VATT-KESKUSTELUALOITTEITA
VATT-DISCUSSION PAPERS

69

YHDEN YRITYKSEN PÄÄSTÖJEN KONTROLLIN ONGELMA

Heikki Kemppi

Valtion taloudellinen tutkimuskeskus
Government Institute for Economic Research
Helsinki 1994

ISBN 951-561-096-6

ISSN 0788-5016

Valtion taloudellinen tutkimuskeskus

Government Institute for Economic Research

Hämeentie 3, 00530 Helsinki, Finland

Painatuskeskus Pikapaino Opastinsilta

Helsinki 1994

KEMPPI HEIKKI: YHDEN YRITYKSEN PÄÄSTÖJEN KONTROLLIN ONGELMA. Helsinki, VATT, Valtion taloudellinen tutkimuskeskus, Government Institute for Economic Research, 1994.(C, ISSN 0788-5016, No. 69). ISBN 951-561-096-6.

TIIVISTELMÄ: Ympäristöä pilaavien päästöjen rajoittaminen perustuu usein yritysten aiheuttamien päästöjen rajoittamiseen. Yhden yrityksen päästöjen rajoittamisen ongelma ilmentää valintatilannetta, joka vallitsee ympäristön laadun (päästömäärän) ja kulutuksen (tuotantomäärän ja tuotantokustannusten) välillä.

Keskustelualoitteessa osoitetaan kuinka yrityskohtainen päästökiintiö, päästömaksu ja päästöjen vähentämisen tuki ovat päästövaikutukseltaan samoja. Kaikki ovat saman kontrolliongelman ratkaisun välineitä. Yrityksen voitonmaksimointi on se vaikutuskanava, jonka kautta viranomaiset voivat saavuttaa myös hintainstrumenteilla halutun päästötason. Päästökontrollikeinot eroavat toisistaan yrityksen voittojen suhteen. Komparatiivisen statiikan menetelmiä käytetään sekä päästörajoitteen että päästömaksun analysoinnissa. Päästömaksun yhteydessä esitellään voitonmaksimoinnin 'johdannaiset' epäsuoravoittofunktio sekä päästöfunktio. Päästömaksua tarkastellaan myös yrityksen kustannusten minimointiongelmana. Työssä käsitellään lyhyesti myös päästö- ja tuontantofunktioiden taustalla olevia tuotantomahdollisuuksien joukon ominaisuuksia kuten tuotosten heikkoa hävitettävyyttä.

ASIASANAT: ympäristötalous, ympäristöpäästöjen kontrolli, yrityksen voiton maksimointi

Heikki Kemppi: Yhden yrityksen päästöjen kontrollin ongelma. Helsinki, VATT, Valtion taloudellinen tutkimuskeskus, Government Institute for Economic Research, 1994. (C, ISSN 0788-5016, No. 69). ISBN 951-561-096-6.

ABSTRACT: Emission control is often based on the abatement of industrial pollutin. The problem of controlling one firm's emissions describes the choice between quality of environment (emissions) and consumption (production and production costs). Per firm emission quota, externality (emission) tax or subsidy per emission discharged lead to the same emission level of the firm. The control problem is basicly the same for all three instruments. By using firm's profit maximation as an indirect instrument, regulators are able to achieve a given emission target. The three instruments lead to different profit levels of the firm. Comparative statics are calculated in the cases of emission tax and per firm emission quota. In the case of emission tax indirect profit function and emission function are presented. Emission tax is also analysed as a firm's cost minimisation problem. Production and emission functions are based on production technology which involves weak disposability of outputs (emissions). This kind of technology is briefly presented.

KEYWORDS: environmental economics, control of emissions, profit maximization

1 JOHDANTO

Ympäristöongelmien ratkaisu perustuu tuotannosta aiheutuvien päästöjen rajoittamiseen, koska tuotannosta välittömästi aiheutuvat päästöt ovat usein kulutuksesta aiheutuvia päästöjä merkittävämpiä ympäristön pilaajia ja useasti myös helpommin kontrolloitavissa. Esimerkiksi hiilidioksidi-, rikkidioksidi- ja typenoksidien ilmakehäpäästöt sekä useat vesistöpäästöt kuten fosforin, typen ja orgaanisesti sitoutuneiden halogeenien päästöt johtuvat suurelta osin energian, selluloosan sekä paperin tuotannosta.

Yrityksen käytettävissä oleva teknologia, markkinoilla vallitsevat hinnat ja näistä seuraavat kustannusrajoitteet sekä viranomaisten käyttämät ohjausvälineet määräävät, mikä on ympäristösuojelutoimenpiteistä aiheutuva päästö-, tuotanto-, ja kustannustaso. Teknologia määrää viime kädessä sen millainen on kulutuksen (tuotannon) ja ympäristönlaadun (päästöjen) välinen valintatilanne. Päästöjen, tuotannon ja kustannusten välinen suhde on tärkeä myös mm. sen vuoksi, koska toimialatarkastelu perustuu useimmiten kustannusfunktioihin, joiden avulla voidaan toimialan ja yhden yrityksen tilannetta verrata toisiinsa. Käytännössäkin päästöjenvähentäminen perustuu kustannusfunktioihin, koska näiden avulla päästöjen vähenemät voidaan kohdentaa tehokkaasti. Käytännön kustannusfunktiot, joissa toimenpiteet (= päästölähteet) on asetettu kustannusten mukaiseen järjestykseen ovat useimmiten päästökohtaisia, joten niihin sisältyy usean eri toimialan ja useita täysin erilaisia teknologioita käyttäviä yrityksiä.

Tässä työssä tarkastellaan yhden yrityksen päästöjen kontrollin ongelmaa ja kontrollin välineitä: yrityskohtaista päästönormia, päästömaksua ja päästöjen vähentämisen tukea. Viimeksi mainittua tarkastellaan vain viitteenomaisesti. Yhdenkin yrityksen käsittely havainnollistaa sitä valintatilannetta mikä tuotannon ja päästöjen välillä vallitsee sekä sitä kuinka päästöjen vähentäminen vaikuttaa esimerkiksi panosten käyttöön.

Yrityksen päästöjen kontrollia tarkastellaan neoklassisen talousteorian näkökulmasta. Tämä merkitsee mm. sitä, että yrityksen ainoa tavoite on voitonmaksimointi ja se alentaa päästöjään ainoastaan pakon tai taloudellisen kiihokkeen (lisähyödyn) vuoksi. Yritys toimiii varmuuden vallitessa eli se tietää teknologiansa, viranomaisten asettaman päästönormin ja markkinoilla vallitsevat hinnat.

Toisessa luvussa esitellään päästönormin vaikutukset hinnanottajayrityksen voittoon ja panosten käyttöön. Päästönormin tarkastelu perustuu tavanomaiseen rajoitetun optimoinnin teoriaan (ns. Lagrangen menetelmä). Yrityksen toimintaa erilaisten rajoitteiden (normien tai kiintiöiden) alaisena on kirjallisuudessa tutkittu eri yhteyksissä, mm. regulaatiopolitiikan vaikutusten selvittämisen yhteydessä. Toisessa luvussa esitellään paitsi tuotanto- ja päästöfunktiot myös näiden taustalla olevat tuotantoteknologiat (tuotantomahdollisuuksien joukko).

Kolmannessa luvussa käsitellään hintaohjauksen eli päästömaksun vaikutukset yrityksen voittoon, panosten käyttöön ja päästöihin. Kirjallisuudessa yleisin lähestymistapa yhden yrityksen päästöjen rajoittamiseen on päästömaksun asettaminen. Kolmas luku perustuukin kirjallisuudessa esitettyihin lukuisiin tuloksiin optimaalisesta päästömaksusta. Julkaistuja artikkeleita kuin myös julkaisemattomia käsikirjoituksia ja opinnäytetöitä yhden yrityksen päästöjen kontrolliongelmasta on kirjoitettu sekä Suomessa että maailmalla. Töissä on käytetty useita eri päästö- ja tuotantofunktoita. Päästönormin asettaminen ja päästömaksun maksattaminen ovat saman kontrolliongelman eri ratkaisuja ja niillä on saman päästötuleman ohella muitakin yhteneväisyyksiä. Kolmannen luvun lopussa johdetaan graafisesti kirjallisuudessa toimiala-analyysissa yleisesti käytetty kustannusfunktio luvuissa kaksi ja kolme käytettyjen tuotanto- ja päästöfunktioiden avulla.

Yhden yrityksen päästöjen rajoittamisen näkökulmasta tarkasteltuna haluttu yrityskohtainen päästötaso voidaan saavuttaa myös päästöjen vähentämisen tuella, kun tuki asetetaan yhtä suureksi kuin päästömaksu. Tässä työssä tätä vaihtoehtoa ei käsitellä yksityiskohtaisesti. Ensinnäkin voidaan osoittaa, että varsin tavanomaisilla oletuksilla päästöjen vähentämistukea joudutaan maksamaan yritykselle enemmän kuin mitä ovat päästöjen vähentämisen vaikutukset yrityksen voittoon. Toiseksi koko talouden näkökulmasta tarkasteltuna tämä ratkaisu vääristää talouden resurssien allokaatiota. Päästöjä aiheuttavan yrityksen tehokas tuki on verotettava yrityksiltä, jotka eivät aiheuta päästöjä. Lopputulemassa resursseja suuntautuu ympäristöhaittoja aiheuttaville yrityksille ja sektoreille. Kolmanneksi päästöjen vähentämisen tuki voi johtaa alkutilanteessa liikapäästöhin yritykselle kohdennettavan tuen lisäämiseksi.

2 YRITYSKOHTAISEEN PÄÄSTÖNORMIIN PERUSTUVA OHJAUS

2.1 Päästönormiin reagointi rajoitetun maksimoinnin ongelmana

Oletetaan yhden yrityksen toimivan suurilla markkinoilla. Tällöin yrityksen lopputuotteen ja panosten hinnat voidaan olettaa yrityksen reaktioista riippumattomiksi. Myös päästönormi on annettu. Viranomainen on arvioinut ja määrännyt yrityksen päästönormin ottaen huomioon yrityksen päästöjen vaikutuksen kokonaispäästöhaittaan.

Yrityksen reagointi päästönormiin riippuu yrityksen tuotanto- ja päästöteknologiasta sekä yrityksen kohtaamista hinnoista. Toimialatasolla lopputuotteen ja panosten hinnat muuttuvat endogeenisiksi tekijöiksi, koska toimialan panoskysyntä vaikuttaa panoshintoihin ja sen tuotantomäärä markkinoilla toteutuvaan lopputuotteen hintaan. Lisäksi myös toimialan päästöt voivat vaikuttaa toimialan lopulliseen päästönormiin tai oikeammin toimialan yritysten päästökiintiöön.

Päästönormin asettamiseen perustuvassa ohjauksessa viranomainen asettaa yritystä koskevan päästörajan eli päästönormin e^*. Yrityksen on kannettava päästönormin saavuttamisesta aiheutuvat kustannukset. Päästönormi voidaan saavuttaa joko päästökerrointa alentamalla eli käyttämällä päästöjä vähentävää maksullista panosta, tuotantoa alentamalla tai näiden yhdistelmällä. Päästönormin tapauksessa yrityksen voitonmaksimointiongelma (L) on seuraavanlainen:

$$L = px(k,l) - wk - wl + \lambda[e^* - e(k,l)] \qquad (2.1)$$

$$k,l,\lambda \geq 0$$

Kyseessä on yrityksen voiton maksimointi tuotantoon vaikuttavan rajoitteen vallitessa: p on lopputuotteen hinta ja w on panoksien k ja l yksikköhinta, panos k on 'puhdas' tuotantopanos ja panosta l voidaan käyttää myös päästöjen vähentämiseen. Esimerkiksi puuta käytetään sellun valmistamiseen, josta aiheutuu vesistöpäästöjä. Sähköä käytetään sekä sellun valmistamiseen että vesistöpäästöjen puhdistamiseen. Puhdistamattomat päästöt riippuvat siitä, kuinka paljon sellua on tuotettu sähkön ja puun avulla. Päästöt e ja tuotanto x ovat tulosta kahden panoksen k ja l yhteistuotannosta.

Päästönormitasoa kuvaa eksogeeninen vakio e^*, jonka verran yritys saa korkeintaan aiheuttaa päästöjä. Rajoitteeseen e^* liittyy muuttuja λ (ns. Lagrangen kerroin), jonka arvo on endogeeninen. Yritys valitsee voiton maksimoivat panosmäärät k ja l. Päästöjen ja voiton välityksellä määräytyy myös Lagrangen kertoimen arvo. Käytännössä yritys ei välttämättä maksimoi tarkalleen yhtälön 2.1 mukaista voittoa, mutta kaikissa tapauksissa se havaitsee kuinka päästöjä koskeva rajoite alentaa sen voittoa, joten voidaan väittää, että ongelma L havainnollistaa yleisellä tasolla, miten yritys näkee tilanteen.[1]

Voitonmaksimointiongelmaan sisältyy kaksi funktiota; tuotantofunktio x(k,l) ja päästöfunktio e(k,l).

Yrityksen tuotantoteknologiaa kuvaa tuotantofunktio x(k,l) siten, että $x'_k > 0$ ja $x''_k < 0$ ja tavanomaisessa tapauksessa $x'_l > 0$ ja $x''_l < 0$. Tuotannossa panoksen k käyttö lisää tuotantoa, mutta saavutettava lisätuotanto vähenee, kun panosta k käytetään enemmän ja sama pätee panoksen l suhteen (tuotantofunktio on konkaavi). Samatuotoskäyrät (tuotosisokvantit) ovat konvekseja origon suhteen, mikä on tavanomainen tuotantofunktion ominaisuus.

Toinen mahdollisuus on $x'_l < 0$ ja $x''_l > 0$. Tällöin samatuotoskäyrät ovat kulmakertoimeltaan positiivisia k-l-panostasolla. Tuotantofunktio voi olla tällöinkin konkaavi. Kolmas mahdollisuus on se, että tuotanto on vain k:n funktio eli x'_l on aina nolla, jolloin tuotosisokvantit ovat pystysuoria suoria k-l-panostasolla.

Päästöfunktion ominaisuudet ja funktion taustalla oleva tuotantoteknologia ovat oleellisia seikkoja analyysin kannalta, koska näistä riippuu mm. se onko voitonmaksimointiongelmalla yksiselitteinen ratkaisu ja kuinka yritys reagoi eksogeenisissa tekijöissä kuten lopputuotteen hinnassa p, panosten hinnassa w tai päästönormissa e* tapahtuviin muutoksiin. Siksi on syytä käsitellä hieman perusteellisemmin päästöfunktion ominaisuuksia ja sen taustalla oleva teknologiaa.

Yrityksen 'päästöteknologiaa' kuvaa päästöfunktio e(k,l) siten, että

(2.2) $e'_k > 0,\ e''_k > 0,\ e'_l < 0,\ e''_l > 0,$

(2.3) $e''_{lk} = e''_{kl} < 0$

Päästöt riippuvat 'tuotantopanoksesta' k ja päästöjen vähentämispanoksesta l.[2] Päästöt ovat nollassa, kun puhtaan tuotantopanoksen käyttö on nollassa. Päästöjen vähentämisessä panoksella l vallitsevat vähenevät tuotot. Panoksen l käyttö alentaa päästöjä vakiolla tuotannon tasolla, mutta näin saavutettava päästöjen vähenemä pienenee panoksen l käytön lisääntyessä (yhtälö 2.2). Päästöfunktio voidaan olettaa sellaiseksi, että tuotannon lisääminen kohottaa panoksen l puhdistustehon rajatuottavuutta. Panoksen l lisäys vähentää tuotannosta x aiheutuvaa päästöjen marginaalista lisäystä. Päästöfunktion ristikkäisderivaatta on tällöin negatiivinen (yhtälö 2.3).

