D. F. G.

EXERCITATIONES MISCELLANEÆ

MATHEMATICO-PHYSICÆ,

QUARUM

FASCICULUM PRIMUM,

ANNUENTE AMPLISS. CONSESSU PHILOS. IN REGIA ACADEMIA ABOËNSI,

Publicæ censuræ committunt

AUCTOR

MARTINUS JOHANNES WALLENIUS,

MATHEM. DOC. NEC NON FAC. PHIL. ADJ. EXTRAORD.

ET

RESPONDENS

ABRAHAMUS LIND,

TAVASTENSIS.

Die VI. Aprilis Anni MDCCLVII.

L. H. Q. S.

ABOÆ, Impressit Direct. & Typogr. Reg. Magn. Duc. Finland. JACOB MERCKELL.

S:Æ. R:Æ. M:TIS.
MAGNÆ. FIDEI. VIRO.
PERILLUSTRI. ATQUE. *GENEROSISSIMO.*

DOMINO. SAMUELI. KLINGENSTIERNA.

CANCELLARIÆ. REGIÆ. CONSILIARIO.
PRINCIPIS. SUCCESSORIS. STUDIORUM. MODERATORI.
ACAD. REG. SCIENT. STOCKH. &. SOCIET. LITER. UPSAL.
NEC. NON. SOCIET. SCIENT. LONDIN. MEMBRO.
ET. PARIS. CORRESP.

MATHEMATICORUM. PRINCIPI.
MÆCENATI. MAGNO.

Qui.
Gravissimis. In. Republica. Muneribus.
Admotus.
Et.
De. Scientiis. Mathematicis.
Immortaliter. Meritus.
Harum. Cultores.

Incom-

Incomparabili. Favore.
Foves.
Incomtas. Has. Pagellas.
Ab. Illuſtri. TUO. Nomine.
Illuſtrandas.
In.
Monimentum. Summæ. Venerationis.
Conſecro.
Felicem. Me. Prædicaturus.
Si. Easdem.
Benigno. Adſpectu. Ac. Patrocinio.
Fueris. Dignatus.
Utque. Quam. Diutiſſime.
Orbis. Civilis. Ac. Literatus.
Tanto. Fruatur. Lumine.
Ex. Animo. Voveo.

PERILLUSTRIS. AC. GENEROSISSIMI.
NOMINIS. TUI.

Cultor. Humillimus.
M. J. WALLENIUS.

L. B.

Quæ his pagellis Tibi sistuntur, ejusmodi fore ne existimes, quæ amplissimas Matheseos opes auctiores reddere queant. Nostras tamen dicere licebit qualescunque has meditationes. Satius nempe ducimus sua edere, quam aliunde petita, sublimiora quidem, sed quæ aliorum industria jam fere exhausit penitus, mutato paululum habitu in lucem emittere. Horum enim studio qui incumbunt lectores, ex ipsis fontibus eadem potius haurient, cæteris ista incassum scribuntur. Quæres igitur utrum aliqua heic nova? puto reperiri nonnulla, eadem licet haud magni momenti, ab aliis non exposita; quod tamen, scriptorum Mathematicorum immensam multitudinem cogitans, certo adfirmare non ausim. Quidquid sit, vel in inveniendo saltem vel demonstrando, proprio nos usos fuisse judicio candide testamur. Quod gloriolæ alicujus captandæ gratia dictum minime putes, quippe quæ ex re tantilla redundare nulla potest; sed eo fine, ne si quæ hisce nostris plane similia alibi deprehenderis, vitio nobis vertas, nos in easdem, quæ Virorum Celebrium antehac animos subiere, cogitationes incidisse. Quidni id potius materiam nobismet gratulandi nobis præberet? Nostris partibus satisfactum judicabimus, si quid tyronibus, quibus Mathemata arrident, opella hæc delectationis adferre potuerit occasionemque præbere sua exercendi ingenia atque in hoc studiorum genere vel tantillum proficiendi. Ut vero his conatibus faveas, omni studio a Te C. L. contendimus.

THEOREMA.

IN *data Serie quantitatum ea lege progredientium, ut terminus quilibet sit æqualis summæ (vel differentiæ, si series versus oppositam partem excurrit,) binorum proxime præcedentium; dico differentiam inter quadratum cujuslibet termini intermedii & factum ex contiguis esse constantem;* sed ita, ut quadrata illa factis sibi respondentibus alternatim sint majora & minora,** æquali excessu & defectu.* Ex genesi hujusmodi seriei patet, tres illius terminos quoscunq; immediate semet insequentes exhiberi posse per b, $a+b$, $a+2b$. Sit jam inter $\overline{a+b}^2$ & $b.\overline{a+2b}$ diffe-

* Hanc in seqq. plerumque voco simpliciter *differentiam*.

** In progressione vero Arithmetica quadratum cujuslibet termini ubique superat factum contiguorum differentia constante; id quod etiam ex *Eucl. elem. Lib. II. Prop.* 6. fluit.

rentia d, i. e. $a^2+2ab+b^2 = ab+2b^2 \pm d$; ablatis utrinque $ab+b^2 \pm d$, erit $b^2 = (a^2+ab \mp d =) a.\overline{a+b} \mp d$. Est vero, per naturam seriei, a terminus proxime præcedens ipsum b. Ergo excessus (vel defectus) d, quo quadratum termini cujuscunque $a+b$ superat factum $b.\overline{a+2b}$ sibi respondens (vel eodem minus est), æquatur defectui (excessui) quadrati termini proxime præcedentis b a facto (supra factum) $a.\overline{a+b}$ terminorum sibi contiguorum, *q. e. d.*

2. Cor. 1. Per genesin hujusmodi seriei ex datis duobus terminis proximis determinantur reliqui omnes termini seriei in infinitum excurrentis. Et continuata serie retrorsum, fient tandem termini versus illam partem alternatim negativi & positivi.

3. Cor. 2. Si evanescat *differentia*, patet seriem istam fore progressionem geometricam, in qua tres quicunque termini semet immediate excipientes sunt in media & extrema ratione (*Eucl. elem. Lib. VI. pr. 30. XIII. 5.*); quæ vero cum numeris rationalibus exprimi nequeat (*XIII. 6. X. 7.*); sequitur in tali serie omni, qualem §. 1. diximus, & cujus termini sunt numeri rationales, *differentiam* aliquam dari inter termini cujuscunque quadratum & productum contiguorum. Unde patet realitas & fundamentum ejus, quod tacite ibi supposuimus.

4. Schol. Sistemus heic seriem quandam numerorum, quæ dictam in §. 1. legem sequitur, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181. &c. & de

qua

qua notamus 1:o *differentiam* illam constantem esse $=1$, qua cum *per dem.* §. 1. quadrata singulorum terminorum alternis vicibus superent facta respondentia & ab iisdem deficiant, sequitur 2:o rationem inter terminos duos proximos esse alternatim paulo majorem & minorem illa* quæ obtinet inter lineæ media & extrema ratione sectæ partem minorem ac majorem, vel inter hanc & totam (*cfr.* §. 3.); quod ipsum etiam ex eo evidens est, quia terminus quilibet (ut 34) componitur ex duobus proxime præcedentibus tanquam partibus; quarum ergo si una (13) habeat ad alteram (21) rationem *vera* majorem, non poterit non reliqua (21) habere ad totum suum (34) rationem *vera* minorem & contra. 3:o Continuata serie, rationem inter terminos duos proximos continuo ad *veram* propius accedere; cum, crescentibus licet terminis, *differentia* non crescat sed constanter maneat $=1$. Idem etiam inde aliquatenus colligitur, quod per genesin hujusmodi seriei, oriatur ratio quælibet (ut $34:55$) addendo binarum rationum ($13:21$ & $21:34$) proxime præcedentium terminos antecedentes ($13+21=34$) ac consequentes ($21+34=55$), adeoque erit media quædam inter has duas, quarum una quidem est *per n.* 2. major *vera*, altera minor; unde fit ut nova illa ratio ($34:55$) ex ejusmodi additione orta, propius ad *veram* accedat. 4:o Tres quoslibet terminos proximos esse numeros inter se primos, quod duos quoscunque terminos initiales (§. 2.) & modum, quo reliqui omnes ex iis oriuntur, consideranti patet (*Eucl. VII.* 30.) 5:o Non posse rationem *vera* propiorem, quam quæ hujus seriei terminis exprimitur, numeris rationalibus ullis exhiberi; non integris, quia aderit semper aliqua *differentia* §. 3, quæ vero, si numeri fuerint integri, non potest esse < 1, (*cfr. n.* 1.); nec rationalibus quibus-

 cunque

* Liceat hanc in posterum brevitatis gratia dicere *rationem veram*.

cunque aliis, quippe quos intercedens ratio semper *Eucl.* X. 12. 5. integris exprimi potest. 6:o Denique cum sint tres quilibet termini proximi inter se primi *n.* 4, simplicissimis numeris rationalibus hæc series exhibet rationem *veræ* quantumlibet propinquam *n.* 3. Sic ratio 13: 21 vix parte $\frac{1}{609}$ major, ratio autem 2584: 4181 ne quidem parte $\frac{1}{23925926}$ minor *vera* deprehenditur.

THEOREMA. *Fig.* 1.

5. *Si curva Abf, quæ evolutione gignitur, inter nascendum aliam ABF sui evolutione describit; dico elementa simul nascentia harum curvarum fore in ratione radiorum osculi Cb, bB, atque elementa arearum, quas verrunt isti radii, in ratione eorundem duplicata.* Sit evolutæ elementum *be*, quod dum evolvitur describit punctum B elementum BE curvæ ABF; suntque sectores circulares *b*C*e*, B*e*E elementa arearum descriptarum AC*b*, A*b*B. Ob infinitam suam parvitatem *be* habendam pro linea recta & quidem particula tangentis B*b* productæ. Et quia radii evolutæ B*b* E*e* tangunt curvam A*bf* in *b*, *e*, efficient cum C*b*, C*e* radiis osculi in eadem curva, angulos rectos. Igitur angulus $EeB + BeC = (EeC = BbC) = ($*Eucl.* I. 32.$)$ $BeC + bCe$; ergo angulus $EeB = bCe$ ac proinde Sector $bCe \backsim BeE$; $be : BE :: Cb : eE$ & (*cfr. Eucl.* XII. 2.) $bCe : BeE :: Cb^2 : eB^2$, *q. e. d.*

6. Cor. 1. Sit C*b* vel $Ce = z$, arcus evolutus $Ae = v$, qui etiam est $= Be$ vel E*e*, si evolutione ab A incipiente, B cadit in A, (secus autem in

ſeqq. pro v ſubſtituatur $a+v$, deſignante a rectam quandam conſtantem); erit BE$=vdv:z$, & (ob $Cbe = \frac{1}{2}zdv$,) $BeE = v^2dv:2z$, quæ formulæ in dato quovis caſu ſpeciali decenter integratæ dabunt arcum AE & aream AeE.

7. Cor. 2. Si curva Abfg, quæ evolvitur, fuerit circulus, cujus diametrum vocabimus δ, peripheriam π; ob radium oſculi z in circulo conſtantem, æqualem nempe ipſi circuli radio $\frac{1}{2}\delta$, erit §. 6. arcus AB *Curvæ Spiralis* ex evolutione circuli deſcriptæ $=\int 2vdv:\delta = v^2:\delta$ h. e. tertia proportionalis ad diametrum & arcum circuli evolutum vel radium evolutæ, atque ſpatium evolutione deſcriptum AbB$=\int v^2dv:\delta = v^3:3\delta = \frac{1}{3}$AB. B$b$.

8. Cor. 3. Spiralis hujus arcus diverſi ut AB, AF ab A computati ſunt ut quadrata, & ſpatia AbB, AbfF ut cubi radiorum evolutæ bB, fF §. 7. Et ſumtis in peripheria circuli arcubus æqualibus Ab, bf, fg, gA &c. erunt arcus AB, BF, FG, Ga &c. ut numeri impares 1. 3. 5. 7. &c.

