D. D.

DISSERTATIO

DE

EPICYCLOIDE SIMPLICI,

QUAM

Conf. Ampliff. Facult. Philof. in Reg. Acad. Aboënfi,

PRÆSIDE

MAG. ANDREA PLANMAN,

Phyf. PROFESSORE Reg. & Ord. nec non Reg. Acad. Scient. Stockholm. SOCIO,

PRO GRADU

Publico examini fubmittit

NATHANAËL GERHARDUS SCHULTEEN,

Auftro-Fenno.

In AUDITORIO MAJORI Die XVII. Julii An. MDCCLXXII.

Tempore ante meridiem folito.

ABOÆ,

Typis JOHANNIS CHRISTOPHORI FRENCKELL.

23

VIRO

Plurimum Reverendo atque Clarissimo,

MAG. ANDREÆ GOTTSKALK,

VICE - PASTORI & SACELLANO Ecclesiæ, quæ DEO in Nagu colligitur, meritissimo,

Opusculum hoc, ut olim PRÆCEPTORI Fidelissimo; ita nunc FAUTORI Certissimo,

AUCTOR.

§. I.

Curvæ, quæ Epicycloidum nomine veniunt & ad figuras dentium rotæ conſtruendas, frictionis tollendæ gratia, a ROEMERO, teſte LEIBNITIO in *Commercio Philoſ.* & *Math.* & *Epiſtola* LXVI, primum ſunt inventæ, deſcribuntur a puncto quodam in peripheria circuli, ſupra peripheriam alterius circuli volventis, quorum circulorum iſte generator, hic autem baſis dici ſvevit. Epicycloides itaque habentur variæ pro ratione radiorum circuli genitoris & baſis: quoties hæc ratio fuerit incommenſurabilis, toties numerus cuſpidum Epicycloidis habetur infinitus. At ſi hi radii fuerint commenſurabiles, tot cuſpidibus ornata prodit Epicyclois, quot vicibus radicis genitoris continetur in radio basis. Hinc infinitam patet esse Epicycloidum varietatem; inprimis si huc quoque referantur curvæ, ex volutatione curvæ cujuscunque supra aliam quamcunque curvam, genitæ, quemadmodum fecit Cel. NICOLE in *Act. Paris.* pro An. 1707. Nostri autem instituti non est universæ Epicycloidum tractationi immorari, quippe quæ vastissima habetur; sed pro angustia temporis & typographiæ nonnulla duntaxat in medium proferemus circa *Epicycloidem simplicem*, quæ volutatione circuli supra sui æqualem generatur; idque ex occasione proprietatis, quam Cel. PRÆSES circa hanc curvam detexit & in *Actis Reg. Acad. Scient. Stockh.* Anni 1759 p. 101 & *Coroll.* I. exhibuit.

§. II.

Simplicis Epicycloidis proprietas, cujus mentionem fecimus, in eo consistit, quod recta linea ex quocunque curvæ puncto perpendiculariter ducta ad lineam hoc punctum & cuspidem jungentem, semper tangat circulum, cujus diameter est axis Epicycloidis. Scilicet sit simplex semi Epicyclois AMB, cujus axi AB, vertex in A & cuspis in B habetur, atque supra AB ceu diametrum describatur semicirculus, si jam ex B ad quodcunque curvæ nostræ punctum M ducatur recta BM, nec non ex M erigatur recta MH normalis ad BM; tanget MH semicirculum in puncto quodam H. Hæc pro-

proprietas nobis præbet maxime expeditam methodum, ducendi tangentem & inveniendi radium curvaturæ ad unum quodque Epicycloidis punctum, nec non rectificandi hanc curvam.

Sit itaque primum ducenda tangens ad quodcunque curvæ nostræ punctum M: in hunc finem sumatur in curva hac punctum *m* infinite propinquum ipsi M, atque ex B agantur ad M & *m* rectæ BM, B*m*, nec non ad hasce ducantur rectæ MH & *m*H perpendiculares, quæ tangant circulum BHA in H; jungantur quoque puncta B & H recta BH; eritque manifestum, puncta M & *m* sita esse in peripheria circuli, cujus diameter est BH; unde sequitur, circulum huncce atque Epicycloidem in puncto M habere communem tangentem. Si igitur recta BH bisecetur in N, ducaturque recta MN, atque ex M ad MN erigatur normalis MS; erit MT tangens Epicycloidis in puncto M.

§. III.

Æque expedite radius curvaturæ Epicycloidis nostræ ad quodvis ipsius punctum M ex allata ejus proprietate (§ præced.) invenietur. Nam concipiatur recta *m i* esse normalis ad curvam in puncto *m*, & producantur rectæ *m i* & M N, quoad sibi invicem occurrant in puncto E; eritque ME radius curvaturæ, qui quæritur. Ad hunc autem determinandum, ducantur rectæ B *i* ad *m* E; B *p* ad ME & HP ad ad AB perpendiculares; agantur quoque ex circuli BHA centro C & ex A rectæ CH & AH; nec non centro C & radio Bm describatur arculus mn; eruntque triangula rectangula, mMn, BMH, BHP, BHA & MBp, similia; quia ob ang. TMN $=$ ang. BMH $=$ Recto, erit ang. TMB $=$ MBp; & præterea per naturam circuli habetur ang. TMB $=$ ang BHM $=$ ang. BAH $=$ ang, BHP. Fiat jam AB $= a$, BM $= v$; eritque Mn $= - dv$; nec non BH $= \sqrt{av}$; atque AH $= \sqrt{a^2 - av}$, ob BM $=$ BP; quapropter per comparationem trianguli ABH cum triang. BMp, obtinebitur Mp $= \frac{v\sqrt{av}}{a}$ & Bp $= \frac{v\sqrt{a^2 - av}}{a}$, quæ differentiata & reducta præbet $rp = Bp - Bi = \frac{\overline{a - \frac{3}{2}v}.\, -dv}{\sqrt{a^2 - av}}$. Per similitudinem autem triangulorum rpE & mME habetur $\overline{ME - Mp}. \frac{-adv}{\sqrt{a^2 - av}} = ME. \frac{\overline{a - \frac{3}{2}v}.\, -dv}{\sqrt{a^2 - av}}$; unde ME $= \frac{2a}{3v}$ Mp $= \frac{2}{3}\sqrt{av}$. Si itaque in recta MN producta capiatur ME $= \frac{2}{3}$ BH, erit ME radius curvaturæ quæsitus.