Päästöfunktio on kahden muuttujan (k,l) funktio, joten yksinkertainen menettely funktion havainnollistamiseksi on piirtää päästöfunktion päästöisokvantit panostasolle k-l. Päästöisokvantilla päästötaso e pidetään vakiona. Päästöisokvantin yhtälö saadaan päästöfunktion kokonaisdifferentiaalin avulla:

(2.4a) $e(k,l) = e \Rightarrow \mathbf{D}e = 0 = e'_k dk + e'_l dl,$

---

[1] Liiketaloudellisessa näkökulmassa päästönormiongelmassa tarkastellaan sitä, miten päästönormi tai päästömaksu vaikuttaa mm. yrityksen katteeseen ja pääoman tuottoon (Ympäristönsuojelun taloudellinen ohjaus, Ympäristötalouskomitean mietintö 1989 sivut 166 - 169).

[2] Kyseistä päästöfunktiota on käyttänyt mm. Martin (1986).

josta voidaan ratkaista dl/dk suhde[3]:

(2.4b) $dl/dk = -[e'_k/e'_l] = dl/dk[e] > 0$,

joka on siis positiivinen, koska $e'_l < 0$. Mitä kauempana oikealla kuvaajat panostasolla k-l sijaitsevat sitä korkeampi on vakioitu päästötaso e. Kun panos l ei ole välttämätön tuotannossa ja kun päästöt riippuvat tuotannosta ja panoksesta l, päästöisokvanttikuvaajat alkavat vaaka-akselilta. Jokaista tuotantopanoksen tasoa vastaa tietty päästötaso e(x,0), joka voidaan säilyttää, vaikka panoksen k käyttöä lisätäänkin, kunhan samalla lisätään riittävästi (yhtälön 2.4b mukaisesti) päästöjenvähentämispanoksen l käyttöä.[4]

Konveksin päästöisokvantin (kvasikonveksi funktio) tapauksessa alue, joka vähintään toteuttaa päästönormin e*, on konveksi joukko. Jos pisteet z ja f toteuttavat päästönormin e*, myös piste $d = az + (1-a)f$ toteuttaa sen. Piste d on myös panosalueella, jolla päästöt ovat korkeintaan e*. Jos vakiopäästörelaatiot k-l-tasolla ovat konkaaveja, ko. alue ei ole konveksi. Myös konkaavi päästöfunktio käyttäytyy hyvin eli 'laskeutuu' koilliseen eikä yleensä aiheuta ongelmia optimin yksiselitteisyyden suhteen.[5]

Oletus siitä, että päästöt eivät ole nollassa, kun päästöjenvähentämispanosta l ei käytetä, vaan ne ovat tietyllä tuotannon määräämällä positiivisella tasolla, rajoittaa mahdollisten päästöfunktioiden joukkoa. Päästönormittomassa alkutilassa on luonnollista olettaa, että yritys ei käytä maksullista ja tuottamatonta panosta päästöjen vähentämiseen, joten tällainen mahdollisuus on luonnollista sisällyttää tuotantomahdollisuuksien piiriin. Erityisen tärkeää tämä päästöfunktion ominaisuus on silloin, kun tuotanto riippuu vain panoksesta k.[6]

---

[3] Kun funktiosta otetaan kokonaisdifferentiaali, sitä merkitään isolla vahvennetulla d:llä.

[4] Merkintä dx/dy[v] ilmaisee kahden muuttujan suhteen, jolla hakasulkeissa oleva funktio saavuttaa vakioarvon. Tätä merkintää käytetään usein päästöjen, tuotannon, voittojen, kustannusten yms. vakiorelaatioita (isokvanttien yhtälöitä) hyödynnettäessä. Derivaattaa merkitään yläpilkulla, toista derivaattaa kahdella yläpilkulla ja alaindeksi ilmaisee minkä muuttujan tai muuttujien suhteen derivointi on suoritettu.

[5] Kahden muuttujan päästöfunktio e(k,l) on *globaalisti* kvasikonveksi, jos seuraava epäyhtälö on voimassa kaikilla k ja l arvoilla: $-(e'_k)^2 e''_l - (e'_l)^2 e''_k + 2e'_k e'_l e''_{.} < 0$. Kyseessä on neliömuoto, jonka tulisi olla negatiivisesti semidefiniitti. Jos on voimassa seuraavat epäyhtälöt $e''_k > 0$, $e''_l > 0$ ja $e''_k e''_l - (e''_{.})^2 > 0$, niin ko. neliömuoto on aina negatiivinen eli päästöfunktio kvasikonveksi. Päästöfunktion kvasikonveksisuus merkitsee sitä, että vakiopäästökuvaajien e kulmakerroin on positiivinen ja kasvava. (Takayama 1974 sivu 127). Kvasikonveksilla funktiolla on tunnetusti voimassa seuraava ominaisuus. Funktion arvo kahden pisteen keskiarvoilla laskettuna on pienempi tai yhtäsuuri kuin mitä on funktion arvo näiden kahden pisteen maksimiarvolla laskettuna. Eli $f[ca + (1-c)b]$ on pienempi tai yhtäsuuri kuin mitä on maksimi arvoista f(a),f(b). (Esim. Chiang 1984 sivut 337-348) Kvasikonveksin päästöfunktion pinta laskee luoteeseen, mutta laskeva pinta voi olla kupera tai kovera.

[6] Yksi yksinkertainen funktioehdokas, joka täyttää useimmat aikaisemmin esitetyt ehdot, on $e = bk^a \exp(-vl)$, jossa $0 < a < 1$, $b > 0$ ja $v > 0$. Kun $l = 0$, $e = bk^a$ eli päästöt ovat nollasta poikkeavalla tuotannon x määräämällä tasolla. Esimerkkipäästöfunktio toteuttaa $e'_k = ae/k > 0$, $e'_l = -ve < 0$, $e''_k = a(a-1)e/k^2 > 0$, $e''_l = v^2 e > 0$ ja $e''_{kl} = e''_{lk} = -vae/k < 0$. Kun nämä sijoitetaan viitteen 5 neliömuodon yhtälöön, se supistuu termiksi $-a(a-1) + 1 > 0$ (aina), joten kyseessä on globaalisti kvasikonkaavi funktio. Lisäksi $dl/dk[e^*] = a/kv > 0$ eli vakiopäästörelaatio on ainoastaan k:n funktio ja päästöisokvantit ovat yhdensuuntaisia. Päästöisokvanttirelaation toinen derivaatta k:n suhteen on $-(a/v)1/k^2$ eli se on negatiivinen.

Vaikka sekä tuotannossa että päästöfunktiossa käytettävät panokset ovat samoja, yksi vaihtoehto voisi olla se, että yritys voi päättää panoksen l käytöstä erikseen tuotannossa ja päästöjen vähentämisessä. Jos yritys ei käytä panosta l päästöjen vähentämiseen, tästä ei seuraisi sitä, etteikö se voisi käyttää sitä tuotannossa. Vastaavasti, jos yritys ei käytä panosta l lainkaan tuotannossa, tästä ei väistämättä seuraisi, että panosta ei käytetä päästöjen vähentämisessä.

Kaikissa tapauksissa on luontevaa olettaa, että päästöt riippuvat tavalla tai toisella tuotannosta tai ainakin toisesta tuotantofunktiossa olevasta panoksesta (siis epäsuorasti tuotannosta). Tämä voidaan toteuttaa joko olettamalla päästöt riippuvaisiksi panoksesta k tai tuotannosta, joka voi riippua vain panoksesta k tai kummastakin panoksesta. Siis valitsemalla tietyn tuotannon yritys väistämättä valitsee tietyn päästötason päästönormittomassa tilanteessa. Päästöihinsä yritys voi vaikuttaa sekä tuotannon muutoksilla että panoksen l käytön muutoksilla.

Oletetaan, että yrityksen teknologia on sellainen, että se valitsee samat panosmäärät sekä tuotannossa että päästöissä. Erityisesti silloin, kun tuotantofunktion derivaatta panoksen l suhteen on negatiivinen, yritys vaikuttaa päästöjen vähentämisellään myös tuotantoonsa ja lisäksi vaikutus on negatiivinen, mikä lisää päästöjen vähentämisen kustannuksia. Tässä työssä oletetaan, että yritystä rajoittaa 'samapanoskäyttöehto'.[7]

Vaihtoehtoisia päästöfunktioita ovat mm. $e = e(x(k),l)$, jossa tuotanto riippuu vain panoksesta k ja päästöt tuotannosta sekä panoksesta l, sekä $e = e(x(k,l),l)$, jossa päästöt riippuvat tuotannosta x sekä päästöjen vähentämispanoksesta l. Viimeksi mainitussa täytyy olettaa, että $e'_x x'_l + e'_l < 0$ eli panoksen l kokonaisvaikutus päästöihin on niitä alentava. Viimeksi mainittu tapaus ei tuo analyysiin lisää verrattuna edellä esitettyyn päästöfunktioon, jossa päästöt riippuvat suoraan panoksista k ja l, koska tuotannosta ja panoksesta l riippuva päästöfunktio voidaan esittää kahden panoksen päästöfunktiona.

Edellä on tuotantoa ja päästöjä käsitelty tuotantofunktioiden avulla. Analyysissa on implisiittisesti oletettu tuotannon x ja päästöjen e olevan tulosta kahden panoksen k ja l yhteistuotannosta. Tätähän tarkoittaa 'samapanoskäyttöehto'. Toisin sanoen on olemassa jokin yhteistransformaatio $G(x,e,l,k) = 0$. Edellä mainittu 'samapanoskäyttöehto' implikoi sen, että vakiolla panosvektorilla I, esimerkiksi k +

Vakiopäästörelaation kulmakerroin on positiivinen, mutta vähenevä. Vakiopäästörelaatio on konkaavi k-l-tasossa ja näinhän tulee olla kvasikonkaavin funktion tapauksessa. Lisäksi, koska tuotantofunktio on $x = k^a$, yksikköpäästöt ovat $e/x = b\exp(-vl)$ eli ne ovat ainoastaan funktio l:stä. Tietyllä suoralla k-l-tasolla, jolla panoksen l määrä on vakio, yksikköpäästöt ovat vakiot eivätkä riipu tuotantopanoksen määrästä.

[7] Näin lienee usein käytännössä. Päästöjen eliminoiminen edellyttää lisäpanosten käyttöä ja tämän lisäksi tuotantoprosessi muuttuu. Esimerkiksi typenoksidien vähentäminen voimalaitospoltossa merkitsee lisääntyneitä käyttö- ja pääomakustannuksia ja voimalan hyötysuhteen lievää alentumista. (Tähtinen 1991) Tämän artikkelin tuotanto- ja päästöfunktiot ovat Martinin (1986) artikkelista. Martin olettaa, että jos yritys käyttää tietyn määrän l:ää päästöjen vähentämiseen, sen on käytettävä sama määrä l:ää myös tuotannossa. Yksi mahdollinen ratkaisu on olettaa päästöt lopputuotteeksi, jota voidaan edelleen käsitellä. Jälleenkäsittelyssä päästöt jäävät joko oikeiksi päästöiksi ympäristöön tai muuttuvat sivutuotteeksi. Tätä ratkaisua käyttävät sekä Mattila (1979) että Uimonen (1992).

l = I, tuotannon lisääminen tai ylläpitäminen lisäämällä panoksen k käyttöä (dk = -dl) on mahdollista panoksen l käyttöä vähentämällä. Tästä seuraa välttämättä päästöjen kasvu, koska on voimassa $(e'_k - e'_l)dk > 0$. Panos k, jota käytetään tuotannossa, ei ole vapaasti hävitettävissä, vaan se on mukana päästöjen tuotannossa. Tai toisinpäin ilmaisten kahdesta lopputuotteesta päästöt eivät ole vapaasti hävitettävissä. Vakiolla panosvektorilla päästöt vähentyvät vain, jos tuotantoakin vähennetään.[8]

Edellä todettiin, ettei käytettyjen funktioiden taustalla oleva tuotantomahdollisuuksien joukko voi toteuttaa lopputuotteiden eikä panosten täysin vapaata hävitettävyyttä. Toisaalta positiivisella panosvektorilla I ei ole mahdollista, että tuotanto olisi nollassa, mutta päästöt eivät. Yleinen oletus tuotantomahdollisuuksien joukon ominaisuuksista on panosten ja lopputuotteiden täysin vapaa hävitettävyys. Siksi on syytä tarkastella hieman lähemmin minkälainen tuotantomahdollisuuksien joukon esitys on tässä työssä käytettyjen tuotanto- ja päästöfunktioiden taustalla.

Tuotantomahdollisuuksien joukko voidaan esittää useassa eri muodossa. Yleisin esitys on tuotantomahdollisuuksien joukko Y, joka on lista kaikista mahdollisista yrityksen käytettävissä olevista teknologiavektoreista $y \in R^{n+m}$ (ko. vektorissa lopputuotteet 1..m ovat positiivisia ja panokset 1...n ovat negatiivisia). Tuotantomahdollisuuksien joukko voidaan esittää sekä tuotosrelaation $L(x) \in R^n$ että panosrelaation $P(z) \in R^m$ avulla.

Tuotosrelaatio L(x) ilmaisee kaikki ne panosvektorit z, joilla on mahdollista tuottaa lopputuotevektori x. Kuvioon 2.1 on piirretty panosjoukko L(x), joka on tässä tapauksessa kuvion muotoinen k-l-panostasolla.[9]

Panosrelaatio P(z) ilmaisee kaikki ne tuotosvektorit, jotka on mahdollista tuottaa panosvektorilla z. Luonnollisesti on voimassa $z \in L(x) \Leftrightarrow x \in P(z)$.[10] Täten L(x) on joukko panosavaruudessa, jolla voidaan tuottaa tuotosjoukko x. Vastaavasti P(z) on joukko tuotosavaruudessa, jonka tuottaminen on mahdollista panosjoukon z avulla.[11]

---

8 Panosjoukko k + l = I on vain yksi mahdollinen ja hieman erikoinen, koska panosjoukko on sekä alhaalta että ylhäältä rajoitettu.

9 Kuviot ovat liitteessä 4.

10 Färe 1988.

11 Yhden lopputuoteen x ja kahden panoksen k ja l tuotantomahdollisuuksien joukko Y on tavanomaisen tuotantofunktion tapauksessa vektorijoukko (x,-k,-l), joka kuuluu R^3:een ja joka toteuttaa ehdon x=< x(k,l). Tällöin tuotantofunktio on määritelmän mukaan maksimi x ehdolla että (-k,-l) kuuluvat Y:hyn. Funktio x = x(k,l) muodostaa funktiopinnan R^3:ssa ja Y on tämän funktiopinnan alapuolella oleva tila. Y:n kuuluvat sekä funktiopinta että negatiivinen panosalue R^3:ssa (Varian 1992). L(x) on tässä tapauksessa tietyn tuotosisokvantin yläpuolella (ml. tuotosisokvantti) oleva panosalue. Kaikilla näillä panosmäärillä on mahdollista tuottaa x. Panokset ovat täysin vapaasti joukkoon hävitettävissä, koska millä tahansa joukkoon L(x) kuuluvalla panosyhdistelmällä on mahdollista tuottaa vain x, vaikka ko. yhdistelmän kautta kulkee korkeampi samatuotoskäyrä. Tuotannon x mukaisen tuotosisokvantin määrän ylittäviä panoksia voidaan hävittää mielivaltaisissa suhteissa. Vastaavasti P(z) on edellä esitetyn tuotosisokvantin mukaisen panosjoukon tapauksessa tuotosjoukko [0, x]. Siis reaaliluku ko. suljetulla välillä. Panosjoukolla z on mahdollista tuottaa esimerkiksi 0 eli lopputuotos x on täysin vapaasti hävitettävissä.