9. Cor. 4. Ex §. 7. porro deduci poteſt, ſi fiat Aa: fF:: fF: x, peripheriam circuli diametro x ($=v^2:\pi$) deſcriptam fore$=$arcui AF; & ſi quæratur inter inventam x atque $\frac{1}{3}$ fF media proportionalis y ($=\sqrt{v^3:3\pi}$), aream circuli radio y deſcripti æquari ſpatio AbfF. Hinc curva integra AFGa eſt $=$peripheriæ circuli radio $\frac{1}{2}$ Aa deſcripti, & ſpatium AFaAgfbA $=$ circulo, cujus ſemidiameter eſt media proportionalis inter Aa & $\frac{1}{3}$ Aa.

10. Schol. Cum detur in numeris prope veris ratio

 dia-

diametri circuli ad peripheriam, rectificatio & quadratura curvæ nostræ etiam in numeris proxime veris habebitur. Sic si fuerint A*b*, *bf*, *fg*, *g*A quadrantes circuli, erunt arcus AB, AF, AFG, AF*a* quam proxime 1.234, 4.935, 11.103, 19.739, posito radio circuli $= 1$, & spatia A*b*B, A*bf*F, A*bg*G, AF*a*A*gfb*A, 0.646; 5.167; 17.441; 41.341 respective, ubi quadratum radii $= 1$.

PROBLEMA. *Fig.* 2.

11. *Metiri solidum revolutione Lunulæ Hippocratis circa axem AC genitum.* Quadrans circuli ACB circa AC gyratus hemisphærium describit, a quo si auferatur segmentum sphæricum, rotatione dimidii segmenti circularis DCB circa eandem rectam formatum, relinquitur solidum quæsitum. Sit jam $AC = CB = CF = 1$, ratio radii ad peripheriam $r : p$, erit $DF = \sqrt{2}$, $DC = \sqrt{2} - 1$ & *per princ. Stereom.* soliditas hemisphærii $= p : 3r$. Sit ipsius DC portio quæcunque $DI = x$, erit *per nat. circuli*, $IO^2 = 2x\sqrt{2} - xx$, ideoque area circuli radio IO descripti $= (2x\sqrt{2} - xx)\, p : 2r$, consequenter elementum segmenti sphærici $= (2x\sqrt{2} - xx)\, pdx : 2r$, cujus integrale $(3x^2\sqrt{2} - x^3)\, p : 6r$ exprimit segmentum sphæricum indeterminatum. Quando itaque x evadit $= DC = \sqrt{2} - 1$, ideoque tum $xx = 3 - 2\sqrt{2}$ & $x^3 = 5\sqrt{2} - 7$, facta substitutione reperitur segmentum sphæricum $= (4\sqrt{2} - 5)\, p : 6r$, quo subducto a dimidia illa sphæra $= p : 3r$, relinquitur solidum quæsitum $= (7 - 4\sqrt{2})\, p : 6r$.

12. Cor. 1. Quia Conus, revolutione Δ^{i} FCB cir-

circa CF formatus est $= p : 6r$, erit is ad solidum nostrum ut $1 : 7 - 4\sqrt{2}$, (i. e. quam proxime ut $1000 : 1343 +$). Sunt ergo hæc solida incommensurabilia, quamvis ipsæ figuræ generatrices sint, uti constat, in ratione æqualitatis. Exprimitur vero horum solidorum ratio lineis rectis CB & 7CB — 4BF; atque Conus habens radium baseos CB & altitudinem $= 7CB - 4FB$ æquatur solido revolutione Lunulæ descripto *Eucl. XII. 14.*

13. Cor. 2. Si inter CB & 7CB — 4FB quæratur prima duarum mediarum continue proportionalium, quæ dicatur z, erunt cubi, quorum latera sunt CB & z, inter se uti conus dictus ad solidum a Lunula formatum *Eucl. XI. 33. Cor.*

14. Cor. 3. Cum solidum rotatione Sectoris FDB circa FD descriptum sit = aggregato segmenti sphærici atque coni $= (\sqrt{2} - 1) 2p : 3r$, erit solidum nostrum ad illud ipsum ut $7 - 4\sqrt{2} : 4\sqrt{2} - 4$ s. propemodum ut $1343 : 1657 -$.

15. Cor. 4. Quia solidum rotatione figuræ planæ circa lineam rectam genitum æquatur facto ex figura genetrice in viam centri gravitatis ejusdem (vid. e. g. *Jac. Hermanni Phoronom.* §. 47. *Wolfii Elem. Mech.* §. 193. 206.) sequitur diviso solido jam invento $(7 - 4\sqrt{2})\, p : 6r$ per figuram generantem ADB $= \frac{1}{2}$, haberi viam centri gravitatis s. peripheriam circuli ab illo descriptam $(7 - 4\sqrt{2})\, p : 3r$, unde radius hujus circuli s. distantia centri gravitatis ab axe, geometrice vix aliter determinanda, invenitur

tur $(7-4\sqrt{2}):3$. Facta ergo $CE=(7CB-4FB):3$, agatur ipsi CA parallela EH, eritque in HG centrum gravitatis dimidiæ Lunulæ ADB.

PROBLEMA. *Fig. 3.*

16. *Ex dato quocunque in Superficie Terræ puncto ductæ concipiantur recta ad centrum Terræ atque linea verticalis axi terrestri occurrens; quærantur semidiameter illa atque linea verticalis, ut & distantia puncti concursus a centro ac denique angulus a semidiametro & linea verticali comprehensus, cognitis axe terrestri atque diametro æquatoris.** Conducit harum rerum investigatio ad parallaxes Lunæ in diversis terræ locis exactius determinandas atque ad hypotheses de figura Telluris, per observationes circa parallaxin Lunæ institutas, examinandas; vid. *Lettres de Mr. De l' Isle au P. Berthier sur la Parallaxe de la Lune*, ubi etiam *p. 35. seqq. 54. seqq.* occurrunt tabulæ, quibus linearum istarum atque angulorum quantitates ad 10:mum quemvis latitudinis gradum exhibentur. Scire itaque cupienti mihi, quo pacto ejusmodi calculi perfici queant, sequentes se obtulere solutiones.

Solutio 1:ma 1.) *Fig.* 3. Sit PLA quadrans meridiani

* Ex data solum axeos ad diametrum æquatoris ratione, quippe speciem Ellipsoidis determinante, inveniuntur quidem anguli illi ut & linearum istarum ratio; licet non quantitas harum absoluta; id quod etiam ex inspectione formularum a nobis inventarum patet.

ridiani terrestris & quidem elliptici, cujus semiaxis minor, qui etiam est semiaxis ipsius terræ, sit $CP = b$; major seu semidiameter æquatoris $CA = a$; LI normalis ad ellipsin s. verticalis in loco L; LK $= y$ perpendicularis ad CA; $CK = x$; oportet invenire CL, LI, CI atque angulum CLI, cujus sinus dicatur s. In Ellipsi est $CA^2 : CP^2 :: CA^2 - CK^2 : KL^2$, adeo ut $y^2 = b^2 - b^2 x^2 : a^2$, quæ æquatio naturam ellipseos exprimit; unde $y = \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$, & $CL = (\sqrt{x^2 + y^2} =) \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} . x^2}$. Est porro $KO = \frac{b^2 x}{a^2}$ (vid. *infra* §. 35.) unde $CO = \left(x - \frac{b^2 x}{a^2} = \right) \frac{a^2 - b^2}{a^2} . x$, & $OL = \sqrt{OK^2 + KL^2} = \frac{b\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{aa}$.

Et quia $\Delta COI \backsim \Delta KOL$, erit $KO \left(\frac{b^2 x}{a^2}\right) : KL(y) :: CO \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} . x\right) : CI = \frac{a^2 - b^2}{b^2} . y = \frac{a^2 - b^2}{ab} \sqrt{a^2 - x^2}$; atque $KO \left(\frac{b^2 x}{a^2}\right) : OL \left(\frac{b\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2}\right) :: (CO : OI ::) CK (x) : LI = \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{b}$.

2. Hi autem valores inventi præsenti instituto non satisfaciunt, cum situm puncti L per abscissam CK, aut aliter quam per cognitam loci latitudinem, datum supponere haud liceat. Hæc vero æqualis est mensuræ anguli LOK, unde erit OL

 ad

ad KL ut sinus totus ad sinum latitudinis. Habemus ergo, si sinus totus ponatur $= 1$ & sinus latitudinis $= s$, $1 : s :: \frac{b\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{aa} : \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$ unde $\frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = \frac{sb\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{aa}$, ex qua porro æquatione eruitur $x^2 = \frac{a^4 - a^4 s^2}{a^2 - a^2 s^2 + b^2 s^2}$. Hunc jam valorem τῷ x^2 inserendo inventis supra *n. 1.* valoribus ipsarum CL, CI & LI, obtinemus CL $= \sqrt{\frac{a^4 - (a^4 - b^4)s^2}{a^2 - (a^2 - b^2)s^2}}$; CI $= \frac{(a^2 - b^2)s}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)s^2}}$ & LI $= \frac{aa}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)s^2}}$; quæ æquationes, ut calculo per logarithmos instituendo aptæ evadant, hac forma sistantur: CL $= a . \frac{\sqrt{1 - (1 - \frac{b^4}{a^4})s^2}}{\sqrt{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2})s^2}}$; LI $= \frac{a}{\sqrt{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2})s^2}}$;

CI $= \frac{\overline{a^2 - b^2} . s}{a\sqrt{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2})s^2}}$; vel posito $\frac{b}{a} = n$, CL $= \frac{a\sqrt{1 - (1 - n^4)s^2}}{\sqrt{1 - (1 - n^2)s^2}}$, LI $= \frac{a}{\sqrt{1 - (1 - n^2)s^2}}$, CI $= \frac{\overline{a^2 - b^2} . s.}{a\sqrt{1 - (1 - n^2)s^2}}$

Denique cum sit anguli I mensura complementum latitudinis adeoque sinus ang. I ipse cosinus latitudinis, qui dicatur c, invenietur ang. CLI vel quæsitis

sitis prius CL, CI lateribus Δ:li CLI, & dein *per princ. Trigon. planæ* inferendo CL: CI:: sin. I ($=c$): s; vel etiamsi incognitæ sint CL, CI; datur enim per formulas modo allatas earum ratio. Est nempe CL : CI :: $\sqrt{1-(1-n^4)s^2} : \overline{1-n^2}.s$ ideoque $s = \frac{sc.\overline{1-n^2}}{\sqrt{1-(1-n^4)s^2}}$.

17. SCHOL. 1. Ut commoda reddatur harum formularum praxis, notandum 1:o Quia assumsimus sinum totum $=1$, cujus log. est 0, in canone autem sinuum log. sinus totius ponitur 10; characteristicam sinuum artificialium denario mulctandam esse; cumque illa (præterquam pro sinu toto,) sit <1; defectum indicabimus signo $-$ superimposito, adeo ut characteristica sit negativa, fractiones vero decimales positive accipiantur. Vicissim si quis log. calculo inventus, in tabulis sinuum quærendus est, characteristica ipsius denario erit augenda. 2:o $\sqrt{1-(1-n^4)s^2}$ (qui dicatur β) esse cosinum arcus habentis sinum $s\sqrt{1-n^4}$ posito radio 1. Similiter (γ) $\sqrt{1-(1-n^2)s^2}$ esse cosinum respondentem sinui $s\sqrt{1-n^2}$. Hinc si $s\sqrt{1-n^4}$ & $s\sqrt{1-nn}$ quæruntur inter sinus, fore β atque γ cosinus respondentes. Æquationes autem inventæ hanc jam induunt formam: CL $=\frac{a\beta}{\gamma}$, CI $=\frac{\overline{aa-bb}.s}{a\gamma}$, LI $=\frac{a}{\gamma}$, $s=\frac{sc.\overline{1-nn}}{\beta}$. Ex dictis simul patet, quo pacto ex tabulis sinuum artificialium commodissime haberi queant *log.* $\sqrt{1-n^4}$ & *log.* $\sqrt{1-n^2}$, si *log.* n^2 & *log.* n in iisdem satis exacte occurrunt; sin minus, modo, quem mox videbimus, eosdem investigare præstat.

