulus describi (ππ) potest, eundemque, propter (*dem.*) Rgl. AGB = GEq, continget (ϖϖ) recta GF in E; & centrum ejus erit in recta (ϱϱ) EC simulque (νν) in DL, ergo in ipso puncto C. Hic itaque circulus idem est, cujus tradita fuit constructio, qui proinde transibit per puncta A B, tanget vero (σσ) rectam GF. Vel sic: GDq = (ττ) (AG ✕ GB + BDq = *per dem.*) *GEq + BDq*. Commune addatur DCq; erit, junctis CA, CB, CG, (ΠΠ) CGq vel GEq + CEq = GEq + CBq; ergo CEq = CBq & *CE = CB* = (ob △△ CDB, CDA æqualia (ζ)) *CA*. Ergo circulus centro C descriptus per unum punctorum ABE, transibit per reliqua, & quidem in E tanget (σσ) rectam FH. Et eodem modo alter circulus centro *c* per alterutrum punctorum AB*e* descriptus transibit per reliqua atque in *e* rectam FH continget.

Schol. Solutio nonnunquam simplicior adhuc evadit. Ut si fuerit FG perpendicularis ipsi AG, mox patet radium utriusque circuli quæsiti esse = GD. Quando FH AB parallelæ sunt, DL occursu suo determinabit in recta FH punctum contactus, ad quod ex A vel B ducta recta si bisecetur perpendiculari, hæc ipsa definiet in DL centrum C.

Si

Si alterutrum punctorum datorum, ut B, in rectam FH vel eandem productam inciderit, manifestum est, coincidentibus sic quidem punctis B, G, *E* vel *e*, fore B ipsum punctum contactus & pro E adhibendum esse in allata problematis constructione. Et in his duobus casibus ultimis, unica datur problematis solutio.

PROBLEMA X. *Fig.* 9. (*Newt. Probl. XLIV.*)

Circulum per datum punctum A describere, qui rectas duas BD, EF, positione datas continget.

Conveniant BD, EF productæ in G; evidens est (ω) bisecto angulo BGE recta GH, fore centrum circuli quæsiti in hac recta GH. Et quia idem (*hyp.*) transire debet per punctum A; si ex A ad GH demittatur perpendicularis AI, quæ producatur ut fiat IK = IA, erit etiam punctum K in circumferentia ejusdem circuli. Reductum itaque est præsens problema ad præcedens IX. Describatur nimirum circulus, qui transeat per data duo puncta A, K, & tangat alterutram rectarum BD EF positione datarum; hic quæstioni satisfaciet. Manifesta ex his jam est compositio problematis, ut eam seorsim adferre non sit opus. Idem vero duas plerumque habere solutiones, ex probl. IX. æquè constat.

Schol. Si rectæ BD EF fuerint parallelæ, clarum est ducendam esse illis ipsis parallelam & ab utraque æquè distantem rectam, quæ ipsius GH vicem subeat. Si punctum A in ipsa recta GH situm fuerit i. e. in I inciderit, patet ex eodem ducendam esse rectæ GH perpendicularem & describendum circulum (ω) qui hanc & reliquas duas rectas GB, GE, contingat. Cfr. porro *Schol. probl. præc.*

COROLL. I. Ex allatis patet ratio *describendi circulum, qui per datum punctum A transeat, rectam BD positione datam contingat atque centrum habeat in alia recta GK positione data.* Determinato viz. ut ante dictum, puncto K, constructio eadem est, quæ problematis IX:ni.

COROLL. II. Deducitur inde porro solutio hujus problematis: (*Fig. 10.*) *Circulum describere, qui datum circulum HMK & duas rectas AB, DE, positione datas contingat.* Nimirum duc e centro C circuli dati, uni ut AB datarum rectarum perpendicularem CI, in qua capiantur, ad utramque ipsius AB partem, IF & I*f* æquales semidiametro CM ejusdem circuli. Per F & *f*, age ipsi AB parallelas FG, *fg*. Duc rectam, quæ bisecet angulum ipsis AB, DE, (productis si opus est) interceptum. In hac recta quære (*cor. præc.*) centra O, o, circulorum, quorum unus contingeret rectam FG, alter ipsam *fg*, & ambo transsirent per punctum C. Iunge OC, oC, quæ occurrant circulo dato in H, *h*; & centris O, o, intervallis OH, o*h*, describe circulos LHN, *lhn*; uterque eorum problemati respondet.