Panosten heikko hävitettävyys merkitsee sitä, että jos vektorilla z on mahdollista tuottaa x, myös vektorilla αz ($\alpha \geq 1$) voidaan tuottaa x. Panosvektoria x voidaan hävittää, mutta vain hävittämällä sitä proportionaalisesti eli sen kaikkia komponentteja yhtäaikaisesti. Lopputuotteen heikko hävitettävyys merkitsee sitä, jos panosvektorilla z voidaan tuottaa tuotosvektori x, z:llä on mahdollista tuottaa myös tuotosvektori βx ($0 \leq \beta \leq 1$). Päästöjen ja tuotannon x tapauksessa tämä tulkitaan siten, että vakiolla panosvektorilla (esim. L(x)) päästöjä voidaan vähentää vain tuotantoa proportionaalisesti vähentämällä.[12]

Panosten heikko hävitettävyys merkitsee sitä, että kuvaajan L(x) toinen sivu kääntyy takaisinpäin (kuvio 2.1). Toisin sanoen, kun tietyltä tasolta lähtien lisätään panoksen k käyttöä myös panoksen l käytön on lisäännyttävä, jotta kyetään tuottamaan tietty vakiomäärä (vakioitu joukko) päästöjä ja tuotosta x.

Vastaavasti tuotosten heikko hävitettävyys käy ilmi kuviosta 2.2. Vaaka-akselilla mitataan päästöjä ja pystyakselilla tuotantoa. Koska yritys voi käyttää alueen L(x) mukaisen määrän kumpaakin panosta ja koska lopputuotteet ovat heikosti hävitettävissä, panosjoukolla L(x) voidaan tuottaa lopputuotos (0,0). Alueen L(x) mukainen panosjoukko kuvautuu kolmion P(z) mukaiseksi tuotosjoukoksi. Kuviosta 2.2 käy ilmi, että tuotosjoukon kahdella reunalla päästöt ja tuotanto lisääntyvät samanaikaisesti ja tuotosjoukon kolmannella ulommaisella reunalla päästöjen väheneminen on yhdistettävissä tuotannon lisääntymiseen.

Sitova päästönormi e* voidaan havainnollistaa tuotosjoukon P(z) avulla siten, että päästönormi on pystysuora jana ja yrityksen on vähennettävä tuotontoaan saavuttaakseen päästönormin. Myyntituloja kuvaa vaakasuora jana px, koska päästöjen hinta on nolla. Vähäisemmästä tuotannosta seuraa myyntitulojen px alentuminen vapaaseen optimiin verrattuna eli yritys joutuu alemmalla sijaitsevalle (vakio) myyntitulosuoralle. Myyntitulojen erotus on päästönormista ja tuotoksien ei-vapaasta hävitettävyydesta aiheutuva päästönormiin liittyvä varjohinta.

On myös mahdollista kuvitella teknologia, joka mahdollistaa nollapäästöt ainakin tietyillä suhteellisen alhaisilla tuotannon tasoilla. Toinen mahdollinen teknologia on sellainen, jossa sekä päästöt että tuotanto eivät voi olla nollassa, kun panosjoukko on kuvion 2.1 mukainen. Toisin sanoen kuvion 2.2 kolmion alakulma siirtyy johonkin positiiviseen x,e-yhdistelmään.[13]

---

[12] Färe 1988.

[13] Yksi tapa yksinkertaistaa tilannetta on olettaa lopputuotteen olevan tulosta panoksesta k ja päästöistä e. Näiden välinen suhde voidaan olettaa normaaliksi eli isokvantit ovat konvekseja, kun akseleina ovat tuotanto x ja päästöt e. Lisäksi oletetaan, että nettopäästöt E riippuvat panoksesta l ja päästöistä e. Näiden välinen suhde on tavanomainen eli lisäämällä panoksen l käyttöä nettopäästöt E vähenevät. Kun panoksen l käyttö on nollassa, nettopäästöt ovat jollakin positiivisella tasolla. Tätä ratkaisua on käyttänyt Uimonen (1992). Kyseessä ei ole yhteistuotanto, koska yritys käyttää panosta k vain tuotannossa ja panosta l vain päästöjen e muuntamisessa nettopäästöiksi.

2.2 Optimiehdot ja niiden tulkinta

Välttämättömät ehdot ongelman 2.1 maksimin toteutumiselle saadaan tavanomaisesti derivoimalla funktio 2.1 argumenttiensa k, l ja L:n suhteen ja asettamalla näin saadut osittaisderivaatat nollaksi:[14]

(2.5) $[dL/dk]k^* = [px'_k - w - \lambda^* e'_k]k^* \leq 0,$

missä [..] = 0 jos $k^* > 0$

(2.6) $[dL/dl]l^* = [px'_l - w - \lambda^* e'_l]l^* \leq 0,$

missä [..] = 0 jos $l^* > 0$

(2.7) $[dL/d\lambda]\lambda^* = [e^* - e(k^*,l^*)]\lambda^* \geq 0$

missä [..] = 0 jos $\lambda^* > 0$

Koska kyseessä ovat ns. Kuhn-Tucker ehdot hakasulkeissa olevan yhtälön (yhtälöt 2.5 -2.7) toteutuminen epäyhtälönä merkitsee, että muuttujan k*, l* tai λ* optimiarvo on nolla. Näin voi käydä päästöjen vähentämispanoksen l suhteen etenkin silloin, jos on voimassa $x'_l \leq 0$ koska panoksen l haitallinen vaikutus tuotannossa lisää panoksen tuottovaatimusta päästöjen vähentämisessä. Panoksen yksikkö- ja rajakustannus w voi osoittautua suuremmaksi kuin panoksen käytöllä saavutettava hyöty. Puhdistuspanoksen l rajatuottavuus on 'epäsuoraa' silloin, kun $x'_l(k,l)$ on nolla, jolloin panoksen käytöllä vaikutetaan päästörajoitteen saavuttamiseen.

Oletetaan optimi, jossa kaikki ensimmäisen kertaluvun ehdot toteutuvat yhtälöinä. Tällöin yritys käyttää kumpaakin panosta ja päästönormi e* on sitova $(k^*,l^*,\lambda^* > 0)$. Yhtälöiden 2.5. ja 2.6 hakasulkeissa olevat derivaatat voidaan esittää muodossa:

(2.8) $x'_k = (w + \lambda^* e'_k)/p$

(2.9) $x'_l = (w + \lambda^* e'_l)/p$

(2.10) $p/\lambda^* = (e'_k - e'_l)/(x'_k - x'_l)$

Yhtälön 2.8 mukaan panoksen k rajatuottavuus (vasemmalla puolella) on korjattu saman panoksen vaikutuksella päästöihin. Koska w ja p ovat eksogeenisia vakioita, yhtälön 2.8 toteutuminen merkitsee panoksen k suurempaa rajatuottavuutta kuin vapaassa optimissa (jossa oikean puolen osoittajassa on vain w). Korkeampi rajatuottavuus saavutetaan käyttämällä vähemmän panosta k kuin vapaassa optimissa, koska $x''_k < 0$.

[14] Ongelmassa (2.1) ei ole mukana panosten ei-negatiivisuusrajoitteita ja niihin kuuluvia Lagrangen kertoimia. Yhtälöt 2.5-2.7 kuvaavat myös ei-negatiivisuusrajoitteiden mukaisia optimiehtoja. Kyseessä ovat tunnetut Kuhn-Tucker ehdot, jotka on esitetty mm. Chiangissa (1984) sivuilla 722 -730. Muuttujien k,l ja L optimiarvoja on merkitty ylätähdellä.

Yhtälöstä 2.9 käy ilmi, että samoin kuin edellä panoksen l rajatuottavuuteen tuotannossa vaikuttaa saman panoksen rajapäästövaikutus. Erona on se, että panoksen l käyttö vähentää päästöjä ja yhtälön vasen puoli voi olla oletuksista riippuen positiivinen, negatiivinen tai nolla. Mikäli tuotantofunktio on sellainen, että vasen puoli on nolla, panosta l käytetään siihen pisteeseen saakka, jossa sen rajapuhdistusteho ($-\lambda^*e'_l$) vastaa panoksen hintaa (w). On myös mahdollista, että toteutuu epäyhtälö $-\lambda^*e'_l(k^*,0) < w$ sekä optimi Lagrangen kerroin ei ole nolla. Päästönormi on sitova optimissa, mutta päästönormi saavutetaan tuotantoa vähentämällä käyttämättä panosta l. Tämä vaihtoehto toteutuu silloin, kun panos l on tehoton päästöjen vähentämisessä, jolloin derivaatan arvo $e'_l(k,l)$ lähellä panoksen l nollakäyttöä on kaikilla tuotannoilla suhteellisen pieni.

Mikäli tuotantofunktio on tavanomainen eli optimissa $x'_l > 0$, yhtälön 2.9 oikean puolen osoittajassa täytyy olla voimassa $w > -\lambda^*e'_l$. Panoksen l rajapuhdistusteho on optimissa pienempi kuin panoksen hinta. Tämä johtuu siitä, että panoksen l kokonaisrajatuottavuutta kohottaa sen normaali positiivinen vaikutus tuotantoon. Tai jos tarkastellaan asiaa tuotannon näkökulmasta ja verrataan toiseen tuotantopanokseen, tuotannossa panoksen l rajatuottavuus on pienempi kuin panoksen k rajatuottavuus. Tämä merkitsee suurempaa panoksen l käyttöä, koska $x''_l < 0$.

Jos tuotantofunktio on sellainen, että optimissa $x'_l < 0$, oikean puolen osoittajassa on voimassa $w < -\lambda^*e'_l$. Koska panoksen l vaikutus tuotantoon on negatiivinen, tämä tulee kompensoida siten, että panosta käytetään puhdistuksessa enemmän kuin mitä on panoksen nimellinen kustannus (w). Tässä tapauksessa panoksen l haitallinen tuotantovaikutus lisää sen kustannuksia päästöjen vähentämisessä. Jotta panosta l ylipäänsä käytettäisiin, sen tehon päästöjen puhdistuksessa (e'_l:n arvo) on oltava suhteellisen suuri.

Yhtälöstä 2.10 käy ilmi, että tuotannon hyöty (marginaalisessa mielessä) kuluttajille eli p 'deflatoituna' optimaalisella Lagrangen kertoimella on yhtä suuri kuin päästöfunktion ja tuotantofunktion vastaavien derivaattojen suhde. Koska oikean puolen osoittaja on oletusten mukaan aina suurempi kuin nolla, nimittäjän täytyy olla aina positiivinen riippumatta panoksen l tuotantovaikutuksesta. Mikäli panoksen l rajatuottavuus tuotannossa on nolla tai negatiivinen nimittäjä on automaattisesti positiivinen. Mikäli tuotantofunktio on tavanomainen, yhtälöstä 2.8 seuraa se, että panoksen k rajatuottavuuden tuotannossa tulee olla suurempi kuin mitä on panoksen l vastaava tuottavuus. Tämä johtuu siitä, että panoksen l käyttö vähentää päästöjä, kun panoksen k käyttö puolestaan lisää päästöjä. Jotta panoksen k kokonaistuottavuus olisi sama kuin panoksen l kokonaistuottavuus, koska panosten hinta on sama w, päästövaikutus ero tulee kompensoitua korkeammalla rajatuottavuudella tuotannossa. Kuten aikaisemmin jo todettiin tämä merkitsee panoksen k vähäisempää käyttöä kuin päästönormittomassa optimissa. Päästönormittomassa (vapaassa) optimissa panosten rajatuottavuudet ovat samat ja tällöin on voimassa $x'_k(k,l) = w/p = x'_l(k,l)$.

Edellä esitettyjä yhtälöitä voidaan edelleen muokata ja yksi mahdollinen esitys on seuraava:

(2.11) $p = \{w(1 + dl/dk[e^*])\}/\{x'_k - x'_l dl/dk[e^*]\}$

Yhtälön 2.11 oikean puolen osoittajassa on panoksen k käytöstä aiheutuvat kokonaisrajakustannukset. Yhden 'rajayksikön' käyttäminen panosta k lisää panoskustannuksia määrällä w ja toiseksi panoksen k käyttö lisää päästöjä, jotka on kompensoitava (pidettävä ennallaan) lisäämällä panoksen l käyttöä. Osoittajan toinen termi ilmaisee tämän vaikutuksen. Tässä mielessä normiohjaus vaikuttaa yrityksen rajakustannuksiin.

Yhtälön 2.11 oikean puolen nimittäjässä on panoksen k kokonaisvaikutus tuotantoon. Ensimmäinen termi on suoraan panoksen k rajatuottavuus tuotannossa ja toinen termi on panoksen k käytön muutoksen vaikutus panoksen l tuotantovaikutukseen. Vaikutus tulee vakiopäästörelaation kautta ja on positiivinen. Panoksen l käyttö lisääntyy panoksen k käytön lisääntyessä. Mikäli tuotantofunktio on tavanomainen ($x'_l > 0$) päästönormin vaikutus alentaa panoksen k kokonaisrajatuottavuutta ja jos on voimassa $x'_l < 0$ päästönormi vaikutus lisää panoksen k rajatuottavuutta.

Yhtälöstä 2.11 ilmenee, että tuotannon raja-arvo on sama kuin tuotantopanoksen rajakustannus jaettuna tuotantopanoksen rajatuottavuudella. Mikäli yhtälön 2.11 oikean puolen nimittäjä kerrotaan vasemmalle puolelle tulos on normaali optimiehto: panoksen k käytöstä aiheutuva rajatulo on sama kuin panoksen k käytöstä aiheutuva rajakustannus.

Päästönormiongelma graafisesti esitettynä

Yhtälöiden (2.5 - 2.7) ohella tilannetta voidaan tarkastella kuvioiden avulla. Kuviot havainnollistavat optimiehtojen sisältöä. Lisäksi kuvioiden avulla on helppo havainnollistaa tapaus, jossa panosta l ei kannata lainkaan käyttää.

Voitonmaksimointiongelma L koostuu tavallaan kahdesta osasta: tavanomaisesta voitto-osasta (merkitään LM), jossa myyntituloista px(k,l) on vähennetty panoskustannukset w(l+k) sekä päästörajoiteosasta $\lambda(e^* - e)$. Ensiksi mainittu osa on sama, jota yritys maksimoi, kun päästönormia e* ei lainkaan aseteta eli loppuosa puuttuu (vapaa tai päästönormiton optimi).

Kun voitto-osa (LM) derivoidaan panoksien k ja l suhteen ja asetetaan voiton muutos nollaksi, josta ratkaistaan dk/dl-suhde niin saadaan ns. vakiovoittokäyrä, joka voidaan piirtää k-l-panostasoon:

(2.12) $DLM = (px'_k - w)dk - (px'_l - w)dl = 0$

(2.13) $dl/dk[LM] = (px'_k - w)/(-px'_l + w)$

Yhtälön 2.12 sulkeissa olevat yhtälöt ovat vapaan päästönormittoman optimin ensimmäisen kertaluvun ehdot. Yhtälö 2.13 ilmaisee vakiovoittokäyrän kulmakertoimen. Kun tuotanto riippuu vain panoksesta k, nollakohdat sijaitsevat samalla vertikaalilla suoralla, mikä johtuu siitä, että tuotanto ja näin myös myyntitulot riippuvat ainoastaan panoksesta k. Vakiovoittokäyrät ovat k-l-panostasolla alaspäin aukeavia 'yhdensuuntaisia' parabeleja, joiden nollakohta (käännepiste) on sillä panoksen tasolla, jolla toteutuu yhtälö $px'_k = w$.