18. SCHOL. 2. Ex hypothesi *Bougueri*, quam sequitur loc. cit.

 De

De l' Isle, eſt ratio diametri æquatoris ad axem terræ = 179 : 178 quam proxime, nimirum

$a = 3281013$ hexap. gall.
$b = 3262688.5$
$a + b = 6543701.5$
$a - b = 18324.5$
$\left.\begin{array}{l}\text{Log. } \overline{a+b} = 6.8158235 \\ \text{Log. } \overline{a-b} = 4.2630322\end{array}\right\}$ add.
$\text{Log. } \overline{aa - bb} = 11.0788557$
$\text{ſubtr. } 2\text{L.}a = \text{L.}a^2 = 13.0320160$
$\text{L.} \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \text{L.} \overline{1 - n^2} = \bar{2}.0468397.$
$\text{L.} \sqrt{1 - n^2} = \bar{1}.0234198.$

$\text{Log. } b = 6.5135756$
$\text{ſubtr. L. } a = 6.5160080$
$\text{L.} b:a = \text{L.} n = \bar{1}.9975676$
$4\text{L.} n = \text{L.} n^4 = \bar{1}.9902704$
$n^4 = 0.9778457$
$\overline{1 - n^4} = 0.0221543$
$\text{L.} \overline{1 - n^4} = \bar{2}.3454580$
$\text{L.} \sqrt{1 - n^4} = \bar{1}.1727290$
$\text{L.} \overline{a^2 - b^2} = 11.0788557$
$\text{ſubtr. L.} a = 6.5160080$
$\text{L.} \frac{a^2 - b^2}{a} = 4.5628477$

19. Cor. 1. Ex inventis itaque §. 16 formulis hæ eliciuntur §§. 17, 18. Regulæ: Logarithmis conſtantibus* $\bar{1}.1727290$ atque $\bar{1}.0234198$ addatur log. ſinus latitudinis datæ; habeantur aggregata pro logg. ſinuum & ſumantur his reſpondentium coſinuum logarithmi, quorum ſi poſterior (*log.* γ) a priori (*log.* β) ſubtrahatur, & reſiduo addatur conſtans 6.5160080, habetur log. ipſius CL hexapedis gallicis expreſſæ. Si autem idem conſtans 6.5160080 minuatur invento L. γ, reſiduum erit

*Conſtantes, quorum ſæpius mentio fit, logarithmi tales ſunt non niſi poſita illa quam aſſumſimus vel ratione *b:a* vel eorundem menſura. Quando autem pro hac vel ratione vel menſura, ſubſtituitur alia, etiam locum iſtorum logg. alii conſtantes, eodem modo inveniendi, tenebunt.

rit log. LI. Porro a ſumma conſtantis 4.5628477 & logarithmi ſinus latit. auferatur L. γ, reſiduum eſt log. CI. Denique a ſumma conſtantis $\bar{2}$.0468397 & logarithmorum ſinus atque coſinus latit. ſubtrahatur L. β ut habeatur log. ſin. ang. CLI.

20. Schol. 3. Sit e. g. latitudo data 60°; eſt jam

Log. $s = \bar{1}.9375306$
add. conſt. $\bar{1}.1727290$
+10.
9.1102596 cui inter logg. ſinuum quærendo reſpondet
log coſ. $= \bar{1}.9963617 =$ L. β
ſubtr. L. $\gamma = \bar{1}.9981783$
L. $\beta:\gamma = 1.9981834$
add. conſt. $= 6.5160080$
Log. CL $= 6.5141914$,
L. $\alpha:\gamma = 6.5178297$,

Log. $s = \bar{1}.9375306$
add. conſt. $= 1.0234198$
+10.
8.9609504
quæratur inter logg. ſinuum & ſumatur log. coſ. reſp. qui eſt L. $\gamma = \bar{1}.9981783$
CL = 3267318 hexap.
$\alpha:\gamma =$ LI = 3294806 hexap.

L. $s = \bar{1}.9375306$
add. conſt. 4.5628477
4.5003783
ſubtr. L. $\gamma = \bar{1}.9981783$
Log. CI $= 4.5022000$
CI = 31783 hexap.

add. $\begin{cases} \text{L. } s = \bar{1}.9375306 \\ \text{L. } c = \bar{1}.6989700 \\ \text{conſt. } \bar{2}.0468397 \end{cases}$
$\bar{3}.6833403$
ſubtr. L. $\beta = \bar{1}.9963617$
Log. $f = 3.6869786$
+10.
7.6869786
ang. CLI = 16′ 44″

Formulas vero paulo ſimpliciores dabit ſequens

21. *Solutio 2.* Iisdem præmiſſis quæ in *Solut.* 1. n. 1, dicta ſunt, ſit latitudinis datæ tangens t, ſe-

 cans

cans z & cosinus c; erit $1 : t :: OK\left(\frac{b^2x}{a^2}\right) : KL$ $\left(\frac{b\sqrt{aa-xx}}{a}\right)$, unde fiet $x^2 = \frac{a^4}{a^2+b^2t^2}$; quo valore $\tau\tilde{s}$ x^2 substituto in inventis supra *Solut.* I. *n* 1. valoribus ipsarum CL, LI, CI, debita reductione obtinemus has formulas (in quibus denuo $n = b:a$): $CL = \frac{a\sqrt{1+(n^2t)^2}}{\sqrt{1+(nt)^2}}$; $LI = \frac{a\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+(nt)^2}} =$ (quia $\sqrt{1+t^2}$ est secans latitudinis $= z$,) $\frac{az}{\sqrt{1+(nt)^2}}$; $CI = \frac{a^2-b^2.t}{a\sqrt{1+(nt)^2}}$ & denique pari modo ac antea *Solut.* I. *n.* 2. reperitur $f = \frac{(1-nn)ct}{\sqrt{1+n^4tt}}$.

22. Schol. 4. Notamus jam: posito sinu toto $= 1$, esse (δ) $\sqrt{1+(nt)^2}$ secantem arcus, cujus tangens est nt; & (ε) $\sqrt{1+(n^2t)^2}$ secantem respondentem tangenti n^2t. Quamvis autem canon logarithmorum pro secantibus vulgo non prostet, illo tamen deficiente facile habetur log. secantis, subtrahendo log. sinus a log. tangentis, quia sinus : radium :: tangens : secantem, & in nostra hyp. radius $= 1$. Hinc quærendo log. nt & log. n^2t inter logg. tangentium & ab iis subtrahendo logg. sinuum respondentium, habentur log. δ & log. ε. Ut vero commodior adhuc reddatur praxis, notare juvabit: secantes angulorum esse inverse ut cosinus eorundem; est nempe cosinus : radium :: radius : secantem, indeque in præsenti casu secans $= \frac{1.}{\text{cos.}}$ Ergo $z = \frac{1}{c}$ & si nt atque n^2t quærantur inter tangentes, & sumantur cosinus respon-

spondentes ζ, η, erit $\delta = \frac{1}{\zeta}$ & $\varepsilon = \frac{1}{\eta}$, unde formulæ §. 21.

inventæ in has jam abeunt: $CL = \left(\frac{a\varepsilon}{\delta} =\right) \frac{a\zeta}{\eta}$; $LI = \left(\frac{az}{\delta} =\right) \frac{a\zeta}{\varepsilon}$;

$CI = \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}.\, t}{a\delta} =\right) \frac{\sqrt{a^2 - b^2}.\, t\zeta}{a}$; $f = \left(\frac{\sqrt{1 - n^2}.\, ct}{\varepsilon} =\right) \sqrt{1 - n^2}.\, ct\eta$.

Quæ vero de characteristica sinuum artificialium supra monuimus, heic de tangentibus similiter observanda sunt.

23. Cor. 2. Jam quia supra inventus est log. $n = \bar{1}.9975676$, unde 2 L. n seu L.$n^2 = \bar{1}.9951352$, sequentes prodeunt Regulæ: Logg. constantes $\bar{1}.9975676$ & $\bar{1}.9951352$ augeantur logarithmo tang. latit. datæ; quærantur binæ hæ summæ inter logg. tangg. & sumantur cosinuum his respondentium logarithmi, quorum si posterior (L. η) a priori (L. ζ) aufertur & residuo additur constans 6.5160080, prodit *Log. CL.* Si vero a L. ζ subtrahitur cosinus latit. & hoc residuum augetur constante 6. 5160080, habetur *Log. LI.* Porro aggregatum ex L. ζ, logarithmo tangentis latit. atque constante 4. 5628477, est *Log. CI.* Denique summa ipsius L. η, logarithmorum cosinus & tangentis latit. atque constantis $\bar{2}$. 0468397, dabit log. sin. CLI. (*cfr.* §§ 22, 18.)

24. Schol. 5. Ut pateat utriusque methodi consen-

sus,

sus, eodem quo antea utamur exemplo, esto videlicet latitudo 60°.

Log. $t = 10.2385606$
add. constant. $\bar{1}.9975676$
10.2361282
cui inter logg. tangg. quæsito respondet
Log. cos. 9.7007918
$- 10.$
L. $\zeta = \bar{1}.7007918$
subtr. L. $\eta = \bar{1}.7026084$
$\bar{1}.9981834$
add. const. 6.5160080
Log. CL $= 6.5141914$

Log. $t = 10.2385606$
add. const. $\bar{1}.9951352$
10.2336958
cui pro log. tang. sumto respondet inter logg. coss.
L. η $\bar{1}.7026084$
l. $\zeta = \bar{1}.7007918$
subtr. L. $c = \bar{1}.6989700$
0.0018218
add. const. 6.5160080
Log. LI $= 6.5178298$

ut antea

add. $\begin{cases} \text{L. } \zeta = \bar{1}.7007918 \\ \text{L. } t = 0.2385606 \\ \text{const. } 4.5628477 \end{cases}$
Log. CI $= 4.5022001$

add. $\begin{cases} \text{L. } \eta = \bar{1}.7026084 \\ \text{L. } c = \bar{1}.9689700 \\ \text{L. } t = 0.2385606 \\ \text{const. } 2.0468397 \end{cases}$
$+ 10.$
Log. $l = 7.6869787$

ut supra §. 20.

25. Schol. 6. His methodis sequentem computavimus pro decimo quovis latitudinis gradu Tabulam *, cui aliam ex tabulis *De l' Isle loc. cit.* contractam subjunximus.

Lat.