PROBLEMA XI. *Fig. 11.* (*Newt. Probl. XLV.*)

Circulum per data duo puncta A & B describere, qui positione datum circulum EKOL continget.

Junctam

Junctam AB biseca perpendiculari DS in D, erit (νν) in recta DS centrum C circuli quæsiti, & si fuerit F centrum circuli dati, recta CF transit (ρ. υυ) per punctum E contactus circulorum. Duc FG perpendicularem ipsi AB, si opus sit productæ. Junge FD, & concipe FH parallelam ipsi AB, eritque (φφ) CFq i. e. (χχ) CEq + EFq + Rgl. 2CEF = FDq + DCq — (2HDC vel) 2FG × DC. Ablatis utrinque EFq & præterea æqualibus (ππ) CEq = (CBq =) BDq + DCq, erit Rgl. 2CEF = FDq — EFq — BDq — 2FG × DC. Dantur autem magnitudine FD, EF, BD, ideoque spatium FDq — EFq — BDq, cui æquale ad datam rectam 2FG applicari potest rectangulum. Sit hoc 2FG × R. Datur itaque recta *R* & erit (ψψ) Rgl. *CEF* = (FG × R — FG × DC = (ωω)) FG × $\overline{R - DC}$, unde (ϛ) FE : FG : : R — DC : CE. Quare si a dato puncto D fiat *DN* = inventæ R, ut sit NC = R — DC, datur, præter punctum *N*, ratio incognitarum NC, CE, eadem viz. quæ datarum FE, FG. Ductam puta NE occurrentem in P ipsi FG, si opus est, productæ; & in ΔΔ:*lis* EFP, ECN, ob parallelas FP, CN (ϟ) æquiangulis, erit (ββ) PF : FE : : (NC : CE : : *dem.*) FE : FG, unde propter datas FG & (FE seu) FO datur (αα. ϛϛ) *FP* & punctum *P*. Datur vero etiam per præmissa punctum *N*, ideoque recta PN, ejusque & circuli dati intersectio E, viz. punctum contactus circulorum, cætera. Ex his sequens fluit constructio: Positis, ut ante dictum, rectis AB, DS, FGO, FD, quæ

 dantur;

dantur; quære rectam *Q*, quæ possit excessum, quo FDq superat summam quadratorum ex FO & BD (*cfr. ll*). In DS sume rectis 2FG & Q tertiam proportionalem *DN*, æqualem proinde illi, (*μμ*) quam diximus *R*. Fiat quoque in FG, producta si opus est, *FP* tertia proportionalis ipsis FG, FO, (quod in illo casu, ubi AB producta secat circulum datum ut in L, commode fiet (*ßß.*) ducendo ipsi FL in L perpendicularem LP, quæ occurret rectæ FG in desiderato jam puncto P, ob FL=FO). Junge puncta jam inventa *N*, *P*, recta *NP*; occurret hæc circulo dato LKE in punctis *E*, *e*. Recta denique per F, E, occursu suo determinabit in recta DS centrum *C* circuli quæsiti, radio CE vel CB describendi.

Similiter recta per F & *e* ducta, si rectæ DS ad alterutram partem ipsius AB occurrat, dabit in DS centrum alterius circuli, qui satisfaciet quæstioni.

Similis fere solutio hujus problematis habetur in 's *Gravesand. Math. Univ. Elem.* §. *308*. En vero.

Solutionem aliam facillimam pro illo casu, quando recta AB producta occurrit circulo dato in K, L. Fingatur e puncto contactus E circulorum ducta recta ET, quæ utrumque contingat & occurrat ipsi AL in T. Igitur (*ξξ*) Rgl. ATB=(TEq=) Rgl. LTK, unde (*ς*) AT: TK:: LT: TB & hinc (*) *AL*: *BK*:: *AT*: *TK*. Quare cum dentur AL, BK & AK, seca (**) AK secundum rationem datam *AL*: *BK* in *T*, unde duc rectas TE & T*e* contingentes circulum datum in punctis *E*, *e*; quibus inventis

absol-

absolvuntur reliqua ut ante. Quando AB non secat sed contingit circulum datum, eadem locum habet constructio, nisi quod coincidant tunc puncta K, L.

Ex præmissis intelligitur: si datus circulus productam AB tetigerit, unicam dari problematis solutionem. Quando autem duæ dantur, circulorum quæsitorum centra vel ad diversas vel easdem partes rectæ AB sita sunt, prout datus eandem secuerit vel minus; &c.