Epätavanomaisen tuotantofunktion tapauksessa, jolloin x'_l on negatiivinen, yhtälön 2.13 oikean puolen nimittäjä on aina positiivinen ja myös tässä tapauksessa vakiovoittokäyrät ovat alaspäin aukeavia parabeleja. Lisäksi niiden käännepiste määräytyy kuten edellisessä tapauksessa. Kummassakin tapauksessa ylempänä sijaitseva vakiovoittorelaatio merkitsee alhaisempaa vakioitua voittoa.

Tavanomainen tuotantofunktio, joka toteuttaa $x'_l > 0$ ja $x''_l < 0$, merkitsee sitä, että vakiovoittokäyrät ovat soikioita k-l-panostasolla. Vapaan optimin mukainen voittotaso eli huippu löytyy sillä k-l-panoskombinaatiolla, jolla yhtälön 2.12 kummatkin sulkeissa olevat lausekkeet ovat nollassa.[15]

Ensimmäisessä ja toisessa tapauksessa päästönormiton optimi sijaitsee vaaka-akselilla. Ensimmäisessä tapauksessa ei ole mitään mieltä käyttää maksullista panosta l päästöjen vähentämiseen, koska päästönormia ei ole asetettu. Toisessa tapauksessa toteutuu panoksen l nollakäyttö tuotannossa, koska sen haitallinen vaikutus tuotantoon kyetään näin minimoimaan.[16] Kolmannessa tapauksessa kuten jo todettiin päästönormiton optimi löytyy vakiovoittokäyrien huipulta ja päästönormittomassa optimissa käytetään kumpaakin panosta.

Panostasoon k-l voidaan piirtää myös se alue, jolla päästönormi e* toteutuu. Kun voimassa ovat aikaisemmat oletukset päästöfunktion e ominaisuuksista, ko. alue on konveksi. Kun yhdistetään vakiopäästökäyräkuvaus vakiovoittokäyräkuvaukseen ongelma 2.1 on helppo havainnollistaa panostasolla k-l. Tämä on tehty kuviossa 2.3. Kuviossa 2.3 täytyy etsiä korkein mahdollinen vakiovoittokäyrä, joka toteuttaa päästönormin e* eli sijaitsee varjostetulla alueella (ml. reuna). Kuviossa 2.3 kyseessä oleva tilanne toteutuu pisteessä Q*, jossa vakiovoittokäyrä LM tangeeraa päästötason e* kuvaajaa. Kuviossa 2.3 on esitetty erikoistapaus, jossa tuotanto, siis voitot, riippuvat vain panoksesta k ja päästöt riippuvat kummastakin panoksesta.

Koska vakiopäästörelaatio on konveksi ja vakiovoittokäyrä on konkaavi, yksiselitteinen sivuamispiste löytyy. Tangeerauspiste löytyy silloinkin, kun vakiopäästökuvaaja on konkaavi, mutta vähemmän konkaavi kuin vakiovoittokäyrä.

Optimipistettä Q* kuvannee parhaiten ehto, jossa vakiovoittofunktion (LM) ja päästöfunktio (e*) sivuavat toisiaan:[17]

---

[15] Kun tuotantofunktio on konkaavi, voitto-osakin on konkaavi. Tämä johtuu voitto-osan lineaarisesta kustannusosasta, joka on konkaavi (konveksi) eikä vaikuta suuntaan eikä toiseen.

[16] Tämän vuoksi vapaakin optimi tulisi käsitellä ei-negatiivisuus rajoitteiden avulla (Kuhn-Tucker). Päästönormitonta optimia kuvaa siis $px'_k(k,0) = w$. Tässä tapauksessa tuotannon maksimointi johtaa myös päästöjen maksimointiin, koska panosta l ei käytetä lainkaan päästöjen puhdistamiseen.

[17] Myös rajoiteosa voidaan derivoida ja tulos voidaan kertoa Lagrangen kertoimella. Vektorimuodossa

(2.14) $dl/dk[LM] = (px'_k - w)/(px'_l - w) = -e'_k/e'_l = dl/dk[e^*]$

Tangeerauspisteessä kummankin kuvaajan kulmakerroin on positiivinen. Täten $px'_k - w = (px'_l - w)\{-e'_k/e'_l\} > 0$ eli päästönormi aiheuttaa sen jo aikaisemmin todetun seikan, että yritys käyttää panosta k vähemmän kuin vapaassa optimissa, jossa $px'_k - w = 0$.

Mikäli on voimassa $x'_l \leq 0$ ja panoksen l tuottavuus päästöjen vähentämisessä on alhainen, yritys ei käytä lainkaan panosta l. Vakiopäästörelaation kulmakerroin on k-akselin lähellä suhteellisen suuri, ja korkein mahdollinen vakiovoittorelaatio osuu päästönormin e* toteuttavaan vakiopäästökuvaajaan k-akselilla. Optimipiste ei välttämättä ole näiden kahden kuvaajan sivuamispiste.[18]

2.3 Epäsuora voittofunktio sekä hinta- ja päästönormimuutosten vaikutukset optimiin

Yrityksen optimointiongelmassa on kolme yhtälöä (ensimmäisen kertaluvun ehdot) ja kolme endogeenistä muuttujaa (k, l ja λ) sekä kolme eksogeenistä muuttujaa (p,w,e*). Jos optimointiongelma ratkeaa, maksimoitava funktio, tässä tapauksessa voittofunktio, voidaan ilmaista eksogeenisten parametrien funktiona siten, että optimipanosmäärät sijoitetaan ongelmaan L:n ratkaisuksi. Voittofunktio on näiden parametrien funktio, koska voittofunktion argumentit k^*, l^* ja λ^* ovat parametrien funktioita. Näin syntyvää parametreistä riippuvaa voittofunktioa kutsutaan epäsuoraksi voittofunktioksi.[19]

Sijoittamalla ensimmäisen kertaluvun ehtojen (2.5 -2.7) perusteella määräytyvät k^*, l^* ja λ^* ongelmaan 2.1 (merkitään epäsuoraa voittofunktiota ylätähdellä erotukseksi optimointiongelman 2.1 funktiosta) ja derivoimalla tämä optimointiongelma p:n, w:n ja e*:n suhteen siten, että optimiarvot (k^*, l^*, λ^*) ovat parametrien p,w ja e* funktioita sekä ottamalla huomioon ensimmäisen kertaluvun ehdot (2.5 - 2.7) saadaan tuloksiksi:

esitettynä kyseessä on päästöfunktion gradienttivektori kerrottuna L:llä. Tällöin yhtälön 2.1 tilanne merkitsee sitä, että e:n gradienttivektori ja voittofunktion gradienttivektori ovat optimissa Q* yhdensuuntaisia. Tangeeraus mahdollistaa optimille Q* kaksi vaihtoehtoista tulkintaa. Ensinnäkin jo edellä mainittu eli voiton maksimointi ehdolla, että päästönormi e* tulee saavuttaa. Toiseksi päästötason e minimointi ehdolla, että vähintään voitto VM* tulee saavuttaa. Kummatkin tapaukset toteutuvat pisteessä Q*. Rajoitetun optimoinnin gradienttitarkastelu on mm. Dixonin, Bowlesin & Kendrickin kirjassa (1980) sivuilla 4 - 23.

18 Yksi päästöjen rajoittamiskeino on panoksen l käyttöä koskeva normi, mikä on helppo havainnollistaa k-l-panostasolla. Panosnormi on vaaka-suora jana k-l-tasolla ja yrityksen on valittava janan yläpuolelta ml. jana. Esimerkiksi tavanomaisen tuotantofunktion tapauksessa optimissa on voimassa $px'_k - w = 0$, mutta $px'_l - w > 0$. Vakiovoittokäyrä sivuaa optimissa janaa $l = l^*$, mikä on yhtäpitävää ensimmäisen edellä esitetyn yhtälön kanssa. Mikäli pyritään samaan päästötasoon e*, päästönormi e* ja vastaavan panosnormin l^* ($e^* = e(x,l^*)$) toteuttaminen merkitsevät sitä, että jälkimmäisesssä tapauksessa yrityksen voitto on pienempi kuin edellisessä tapauksessa. Päästönormin saavuttamisessa tuhlataan siis voittoa panosnormin tapauksessa.

19 Kuluttajan valintateoriassa analoginen käsite on epäsuora hyötyfunktio, jossa hyöty on ilmaistu hintojen ja tulojen suhteen. Yrityksen teoriassa analogia on kustannusfunktio, jossa (minimi)kustannukset on ilmaistu tuotannon ja panoshintojen suhteen sekä tavanomainen voittofunktio, joka ilmaisee voiton lopputuotteen hinnan ja panoksien hinnan suhteen. Varian (1992) sivut 40-48, 72-74 ja 102-103.

(2.15) $dL^*/dp = x^*$

(2.16) $dL^*/dw = - k^* - l^*$

(2.17) $dL^*/de^* = \lambda^*$

Koska kyseessä on ns. epäsuoran voittofunktion (voitto ilmaistaan optimaalisten endogeenisten muuttujien arvojen avulla eksogeenisten parametrien funktiona) derivointi tulokset saadaan ns. verhokäyräteorian perusteella. Ensimmäisen kertaluvun ehtojen hyväksikäyttö (vaikutus) 'neutraloi' suurimman osan parametrin muutoksen vaikutuksesta ja siksi yhtälöt 2.15 -2.17 ovat hyvin yksinkertaisia.

Yhtälö 2.15 ilmaisee tarjonnan muutoksen lopputuotteen hinnan muuttuessa. Marginaalinen hinnanmuutos lisää tuotettua määrää optimin mukaisella määrällä sekä marginaalisen hinnanmuutoksen vaikutus yrityksen voittoon on optimituotanto x^*. Tämä on normaalitapaus eikä päästönormikäytäntö luonnollisestikaan muuta tilannetta.[20]

Yhtälö 2.16 ilmaisee sen seikan, että panoksen marginaalinen hinnan muutos vaikuttaa yrityksen voittoon panoskäytön määrällä.[21] Yhtälöstä 2.17 käy ilmi tärkeä seikka. Sitovan päästörajoitteen vaikutus voittofunktioon optimissa on λ^*. Yrityksen voitto kasvaa λ^*:n verran, kun päästönormia aavistuksen verran löystetään tasolta e^*. Lagrangen kertoimen arvo ilmaisee päästönormin *marginaalisen muuttamisen* vaikutuksen yrityksen voittoon. Kyseessä on päästöjen rajoittamisen varjohinta yrityksen voiton näkökulmasta ja yhtälön 2.17 tulos on tavanomainen rajoitetussa maksimoinnissa.[22]

Tavanomaiselle voittofunktiolle pätee se seikka, että se on hintojen suhteen homogeeninen astetta yksi.[23] Toisin sanoen $L^*(ap,aw) = aL^*(p,w)$. Kun kaikki hinnat kerrotaan vakiolla a, voitto muuttuu a-kertaiseksi. Kun päästönormin toteuttavan yrityksen hinnat esimerkiksi inflaation takia kasvavat a-kertaisiksi, päästönormi luonnollisesti toteutuu edelleenkin. Yritys ei saa rikkoa päästönormia hinnan muutosten jälkeenkään. Ensimmäisen kertaluvun ehdot voidaan inflaation tapauksessa esittää muodossa $a[px'_k - w]/a[px'_l - w] = \lambda e'_k / \lambda e'_l$. Koska päästötaso on edelleenkin e^* ja panoksien rajatuottavuuksen suhde on sama kuin tilanteessa, jossa $a = 1$, yritys käyttää saman määrän kumpaakin panosta. Toisin sanoen yrityksen voitto on $apx(k^*,l^*) - awk^* - awl^* = aL^*$. Myös päästörajoitetun yrityksen voittofunktio on hintojen suhteen homogeeninen astetta yksi.

Koska optimaaliset endogeeniset muuttujat voidaan ilmaista eksogeenisten parametrien funktioina, voidaan näiden funktioiden avulla määritellä kuinka k, l tai L muuttuvat, kun eksogeenisessä muuttujassa tapahtuu muutos.

[20] Varian (1992) sivu 43.

[21] Kreps (1990) sivu 245.

[22] Tämä Lagrangen kertoimen ominaisuus voidaan johtaa mm. verhokäyräteorian avulla. Silberberg (1978) sivut 170-171.

[23] Kreps (1990) sivut 244-245.

Kiinnostavia relaatioita ovat optimaalisen panoskäytön ja Lagrangen kertoimen muutokset, kun joku parametreistä p, w tai e muuttuu. Toisin sanoen mitkä ovat relaatioiden dk*/dw, dl*/dw, dλ*/dw, dk*/dp, dl*/dp, dλ*/dp, dk*/de, dl*/de ja dλ */de etumerkit? Ko. relaatiot saadaan differentioimalla ensimmäisen kertaluvun ehdot ja päästörajoite w:n, p:n ja e:n suhteen. Differentioitavat yhtälöt (3 kpl) ovat ensimmäisen kertaluvun ehdot:

$$(2.18)\quad \begin{bmatrix} px'_k - w - \lambda e'_k \\ px'_l - w - \lambda e'_l \\ e * - e(k,l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} = \\ = \\ = \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ko. differentioinnin avulla saadaan selville sellaiset parametrien (p,w,e*) muutokset, jotka säilyttävät voimassa sekä maksimoitavan funktion ensimmäisen kertaluvun ehdot että sitovan päästörajoitteen. Näin menetellen tutkitaan, kuinka rajoitetta ei-rikkova (tasapaino-)optimi muuttuu tietyn eksogeenisen parametrin muutoksen seurauksena. Erityisen mielenkiintoinen on tieto siitä, kuinka rajoitteen (e*) marginaalinen muutos vaikuttaa panosten käyttöön.

Differentiaaleista voidaan muodostaa seuraavat yhtälöt, jotka ovat osittain ovat samat kuin toisen kertaluvun ehdon yhtälöt.[24] Matriisimuodossa voidaan esittää yhtälöt:

$$(2.19)\quad \begin{bmatrix} L''_k & L''_{kl} & -e'_k \\ L''_{lk} & L''_l & -e'_l \\ -e'_k & -e'_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dk/di \\ dl/di \\ d\lambda/di \end{bmatrix} \begin{bmatrix} = \\ = \\ = \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x'_k \\ -x'_l \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Yhtäläisyysmerkkivektorin oikealla puolella olevat pystyvektorit liittyvät merkkimuuttujaan i. Ensimmäisessä pystyvektorissa di = dw, toisessa di = dp ja kolmannessa di = de*.[25]

Yhtälön 2.19 vasemmanpuoleisin kerroinmatriisi on identtinen (determinantin arvo on sama) toisen kertaluvun ehtojen matriisin kanssa ja tällöin tiedetään, että ko. matriisin determinantin arvo on positiivinen. Merkitään kerroinmatriisin determinantin arvoa J*:llä.

Kun yhtälöryhmään 2.19 sovelletaan Cramerin sääntöä, halutut komparatiivisen statiikan tulokset saadaan laskettua. Esimerkiksi dk/de* on seuraava[26]

$$(2.20)\ dk/de^* = \begin{bmatrix} 0 & L''_{kl} & -e'_k \\ 0 & L''_l & -e'_{\lambda} \\ -1 & -e'_l & 0 \end{bmatrix} / J^* = (e'_l L''_{kl} - e'_k \Lambda''_l)/J^*$$

[24] Toisen kertaluvun ehdot on esitetty liitteessä 3.

[25] Komparatiivisen statiikan tulokset rajoitetussa optimoinnissa on esitetty esimerkiksi Silberbergissä (1978) sivuilla 159 -163.

[26] Cramerin sääntö löytyy mm. Chiangista (1984) sivuilta 107 -110.