* Cum tabulæ logarithmorum majores pro numeris vulgaribus, ut & canon sinuum ac tangentium artificialium

Lat.	CL	LI	CI	ang.CLI	
0°	3281013	3281013	0	0′	0″
10	3280468	3281564	6347	6	35
20	3278896	3283153	12508	12	20
30	3276473	3285585	18299	16	38
40	3273509	3288484	23546	18	57
50	3270322	3291790	28088	18	59
60	3267318	3294805	31783	16	44
70	3264847	3297270	34517	12	26
80	3263248	3298881	36187	6	38
90	3262688	3299440	36752	0	0

Ex calculo D:ni *De l' Isle*

Lat.	CL	LI	CI	ang.CLI	
0°	3281013	3281013	0	0′	0″
10	3280572	3281464	5165	5	20
20	3279263	3282876	10609	10	27
30	3277155	3285362	16484	14	58
40	3274377	3288942	22728	18	17
50	3271202	3293395	29036	19	37
60	3268017	3298183	34896	18	22
70	3265252	3302519	39696	14	18
80	3263396	3305559	42855	7	50
90	3262688	3306653	43964	0	0

26. Schol. 7. Magni, qui inter D:ni *De l' Isle* atque nostrum calculum deprehenditur, dissensus vix aliam suspi-

 cari

(*cfr.* §§. 19. 23.) major quam pro singulis minutis primis nobis ad manus non fuerit; ne vitio nobis vertat B. L. si forte per calculos nostros in hac & 18, 20, 24 atque infra 27, 29 §§, ultimæ notæ numericæ quantorum quæsitorum minus exacte sunt expressæ.

cari licet caussam, quam quod sine dubio ille, cum *Bouguero*, supponat meridianum quemlibet terrestrem non esse ellipticum (qualem nos posuimus,) sed alius generis curvam*; quamvis tamen *loc. cit. p.* 35. pro ellipsi eundem assumere videatur. Ab hypothesi autem meridiani elliptici quantum abhorreat ejus calculus, vel inde patet, quod ipsius tabula exhibeat ad latit. 90°, LI = 3306653 hexap. Est enim in hoc casu LI radius curvaturæ in extremitate axeos minoris ellipseos, ideoque $= aa:b$, *cfr. infra* §. 37; cum itaque §. 18. sit

$$\begin{aligned} \text{Log. } a^2 &= 13.0320160 \\ \text{L. } b &= 6.5135756 \\ \hline \text{L. } a^2:b &= 6.5184404 \end{aligned}$$

erit LI = 3299440 hexap. ac proinde minor, quam ad latit. 70°.. 90° ab ipso statuitur. Per nostram autem regulam §. 19. reperitur LI itidem 3299440 hexap. De cetero CI jam evadit = LI—CP seu $(a^2 - b^2):b = 36752$ hexap. qualis etiam per regulam nostram invenitur; longe itaque minor, quam ex calculo D:ni *De l' Isle*.

27. COR. 3. Quæratur in qua latitudine ang. CLI sit *maximus*? In hoc casu s, adeoque (per §. 16. *Sol.* 1. *n.* 2., & ob $1 - n^2$ constantem) *sc*: $\sqrt{1 - (1 - n^4)s^2}$ vel (posito $1 - n^4 = e$, & in locum $I\ddot{s}$ c substituto ejus

* Ex hypothesi *Bougueri* meridianus terrestris constituit curvam ejus generis, ut ab æquatore versus polos incrementa graduum meridiani, quibus videlicet superant gradum primum, sint proportionalia biquadratis sinuum latitudinum (*Lulofs Kenntnis der Erdkugel p. m.* 63.), quæ vero in ellipsi sunt fere ut quadrata eorundem sinuum (*Newt. Princ. Phil. Nat. Math. L.* 3. *prop.* 20. & *Maupertuis in Mem. de l' Acad.* 1735. *p.* 131. *seqq.*)

ejus valore $\sqrt{1-ss}$,) $\frac{s\sqrt{1-ss}}{\sqrt{1-es^2}}$ est *maximum* quid. Reperitur vero hujus fluxio $= \frac{1-2ss+es^4}{c.\overline{1-ess}^{\frac{3}{2}}}.ds$; quare in casu *maximi* $1+es^4=2ss$, unde deducitur $ss=$ $\left(\frac{1-\sqrt{1-e}}{e}=\right)\frac{1-n^2}{1-n^4}=\frac{1}{1+n^2}$ & $s=\sqrt{\frac{1-n^2}{1-n^4}}=$ $1:\sqrt{1+mn}=a:\sqrt{aa+bb}$. Quia ergo per §. 18. est

Log. $\sqrt{1-n^2}=\bar{1}.0234198$
Subtr. L. $\sqrt{1-n^4}=\bar{1}.1727290$

erit L. $1:\sqrt{1+n^2}=\bar{1}.8506908$ Log. sinus latitudinis quæsitæ. Similiter si ex formula altera $f=\frac{1-n^2.\ ct}{\sqrt{1+(n^2t)^2}}$ §. 21, tangentem latitudinis, in qua ang. CLI sit *maximus*, investigare lubet; sumatur ipsius $\left(\frac{ct}{\sqrt{1+(n^2t)^2}}\right.$ hoc modo transformatæ) $\frac{t}{\sqrt{1+tt}.\sqrt{1+n^4tt}}$ (quia §§.21,22. $c=1:\sqrt{1+tt}$) fluxio, quæ invenitur $=$ $dt.\frac{1-n^4t^4}{(1+tt.\ 1+n^4tt)^{\frac{3}{2}}}$; hinc in casu maximi, $n^4t^4=1$, unde $t=1:n=a:b$, quæ formula etiam ex priori facile deducitur. *Est itaque tangens latitudinis quæsitæ ad sinum totum, ut CA ad CP vel ejusdem sinus ad sin. tot. ut CA ad AP & latitudo quæsita = angulo CPA,* quem axis terræ & recta a polo ad æquatorem ducta comprehendunt; qui angulus, data ratione

 axis

axis ad diametrum æquatoris, facile determinatur vel eo quo jam ostendimus modo, vel faciliori simulque adcuratiori (quippe ex ratione $a:b$ immediate fluente,) per formulam alteram. Sit e. g. ut supra $Log.\ n = \overline{1}.9975676$ erit L. $\overline{1:n} = 0.0024324$, cui Log. tang. respondent $45^\circ\ 9'\ 37''$ pro latitudine quæsita.

28. Cor. 4. Data Ellipseos specie seu ratione $a:b$, inveniatur *maximus* ang. CLI. Hoc in casu §. 27, $t = \frac{1}{n}$, unde §. 22. $c = \left(\frac{1}{\sqrt{1+tt}} =\right) \frac{n}{\sqrt{1+nn}}$; quibus valoribus ipsorum c & t substitutis in formula $f = \frac{(1-nn)ct}{\sqrt{1+n^4tt}}$ §. 21, prodit $f = \frac{1-nn}{1+nn} = \frac{aa-bb}{aa+bb}$. Idem obtinetur si in formula $f = \frac{(1-nn)sc}{\sqrt{1-(1-n^4)ss}}$ §. 16. ponatur (§. 27) $\frac{1}{\sqrt{1+nn}}$ loco s, & pro c ipsius valor $\left(\sqrt{1-ss} =\right) \frac{n}{\sqrt{1+nn}}$. Habetur ergo hoc

Theorema. *Ut summa quadratorum ex axibus ad eorundem differentiam seu quadratum distantiæ focorum, ita sinus totus ad sinum anguli CLI maximi.*

29. Schol. 8. Cum sit $\frac{1-nn}{1+nn} = \frac{(1-nn)^2}{1-n^4}$, & in hyp. data §. 18, $2\ Log.\ \overline{1-nn} = \overline{4}.0936794$

subtr. L. $\overline{1-n^4} = \overline{2}.3454580$

erit $\overline{3}.7482214$ Log. sin. $19'\ 15''$ ang.

ang. max. CLI, qui etiam per §§. 19. 23. *coll.* §. 27. inveniri potest. §:pho autem 27 alterum hoc continetur generale

30. THEOREMA. *Punctum Ellipseos omne, ex quo ducta semidiameter atque normalis angulum intercipiunt omnium maximum, ita situm est, ut normalis in isto puncto cum utrolibet axe angulum formet æqualem illi, quem axis alter atque recta binorum axium extrema conjungens, comprehendunt;* videlicet angulum LOA = CPA & LIP = CAP. Sunt ergo in hoc casu ΔΔ LKO, ACP, IRL æquiangula ideoque CP (b): CA (a) :: OK ($\frac{b^2x}{a^2}$): KL ($\frac{b}{a}\sqrt{aa-xx}$, *cfr.* §. 16. *Sol. 1. n. 1.*) quamobrem CP. KL = CA. OK, unde deducitur $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$. Hinc dictum ellipseos punctum facile determinatur erigendo ex A ad CA normalem AG = AC, jungendo CG, quam secet circulus centro C radio CA descriptus in N; tum ex N demissum in CA perpendiculum NKl determinabit in quadrantibus ellipseos ALP, Alp puncta desiderata L, l.

31. COR. 1. Est vero tunc etiam $y = \sqrt{\frac{1}{2}bb}$, uti facile patet substituendo $\frac{1}{2}aa$ ipsi x^2 in æquatione ad ellipsin $y^2 = b^2 - b^2x^2 : a^2$, vel hoc modo: in ellipsi est CA : CP :: (NK cui jam *per constr.* §. 30, est =) CK : LK; Cum ergo CK$^2 = \frac{1}{2}$ CA^2 §. 30, est quoque LK^2 vel CR$^2 = \frac{1}{2}$ CP^2.

32. COR. 2. In hoc igitur casu $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2) : 2$ i. e. CL$^2 = \frac{1}{2}$(CA^2 + CP^2) = $\frac{1}{2}$ AP^2. Cumque in Ellipsi summa quadratorum ex binis quibuslibet semidiametris conjugatis sit = summæ

 quadra-

quadratorum semiaxium (*per princ. Sect. Conic.*), erit CL = suæ conjugatæ. *Extremitates ergo diametrorum conjugatarum inter se æqualium sunt illa ipsa*, de quibus §§. 27, 30, quæritur, *ellipseos puncta*, & per dictam §. 30, constructionem diametri conjugatæ, quæ inter se æquales sint, in ellipsi determinantur.

33. Cor. 3. Quia iisdem positis §§. 31. 32. CL : AP :: CK : CA :: LK : CP, erit ang. LCA = PAC = CAp, ideoque CL ipsi Ap & similiter Cl ipsi AP parallela. Alio itaque etiam modo inveniuntur in ellipsi diametri conjugatæ invicem æquales, & consequenter puncta angulo, quem antea §. 30. diximus, maximo respondentia, ducendo nempe per centrum C rectas ipsis AP, Ap parallelas.

34. Schol. Posterior hic modus diametros conjugatas æquales inveniendi etiam ex iis fluit, quæ in *Ill. Marchionis Hospitalii Traité Analytique des Sections Coniques* §. 68. *n.* 2. analytice inventa extant; veritas autem ejusdem simplicissime sic probatur: Ob parallelismum rectarum Cr pA & quia CP = Cp erit Pr = rA, ideoque AP ordinatim applicata diametro per Cr. Ergo Cl, quippe parallela ordinatæ AP, conjugata est semidiametro CL. Porro *Eucl. I.* 29, 4. ang. ACL = (CAp = CAP =) ACl, quamobrem, congruentibus quadrantibus CALP, CAlp, congruent quoque CL, Cl ac proinde æquales sunt. Vicissim patet idem obtineri bissectis AP, Ap in r, u & ducendo diametros per puncta r, u.

LEMMA. *Fig.* 3.

35. *Invenire valorem subnormalis OK in Ellipsi* *. Sint

---

* Notissimi hujus Problematis solutionem hanc specialem, non calculi differentialis aut alius ipsi affinis tangen-

Sint omnia ut in *probl. præc.* §. 16. & præterea F, f foci Ellipseos, quorum distantia a centro CF vel $Cf = \sqrt{a^2 - b^2}$ dicatur c, unde $KF = \pm c \mp x$, prout punctum K vel inter F & C vel F & A ceciderit. Per naturam ellipseos est $CA^2 (a^2) : CP^2 (a^2 - c^2) :: CA^2 - CK^2 (a^2 - x^2) : KL^2 = a^2 - x^2 - c^2 + c^2x^2 : a^2$; est autem $KF^2 = c^2 - 2cx + x^2$; hinc $FL = (\sqrt{KF^2 + KL^2} =) a - cx : a$ ideoque $fL = (2CA - FL =) a + cx : a$. Cum vero normalis LO bisecet angulum FLf, erit *Eucl. VI.* 3, $FL : fL :: FO : Of$, ac proinde $FL + fL (2a) : FO + Of$ seu $Ff (2c) :: FL \left(\frac{a - cx}{a}\right) : FO = c - \frac{c^2 x}{a^2}$, unde $CO = (CF - FO =) \frac{c^2 x}{a^2}$ & $OK = (CK - CO = x(a^2 - c^2) : a^2 =) \frac{b^2 x}{a^2} = \frac{px}{2a}$, si parameter ad axin majorem pertinens fuerit $= p$.