PROBLEMA XII. *Fig.* 12. (*Newt. Probl. XLVI.*)

Circulum per datum punctum B *describere, qui datum circulum* GEg *& rectam lineam* AH *positione datam continget.*

Sit circulus describendus BDE, ejus centrum C, dati circuli centrum F. Junge CF, & duc per C diametrum DS ad rectos angulos rectæ AH; erunt (*vv. ϱ.* 7) E & D puncta contactus. Sint porro BA, GFH, ad AH, atque CL, GI, BP, ad GH, BA, DS, perpendiculares & jungatur BD. Quia (*σ. δδ*) ∺ SD, DB, DP, seu 2CD, DB, AB, erit (*μμ*) BDq seu (77) ABq + ADq = 2CD $\times$ AB, ideoque *ADq* = 2*CD* $\times$ *AB* − *ABq*. Porro (*χχ*) *CFq* = (CEq + EFq + Rgl. 2CEF =) *CDq* + *FGq* + 2*CD* $\times$ *FG*; & (***) DHq seu *CLq* = (AHq + ADq − Rgl. 2HAD i. e. *per dem.* =) *AHq* + 2*CD* $\times$ *AB* − *ABq* − 2*HAD*; atque *FLq* = (HLq + FHq − Rgl. 2LHF =) *CDq* + *FHq* − 2*CD* $\times$ *FH*. Statuatur jam repertus valor ipsius CFq æqualis

lis (77) valoribus inventis ipſorum CLq & FLq; tunc addito utrinque *Rg:lo* 2HAD atque ablatis CDq, FGq, 2CD $\times$ FG, erit, ob AHq + FHq $=$ AFq & AB $-$ FH $-$ FG $=$ *BI*, Rgl. *2HAD* $=$ *FAq* $-$ *FGq* $-$ *ABq* $+$ *2CD* $\times$ *BI*. Quære jam (ut in probl: præc:) ſpatio FAq $-$ FGq $-$ ABq, quod datur, æquale & ad rectam datam 2AH applicatum Rgl. 2AH $\times$ R, unde datur recta *R*, & erit ($\psi\psi$) Rgl. HAD $=$ AH $\times$ R $+$ BI $\times$ CD vel Rgl. HAD $-$ AH $\times$ R i. e. AH $\times$ $\overline{\text{AD} - \text{R}}$ $=$ BI $\times$ CD. Facta itaque *AY* $=$ *R*, datur punctum *Y*, eſtque YD $=$ AD $-$ R, & AH $\times$ YD $=$ BI $\times$ CD, indeque (ſ) *YD* : *DC* : : *BI* : *AH*. Ob datas itaque BI, AH, datur ratio inter incognitas YD, DC, comprehendentes angulum datum ſciz. rectum; quare datur ang. *DYC*. Dantur etiam punctum Y & recta YD poſitione; quare datur recta *YC* poſitione. Unde hæc deducitur *Conſtructio*: Ductis, ut ſupra, rectis BA, AF, HFG, quæ dantur ut & AH, fac rectæ *R*, modo jam indicato inveniendæ, æqualem *AY*, junge data puncta B, G, atque ad datam rectam HY datumque in ea punctum Y, conſtitue ang. *HYZ* $=$ *ABG* dato; erit recta *YZ* locus centri quæſiti C. (Sciz. in $\Delta\Delta$:*lis* YDC, BIG, æquiangulis, eſt YD : DC : : BI : IG vel AH, ut oportuit). Ergo (*probl*: *X*. *Cor*. I.) facile determinabitur in recta poſitione data *YZ* centrum circuli, cujus circumferentia tranſeat per datum punctum *B* & tangat rectam aliam AH poſitione datam; idemque problemati ſatisfaciet.