Päästönormin muutoksen vaikutus tuotantopanoksen käyttöön ei ole yksiselitteinen. Jos on voimassa epäyhtälö $dl/dk[e^*] > -[L''_l/L''_{kl}]$, päästönormin kiristyminen vähentää tuotantopanoksen käyttöä.

Normaalitapauksessa oletetaan, että päästönormin e* kiristyminen vähentää tuotantopanoksen k käyttöä eli vähentää tuotantoa tätä kautta. Merkitään yhtälön 2.20 oikean puolen osoittajaa V1:llä myöhempää käyttöä varten. Jos päästönormin kiristys vähentää tuotantopanoksen käyttöä oletetaan, että $V1 > 0$.

Päästönormin muutoksen vaikutus puhdistuspanoksen käyttöön on

$$(2.21) \qquad dl/de^* = [L''_{kl}e'_k - L''_k e'_l]/J^*$$

Yhtälö 2.21 on pienempi kuin nolla, kun on voimassa epäyhtälö $dl/dk[e^*] < -[L''_k/L''_{kl}]$.

Normaalitapauksessa oletetaan, että päästönormin kiristyminen lisää puhdistuspanoksen käyttöä ($dl/de^* < 0$). Merkitään yhtälön 2.21 oikean puolen osoittajaa V2:lla, jonka siis oletetaan olevan negatiivinen.

Päästönormin vaikutus Lagrangen kertoimeen on

$$(2.22) \qquad d\lambda/de^* = -[(L''_k)(L''_l) - (L''_{kl})^2]/J^*,$$

josta tiedetään, että kun toisen kertaluvun ehdot ovat voimassa, ko. relaatio on negatiivinen. Tämä onkin luontevaa, koska tällöin kireämpi päästönormi e* suurentaa sitovan päästönormin arvoa. Päästöjen varjohinta suurenee päästönormin kiristyessä. Kaikissa yhtälöissä nimittäjässä esiintyvä determinantion arvo voidaan esittää myös muodossa $J^* = e'_k V1 + e'_l V2$.

Panosten hinnan muutoksen vaikutus tuotantopanoksen käyttöön on

$$(2.23) \qquad dk/dw = e'_l(e'_k - e'_l)/J^* < 0$$

Kuten havaitaan panoshinnan nousu vähentää aina tuotantopanoksen käyttöä. Panoshinnan muutoksen vaikutus päästöjen vähentämispanoksen käyttöön on:

$$(2.24) \qquad dl/dw = -e'_k(-e'_l + e'_k)/J^* < 0$$

Tämäkin tulos on ilmeinen. Puhdistuspanoksen hinnan nousu vähentää ko. panoksen käyttöä. Yhtälöistä 2.23 ja 2.24 ilmenee, ettei päästönormi vaikuta panoshinnan muutoksen ja panoksen käytön muutoksen välisiin tavanomaisiin tuloksiin.

Lisääkö panoshinnan nousu sitovan päästörajoitteen vaikutusta yrityksen voittoon, on mielenkiintoinen seikka:

$$(2.25) \qquad d\lambda/dw = [-L''_{kl}e'_l + L''_l e'_k + L''_k e'_l - L''_{kl}e'_k]/J^*,$$

$$= -[V1 + V2]/J^* = -\theta/J^*$$

Kuten yhtälöstä 2.25 käy ilmi, panoshinnan vaikutus optimaaliseen Lagrangen kertoimen arvoon ei ole yksiselitteisesti määriteltävissä. Tämä johtuu siitä, että panoshinta w vaikuttaa päästönormiin e* (ja tätä kautta λ*:een) sekä panoksen l että k välityksellä. Panoksen hinnan nousu alentaa tuotantoa ja päästöjä k:n välityksellä, siis helpottaa päästönormin saavuttamista. Toisaalta panoksen hinnan nousu 'vaikeuttaa' päästönormin e* saavuttamista panoksen l käytön kallistumisen välityksellä. Luonteva oletus on, että panoksen hinnannousu kohottaa Lagrangen kertoimen arvoa. Tällöin oletetaan, että $\theta < 0$. Panoshinnan muutoksen vaikutus Lagrangen kertoimeen saadaan jälkimmäiseen muotoon käyttämällä hyväksi yhtälöitä 2.20 (V1) ja 2.21 (V2).[27]

Tärkeä eksogeeninen parametri yhden yrityksen tapauksessa on lopputuotteen hinta p. Lopputuotteen hinnan muutoksen vaikutus tuotantopanosoptimiin on:

$$(2.26) \qquad dk/dp = e'_l[x'_k e'_l - x'_l e'_k]/J^* > 0$$

Tämäkin yksiselitteinen tulos on luonteva. Lopputuotteen hinnannousu lisää tuotantovaikutuksen kautta tuotantopanoksen käyttöä normaaleissa tapauksissa yksiselitteisesti ($x'_l \geq 0$). Vastaavasti lopputuotteen hinnan muutoksen vaikutus puhdistuspanoksen käyttöön on

$$(2.27) \qquad dl/dp = -e'_k[x'_k e'_l - e'_k x'_l]/J^* > 0$$

Myös puhdistuspanoksen käyttö lisääntyy lopputuotteen hinnan noustessa normaalin tuotantofunktion tapauksessa tai tuotannon riippuessa vain panoksesta k. Puhdistuspanoksen käytön on lisäännyttävä tuotannon lisääntyessä, jotta päästöt eivät ylittäisi normipäästöjä e*. Graafisesti tarkasteltuna yhtälöt 2.26 ja 2.27 merkitsevät sitä, että lopputuotteen hinnan noususta seuraa siirtyminen rajoitetta e = e* pitkin ylöspäin (kuvio 2.3), mikä merkitsee kummankin panoksen määrän käytön lisääntymistä.[28]

Kuinka Lagrangen kertoimen arvo muuttuu lopputuotteen hinnan muuttuessa ilmaisee seuraava yhtälö:

$$\begin{aligned}(2.28)\ d\lambda/dp &= \{e'_k[x'_l L''_{kl} - x'_k L''_l] + e'_l[x'_k L''_{kl} - x'_l L''_k]\}/J^* \\ &= \{x'_k[e'_l L''_{kl} - e'_k L''_l] + x'_l[e'_k L''_{kl} - e'_l L'_k]\}/J^* \\ &= [x'_k V1 + x'_l V2]/J = \delta/J^*\end{aligned}$$

Yhtälö 2.28 on suurempi kuin nolla aina, kun on voimassa epäyhtälö $dl/dk[e] = -[e'_k/e'_l] < -[L''_{kl}/L''_l]$. Sitovan päästönormin vaikutuksen yrityksen voittoon voidaan olettaa olevan sitä suuremman mitä korkeampi on lopputuotteen hinta (muiden tekijöiden pysyessä ennallaan). Kysynnän vahvistuminen, joka tässä tapauksessa ilmenee markkinahinnan kohoamisena, merkitsee tällöin päästörajoitteen

---

[27] Kreikkalainen kirjain theeta yhtälössä 2.25 on osoittajan lyhennys. Myös myöhemmin esiintyvissä yhtälöissä käytetään lyhenteitä, jotta yhtälöitä on helpompi verrata toisiinsa.

[28] Mikäli tuotantofunktio on sellainen, että panoksen l rajatuottavuus on negatiivinen, joissakin tapauksissa lopputuotteen hinnan noususta voi seurata kummankin panoksen käytön vähentyminen. Tämä toteutuu silloin, kun optimissa voitto-osan (VM) kulmakerroin on suurempi kuin tuotosisokvantin kulmakerroin. Tällöin lopputuotteen hinnan nousu pienentää VM:n kulmakerrointa.

varjohinnan (siis λ^*:n) kohoamista. Tällöin oletetaan, että yhtälön 2.28 osoittajassa on voimassa $\delta = (x'_k V1 + x'_l V2) > 0$.

Tuotantokustannusten muutos päästönormin muuttuessa on w[dk/de* + dl/de*], mikä on yhtälön 2.25 osoittajaa hyväksi käyttäen

(2.29) $$DC/de^* = w\{e'_k[L''_{kl} - L''_l] + e'_l[L''_{kl} - L''_k]\}/J^*$$

$$= w[V1 + V2]/J^* = w\theta/J^*,$$

jossa C = wk + wl eli tuotantokustannukset. Jos panoshinnan nousu alentaa Lagrangen kertoimen arvoa (yhtälön 2.29 osoittajassa on voimassa ($\theta > 0$), päästönormin alentaminen vähentää panoskustannuksia. Vastaavasti, jos päästönormin alentaminen lisää panoskustannuksia ($\theta < 0$), panoshinnan nousu kohottaa Lagrangen kertoimen arvoa.

Päästönormin muutoksen aiheuttama tuotannon muutos on

(2.30) $$Dx/de^* = (x'_k dk/de^* + x'_l dl/de^*) = (x'_k V1 + x'_l V2)/J = \delta/J^*$$

Täten $d\lambda/dp = dx/de^*$, jolloin $d\lambda/dp$:n etumerkki on sama kuin dx/de^*:n etumerkki.[29] Kun oletetaan $dx/de^* > 0$ eli päästönormin kiristyminen alentaa tasapainotuotantoa, lopputuotteen hinnan nousu kohottaa Lagrangen kertoimen arvoa. Sitovan päästönormin marginaalinen vaikutus (voittoa alentava vaikutus!) voittoon kasvaa. Nämä tulokset ovat intuition mukaisia.

Edellä esitetyt tulokset (yhtälöt 2.22 ja 2.30) voidaan yhdistää voittofunktion derivoinnin tuloksiin. Etenkin seuraavat tulokset ovat mielenkiintoisia.

(2.31) $$dL^*/dp = x^* \ (> 0)$$

(2.32) $$d(dL^*)/dpdp = dx^*/dp > 0$$

Voittofunktio on hinnan suhteen kasvava (konveksi) funktio. Tulos on järkevä, koska tällöin korkeampi lopputuotteen hinta merkitsee muiden tekijöiden pysyessä ennallaan suurempia voittoja:

(2.33) $$dL^*/de^* = \lambda^* \ (>0)$$

(2.34) $$d(dL^*)/de^*de^* = d\lambda^*/de^* < 0$$

Voittofunktio on päästöjen suhteen laskeva konkaavi funktio. Päästönormin kiristys alentaa yrityksen voittoa ja voittoa alentava vaikutus kasvaa päästönormin kiristyessä. Toisin sanoen Lagrangen kertoimen arvo kasvaa päästönormin kiristyessä. Lagrangen kertoimen kuvaaja, kun vaaka-akselilla on päästötaso ja pystyakselilla on Lagrangen kertoimen arvo, yhtyy vaaka-akseliin päästönormittomalla vapaalla päästötasolla ja tätä alemmilla päästötasoilla (= päästönormeilla) kertoimen kuvaaja kohoaa.

---

[29] Yhtälön 2.30 tulos saadaan sijoittamalla tuotantofunktion kokonaisdifferentiaaliin komparatiivisen statiikan tulokset.

Youngin teoreeman mukaan kahdesti derivoituvan funktion ristikkäisderivaattojen tulee olla samat. Tällöin tulee olla d/(dL*/dp)de = d/(dL*/de)/dp. Sijoittamalla yhtälöihin 2.31 ja 2.32 komparatiivisen statiikan tulokset (dx*/de ja dλ*/dp), voidaan todeta, että näin on ja että voittofunktion ristikkäisderivaatta on positiivinen. Päästönormin löystäminen lisää hinnan muutoksen vaikutusta voittoon ja vastaavasti hinnan nousu lisää sitovan päästönormin vaikutusta voittoon. Tulokset ovat intuition mukaisia.

Lisäksi voidaan osoittaa, että inflaation eli parametrin a vaikutus Lagrangen kertoimeen on negatiivinen toisen kertaluvun ehtojen ollessa voimassa. Kun parametri a kasvaa yrityksen voitto suurenee ja päästönormin e* vaikutus yrityksen voittoon pienentyy. Tämäkin tulos on intuition mukainen.

2.4 Yhteenveto normiohjauksen ominaisuuksista

Yrityksen tuotantoteknologia on sellainen, että se tuottaa kahta lopputuotetta x ja e kahdella panoksella k ja l. Tahattomasti sivutuotteena syntyvät päästöt ovat siis seurausta yhteistuotannosta. Päästö- ja tuotantofunktoiden taustalla oleva tuotantomahdollisuuksien joukko ei voi toteuttaa päästöjen täysin vapaata hävitettävyyttä. Tästä seuraa se, etteivät panoksetkaan ole täysin vapaasti hävitettävissä. Lopputuotteet ovat heikosti hävitettäviä silloin, kun vakiolla panosjoukolla lopputuotevektorin proportionaalinen lyhentäminen on mahdollista. Vastaavasti vakiolla tuotosjoukolla panosvektori on proportionaalisesti hävitettävissä. Koska päästönormittomassa tilanteessa päästöillä ei ole hintaa, yrityksen myyntitulojen maksimointia voidaan kuvata tuotosjoukon P(z) avulla siten, että yritys etsii alueelta P(z) pisteen, jolla vaaka-suora vakiomyyntitulosuora px on korkein mahdollinen. Tämä on sama kuin ylin mahdollinen alueella P(z) sijaitseva suora.

Päästönormia e* voidaan kuvata tuotosjoukon P(z) avulla siten, että päästönormi on pystysuora jana. Koska voimassa on päästöjen ja tuotoksen x heikko hävitettävyys, sitova päästönormi e* merkitsee sitä, ettei yritys voi tuottaa alkutilan mukaista määrää x, vaan vähemmän. Päästönormin e* toteuttaminen merkitsee myyntitulojen alentumista vapaaseen optimiin verrattuna.

Mikäli yrityksellä on lukematon määrä toisiaan lähellä olevia teknologioita, jotka ovat kaikki heikon hävitettävyyden määritelmän mukaisia, voidaan olettaa tuotanto- ja päästöfunktioiden olevan hyvinkäyttäytyviä (kahdesti derivoituvia).

Hyvinkäyttäytyvä (toisen kertaluvun ehdot voimassa) päästönormiongelma toteuttaa tavanomaiset rajoitetun optimoinnin ensimmäisen kertaluvun ehdot, joiden perusteella voidaan johtaa tavanomaiset epäsuoran voittofunktion ominaisuudet. Lopputuotteen hinnan nousu lisää voittoa optimimäärällä x*, mikä on sama kuin tarjontareaktio, panosten hinnan nousu alentaa voittoa panosten käyttömäärällä sekä päästönormin kiritys alentaa voittoa Lagrangen kertoimen arvolla. Toisen kertaluvun ehtojen voimassaolo merkitsee myös sitä, että Lagrangen kertoimen arvo kasvaa päästönormin kiristyessä. Epäsuoran voittofunktion toinen derivaatta lopputuotteen hinnan suhteen on positiivinen. Epäsuoran voittofunktion toinen derivaatta päästönormin suhteen on negatiivinen.

Komparatiivisen statiikan tulokset ovat tavanomaiset. Panosten hinnan nousu vähentää kummankin panoksen käyttöä ja kummankin panoksen käyttöä lisää lopputuotteen hinnan nousu. Päästönormin muutoksen vaikutus kummankin panoksen käyttöön ei ole yksiselitteisesti määrättävissä.

Lagrangen kerroin kasvaa panosten hinnan nousun johdosta silloin, kun päästönormin kiristys vähentää tuotantokustannuksia. Lagrangen kertoimen arvo kasvaa lopputuotteen hinnan noustessa silloin, kun päästönormin löysentäminen lisää tuotantoa. Inflaatio kasvattaa yrityksen voittoa inflaation mukaisesti ja alentaa Lagrangen kertoimen arvoa. Lagrangen kertoimen arvon nousu merkitsee sitä, että päästönormin marginaalinen löysäys lisää yrityksen voittoa aikaisempaa enemmän. Luonnollisesti päästönormi pysyy voimassa inflaatiosta huolimatta.