36. Cor. 1. Si concipiatur CK fieri = CA, fient OL & OA infinite vicinæ seu coincident, adeo ut utraque ipsarum sit radius curvaturæ ellipseos in vertice A. Est autem $OA = (CA - CO =) a - c^2 x : a^2$ §. 35, quare facta $x = a$, erit $OA = (a^2 - c^2) : a = b^2 : a = \frac{1}{2}p$. Vel hinc ergo patet, quod per alias etiam methodos eruitur, (*Hôpit. Anal. des inf. petits* §. 89. *Wolf. Elem. Analys. inf.* §. 326,) radium osculi in vertice axeos majoris ellipseos, æquari dimidiæ parametro ad hunc axem pertinenti.

Cor.

---

tium methodi, sed simplicioribus Geometriæ elementaris ac Sectionum Conicarum principiis innixam, subnectere h. l. liceat, inprimis in illustrationem antecedd. §§. 16, 26.

37. Cor. 2. Quia ut in §. 16. n. 1. reperitur $CI = y(a^2 - b^2):b^2$, indeque $IP = (CI + CP =)$ $b - y + a^2y:b^2$; facta $y = b$, fiet etiam IP, seu radius circuli osculatoris in extremitate axeos minoris, $= aa:b = \frac{1}{2}$ parametro ad hunc axem relatæ.

38. Cor. 3. Ob $y^2 = b^2 - b^2x^2:a^2$, & §. 35. $b^2x:a^2 = KO$, erit $KL^2 = CP^2 - CK.KO$, unde $CK^2 + KL^2 = CP^2 + CK^2 - CK.KO$, i. e. $LC^2 = CP^2 + CO.CK$. Similiter quia $x^2 = a^2 - a^2y^2:b^2$, & (ob $\Delta LRI \backsim OKL$ ideoque $OK \left(\frac{b^2x}{a^2}\right) : KL\,(y) :: LR\,(x) : IR$,) $IR = a^2y:b^2$, erit x^2 seu $LR^2 = CA^2 - IR.RC$, consequenter $(CR^2 + LR^2 =) CL^2 = CA^2 - CI.CR$. Ergo *in ellipsi differentia inter quadrata semidiametri cujuscunque & utriuslibet semiaxeos æquatur rectangulo ex semiordinatæ, ab extremitate illius diametri ad axem conjugatum ductæ, distantia a centro in partem axis conjugati, inter centrum & normalem in eodem ellipseos puncto interceptam.*

39. Cor. 4. Ob $CA^2 - CI.CR = (CL^2 =) CP^2 + CO.CK$ § 38, erit $CO.CK + CI.CR = CA^2 - CP^2 = CF^2$ seu *summa istorum rectangulorum constans, æqualis nempe differentiæ inter quadrata semiaxium seu quadrato distantiæ foci a centro.*

PROBLEMA *Fig. 4.*

40. *Invenire Curvam, in qua grave, vi gravitatis uniformi secundum directiones parallelas sollicitatum descendendo, ad horizontem motu æquabiliter retardato*

*accedat.** Quatenus motus hic relativus continuo retardari ſupponitur, is tandem omnis extinguetur in puncto videlicet curvæ infimo A, quod proinde recte pro vertice & rectam AH verticalem pro axe curvæ aſſumimus. Incipiat grave moveri in S, ex altitudine $AH = a$. Sint coordinatæ curvæ $AP = x$, $PR = y$, erit $HP = a - x$. Quia motus relativus ſecundum PA æquabiliter retardatur & in A extinguitur, erit *per princ. Mechan.* tempus deſcenſus per PA, ſeu per RA, in ratione ſubduplicata ſpatii emenſi PA, i. e. ut $\sqrt{x}$; cujus differentiale negative acceptum, nempe $-dx:2\sqrt{x}$ exprimit tempusculum, quo grave per *pP* infinite exiguam particulam axeos dicto illo motu relativo, h. e. per curvæ elementum *rR* motu abſoluto deſcendit. Hic ipſe motus per *r*R; quippe in inſtanti fere temporis factus, uniformis cenſeri poteſt; ejus vero celeritas *per princ. Mech.* illa eſt, quæ cadendo per altitudinem $= HP$ acquiritur, proportionalis nempe $\sqrt{HP} = \sqrt{a-x}$. Jam quia, motu exiſtente æquabili, ſpatium exponitur per factum ex celeritate in tempus; erit in noſtro caſu *r*R, id eſt *per princ. Calc. Differ.* $-\sqrt{dx^2+dy^2} = -\frac{dx\sqrt{a-x}}{2\sqrt{x}}$, unde deducitur $dy = \frac{dx\sqrt{a-5x}}{2\sqrt{x}} = \frac{adx - 5xdx}{2\sqrt{ax-5xx}} = \frac{adx - 10xdx}{4\sqrt{ax-5xx}}$

$+(d\xi)$

* Quin poſſibilis ſit ejusmodi motus, vel in anteceſſum dubitari nequit, inprimis cum in deſcenſu gravis ſuper Cycloide ſimile quid obtineat, ut infra §. 51. viſuri ſumus.

$+ (d\xi) \frac{adx}{4\sqrt{ax - 5xx}}$, & sumendo integralia $y = (\vartheta) \frac{1}{2}\sqrt{ax - 5xx}$ $+ (\xi) \int \frac{adx}{4\sqrt{ax - 5xx}}$; terminus nempe $d\xi$, algebraice integrari nescius, reducendus est ad rectificationem arcus circularis. Notamus itaque esse $\vartheta + \xi =$ $\left[(\lambda) \sqrt{\tfrac{1}{5}ax - xx} + (\varrho) \int \frac{adx}{10\sqrt{\tfrac{1}{5}ax - xx}}\right] \frac{\sqrt{5}}{2}$, & $\frac{adx}{10\sqrt{\tfrac{1}{5}ax - xx}}$ elementum arcus circuli, cujus radius $= \frac{1}{10}a$ & abscissa a vertice computata $= x$, adeoque ϱ ipsum illum arcum; λ autem ejusdem circuli semiordinatam abscissæ x respondentem. Unde patet $\lambda + \varrho$ esse ad axem adplicatam & abscissæ x respondentem semiordinatam Cycloidis ordinariæ, cujus circuli generatoris diameter $= \frac{1}{5}a$; ideoque semiordinatas curvæ quæsitæ esse ad semiordinatas cycloidis, iisdem abscissis respondentes, in ratione constanti $= \sqrt{5}:2$. Pendet itaque curvæ nostræ, quæ *Cycloidi* affinis est, constructio geometrica a constructione Cycloidis ordinariæ vel rectificatione circuli; qua concessa sequenti modo perfici potest: Facta AK $= \frac{1}{10}a$, centro K radio KA describatur circulus AoB; fiat ad AB normalis AI $= \frac{1}{2}$ AK, atque radio KI circulus GOF priori concentricus. Jam abscissæ cuilibet AP respondentis semiordinatæ PR longitudo determinabitur & curva nostra per puncta innumera sic inventa describetur, si juncta Ko producatur in O fiatque Op ipsi oP parallela & denique PR $= p$O + OG, BC vero $=$ FOG. Nam ob semisegmenta AoP, GOp similia, est Po + arc. oA:

pO

$pO + OG$ :: KA : KG vel KI :: (*per constr.*) $2 : \sqrt{5}$, *Q. e. f.* Vel si prius mechanice, convenienti nimirum volutatione semicirculi AoB supra rectam BC, descripta fuerit semicyclois ordinaria; ejus semiordinatas productas augendo in ratione data $2 : \sqrt{5}$, determinantur puncta curvæ nostræ. Quia porro docet analysis data curvam non porrigi ultra altitudinem verticalem AB $= \frac{1}{4}$AH; sequitur: ut grave ea, qua supposuimus, lege moveri possit, idem libere prius cadere debere per altitudinem quadruplam axeos curvæ, nempe per SC = HB = 4 BA, quam ad basin ejus BC pervenit. Obtinebit vero idem plane motus, a quocunque puncto curvæ ut R grave in eadem incedere incipiat, modo prius ex loco æque alto L demissum fuerit. Quam enim descensu per SCRR, eandem cadendo per LR acquirit celeritatem, nec aliam in R motus subire supponitur mutationem, quam quod juxta directionem curvæ inflectatur.

41. Cor. 1. Quia tempus motus relativi per PA h. e. tempus descensus per RA, est ut $\sqrt{PA}$ seu ut A*o*; si chordæ AB, A*o*, A*o*, sumantur in progressione arithmetica, curvæ arcus CR, RR, RA temporibus æqualibus percurrentur.

42. Cor. 2. Sit b tempus quo grave libere cadere potest per BA $= \frac{1}{5}a$; eodem tempore b posset, celeritate lapsu illo acquisita æquabiliter motum, emetiri spatium $= \frac{2}{5}a$ (*per princ. Mech.*); est ergo celeritas illa $= \frac{2a}{5b}$, cum in motu uniformi celeritas

 sit

ſit = ſpatio per tempus diviſo. Invenitur hinc celeritas cadendo per HP acquiſita i. e. celeritas in puncto curvæ R = (inferendo $\sqrt{BA} : \sqrt{HP} :: \frac{2a}{5b}:$) $\frac{2\sqrt{aa-ax}}{b\sqrt{5}}$, per quam diviſo curvæ elemento (§. 40.) $\frac{dx\sqrt{a-x}}{2\sqrt{x}}$, quotus $\frac{bdx\sqrt{5}}{4\sqrt{ax}}$ dat tempusculum quo illud percuritur; & $\int\frac{bdx\sqrt{5}}{4\sqrt{ax}} = \frac{b\sqrt{5x}}{2\sqrt{a}}$ eſt tempus deſcenſus per curvæ arcum RA, quod evadit = $\frac{1}{2}b$ quando $x = \frac{1}{5}a$. Tempus ergo deſcenſus per curvam CRA (gravi cadente ex S, ceu ubique ſuppoſuimus,) eſt ſubduplum temporis, quo ex quiete libere caderet per altitudinem = axi curvæ BA, conſequenter = $\frac{1}{4}$ temporis cadendi per SC = 4BA.

43. Schol. Curvæ hujus, quæ a proprietate jam explicata vocari poteſt *Curva æquabiliter retardati deſcenſus*, a nemine factam vidimus mentionem. Lubet itaque de eadem aliquid adhuc addere.

PROBLEMA. *Fig.* 4.

44. *Ducere rectam TR, quæ curvam deſcenſus æquabiliter retardati in dato puncto R tangat; eandemque curvam rectificare & quadrare.* Omiſſo ratiocinio mechanico (conſideratione nempe vis, qua grave in quolibet curvæ puncto ſuper illa deſcendens acceleratur,) cujus ope primum indirecte in methodum mox tradendam ducendi tangentem ad hanc curvam incidimus; aliam analyſin ex ſuperioribus

ribus facile fluentem dabimus. Sit Rr elementum curvæ, ideoque habendum pro lineola recta & particula tangentis; ductis semiordinatis RP, rp, atque Rn normali ad pr, erit $Pp = Rn = dx$; ducta AN parallela tangenti TR, ob $\triangle Rnr \backsim$ APN habemus $dx : (Rr =) \frac{dx\sqrt{a-x}}{2\sqrt{x}}$ (§. 40) :: $x : \frac{1}{2}\sqrt{ax-xx}$ $=$ AN. Facta ergo AQ $=$ 5AK, centro Q radio QA describatur circulus, qui rectam PR vel eandem productam secabit in Z, & centro A radio $=$ $\frac{1}{2}$ PZ circulus occurrens rectæ PR in N. Junctæ AN fiat parallela RT, quæ erit tangens; est enim AN $= \frac{1}{2}$ PZ $=$ (*per propr. circuli*) $\frac{1}{2}\sqrt{QA^2 - QP^2} = \frac{1}{2}\sqrt{ax-xx}$, *Q. e. i.* Vel si mavis determinetur punctum N quærendo PN, quæ per analogiam $dx : dy$ seu (§. 40.) $\frac{dx\sqrt{a-5x}}{2\sqrt{x}}$ :: x : PN, reperitur $= \frac{1}{2}\sqrt{ax-5xx} = pO$, *cfr. Probl. præc. p. 26.*

Qvia §. 40. elementum curvæ $= \frac{dx\sqrt{a-x}}{2\sqrt{x}} = \frac{adx - xdx}{2\sqrt{ax-xx}} = \frac{adx - 2xdx}{4\sqrt{ax-xx}} + \frac{adx}{4\sqrt{ax-xx}}$, hujus integrale $\frac{1}{2}\sqrt{ax-xx} + \int \frac{adx}{4\sqrt{ax-xx}}$ id est dimidium aggregatum ex semiordinata & arcu circuli, centro Q radio $\frac{1}{2}a$ seu QA descripti, abscissæ AP respondentibus, seu medium arithmeticum inter semiordinatam illam atque arcum (vel dimidia semiordinata Cycloidis ordinariæ, habentis generatorem eundem circulum,) æquatur curvæ nostræ arcui AR, adeoque integra curva AC = semisummæ arcus & semiordinatæ respondentium sinui verso AB in dicto circulo.