§. IV.

Quod jam ad Rectificationem Epicycloidis nostræ attinet, ista quoque facillimo negotio per proprietaprietatem allatam (§. II.) præſtabitur: inde enim ſequitur, quod triangulum AHB ſit ſimile triangulo mMn, quemadmodum in §. præced. jam monuimus. Quapropter obtinebitur elementum curvæ $mM = \frac{AB.Mn}{AH} = -\frac{adv}{\sqrt{a^2 - av}}$, quæ integrata præbet arcum Epicycloidis $ALM = 2\sqrt{a^2 - av} = 2AH$.

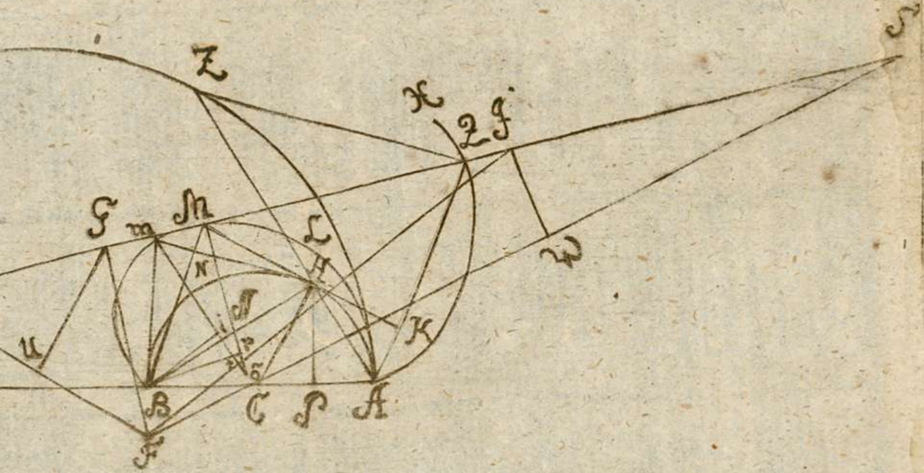
Cor. 1. Si $v = o$, quod ſit in cuſpide Epicycloidis, habetur ſemi Epicyclois $= 2a = 2AB$, quare tota Epicyclois erit æqualis axis ſui quadruplo.

Cor. 2. Ad rectam MH productam agatur ex A recta AK perpendicularis, quæ in Q occurrat tangenti TM, quo facto, obtinebitur triangulum KMQ ſimile triangulo KHA; cumque $MK = 2HK$; erit quoque $MQ = 2AH$. Hinc itaque ſequitur, punctum Q haberi in curva, per evolutionem Epicycloidis noſtræ genita, quæ etjam eſt ſimplex Epicyclois. Nam producatur AB & fiat $AD = 3AB$, ſupra quam ceu diametrum deſcribatur ſemicirculus AZD; quare producta AH ad Z; erit arcus AZ ſimilis arcui AH, atque chorda $AZ = 3AH$ chordæ. Cumque $AQ = 3AK$; erit recta ex Q ad Z ducta, parallela ipſi HK & conſequenter perpendicularis ad AQ; quare punctum Q (§. II.) dabitur in Epicycloide, cujus vertex in D & cuſpis in A erit.

§. V.

Si in §. præc. allata conferantur cum iis, quæ

Illuſtr.


Z
L
N
K
B
C
A
F

Illustr. KLINGENSTJERNA in *Act. Stockh.* an. 1749, pag. 285 & seqq. disseruit in solutionem *Problematis Catoptrici Euleriani*, quod in *Nov. Actis Erudit.* An. 1745 comparet; facile liquet, qua ratione construenda erit curva, in qua radii luminis bis reflexi ad idem redeunt punctum, unde emanarunt, data simplice Epicycloide ceu *Caustica per Reflexionem.* Scilicet sit Caustica Epicyclois ALB, cujus vertex est A & axis AB, supra quem ceu diametrum describatur circulus, ad cujus punctum quodcunque H agatur recta tangens, quæ occurrat Epicycloidi in M & producatur ad K, ita ut evadat HK = HM. Fiat quoque recta, ex A per K ducta, AQ = 3AK, atque jungantur puncta Q & M recta QM; eritque QM = arcui Epicycloidis ALM ac tanget eandem in M (*Cor.* 2.). Proinde si producatur QM utrinque, atque fiat QS = QT = longitudini datæ, quæ nempe datur per perimetrum Causticæ nostræ atque distantiam puncti radiantis a B, quod punctum sit in F. Ex F agantur rectæ ad puncta S & T, quæ bisecentur in V & U: quo facto erigatur ex V ad FS perpendicularis VI, occurrens ipsi TS in I; & ex U perpendicularis UG ad FT, eidem TS in G occurrens; atque erunt puncta I & G in curva quæsita (Confr. *Act. Stockh.* cit. pag 295).