3 PÄÄSTÖJEN KONTROLLI PÄÄSTÖMAKSUN AVULLA

3.1 Päästömaksun asettamisen vaikutukset

Hintaohjauksessa yritykselle ei aseteta päästörajoitetta, vaan asetetaan päästöyksikön (päästömaksu) hinta t, joka oikein asetettuna tuottaa päästöjen rajoittamisen näkökulmasta saman lopputuloksen kuin päästönormin (e*) asettaminen. Päästömaksu aiheuttaa kiihokkeen vähentää päästöjä, koska näin menetellen päästömaksutaakka pienenee ja voitto kasvaa. Päästömaksun tapauksessa 'jäännöspäästöt' eivät ole ilmaisia, vaan niistä on maksettava päästömaksun mukainen korvaus.

Päästömaksun tapauksessa yrityksen voiton maksimointia voidaan kuvata ongelmalla M:

(3.1) $M = px(k,l) - wk - wl - te(k,l)$

$k,l \geq 0$

Yrityksen voittoon vaikuttaa siis päästöyksiköiden määrä e päästömaksun t välityksellä. Kyseessä on rajoittamaton voiton maksimointi eli yritys saa vapaasti valita itselleen edullisimman päästötason. Ensimmäisen kertaluvun Kuhn-Tucker-ehdot maksimille ovat

(3.2) $[dM/dk]k^* = [px'_k - te'_k - w]k^* \leq 0$

(3.3) $[dM/dl]l^* = [px'_l - te'_l - w]k^* \leq 0$

$k,l \geq 0$

Ensimmäisen kertaluvun ehdot, mikäli hakasulkeissa olevat funktiot ovat nollassa, voidaan muokata seuraavaan muotoon

(3.4) $p/t = [e'_k - e'_l]/[x'_k - x'_l]$

Tuotannon rajahyöty eli p päästömaksulla, siis päästöhaitalla, kun viranomaiset ovat asettaneet maksun oikein,[30] deflatoituna on sama kuin panosten tuottavuus päästöjen tuotannossa jaettuna panosten tuottavuudella tuotannossa. Muuten yhtälön 3.4 tulkinta on sama kuin yhtälön 2.10 tulkinta.

Toisen luvun yhtälöt 2.5 ja 2.6 sekä edellä olevat yhtälöt ovat 3.2 - 3.3 identtiset, kun päästömaksu t asetetaan Lagrangen kertoimen λ^* suuruiseksi. Optimointiongelmat ovat erilaisia: päästönormin asettamiseen perustuvassa ohjauksessa ohjausparametri on e* ja Lagrangen kerroin on endogeeninen muuttuja kuten k ja l, joiden kaikkien arvot määräytyvät yrityksen valitsemassa optimissa. Hintaohjauksessa päästömaksu t on parametri kuten w ja p ovat.

---

[30] Perustapauksessa oikean suuruisen päästömaksun tulee vastata päästöjen aiheuttamaa rajahaittaa.(Baumol & Oates 1988)

Kun viranomainen tietää tavoitepäästötason e*, hinnat p ja w sekä tuotantorelaation x(k,l) ja päästörelaation e(k,l) eli yrityksen reaktiot t:n suhteen, hän voi asettaa oikean suuruisen kaikista parametreistä ja relaatioista riippuvan päästömaksun t.

Taulukko 3.1. Määrä- ja hintaohjauksen suhteet.

	Määräohjaus	Päästömaksu	Päästötuki
Maksimoitava funktio	px(k,l) - wk - wl + *l*[e* - e(k,l)]	px(k,l) - wk - wl - te(k,l)	px(k,l) - wk - wl + s[e** - e(k,l)]
Ensimmäisen kertaluvun ehdot yhtälöinä	$px'_k - le'_k - w = 0$ $px'_l - le'_l - w = 0$ $e^* - e(k,l) = 0$	$px'_k - te'_k - w = 0$ $px'_l - te'_l - w = 0$	$px'_k - se'_k - w = 0$ $px'_l - se'_l - w = 0$
Voitto optimissa	px(k*,l*) - wk* - wl*	px(k*,l*) - wk* - wl* - te(k*,l*)	px(k*,l*) - wk* - wl* + se(k**,l**)
Parametrit	p,w,e*	p,w,t	p,w,s,e**

Kaikissa kolmessa tapauksessa yrityksen optimi määräytyy *samojen marginaaliehtojen mukaan* ja ainoastaan yritysten voitot poikkeavat toisistaan. Yritykset käyttävät saman verran kumpaakin panosta sekä aiheuttavat päästöjä yhtä paljon, mutta optimivoitot eroavat termin te* (se**) verran.[31]

Yksi keino havainnollistaa sitä, että yhtälön 3.1 maksimi todella toteutuu e*:llä eikä millään muulla päästötasolla, esimerkiksi e^h:lla, on käyttää hyväksi luvun 2 tuloksia. Merkitään ensiksi

(3.5) $$VT^p = px(k,l) - wk - wl$$

(3.6) $$VT^L = VT^p + \lambda[e^* - e] = VT^p - \lambda e + \lambda e^*$$

Normiohjaus analyysin perusteella tiedetään, että VT^p saavuttaa maksimin päästönormin e* vallitessa, kun e = e*. Merkitään tätä toteutuvaa maksimivoittoa VT^{p*}:lla. Tällöin sitova nollasta poikkeava *voiton maksimoiva Lagrangen kerroin* on $L^* = dVT^{p*}/de^*$ ($L^* = L(k^*,l^*)$).

Päästömaksullisen yrityksen maksimointiongelma, kun päästömaksu t asetetaan L* kanssa yhtä suureksi, on seuraava:

(3.7) $$VT^t = VT^p - \lambda^* e$$

Päästönormi- ja päästömaksuongelma eroavat termin L*e* verran:

(3.8) $$VT^L - \lambda^* e^* = VT^t.$$

[31] Kuten havaitaan päästöjen vähentämisen tukivaihtoehdossa parametrejä on kaksi. S on päästöjen vähentämisen yksikkötuki ja e** on päästötaso, josta lähtien yksikkötukea maksetaan. (Baumol & Oates 1988). Päästöjen vähentämisen tukiregiimi on käsitelty tarkemmin liitteessä 1.

Oletetaan, että VT^t saavuttaa maksimin jollakin muulla päästötasolla e^h kuin e*:llä. Väitteestä seuraa:

(3.9) $VT^{th} = VT^{ph} - \lambda^*e^h > VT^{t*} = VT^{p*} - \lambda^*e^*$

(3.10) $VT^{Lh} - \lambda^*e^* > VT^{p*} - \lambda^*e^*$

(3.11) $VT^{Lh} > VT^{p*}$.

Yhtälön 3.11 mukaan alkuperäinen päästönormin e* saavuttamiseen liittyvä optimointiongelma VT^L tuottaa päästötasolla e^h ja Lagrangen kertoimella L* suuremman voiton kuin päästötasolla e*. Kuitenkin VT^L on laadittu nimenomaan siten, että maksimi saavutetaan päästötasolla e* ja Lagrangen kertoimen arvolla L*. Syntyy ristiriita, joten on pakko olla $e^h = e^*$.[32]

3.2 Epäsuoran voittofunktion ominaisuuksista ja optimipäästöjen muutoksista

Päästömaksunkin tapauksessa panoskäyttöoptimi k*, l* riippuu ensimmäisen kertaluvun ehtojen mukaan määritellyn yhtälöryhmän välityksellä implisiittisesti parametreistä p, w ja t. Kaikki parametrit ovat tässä tapauksessa hintoja. Yrityksen voitto voidaan ilmaista näiden parametrien funktiona eli (epäsuora voittofunktio)

(3.12) $M^*(p,w,t) = px(k^*,l^*) - wk^* - wl^* - te(k^*,l^*)$

Derivoimalla M* p:n, w:n ja t:n suhteen saadaan voiton muutokset, kun ko. parametrit muuttuvat. Kun otetaan huomioon ensimmäisen kertaluvun ehdot saadaan:

(3.13) $dM^*/dp = x^*$

(3.14) $dM^*/dw = -(k^* + l^*)$

(3.15) $dM^*/dt = -e^*$ [vrt. $dV^*/dE = L^*$]

Jälleen ensimmäisen kertaluvun ehtojen avulla ko. relaatiot yksinkertaistuvat huomattavasti. Yhtälö 3.13 ilmaisee tarjontareaktion eli lopputuotteen hinnanmuutos lisää tarjontaa optimituotannon määrällä. Yhtälö 3.15 on mielenkiintoisin. Se

[32] VT^L:n idea on siinä, ettei viimeinen yhtälö voi pitää paikkaansa. Jos esimerkiksi $e^h < e^*$, tällöin VT^L:n toinen termi on positiivinen (kun $e^h = e^*$ ko. termi on nolla), kuitenkin voiton täytyy olla pienempi kuin optimissa eli $VT^{ph} < VT^{p*}$. Näiden kahden termin nettovaikutus on sellainen, että koko yhtälön arvo on pienempi kuin maksimissa. Vastaava päättely voidaan tehdä (toisin päin), jos oletetaan $e^h > e^*$. Lagrangen kerroin on normiohjauksessa muuttuja, jonka arvo vaikuttaa toteutuvaan voittoon. Yksi tapa hahmottaa Lagrangen ongelma on satulapiste: voittofunktio ja Lagrangen rajoitusosa muodostavat yhdessä funktion, joka on maksimi 'yhteen suuntaan' (konkaavi panoskäytön suhteen) ja minimi 'toiseen suuntaan' eli L:n suhteen (konveksi päästöjen suhteen). Yhtälöstä 3.6 ilmenee, että vakiolla L:llä yritys saa lisävoittoa vakiomäärän Le*, jota vähentää termin Le vaikutus. Valitsemalla mahdollisimman pieni e voitot ovat suuret. Kuitenkin optimointiongelmassa L on muuttuja ja konveksi päästötason e suhteen. Valitsemalla pienemmän e:n yritys kohottaa L:ää eikä voitto kasva. Minimi Le saavutetaan päästöillä e*. Lagrangen ongelma satulapisteenä on esitetty Takayamassa (1974).

ilmaisee, että voitto muuttuu päästömaksun muuttuessa optimipäästöjen määrällä.[33] Päästöt ovat yrityksen kannalta ikään kuin panos, jonka marginaalinen hinnan muutos vaikuttaa voittoon panoskäytön mukaisella määrällä.

Differentioimalla voittofunktio M*(p,w,t), asettamalla voiton muutos nollaksi ja ratkaisemalla saadaan

(3.16) $DM^* = M^{*\prime}_p dp + M^{*\prime}_w dw + M^{*\prime}_t dt = 0$

(3.17) $dp/dt[M^*] = e^*/x^*$ $[dw = 0]$

(3.18) $dp/dw[M^*] = (k^* + l^*)/x^*$ $[dt = 0]$

(3.19) $dw/dt[M^*] = - e^*/(k^* + l^*)$ $[dp = 0]$

Yhtälö (3.17) ilmaisee kuinka paljon lopputuotteen hinnan tulee muuttua, kun päästömaksu muuttuu, jotta voitot säilyisivät vakiona. Vaadittu muutossuhde on päästökertoimen suuruinen.[34] Yhtälö 3.18 ilmaisee kuinka paljon lopputuotteen hinnan tulee muuttua, kun panosten hinta muuttuu, jotta voitot säilyisivät vakiona. Vaadittu muutossuhde on $(l^* + k^*)/x^*$. Yhtälö 3.19 ilmaisee kuinka paljon panosten hinnan tulee muuttua päästömaksun muuttuessa, jotta voitot säilyisivät vakiona. Vaadittu muutossuhde on päästöt per käytetyt panokset. Yksittäisen yrityksen tapauksessa ympäristönormin eli päästömaksun t kiristyminen edellyttää (ceteris paribus) tuotannontekijäkorvausten joustamista alaspäin, jotta yrityksen voitto säilyisi vakiona.

Päästömaksunkin tapauksessa voittofunktio on homogeeninen astetta yksi. Kun kaikki hinnat mukaan lukien päästömaksu t kerrotaan parametrillä a, ensimmäisen kertaluvun ehdot ovat $a[px'_k - w - te'_k] = 0$ ja $a[px'_l - w - te'_l] = 0$. Luvun alussa esitetty optimi saadaan siis, kun $a = 1$. Samat ensimmäisen kertaluvun ehdot ovat voimassa silloinkin, kun $a \neq 1$. Panosten määrät ovat edelleenkin k^* ja l^*. Tällöin voitto on $apx(k^*,l^*) - awk^* - awl^* - ate(k^*,l^*) = aM^*$. Voitto kasvaa a-kertaiseksi ja päästöt säilyvät tasolla e^*. Yrityksen päästömaksutaakkakin kasvaa a-kertaiseksi.

Kiinnostavia seikkoja ovat kuinka optimipäästöt e^* muuttuvat panoksien hinnan w, lopputuotteen hinnan p tai päästömaksun t muuttuessa. Differentioidaan päästöfunktio e:

(3.20) $De = e'_k dk + e'_l dl$

ja ratkaistaan yhtälöön 3.20 komparatiivisen statiikan avulla, kuinka dk ja dl riippuvat parametreistä w, d tai t. Esimerkiksi päästömaksun t muutoksen tapauksessa saadaan

(3.21) $De/dt = e'_k dk/dt + e'_l dl/dt$

---

[33] Endress (1983).

[34] Endress (1983).