Schol. I.) Valet hæc constructio, ubi circuli BDE, GEg, sese extra contingere debent. Si autem quæratur circulus B*de*, qui datum intus contingat; loco anguli ABG adhibendus est *ABg*. Nimirum quia in hoc casu est CF $=$ CE $-$ EF, locum ipsius AB $-$ FH $-$ FG seu *BI* tenet AB $-$ FH $+$ FG h. e. *Bi*. 2.) Cum fieri possit ut FAq sit vel $<$ vel $=$ FGq $+$ ABq, notandum in priori casu Rgl. 2AH $\times$ R designare excessum ipsorum FGq $+$ ABq supra FAq, atque ad oppositam partem puncti A capiendam esse rectæ R æqualem *Ay*; in posteriori autem, ob R tunc evanescentem, pro puncto Y adhibendum ipsum A. 3.) Ex superioribus (*Cor. I. probl. X*, coll. *probl. IX*. ejusque *Schol.*) intelligitur, pro utroque casu n. I. memorato, duas plerumque dari hujus probl. solutiones; unicam tamen tunc saltem, ubi HG (vel Hg) $=$ AB, adeo ut sit ang. ABG (vel *ABg*) rectus ideoque YZ ipsi AH perpendicularis. Quomodo autem ope hujus problematis etiam *describendus sit Circulus, qui duos datos Circulos & rectam positione datam contingat*, apud *Newtonum* ipsum videre licet.

(α) Euclid. Elem. Lib. I. prop. 5. (β) I. 32. (γ) III. 21. convers. (δ) III. 33. (ϵ) I. 23. (ζ) I. 4. (η) III. 3. (ϑ) I. 13. (ι) I. 6. (κ) I. 34. (λ) III. 20. (μ) III. 22. (ν) III. 30. (ξ) IV. I. (o) III. 21. (π) I. 29. (ϱ) III. 2. (σ) III. 31. (τ) III. 18. (υ) III. 15. (ϕ) I. 16. (χ) I. 26. (ψ) VI. 7. (ω) IV. 4. ($\aleph$) I. 41. (ς) VI. 16. ($\alpha\alpha$) VI. I. ($\beta\beta$) VI. 4. ($\gamma\gamma$) VII. 20. cfr. 16. ($\delta\delta$) VI. 8. cor. ($\epsilon\epsilon$) VI. 30. ($\zeta\zeta$) V. 16. ($\eta\eta$) VI. 6. ($\vartheta\vartheta$) I. 30. ($\theta\theta$) VI. 3. ($\iota\iota$) V. 19. ($\kappa\kappa$) V. 19. cor. ($\lambda\lambda$) V. 18. ($\mu\mu$) VI. 17. ($\nu\nu$) III. I. cor. ($\xi\xi$) III. 36. (oo) VI. 13. ($\pi\pi$) IV. 5. ($\varpi\varpi$) III. 37. ($\varrho\varrho$) III. 19. ($\sigma\sigma$) III. 16. cor. ($\tau\tau$) II. 6. ($\tau\tau$) I. 47.

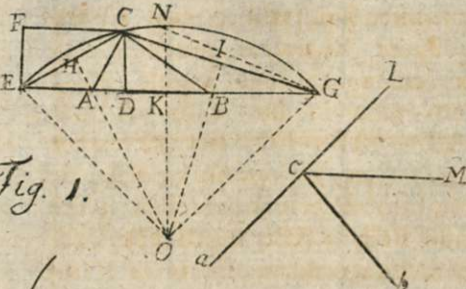

Fig. 1.

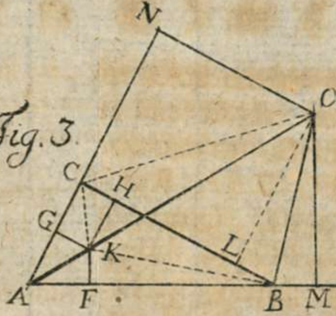

Fig. 3.

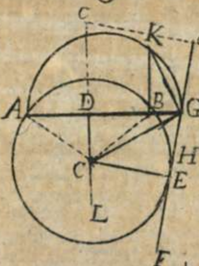

Fig. 8.

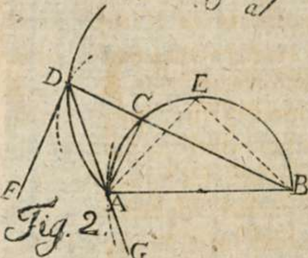

Fig. 2.

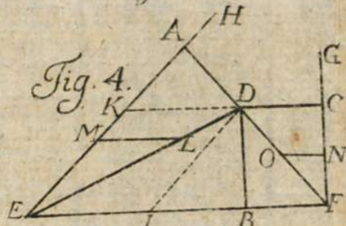

Fig. 4.

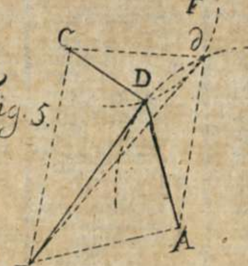

Fig. 5.