Denique cum singulæ semiordinatæ PR curvæ nostræ ad singulas Cycloidis ordinariæ, eundem axem AB seu circulum generatorem AoB habentis, sint in ratione constante $\surd 5 : 2$, §. 40; habebit etiam area illius curvæ ABCRA ad aream semicycloidis eandem rationem; ideoque ad aream semicirculi generatoris AoBA, utpote semicycloidis subtriplam, rationem $3\surd 5 : 2$, seu fere 3354 : 1000; atque sumta inter KA & 3KI media proportionali z, semicirculus radio z descriptus = erit areæ isti ARCBA, *Eucl. XII.* 2, *coll. VI.* 20. *Cor.* 2. Igitur tam rectificatio quam quadratura æque ac ipsa constructio curvæ nostræ, a rectificatione & quadratura circuli dependet.

PROBLEMA * *Fig.* 5.

45. *Posita eadem, quæ in* §. 40, *hypothesi gravitatis Galilæana, explicare motum, quo mobile super arcu quocunque GL, GA Cycloidis, cujus axis AB verticalem habet situm vertice A deorsum spectante, ex quiete descendit.* Ducantur ad AB normales GD, LP.

* Actum hic quidem agimus, cum post inventorem *Hugenium* multi hoc argumentum pertractaverint; vid. inter alios *Keill in Introd. ad veram Phys. Lect. XV. Theor.* 46. *p.*

LP. Quia datur punctum G unde motus incipit, datur AD quæ sit $= c$. Sint porro AB $= a$, indeterminata DP $= x$, AP $= c - x$, semicirculus generator AKTB, tempus quo grave per BA ex quiete libere descenderet $= b$, unde, *cfr.* §. 42, celeritas hoc lapsu acquirenda $= 2a : b$, & celeritas cadendo per DP seu descendendo per GL acquisita $= \frac{2\sqrt{ax}}{b}$. *Per propr. Cycloidis* est AG $= 2$AT $= 2\sqrt{ac}$, AL $= 2$AK $= 2\sqrt{ac - ax}$, ideoque GL $= 2\sqrt{ac} - 2\sqrt{ac - ax}$, cujus differentiali $\frac{adx}{\sqrt{ac - ax}}$ = elemento arcus GL, diviso per celeritatem in L inventam $2\sqrt{ax} : b$, habetur tempusculum $\frac{bdx}{2\sqrt{cx - xx}}$ quo elementum illud percurritur, adeoque omnium illorum tempusculorum summa $\int \frac{bdx}{2\sqrt{cx - xx}}$ dat tempus quo grave integrum arcum GL emetitur. Est vero $\frac{cdx}{2\sqrt{cx - xx}}$, quod dicatur dv, elementum arcus DF circuli diametro DA $= c$ descripti, cujus abscissa est $x =$ DP; quare $\int bdx$

---

m. 171. *MacLaurini Traité des Fluxions* §§. 407. 408. Interim occasione data ex §. 40. *nota* *, nonnihil ab aliis, quantum nobis quidem constat, non tactum, in seqq. imprimis *Cor. 6.* allaturi, pace B. L. brevem injiciemus mentionem eorum, quæ proximum ejusdem fundamentum constituunt vel cum his arcto nexu cohærent.

$\int \frac{bdx}{2\sqrt{cx - xx}} = \int \frac{bdv}{c} = \frac{bv}{c}$, & quando GL fit = GA, v seu DF evadit = semiperipheriæ DFA. Ergo tempus descensus per arcum quemcunque GL Cycloidis est ad tempus b, quo grave ex quiete libere caderet per altitudinem = axi Cycloidis, ut arcus circularis DF = v ad diametrum DA = c; ideoque tempus descensus super arcu quolibet Cycloidis usque ad punctum imum A, est ad b ut semiperipheria circuli ad ejus diametrum, adeoque in ratione constante. Sive ergo a C sive puncto quocunque alio G, Q &c. demissum fuerit grave, eodem tempore ad A perveniet, unde & Cyclois *Curva Tautochrona* vocatur.

46. Cor. 1. Quia motu incipiente in C (vel G) tempora descensus per CN, CG, CO (vel GO GL, GQ) &c. sunt ut arcus Be, BT, Bh (Dn, DF, Do); tempora quibus percurruntur isto motu NG, GO (OL, LQ) exponentur per eT, Th, (nF, Fo). Quare sumtis in peripheria circuli BhA (DFA) arcu quocunque eT = Km, (nF = oA,) ducendo rectas eN, TG &c. basi BC parallelas; determinantur portiones Cycloidis NG, LQ (OL, QA) æqualibus temporibus emetiendæ.

47. Cor. 2. Si tempus descensus per CG fuerit = t, & tempus casus per BD = n, erit §. 45, t: b:: BeT : BA, præterea n: b:: ($\sqrt{BD}$: $\sqrt{BA}$::) BT : BA; ergo t: n:: BeT : BT h. e. tempus descensus per arcum quemcunque cycloidis, motu incipiente

in C,

in C, est ad tempus casus per altitudinem ejus verticalem, ut circuli generatoris arcus, sinum versum altitudini isti æqualem habens, ad suam chordam.

48. Cor. 3. Cum semicycloidis evoluta sit semicyclois alia ipsi æqualis & similis, a cujus vertice evolutio incipit (quod passim apud Mathematicos demonstratum reperire licet, ut *loc. cit. MacL.* §. 406); ideo inter binas semicycloides æquales (basium extremitatibus conjunctis, convexitatem sibi mutuo obvertentes,) suspendendo penduli filum longitudine æquale semicycloidi seu duplæ diametro circuli generatoris, efficitur ut oscillando describantur arcus Cycloidis, ideoque omnes oscillationes, sive majores sive minores, sint §. 45. isochronæ. Nimirum dimidiæ oscillationis, s. descensus per QA vel GA &c. tempus est $\pi b : 2\delta$ ideoque integræ oscillationis $\pi b : \delta$ (ubi $\delta : \pi$ est ratio diametri circuli ad peripheriam); quod proinde ad tempus cadendi per (BA i. e.) dimidiam penduli longitudinem se habet ut peripheria circuli ad diametrum.

49. Cor. 4. Cum spatia è quiete verticaliter cadendo descripta sint ut quadrata temporum; si longitudo penduli = 2BA sit = p, spatium tempore unius oscillationis a gravi cadendo percursum erit *vi Cor. præc.* = $p\pi\pi : 2\delta\delta$ = 4. 935 — seu fere 5 longit. penduli.

50. Cor. 5. Cum Cycloidis radius osculi in vertice A sit = 2AB = p, eadem prope A erit cy-

cloidis curvatura, quæ circuli radio p descripti. Hinc ad oscillationes per arcus circulares valde exiguos factas adplicare absque errore sensibili licet, quæ §§. 48. 49. dicta sunt. Nec difficile foret h. l. sat intelligibili modo explicare, cur oscillationes in arcubus circularibus eo sint diuturniores, quo majores sunt arcus in quos excurrit pendulum. Tempus vero oscillationis in dato quolibet arcu circuli, quomodo per seriem infinitam exhiberi queat vid. *Euleri Mechan. Tom. II. p. 47. 70. & MacLaur. Traité des Fluxions §§. 886, 887.*

51. Cor. 6. Considerabimus jam motum relativum, quo grave in Cycloide descendens ad horizontem accedit. Quia hoc motu a B ad E, E ad D, H ad P &c. pervenit dum per CN, NG, OL &c. actu descendit; spatia BE, ED, DH, HP, PM, MA (vel DH, HP, PM, MA) motu illo relativo describuntur temporibus, quæ sunt ut arcus circulares B*e*, *e*T, T*h*, *h*K, K*m*, *m*A (vel D*n*, *n*F, F*o*, *o*A) respective §. 46, motu incipiente a C (vel G). Hi vero arcus si sumantur æquales, respondent iisdem inæquales partes diametri BA (DA), & quidem per primum quadrantem continuo crescentes, deinde vero per alterum eodem plane sed inverso modo decrescentes, uti ex *princ. Geom.* constat. Priori itaque temporis B*h*A (DFA) dimidio motus continuo acceleratur, altero similiter retardatur, idque inæquabiliter, ceu ex jam dictis intelligitur & ex dicendis ulterius patescet. Est nempe celeritas motus seu fluxio

spatii,*

ſpatii,* in præſenti caſu abſciſſæ BE (DH) fluxio B'E (D'H). Sed deſignante R (*r*) radium circuli B*e*A (D*n*A), eſt (cfr. ſ:s *Bougainville Traité du Calcul Intégral, Introd.* §. 42,) B'E : B'*e* :: E*e* : R, (D'H : D'*n* :: H*n* : *r*); hinc ob temporis fluxionem conſtantem B'*e* (D'*n*) & conſtantem quoque R (*r*), erit ſpatii fluxio B'E (D'H) conſequenter celeritas in temporis puncto *e* (*n*), proportionalis ipſi E*e*, (H*n*). Celeritates ergo relativas in temporis punctis *e*, T, *h*, K, *m* (*n*, F, *o*) exponunt ſemiordinatæ *e*E, TD, *h*H, KP, *m*M, (*n*H, FP, *o*M); quæ vero arcubus ad quadrantem usque uniformiter creſcentibus etiam creſcunt, non tamen æquabiliter ſed incrementis continue minoribus; oppoſita vero ratione minuuntur decrementis continue majoribus, dum arcus ultra quadrantem creſcunt. Ergo celeritates eadem ratione ſub priori temporis integri dimidio augentur, ſub altero minuuntur, idque incrementis continue minoribus, decrementis majoribus; ad quorum indolem plenius intelligendam adhuc notamus: Si H (P) fuerit centrum circuli B*e*A (D*n*A), eſſe (*Bougainv. l. c.* §. 41.) E'*e* : B'E :: HE : R, (H'*n* : D'*n* :: PH : *r*) i. e. in hoc caſu, fluxionem celeritatis, aut fluxionem ſpatii ſecundam *, ad fluxionem temporis, ut diſtantia ſemiordinatæ a centro ad radium; hinc cum tempus uniformiter fluat, momentum aut fluxio ce-

 leritatis

* Denotantibus *v*, *t*, *s*, velocitatem, tempus, ſpatium, reſpective; etiam juxta modum concipiendi

leritatis (seu ipsa vis acceleratrix, qua mobile versus integri spatii punctum medium tanquam centrum urgetur,) variat ut hæc distantia; quæ vero per quadrantem primum continue minuitur donec evanuerit, deinde opposita ratione crescit sed versus partem contrariam. Itaque durante motu per totius spatii BA (DA) vel temporis B*b*A (DFA) semissem primam, fluxio celeritatis continue decrescit, usque dum evanescit mobilis celeritate relativa existente *maxima*; postmodum negativa crescendo evadit seu motus retardatur decrementis continue majoribus. Ex allatis etiam sequitur: in punctis ut D, P, (H, M) a supremo B (D) & infimo A æquè distantibus, æquales esse celeritates relativas. Observamus denique, si grave inciderit in punctum Cycloidis O (L) libere cadendo ex baseos BC (vel semiordinatæ cujuscunque DG) puncto S (R) æquè elevato supra planum horizontale per O (L) transiens, ac vertex cycloidis A infra idem planum depressum est; sub toto descensu per arcum OA (LA) motum illum relativum fore dicta ratione retardatum; cum perinde sit sive per CO (GL), sive per SO (RL) descendendo pervenerit ad O (L).