Tarvittavat dk ja dl saadaan selville differentioimalla ensimmäisen kertaluvun ehdot sekä muuttujien k, l että parametrien p,w ja t suhteen:

(3.22) $M''_k dk + M''_{kl} dl = -x'_k dp + dw + e'_k dt$

(3.23) $M''_{lk} dk + M''_l dl = -x'_l dp + dw + e'_l dt$

Matriisimuodossa esitettynä syntyy yhtälöryhmät

(3.24) $\begin{bmatrix} M''_k & M''_{kl} \\ M''_{lk} & M''_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dk/di \\ dl/di \end{bmatrix} \begin{bmatrix} = \\ = \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x'_k \\ -x'_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_k \\ \varepsilon'_l \end{bmatrix}$

Vasemmalla puolella oleva 2x2 kerroinmatriisi on toisen kertaluvun ehtojen mukainen matriisi (merkitään H:lla). Oikealla puolella olevat vektorit liittyvät merkkimuuttujaan i eli eksogeenisissa parametreissa tapahtuviin muutoksiin. Ensimmäinen pystyvektori kuvaa tilannetta, jossa di = dp, toinen di = dw ja kolmas di = dt. Cramerin sääntöä soveltaen saadaan, kun tiedetään välittömästi, että matriisin H determinantin arvo H* on aina positiivinen toisen kertaluvun ehtojen perusteella:[35]

(3.25) $dk/dp > 0$ (aina), (3.26) $dl/dp > 0$ (aina), (3.27) $dk/dw < 0$ (aina)

(3.28) $dl/dw < 0$ (aina), (3.29) $dk/dt < 0$ (oletus), (3.30) $dl/dt > 0$ (oletus)

Päästöfunktion kokonaisdifferentiaali eli De(t) saadaan nyt sijoittamalla liitteestä 2 saatavat dk/dt:n ja dl/dt:n arvot päästöfunktion kokonaisdifferentiaaliin (3.21) ja sieventämällä

(3.31) $\mathbf{D}e(t) = \mathbf{D}e/dt = -[-(e'_k)^2 M''_l - (e'_l)^2 M''_k + 2(e'_k)(e'_l)M''_{kl}]/H^*$,

jonka osoittajassa hakasulkeissa on neliömuoto. Hakasulkeissa oleva neliömuoto saadaan seuraavalla tavalla:

(3.32) $EE = [e'_k \quad e'_l] \begin{bmatrix} -M''_l & M''_{kl} \\ M''_{lk} & -M''_k \end{bmatrix} [e'_k \quad e'_l]^T$,

jossa keskellä oleva neliömatriisi HH on edellä esitetty toisen kertaluvun ehtojen perusteella muodostettu matriisi.[36]

Neliömuoto EE on positiivisesti definiitti, jos neliömatriisille HH on voimassa:

(3.33) $-M''_k, -M''_l > 0$ ja $M''_k M''_l > (M''_{-})^2$

Jos toisen kertaluvun maksimiehdot ovat voimassa, päästömaksun korotus alentaa päästöjä eli $de/dt < 0$.[37]

---

35 Yhtälöt 3.25 - 3.30 ovat liitteessä 2. Toisen kertaluvun ehdot ovat liitteessä 3.

36 Iso t yläkulmassa tarkoittaa vektorin transpoosia.

37 Endress käyttää päästöfunktiota e = a(x,l)x eikä saa tällä sitä tulosta, että päästöt vähentyisivät päästömaksun noustessa. Yhtälöiden 3.31 - 3.33 tulokset riippuvat siis käytettävästä päästöfunktiosta. Em. yhtälöiden tulos on kuitenkin yleinen, koska niissä on mukana toisen kertaluvun ehdot. Endressin käyttämän päästöfunktion tapauksessa toisen kertaluvun ehdot eivät voi olla voimassa. Lisäksi tiedetään, että myös

Sijoittamalla vastaavasti dk/dw ja dl/dw liitteestä 2 päästöfunktion kokonaisdifferentiaaliin ja sieventämällä saadaan ehto:

(3.34) $De/dw = [e'_k(M''_l - M''_{kl}) + e'_l(M''_k - M''_{kl})]/H^*$

< 0, jos $dl/dk[e] < -[M''_k - M''_{kl}/M''_l - M''_{kl}]$

Hinnan muutoksen vaikutus päästöihin saadaan, kun dk/dp ja dl/dp sijoitetaan e:n kokonaisdifferentaaliin ja sievennetään:

(3.35) $De/dp = \{x'_k[M''_.e'_l - M''_l e'_k] + x'_l[M''_.e'_k - M''_k e'_l]\}/H^*$

Hinnan nousun vaikutus päästöihin ei ole yksiselitteinen. Kuitenkin normaalitapauksena voidaan pitää sitä, että lopputuotteen hinnannousu aiheuttaa päästöjen lisäyksen, kun päästömaksu pidetään ennallaan. Tällöin yhtälön 3.35 osoittaja on positiivinen.

Päästönormin e* asettamiseen ja päästömaksuun liittyvät komparatiivisen statiikan tulokset ovat yhteydessä toisiinsa. Optimissa on voimassa $\lambda^* = t$ eli Lagrangen kerroin on sama kuin päästömaksu. Komparatiivisen statiikan tulokset arvioidaan optimin mukaisilla arvoilla. Näin ollen on voimassa $M''_k = V''_k$ jne. Ensinnäkin käyttämällä hyväksi liitteen 2 tuloksia ja yhtälöitä 2.20 ja 2.21 voidaan heti todeta, että

(3.36) $dk/dt = -V1/H^*$

(3.37) $dl/dt = -V2/H^*$

Yhtälöt 2.20 ja 2.21 ovat $dk/de^* = V1/J^*$ ja $dl/de^* = V2/J^*$ sekä nimittäjä $J^* = e'_kV1 + e'_lV2$. Yhtälön 3.36 nimittäjä H on päästömaksuongelman toisen kertaluvun ehtojen matriisin determinantti.

Aikaisemmin luvussa kaksi on jo esitetty tietyt komparatiivisen statiikan tulokset. Tarkastelun helpottamiseksi ne esitetään myös tässä:

(3.38) $dC/de^* = w[V1 + V2]/J^* = w\theta/J^*$

(3.39) $dL/dw = -[V1 + V2]/J^* = -\theta/J^*$

(3.40) $dL/dp = (x'_kV1 + x'_lV2)/J^* = \delta/J^*$

(3.41) $dx/de^* = (x'_kV1 + x'_lV2)/J^* = \delta/J^*$

Liitteen 2 ja yhtälöiden 3.36 ja 3.37 avulla voidaan muodostaa seuraavat yhtälöt:

(3.42) $de/dp = (x'_kV1 + x'_lV2)/H^* = \delta/H^*$

(3.43) $dx/dt = -(x'_kV1 + x'_lV2)/H^* = -\delta/H^*$

(3.44) $de/dw = -(V1 + V2)/H^* = -\theta/H^*$

---

vastaavan normiongelman toisen kertaluvun ehdot eivät voi olla voimassa.

Mikäli päästönormin kiristyminen vähentää tuotantoa (yhtälön 3.41 oikea puoli on suurempi kuin nolla), lopputuotteen hinnan nousu lisää päästöjä päästömaksun tapauksessa (yhtälö 3.42). Päästönormin tapauksessa (yhtälö 3.40) lopputuotteen hinnan nousu kohottaa Lagrangen kertoimen arvoa ja päästömaksun korotus vähentää tuotantoa (yhtälö 3.43).

Yhtälöä 3.44 voidaan verrata yhtälöihin 3.38 ja 3.39. Panoshinnan muutos vaikuttaa (vaikutuksen etumerkki on sama) päästöihin päästömaksun tapauksessa (yhtälö 3.44) samalla tavoin kuin vaikuttaa panoshinnan muutos Lagrangen kertoimeen normiohjauksessa (yhtälö 3.39). Vaikutukset ovat päinvastaisia kuin on päästönormin muutoksen vaikutus panoskustannuksiin (yhtälö 3.38).

Laskemalla **D**x/dp liitteen 2 avulla voidaan havaita sen osoittajan olevan tulosta seuraavasta neliömuodosta

(3.45) $$[x'_k \ x'_l]\begin{bmatrix} -M''_l & M''_{kl} \\ M''_{lk} & -M''_k \end{bmatrix}[x'_k \ x'_l]^T,$$

Neliömuoto 3.45 on posiviisesti definiitti, kun toisen kertaluvun ehdot ovat voimassa ja tällöin lopputuoteen hinnan nousu lisää optimituotantoa vakion päästömaksun tapauksessa riippumatta tuotantofunktion ominaisuuksista.[38]

Päästöjen muutos päästömaksun muuttuessa saadaan sijoittamalla edellä esitetyt merkinnät ja käyttämällä hyväksi liitettä 2:

(3.46) $$\mathbf{D}e/dt = -(e'_k V1 + e'_l V2)/H^* = -J^*/H^*$$

Oikean puolen keskellä sulkeissa oleva termi on päästönormiongelman toisen kertaluvun ehto, jonka tulee olla positiivinen. Mikäli päästönormin asettamisongelma on hyvinkäyttäytyvä, päästömaksun korotus vähentää väistämättä päästöjä päästömaksun tapauksessa.

Vielä voidaan todeta, että päästömaksun toisen kertaluvun ehdot esiintyvät yhtälössä 2.22 eli on voimassa

(3.47) $$dL/de^* = -H^*/J^* < 0.$$

Yhtälöt 3.46 ja 3.47 ilmaisevat varsin hyvin päästönormin asettamisen ja vastaavan päästömaksun perimisen yhteneväisyyden.

Optimipäästöfunktion hyväksikäyttö päästöjen kontrollissa

Optimipäästöfunktion $e = e^*(p,w,t)$ avulla voidaan laskea sellaiset parametrien p,w ja t muutokset, jotka stabiloivat päästöt. Optimipäästöfunktio on $e = e[k^*(p,w,t),l^*(p,w,t)]$ eli päästöfunktioon on sijoitettu optimaaliset k* ja l*, jotka kuten edellä on jo todettu, riippuvat kaikista parametreistä p,w ja t.

---

[38] Nimittäjässä on matriisin H determinantin arvo (H*), joka on aina positiivinen.

Mielenkiintoinen kysymys on se, kuinka paljon päästömaksua tulee muuttaa lopputuotteen hinnan noustessa, jotta pysytään halutulla päästötasolla e*. Tämän tuloksen ilmaisee seuraava yhtälö:

(3.48) $dt/dp[e^*] = -[e'_p/e'_t] = dx/de^* = d\lambda/dp$.

Oikean puolen tulokset saadaan yhtälöiden 3.40 ja 3.41 avulla. Mikäli päästönormin kiritys alentaa tasapainotuotantoa päästönormin tapauksessa päästömaksun tapauksessa päästömaksua tulee kohottaa lopputuotteen hinnan noustessa, jotta päästöt pysyvät ennallaan. Tulos on intuition mukainen.

Hintaohjauksessa päästömaksua tulee muuttaa kysyntätilanteen mukaan, jotta päästöt pysyisivät normin edellyttämällä tasolla. Suhteellisen hinnan muutos vaikuttaa aina päästöihin, joten päästömaksu on korjattava kysyntätilanteen mukaisesti tavoitepäästötasolla e* pysyttelemiseksi. Esimerkiksi devalvaatio (devalvoituminen) merkitsee markkamääräisten vientihintojen kohoamista ja kotimaisten hintojen pysymistä likipitäen ennallaan. 'Devalvaatiopolitiikka' tulisi kompensoida vastaavalla ympäristöpolitiikalla.[39]

Lopputuotteen hinnan muutoksen ja panosten hinnan muutoksen välinen relaatio saadaan vastaavasti:

(3.49) $dp/dw[e^*] = -[e'_w/e'_p] = -[(d\lambda/dw)/(d\lambda/dp)]$

Oikean puolen tulos saadaan yhtälöiden 3.39 ja 3.40 avulla. Yhtälöstä 3.49 käy ilmi, että jos päästönormin kiristäminen lisää panoskustannuksia, panoksen hinnan nousuun tulee liittyä lopputuotteen hinnan lasku päästömaksun tapauksessa, jotta päästöt säilyvät vakiona.

Varsin mielenkiintoinen suhde on

(3.50) $dt/dw[e^*] = -[e'_w/e'_t] = d\lambda/dw$,

joka ilmaisee kuinka päästömaksun tulee muuttua panoshinnan muuttuessa, jotta päästöt säilyvät vakiona. Vaadittava hintasuhteen muutos on sama kuin panoshinnan muutoksen vaikutus Lagrangen kertoimeen päästönormin tapauksessa.

Jälleen edellä esitetyt tulokset ja jo aikaisemmin esiintyneen epäsuoran voittofunktion tulokset voidaan yhdistää. Mielenkiintoisia tuloksia ovat seuraavat:

(3.51) $dM^*/dp = x^*$,

(3.52) $d(dM^*)/dpdp = dx/dp > 0$

(3.53) $dM^*/dt = -e^*$

[39] Tässä yhteydessä on syytä muistaa, että vaikka päästönormi on fyysinen suure, sen asettaminen perustuu taloudellisiin seikkoihin eli ympäristöhaitan arvoon. Jos lopputuotteen tai panosten hinta muuttuu, tämä muutos voi johtua sellaisista seikoista, jotka johtavat myös päästönormin muuttumiseen. Koska päästönormi asetetaan ympäristöhaitan arvon mukaan, ympäristöhaitan arvo voi devalvaation yhteydessä alentua ja tämä edellyttää lievempiä päästönormeja.

(3.54) $d(dM^*)/dtdt = -de/dt > 0$

Voittofunktio on hinnan suhteen kasvava konveksi funktio ja päästömaksun suhteen laskeva konveksi funktio. Lisäksi on voimassa $L''_{e*} = H/J$ ja $M''_t = J/H$.

Youngin teoreeman mukaan voittofunktion ristikkäisderivaattojen tulee olla samat. Liitteen 2 avulla on helppo todeta, että $d/(dM^*/dt)/dp = d/(dM^*/dp)dt$. Ristikkäisderivaatta on negatiivinen. Päästömaksun korotus vähentää hinnan muutoksen vaikutusta voittoon ja hinnan kohoaminen vähentää päästömaksun muutoksen vaikutusta voittoon. Koska päästömaksun vaikutus voittoon on negatiivinen, päästömaksun vaikutuksen itseisarvo kasvaa lopputuotteen hinnan noustessa. Päästömaksu vaikuttaa siis voittoon aikaisempaa enemmän.

Jos kaikki muut hinnat paitsi päästömaksu kerrotaan jollakin vakiolla a, ensimmäisen kertaluvun ehdot ovat seuraavat: $a[px'_k - w] = te'_k$ ja $a[px'_l - w] = te'_l$. Kuten havaitaan vakiopäästörelaation kulmakerroin $-e'_k/e'_l$ on sama kuin optimissa, jossa a = 1. Päästötaso ei ole sama, koska ensimmäisen kertaluvun ehdoissa k ja l eivät voi olla samoja, kun a = 1 ja $a \neq 1$. Kun toisen kertaluvun ehdot ovat voimassa parametrin a tapauksessa, parametrin a kasvu lisää päästöjä. Inflaatio lisää kummankin panoksen käyttöä siten, että lopputuloksena on päästöjen kasvu. Uusi optimi löytyy korkeammalta päästötasolta. Tämä tuntuu intuitiiviselta tulokselta, koska vastaava inflaatio päästönormin tapauksessa lisää yrityksen voittoa ja alentaa Lagrangen kertoimen arvoa.[40]

3.3 Päästömaksu kustannusten minimointiongelmana

Päästönormin e* saavuttamista tai päästömaksuun t reagoimista voidaan tarkastella myös kustannusten minimointiongelmana. Tavanomaisessa kustannusten minimoinnissa yritys minimoi kustannuksia ehdolla, että tietty eksogeeninen tuotantotaso x* täytyy vähintään saavuttaa. Hintojen ollessa parametrejä minimikustannukset riippuvat ainoastaan tuotannosta.[41]

---

[40] Ongelmana on tietysti myös se, ettei todellisuudessa inflaatio kohdistu samalla tavoin panoksiin ja lopputuotteisiin. Esimerkiksi inflaatio voi olla sellaista, että vaikka sekä lopputuotteen että panosten hinnat nousevat ja päästömaksu on vakio, yritys pysyy päästönormin mukaisella päästötasolla. Tällöin inflaatio toteuttaa yhtälön 3.49. Tämä on tietysti totta vain tämän yrityksen kohdalla. Jos muut yritykset ovat erilaisia kuin tämä yritys, myös tämän yrityksen päästömaksu voi muuttua, koska muiden yritysten päästöt ja kustannukset yms. muuttuvat inflaation vuoksi.

Yksi (epäsuora) menettely päästöjen vähentämiseksi on asettaa lopputuotteelle vero. Tietyin edellytyksin vero alentaa tuottajan saamaa hintaa ja tästä seuraa päästöjen alentuminen. Myös kuluttajat voivat vaikuttaa päästöihin hinnan p välityksellä. Viranomaiset voivat muuttaa myös panoksien hintaa. Jos on voimassa $de/dw > 0$, päästöjä voidaan alentaa tukemalla yrityksen panoksia. Tässä tapauksessa tuki on valikoimatonta, koska se kohdistuu myös tuotantopanoksen tukemiseen.

[41] Panoskustannusten minimointiongelmassa on ehtona että tietty tuotannontaso tulee vähintään saavuttaa. Kun kustannukset minimoivat panosmäärät sijoitetaan takaisin kustannusfunktioon (wz, vektoritulo!) saadaan minimikustannusfunktio, joka siis riippuu panoshinnoista w ja vaaditusta tuotannon tasosta eli yleisesti C = C(w,x). Kustannusfunktio on esitetty esimerkiksi Krepsissä (1990) sivuilla 50 - 58.