Fig. 6.

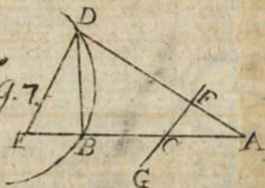

Fig. 7.

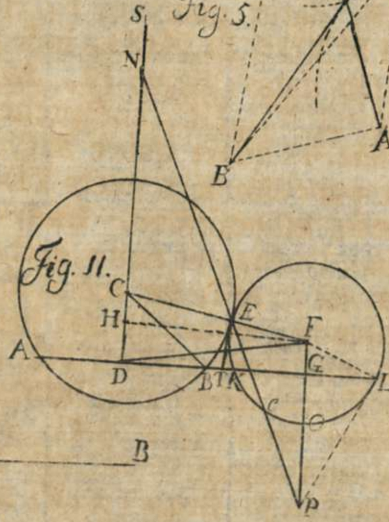

Fig. 11.

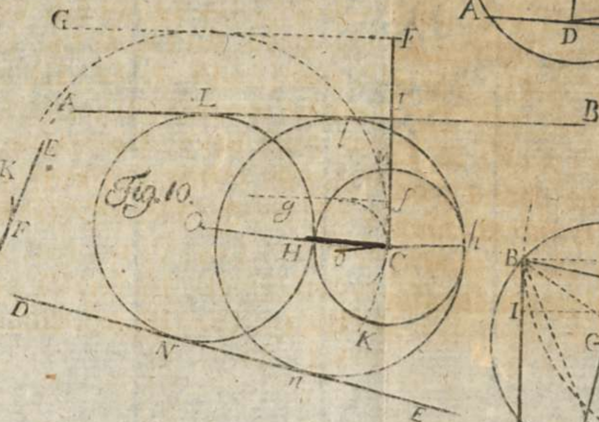

Fig. 10.

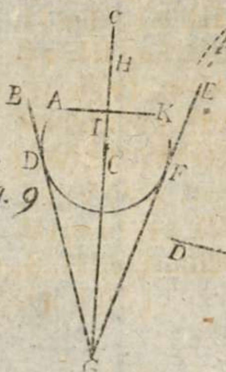

Fig. 9

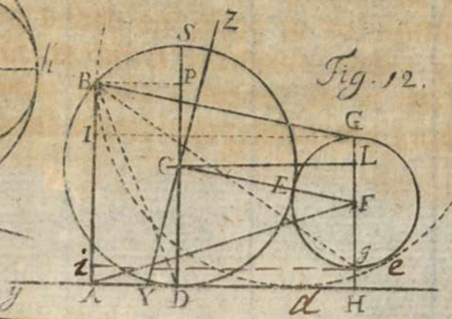

Fig. 12.

(ττ) I. 47. (υυ) III. 12. (φφ) II. 13. (χχ) II. 4. (ψψ) I. axiom. 7. (ωω) II. 1. (ϑϑ) V. 4. coroll. (ςς) VI. 2. (*) V. 12. (**) VI. 10. (***) II. 7.

AUCTORI
Dissertationis hujus Præstantissimo, Amico & Consangvineo Carissimo.

Cura laborque parant studiosæ serta juventæ,
 Sedulitate venit gloria, fama, decus.
Non opulentus erit curvus, nisi sudet, arator:
 Nec nitidæ faciunt horrea plena manus.
Hoc opus hic labor est excelsum scandere Pindum:
 Non patet ignavis porta decora viris.
Hoc Tibi quam fuerit cordi, NYCOPENSIS Amande,
 Testatur Specimen, quod Tua Musa dedit.
Singula, quæ nobis resoluta problemata sistit,
 Ingeniumque probant judiciumque bonum.
Sic jam cuncta patent, studio reclusa severo,
 Ut referant mentem, *Newtone* Magne, Tuam.
Hinc Tibi crescit honos; hinc præmia larga dabuntur;
 Frondes jam virides laurus amœna gerit.
Perge bonis avibus pulchris insistere cœptis!
 Perge bonæ mentis signa probata dare!
Sic ter gratus eris Patriæ, ter gratus amicis;
 Ter gratus cunctis, qui Tua scripta legent.
Quot jam silva gerit gemmas, quot gramina campus,
 Tot Tibi cum lauru mitia fata precor!

Sic gratulabundus apposuit

LAUR. JOH. HEDREN.