PRO-

Leibnitianum habemus *per princ. Mechan.* $vdt = ds$; unde, posita dt constante, est v ut ds, & porro $dv = dds : dt$ adeoque ut dds.

PROBLEMA *Fig. 6.*

52. *In eadem gravitatis hypothesi explicare descensum gravis super arcu quocunque GL, GC Cycloidis ordinariæ, cujus axis AB ad horizontem perpendicularis est, vertice A sursum spectante.* Motu incipiente a G, fiant GD & alia quæcunque LP ad AB normales. Sit AB $= a$, AD $= c$, DP $= x$, tempus per AB libere cadendi $= b$, erit celeritas, quæ cadendo per AB adquiri posset $= \frac{2a}{b}$ *cfr.* §. 42; celeritas iri P libero lapsu ex D acquirenda i. e. celeritas mobilis in puncto L $= (2\sqrt{ax}):b$; AP $= c + x$, AL $= 2$AN $= 2\sqrt{ac+ax}$, AG $= 2$AF $= 2\sqrt{ac}$, ideoque GL $= 2\sqrt{ac+ax} - 2\sqrt{ac}$, cujus differentiale $\frac{adx}{\sqrt{ac+ax}}$ = elemento arcus GL dividatur per velocitatem in L inventam $(2\sqrt{ax}):b$, quo facto prodit $\frac{bdx}{2\sqrt{cx+xx}}$ tempusculum, quo grave per idem elementum movetur. Erit itaque omnium horum tempusculorum summa $\frac{1}{2}\int\frac{bdx}{\sqrt{cx+xx}}$ seu $\frac{1}{2}$ b. *Log.* $(\frac{1}{2}c + x + \sqrt{cx+xx})$ = tempori t, quod arcui GL emetiendo impenditur. Describatur axe transverso AD Hyperbola æquilatera D*m*R cujus vertex sit D. Producta LP ad *n*, ducatur ex hyperbolæ centro O ad *n* recta O*n*, erit Sector hyperbolicus *ODn*, qui dicatur *zz*;

$= \frac{1}{8} \int \frac{ccdx.}{\sqrt{cx + xx}}$ (Etenim sectoris ODn = ΔOPn — DPn = $\frac{1}{2}$ OP. Pn — DPn = $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$ $c + x$) $\sqrt{cx + xx}$ — $\int dx \sqrt{cx + xx}$ fluxio reperitur $\frac{ccdx.}{8 \sqrt{cx + xx}}$) Ergo $\frac{1}{2} b. \int dx : \sqrt{cx + xx} = 4bzz : cc = t$, & $\frac{1}{4} cc : zz :: b : t$. Motu itaque incipiente in G, tempora descensus per GK, GL, GC sunt ut Sectores Hyperbolici ODm, ODn, ODR; consequenter per KL, LC ut sectores Omn, OnR & sic porro; habentque ad tempus datum b rationem quam dicti sectores ad semiaxeos OD quadratum $\frac{1}{4}$ cc, seu ut istorum sectorum semisses ad hyperbolæ potentiam; hujus quippe duplum est $\frac{1}{4}$ cc.

53. Cor. 1. Descriptis Cycloidibus infinitis verticem communem A & axes in verticali AZ habentibus, tempora descensus per arcus earum æque altos, inter eadem videlicet plana horizontalia interceptos ut KL, Kl &c. erunt ad tempora casus liberi per ipsarum axes in eadem ratione, motu super omnes illas cycloides incipiente ab eodem plano horizontali GD. Datis enim A atque GD, Kr, LP positione, datur §. *præc.* hyperbola nostra, ipsius puncta m, n, semiaxis OD & sector Omn, ergo & §. *cit.* ratio $t : b$. Aliam ex principiis mechanicis deductam, & quidem minus longe petitam hujus rei demonstrationem facilem

cilem ac evidentem magis, brevitatis studio hac vice omittimus.

54. Cor. 2. Sumta arcus, super quo grave descendit, portione quadam LC, assignabitur a dato quolibet puncto I portio IK, eodem quo LC tempore percurrenda; si ductis ad AB normalibus CR, Ln, Ie, fiant PY = Pn, junctæ Yn parallelæ RZ, es, porro OY : OZ :: Os : OM, & a puncto M sic invento Mm parallela ipsi Yn ac denique per m ordinata mK; erit IK arcus quæsitus. Etenim ob PY = Pn, erit ang. PYn semirectus, & ducta asymptoto OX, cui occurrant Yn, Mm &c. productæ, ang. YOT etiam semirectus, cum sit DR hyperbola æquilatera; ergo anguli ad T, S &c. recti sunt, ideoque Tn, Sm &c. alteri asymptoto parallelæ. Et quia (*per constr.*) Os : OM :: OY : OZ erit quoque *Eucl. VI.* 2. OQ : OS :: OT : OX, quare (vid. sis *Hôpit. Tr. Anal. des Sect. Con.* §. 217,) sector Oem = OnR, ergo & § 52. tempora descensus per IK, LC. Et sumtis quotcunque OD, Os, OM, OY &c. seu OH, OQ, OS, OT continue proportionalibus (ubi OD est semiaxis & OH latus potentiæ), simili constructione determinantur arcus quotcunque GI, IK, KL &c. æqualibus temporibus percurrendi; cfr. *l. c.* §. 219.

55. Cor. 3. Ut ex datis AD seu OD & altitudine DP = x, calculo determinetur tempus descen-

descensus per GL (si prius non constet esse §. 52. $\int bdx : 2\sqrt{cx + xx} = \frac{1}{2} b. Log. (\frac{1}{2} c + x + \sqrt{cx + xx});$) inveniendus est Sector ODn seu spatium asymptoticum HDnT, nempe (*Hôpit. l. c.* §. 221. *MacL. Flux.* §. 757) rationis OT : OH = OY : OD (seu ipsius OY, sumta OD pro unitate,) Logarithmus, ad potentiam hyperbolæ ceu unitatem relatus. Oportet itaque numeris exprimere OY. In quacunque mensura detur OD, ponatur semper OD = 1; hinc AP = $2 + x$, PY = (§. *præc.*) Pn = $\sqrt{AP.PO} = \sqrt{2x + xx}$, ideoque OY = $1 + x + \sqrt{2x + xx}$, cujus Logarithmus hyperbolicus bisectus §. 52. exprimet tempus quæsitum t, sumto tempore dato $b = 1$. Si quæritur tempus descensus per KL; investigatis OM, OY, sumatur Log. hyperb. rationis OY : OM & reliqua fiant ut ante.

56. SCHOL. Si Logg. hyperbolici pro numeris datis computati haud prostiterint nec calculo faciles fuerint inventu, sumantur inventarum OM, OY Logg. Briggiani, multiplicatione per 2. 30258509 &c. ad hyperbolicos reducendi.

57. *Exemplum* 1. Si Dr (x) = $\frac{1}{4}$ scil. ipsius OD, erit §. 55. OM = 2, cujus Log. Naturalis 0. 6931472 bifariam divisus dat 0. 3465736 = temp. descensus per GK, posito $b = 1$. Sit porro DB = $2\frac{4}{7}$, ut fiat OZ = 7; est vero Log. Nat. 7 = 1.9459101, cujus dimidium 0. 972955 = temp- per GC. Quare temp. per KC = 0. 6263814 = $\frac{1}{2}$

Log.

Log. $\overline{7:2}$. Quod si DP $= 2\frac{1}{12}$ ideoque OY $= 6$, habetur Log. Nat. $\overline{OY:OM} = L.\overline{6:2} = L.3 = 1.0986123$, cujus semissis 0. 549 + = temp. per KL. Sit AD: DB:: 13: 36, unde posita OD $= 1$, fiet DB $= 5\frac{7}{13}$ indeque *per* §. 55, OZ $= 13$; est vero Log. Nat. 13 $= 2.5649493$; hujus itaque subduplum 1. 282 + = temp. per GC.

58. *Exempl.* 2. Descendat grave super GC ex altitudine $= \frac{1}{2}$ BA, sic ut DB = DA, erit ob OD $= 1$, OZ $= 3 + \sqrt{8} = 5.828 +$, cujus Logarithmo tabulari per 2. 30 &c. multiplicato §. 56, habetur ejusdem Log. hyperb. 1. 7627440, & hoc bisecto, $t = 0.881 +$.

59. *Exempl.* 3. Punctum G, unde grave moveri incipit, non adeo multum ab A distet; sed sit v. gr. AG $= \frac{1}{10}$ AC, erit jam AD $= \frac{1}{100}$ AB, adeo ut posito OD $= 1$, fiat DB $= 198$ ideoque §. 55. OZ $= 199 + 60\sqrt{11} = 398 -$, cujus Log. tabularis 2. 5998827 in 2. 30 &c. ductus dat Naturalem 5.986 4511, hujusque semissis 2.993 +, tempus descensus per GC = fere $3b$. Quando AG $= \frac{1}{1000}$ AC, reperitur temp. per GC quam proxime $= b \times 7.6$.

60. Schol. 1. Nimirum prope verticem A motus admodum est lentus ob exiguam ibidem curvæ declivitatem. Ipsi autem vertici impositum grave sola vi gravitatis nunquam movebitur, cum ibi, haud secus ac in plano horizontali, sustentetur. Nec ob evanescentem hoc in casu OD, constructio §. 52. tradita locum invenit; rationis vero OY : OD §. 55. jam = OY : 0 = ∞ Logarithmus est ∞ ideoque & t infinitum.

finitum. Vel quando AD seu $c = o$, æquatio §. 52 $t = \frac{1}{2} \int \frac{bdx}{\sqrt{cx + xx}}$ in hanc abit, $t = \frac{1}{2} b \int dx : x$; ast $\int ax : x$ exprimit spatium una parte interminatum hyperbolæ apollonianæ inter asymptotos, quod vero infinitum est. Exprimit quidem $\int dx : x$ ipsum *Log.* $2x$; verum cum unitas, ad quam x referri debet, jam sit $= o$, $2x$ rationem habet numeri infinite magni & *Log.* $2x$ repræsentatur asymptoto *Logisticæ* in infinitum excurrente. Nimirum ut in integrali invento determinetur quantitas constans C demenda, observandum: quod per conditionem problematis, evanescente t evanescat etiam x; quare si in æquatione $t = \frac{1}{2} b . l2x - C$, ponatur $t = o$, fiet quoque $x = o$ & æquatio evadit hæc $\frac{1}{2} b . log. o - C = o$, unde $C = \frac{1}{2} b . log. o$, & æquatio correcta prodit $t = \frac{1}{2} b \, (log. 2x - log. o) = \frac{1}{2} b . log. 2x : o$ Cæterum in hac motus hypothesi impossibili, forent celeritates in punctis G, L, C ut arcus emensi AG, AL, AC, & his existentibus in progressione Geometrica, tempora essent in progressione arithmetica.

61. Schol. 2. Vel me non monente intelligitur, quæ inde a §. 40. dicta sunt, de motibus in vacuo vel medio non resistente accipienda solum esse.

Cum in *Fig.* 4. nonnihil vitii irrepserit, monendus est B. L. §:phum 41. inspiciens, ut, pro *AO*, ductam putet *Ao*. Nec punctum *N* (§. 44.) in ipsam circumferentiam *GOF* (præterquam in unico casu), sed intra eandem cadere censendum est.

THE-

THESES.

1. DAri in natura Vacuum, absolute tale, coacervatum, adfirmare non audemus.

2. Area figuræ cujuscunque rectilineæ circulo circumscriptæ, est ad aream circuli, ut illius perimeter ad peripheriam circuli, & figuræ rectilineæ circa eundem circulum descriptæ sunt inter se in ratione perimetrorum. Area denique circuli est media proportionalis inter areas figuræ cujuscunque rectilineæ ipsi circumscriptæ, & alius figuræ similis, habentis perimetrum peripheriæ ejusdem circuli æqualem.

3. Similiter Sphæra & solidum quodlibet planis terminatum circa eam descriptum, ut & solida ejusmodi eidem sphæræ circumscripta, sunt inter se in ratione superficierum suarum. Et soliditas sphæræ est minor duarum quantitatum continue proportionalium inter ejusmodi solidum quodcunque circa eam descriptum & aliud simile, cujus superficies superficiei sphæræ est æqualis.

4. Rectæ binos Trianguli angulos externos hisque oppositum internum bisecantes, in uno puncto concurrunt; & angulus a rectis externos bisecantibus interceptus æqualis est semisummæ internorum adjacentium.

5. In △:o Rectangulo est ut hypothenusa ad perpendiculum in eandem demissum, ita Rectangulum sub cathetis ad Rglum sub segmentis hypothenusæ.

6. Æquales, utut dissimiles, sunt Sectores Elliptici, quem duæ quæcunque semidiametri & quem ipsis conjugatæ comprehendunt.

7. Lunulæ Hippocratis ABDKA (*Fig.* 2.) portioni cuicunque KLM, recta FL, ex centro F circuli majoris ducta, definitæ, æqualis facile construetur Lunula alia toti similis.

8. Cyclois vel quivis ipsius arcus in data quacunque ratione divisibilis est.

9. Spatium Cycloidicum CAFB in duas partes æquales facile dividi potest. *Fig.* 6.

10. Si recta gp tangens Cycloidem in puncto quocunque g, occurrat tangenti per verticem Ap, erit spatium Agp = circuli generatoris segmento Aub, quod definit chorda Ab ipsi gp parallela. *Fig.* 6.

11. Facta Cycloidis abscissa AO = $\frac{1}{2}$ radio circuli genitoris = $\frac{1}{2}$ DA, erit spatium Cycloidicum A O g perfecte quadrabile, nempe = 3 $\triangle$ A O b = $\triangle$ B O b, & spatium Abg = 2 $\triangle$ A O B = $\triangle$ A b D. *Fig.* 6.

12. Determinando per calculum Triangulo, cujus basis cum angulo opposito & summa reliquorum laterum dantur, hæc inservit Regula: Inferatur: *Ut basis ad summam reliquorum laterum, ita sinus dimidii anguli dati ad sinum anguli qui di-*

ca-

catur Q. Hic sinus inventus si fuerit = radio, △ quæsitum erit æquicrurum adeoque datum; sin minus, ex binis valoribus anguli Q, eidem sinui invento respondentibus, auferatur dimidius angulus datus, residui erunt anguli quæsiti. His itaque cum basi cognitis, reliqua latera facile inveniuntur.

13. *In Ellipsi (Fig. 3.) angulus CLI maximus est æqualis differentiæ angulorum CPA, CAP* (per §§. 30. 32. 34.); unde porro (conf. §. 28.) sequitur: *In Triangulo Rectangulo esse ut quadratum hypothenusæ ad differentiam inter quadrata crurum, ita sinum totum ad sinum differentiæ angulorum acutorum.*

14. Maxima quidem facilitate se commendat atque egregia inveniendi compendia præstat *Calculus Differentialis Leibnitianus*; ne autem in eo Desideratur ἀκρίβεια mathematica, sed ut par est, indubiis demonstrationibus muniatur, adsciscendus est modus concipiendi, qui proprius est *Methodo Fluxionum Newtonianæ*, nullis obnoxius difficultatibus.

15. Vitio laborat atque exemplum lusus & abusus abstractarum idearum mathematicarum præbet argumentum illud mathematico-metaphysicum, quo possibilitatem creationis mundi ab æterno, ut & extensionis, qua gaudere fingitur, infinitæ, evincere conantur *Jac. Bernoullius & Jac. Hermannus* in *Bernoullii Opp. T. II. N:o LXXIV. p. 764.*

16. Ex elementis Geometriæ facillime demonſtratur, quod longa ſatis ratiociniorum analyticorum ſerie, calculi infiniteſimalis principiis innixorum, elicuit Dn. *De Bougainville*, in præſtanti opere *Traité du Calcul Intégral* dicto, *Introd. C. IV.* §. *49*, nimirum ſi fuerint α, β duo anguli vel arcus circulares, fore ſin. $\overline{\alpha + \beta}$ = ſin. $\alpha \times$ coſ. β + ſin. $\beta \times$ coſ. α; atque coſ. $\overline{\alpha + \beta}$ = coſ. $\alpha \times$ coſ. β − ſin $\alpha \times$ ſin. β, poſito radio = 1.

17. Fallitur *Phil. Lansbergius* in *Cyclometriæ Nov. Lib. I. p. 4. ſeq. & 23.* aſſerens: biſectis quadrante peripheriæ circuli atque radio, rectam per duo illa diviſionum puncta tranſeuntem abſcindere a circuli tangente illo, qui circulum in extremo quadrantis puncto contingit & radio iſti parallelus eſt, portionem octanti peripheriæ (licet non abſolute, tam prope tamen) æqualem, ut recta hujus portionis octupla a peripheria circuli non differat parte radii centeſima; huc enim, ni fallor, redit mens laudati Viri obſcurius licet indicata. Hoc ſi verum eſſet, ratio diametri ad peripheriam reperiretur $1 : 6 - \sqrt{8}$, ideoque poſita Semidiametro = 100, foret peripheria = 634 + multo ſcil. major vera, partibus circiter 0. 06 radii.

18. Apertum committunt paralogiſmum *Wolfius* in *Elem. Mechan.* §. *133.* &, qui eum hic quoque ſequitur, *Wincklerus* in *Inſtit. Math. phyſ.* §.

603,

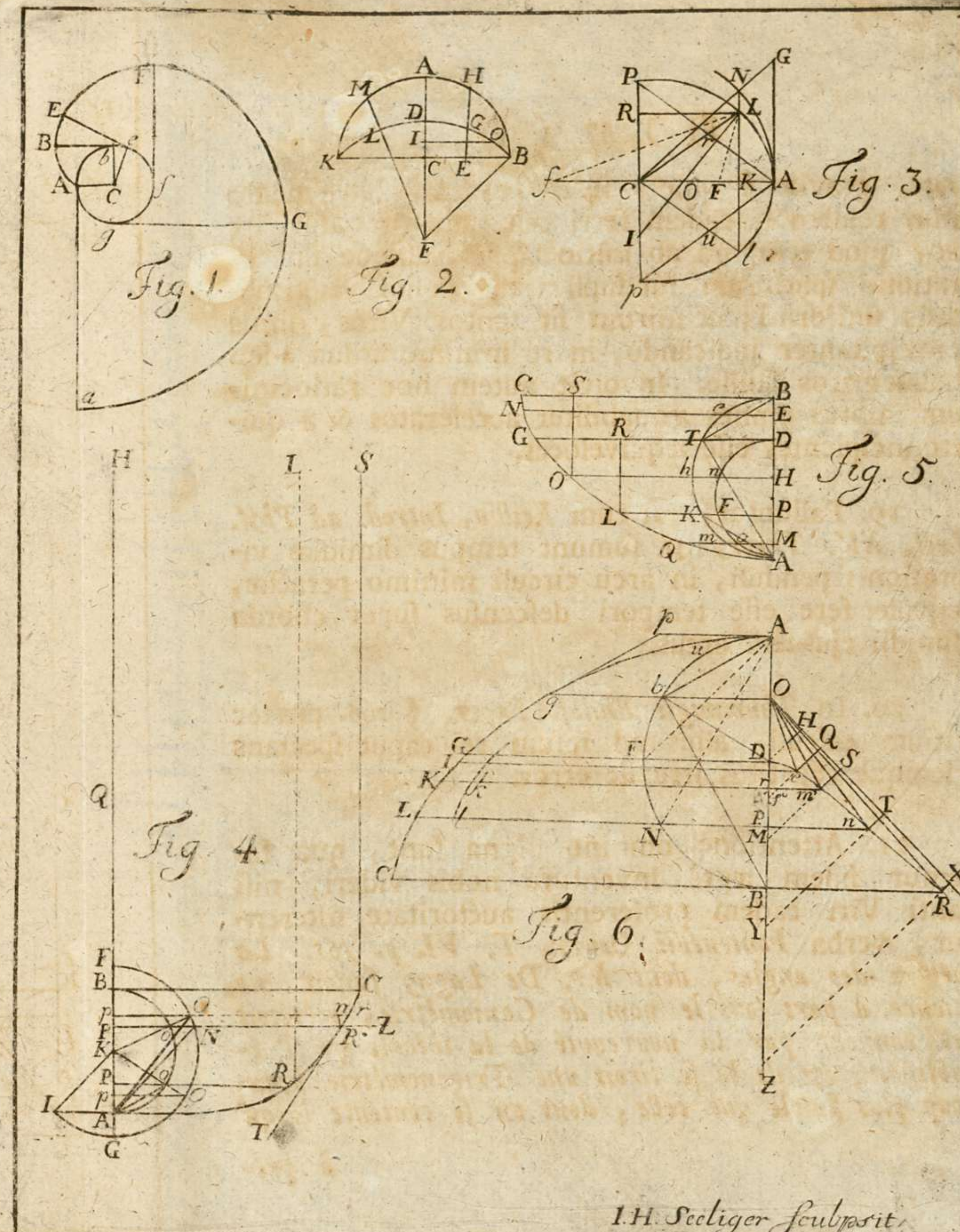
603, gravia è quiete libere cadentia in medio non resistente, eadem ferri celeritate probaturi ex eo, quod tempora ab initio lapsus, ubique sint in ratione spatiorum subduplicata, posita vi gravitatis uniformi; ut mirum sit tantos Viros, nimis præcipitanter judicando, in re minime ardua adeo hallucinatos fuisse. Involvit autem hoc ratiocinium, motus omnes æquabiliter acceleratos & a quiete incipientes esse æquiveloces.

19. Falluntur, qui cum *Keillio, Introd. ad Phys. Lect. XV. Theor.* 41. sumunt tempus dimidiæ vibrationis penduli, in arcu circuli minimo peractæ, æquale fere esse tempori descensus super chorda dimidii ejusdem arcus.

20. In *Thümmigii Philos. Exper.* § 266. præter vitium calculi, alius ad ipsum rei caput spectans idemque repetitus irrepsit error.

21. Attentione omnino digna sunt, quæ fatemur fidem ægrè inventura nobis videri, nisi tanti Viri eadem proferentis auctoritate niterentur, verba *Fontenellii, Oeuvr. T. VI. p.* 561. *La mésure des angles, dont Mr. De Lagny faisoit une science à part sous le nom de Goniométrie, méritoit cet honneur par la nouveauté de la théorie qui l'établissoit, & de là se tiroit une Trigonométrie beaucoup plus simple que celle, dont on se contente jusqu'*

à pré-



à préſent, & délivrée de toutes ces tables de ſinus, tangentes & ſecantes, attirail incommode, toujours borné quelque vaſte qu'il ſoit, & qui demande qu'on ſe repoſe avec une confiance aveugle ſur le travail d'autrui. Hæc ſi tantum habent veritatis, quantum ſpeciei, mirari convenit quod de præclaro adeo atque utili invento tam altum apud Mathematicos ſit ſilentium.

S. D. G.