Tiettyyn tuotannontasoon x^* liittyvät tietyt minimipanoskustannukset $wk^* + wl^*$. Päästömaksun tapauksessa kustannukset koostuvat tuotantoon x^* ja päästötasoon e^* liittyvistä kustannuksista. Kustannukset ovat $wk^* + wl^* + t(k^*,l^*)$. Tuotantoon x^* liittyvät kokonaisminimikustannukset ovat

(3.55) $K(w,t,x^*) = wk^*(w,t,x^*) + wl(w,t,x^*) + te(k^*(w,t,x^*),l(w,t,x^*))$.

Minimikustannukset riippuvat panoskäytön välityksellä parametreistä w, t ja x^*.

Panoskustannukset lisättynä päästömaksukustannuksilla muodostavat k-l-K-avaruudessa kustannuspinnan. Kustannuspinnan muotoa voidaan hahmottaa laskemalla vakiokustannusrelaatioiden kulku k-l-panostasolla. Vakiokustannusrelaatio saadaan derivoimalla kokonaiskustannukset KU panosten suhteen eli

(3.56) $DKU = (w + te'_k)dk + (w + te'_l)dl = 0$

(3.57) $dk/dl[KU] = -[w + te'_l]/[w + te'_k]$

Vakiokustannusrelaatiot ovat k-l tasossa vasemmalle aukeavia parabeleja ja niillä derivaatan nollakohta (parabelin käännekohta), kun l on kustannusfunktion KU minimiä vastaavalla tasolla eli relaation dk/dl[KU] osoittaja saa arvon nolla. Yhtälön 3.57 nimittäjä on aina positiivinen, joten kun l on minimiarvoa suurempi ko. relaation kulmakerroin on negatiivinen ja minimiarvoa pienemmillä arvoilla ko. kulmakerroin on positiivinen. Kuvioon 3.1 on piirretty muutama ko. relaation kuvaaja ja kuten havaitaan kustannusten minimikohta kullakin vakioidulla tuotannon tasolla sijaitsee parabelin nollakohdassa (relaatio dk/dl[KU] saa arvon nolla). Kustannusten minimikohta ja kustannusrelaatiokäyrän nollakohta sijaitsevat samassa pisteessä.

Päästömaksun yhteydessä usein käytetty kustannusfunktio ilmaisee kustannukset tuotannon ja päästöjen suhteen eli[42]

(3.58) $KK = KK(x,e), [K'_x > 0, K'_e < 0]$,

johon sijoitetaan joko edellä esitetyt kustannukset minimoivat panosten käytöt tai vaihtoehtoisesti voitot maksimoivat panosten käytöt. Funktion KK kaksi argumenttia x ja e riittävät kustannustason yksiselitteiseen määrittelemiseen, koska x^* määrittelee k:n ja l:n sekä k ja l määrittelevät yhdessä e:n. Kun tuotanto riippuu kummastakin panoksesta, termi x 'sisältää' myös tuotantoisokvantin saavuttamisen minimipanoskustannukset. Yrityksen optimointiongelma voidaan tässä tapauksessa ilmaista muodossa $px - KK(x,e) - te$. Ensimmäisen kertaluvun ehdot ovat $p = KK'_x$ ja $-KK'_e = t$.

Yhtälön 3.58 mukainen kustannusfunktio on tulos käytetyistä tuotanto- ja päästöfunktoista.[43] Kustannusfunktion ominaisuudet ovat seuraavat: tuotanto lisää

[42] Baumol & Oates 1988.

[43] Tätä kustannusfunktiota käyttää mm. Spulber (1989). Tässä työssä johdetaan graafisesti ko. kustannusfunktio, koska toimiala-analyysi perustuu useimmiten kustannusfunktioihin.

kustannuksia konveksisti, siis kiihtyvästi, päästöjen ja tuotannon välinen ristikkäisderivaatta on negatiivinen, toisin sanoen päästöjen vaikutus kustannuksiin alentuu tuotannon kasvaessa ja tuotannon vaikutus kustannuksiin vähentyy päästöjen kasvaessa. Päästöjen ja tuotannon lineaarikombinaatio tuottaa alhaisemmat kustannukset kuin mitä ovat kustannustasot, joiden lineaarikombinaationa ko. kustannukset lasketaan. Tätähän on kustannusfunktion globaali konveksisuus. Päästöjen suhteen kustannusfunktio on konveksi sillä tavoin, että vakiolla tuotannolla löytyy tietyltä päästötasolta kustannusten minimipiste eli kustannukset eivät muutu päästöjen muuttuessa. Sama kustannustaso saavutetaan kahdella eri päästötasolla, joiden välissä ko. kustannukset minimoiva päästötaso sijaitsee.[44]

Oletetaan kuten edellä, että päästöt e ovat e = e(k,l) siis kahden muuttujan funktio. Tällöin voidaan laskea vakiopäästörelaatio l = ek(k), siis kuinka panoksen l tulee muuttua panoksen k muuttuessa, jotta päästöt säilyvät vakiona. Vastaavasti x = x(k,l) on edellä esitetty tuotantorelaatio, jonka avulla voidaan laskea samatuotosrelaation arvo. Tällöin k = xl(l) ilmaisee, kuinka panoksen k tulee muuttua, kun panoksen l määrä muuttuu jotta tuotanto säilyy vakiona.

Tuotantoon liittyvät kustannukset voidaan ilmaista vakiolla päästötasolla, kun sijoitetaan relaatio l = ek(k) tuotantorelaation käänteisrelaatioon l:n paikalle. Kun relaatio k= xl(l) sijoitetaan päästöfunktion käänteisrelaatioon k:n paikalle saadaan kuinka kustannukset muuttuvat päästöjen suhteen vakiolla tuotannolla.

Kustannusten muutos päästöjen suhteen on **DC** = dC/dk + dC/dl = w_k(dxl/dl)dl/de + $w_l$dl/de = dl/de[$w_k$dxl/dl + w_l]. Kustannusten muutos päästöjen suhteen voi olla nolla, kun dxl/dl = -w_l/w_k. Vaikka päästöjen lisäys lisää panoksen l käyttöä, kokonaiskustannukset vähenevät aluksi, koska vakiotuotannon ylläpitäminen edellyttää panoksen l käytön vähentämistä.

Vastaavasti kustannusten muutos tuotannon suhteen vakiolla päästötasolla on **DC** = $w_k$dk/dq + w_l (dek/dk)dk/dq = dk/dq[w_k + w_l dek/dk], jossa dek/dk siis panoksien k ja l päästöt vakioiva suhde voi olla myös negatiivinen ja silti dC/dq on positiivinen kaikilla tuotannontasoilla.

Tilannetta voidaan havainnollistaa kuviolla. Kuviossa 3.2 on akseleina panosakselit. Vaaka-suoraan mitataan panoksen k määrää ja pystysuoraan panoksen l määrää. Kuvioon 3.2 on piirretty kolme relaatiota. Läheltä vaaka-akselia lähtevä kulmakertoimeltaan positiivinen käyrä kuvaa päästöfunktion e = e(k,l) päästöisokvanttia, jonka kulmakerroin on positiivinen k-l-panostasolla.

Toinen kuvaaja, joka on origon suhteen konveksi, on tuotantoisokvantti. Se ilmaisee ne k-l-kombinaatiot, joilla tuotannon määrä on tuotantofunktion x(k,l) mukaisesti vakio. Kyseessä on varsin tavanmukaisen tuotantofunktion tuotosisokvantti. Esimerkiksi tunnetun tuotantofunktion Cobb-Douglasin tuotosisokvantit ovat

[44] Siis kun kustannukset piirretään päästöjen funktiona vakiolla tuotannolla, muodostuu U:n muotoinen käyrä. Tuotannon muuttuminen muuttaa sekä käyrän sijaintia että kulmakerrointa.

konvekseja. Tuotosisokvantin arvo lasketaan samalla tavalla kuin vakiopäästörelaation kulmakerroin.

Kolmas lineaarinen kuvaaja, joka sivuaa tuotosisokvanttia, on vakiopanoskustannusrelaatio. Sen kulmakerroin on negatiivinen ja kulmakertoimen määrää panoksen k ja l hintasuhde. Tunnetusti optimipiste sijaitsee kustannusrelaation ja tuotosisokvantin sivuamispisteessä, jossa panosten hintasuhde on sama kuin panosten rajatuottavuuksien suhde. Optimipisteessä tuotosisokvantin saavuttamisen panoskustannukset minimoituvat annetulla hintasuhteella. Kuten havaitaan sivuamispiste määrittelee tietyn panoskäytön, josta seuraa tietty päästötaso.

Siirryttäessä pitkin tuotosisokvanttia tuotannon määrä pysyy vakiona, mutta panoskustannukset ensiksi pienentyvät, ovat optimipisteessä minimissä ja tämän jälkeen kohoavat. Tämä johtuu siitä, että tuotosisokvantilla kaikki muut paitsi optimipiste sijaitsevat kauempana sijaitsevalla kustannuskuvaajalla (näitä ei ole piirretty).

Toinen muutos, joka tapahtuu, on päästöjen kasvu, kun tuotosisokvantilla siirrytään vasemmalta oikealle. Näin voidaan olettaa tapahtuvan monotonisesti koko ajan. Vakiolla tuotannolla on saavutettavissa päästöjen suhteen panoskustannusminimi. Tätä alhaisemmilla päästöillä kustannukset ovat korkeammat kuten myös tätä korkeammilla päästöillä. Näin syntyy Spulberin artikkelin (1989) päästöjen suhteen konveksi kustannusrelaatio vakiolla tuotannolla.

Tälläinen konveksi kustannusrelaatio syntyy myös epätavanomaisen tuotantofunktion tapauksessa. Epätavanomaisessa tuotantofunktiossa panoksen l rajatuottavuus on negatiivinen, joten tuotosisokvantti on kulmakertoimeltaan positiivinen k-l-panostasolla. Päästöjen suhteen konveksin kustannusfunktion (vakiolla tuotannolla) syntymisen edellytyksenä on se seikka, että tuotosisokvantin kulmakertoimen tulee olla suurempi kuin päästöisokvantin kulmakertoimen.

Kuviosta 3.2 ilmenee myös se seikka, että vakioidulla päästötasolla eli siirtymällä pitkin päästöisokvanttia ja lisäämällä tuotantoa panoskustannukset lisääntyvät monotonisesti. Vakioilla päästöillä tuotannon lisäys kasvattaa kustannuksia.

Ko. ominaisuuksilla varustettu kustannusfunktio KK(x,e) tuotannon x ja päästöjen e suhteen voidaan siis johtaa kahden panoksen tuotanto- ja päästöfunktioiden avulla olettamalla tavanomaiseen tapaan vakioiset panoshinnat.

Kustannukset voidaan esittää myös tuotannon ja päästöjen vähentämistoimenpiteiden avulla eli KL = KL(x,l).[45] Kustannukset KL eivät sisällä päästömaksukustannuksia. Kun yrityksen optimointiongelmaa kuvataan seuraavasti: px - KL(x,l) - te(x,l), voidaan johtaa optimaalinen tuotanto ja optimaalinen panoksen l käyttötaso. Panoksen l käytön ensimmäisen kertaluvun ehto on $KL'_l = te'_l$. Toisin sanoen puhdistuspanosta käytetään siihen rajaan saakka, jossa sen käytön kustannukset

45 Baumol & Oates (1988).

vastaavat panoksen käytöllä aikaansaatua päästömaksutaakan vähennystä. Ensimmäisen kertaluvun ehto tuotannon suhteen on $p = KL'_x + te'_x$. Tuotannon arvo (hinta) vastaa tuotannon rajakustannuksia, joihin sisältyvät myös päästömaksukustannukset.

3.4 Yhteenveto päästömaksuongelman tuloksista

Päästömaksuongelmassa yritys on vapaa maksimoimaan voittonsa. Yrityksen voitonmaksimointia rajoittavat sekä teknologia että hintaparametrit. Päästömaksun tapauksessa epäsuora voittofunktio on kolmen hintaparametrin p, w ja t funktio. Epäsuoran voittofunktion derivaatta lopputuotteen hinnan suhteen on optimituotanto ja sen derivaatta panoksien hinnan suhteen on panosten käyttömäärä miinusmerkkisenä. Epäsuoran voittofunktion derivaatta päästömaksun suhteen on päästötaso miinusmerkkisenä. Epäsuoran voittofunktion avulla voidaan laskea parametrien muutoskombinaatiot, jotka pitävät voiton vakiona. Esimerkiksi päästömaksun korotusta täytyy seurata lopputuotteen hinnan nousu yksikköpäästöjen (päästökertoimen) mukaisella suhteella, jotta yrityksen voitto säilyisi ennallaan.

Epäsuoran voittofunktion toinen derivaatta lopputuotteen hinnan suhteen on positiivinen. Epäsuoran voittofunktion toinen derivaatta päästömaksun suhteen on myös positiivinen. Inflaatio kohottaa yrityksen voiton inflaatiovauhdin mukaiseksi ja päästöt säilyvät ennallaan. Mikäli päästömaksuun ei tehdä inflaatiokorjausta yrityksen voitto ja päästöt kasvavat.

Komparatiivisen statiikan tuloksien mukaan lopputuotteen hinnan nousu lisää kummankin panoksen käyttöä sillon, kun tuotantofunktiossa panos 1 ei vähennä tuotantoa. Panosten hinnan nousu vähentää yksiselitteisesti kummankin panoksen käyttöä. Päästömaksun muutoksen vaikutus panosten käyttöön ei ole yksiselitteinen, mutta mikäli toisen kertaluvun ehdot ovat voimassa, päästömaksun korotus alentaa päästöjä.

Toteutuvat päästöt riippuvat parametreistä p, w ja t. Epäsuoran päästöfunktion avulla voidaan laskea sellaiset hintojen muutokset, joilla päästöt säilyvät vakiona. Lopputuotteen hinnan muutoksen ja vastaavan päästöt vakioivan päästömaksun muutoksen suhde on sama kuin normiohjauksessa lopputuotteen hinnan muutoksen vaikutus Lagrangen kertoimeen.

Mikäli normiohjauksessa lopputuotteen hinnan nousu kohottaa Lagrangen kertoimen arvoa, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että päästönormin kiristys alentaa tuotantoa, hintaohjauksessa lopputuotteen hinnanousu lisää päästöjä ja päästömaksun korotus alentaa tuotantoa. Mikäli määräohjauksessa panosten hinnan nousu kohottaa Lagrangen kertoimen arvoa, hintaohjauksessa panosten hinnan nousu lisää päästöjä.

Hintaohjauksessa yrityksen kustannukset koostuvat panos- ja päästömaksukustannuksista. K-l-KU-avaruuteen muodostuu kustannuspinta.

Yrityksen voitto maksimoituu sillä k,l-yhdistelmällä, jolla kustannuspinnan ja tuotantopinnan (kerrottuna lopputuotteen hinnalla) sivuamistasot ovat yhdensuuntaisia.

Kustannukset voidaan laskea myös tuotannon ja päästöjen funktiona. Tässä työssä tarkasteltujen tuotanto- ja päästöfunktioiden avulla on mahdollista johtaa toimiala-analyysissä yleisesti käytetty konveksi muuttuvien kustannusten kustannusfunktio.

4 YHTEENVETO

Tässä työssä esitettiin hinta- ja normiohjauksen yhdenvertaisuus päästöjen rajoittamisen näkökulmasta yhden yrityksen päästöjen kontrollissa. Täydellisen tietämyksen vallitessa on päästöjen rajoittamisen näkökulmasta yhdentekevää rajoitetaanko yrityksen päästöjä päästörajoitteella, oikealla päästömaksulla vaiko oikealla päästöjen vähentämisen yksikkötuella. Viimeksi mainittu tapaus on esitetty liitteessä 1.

Kirjallisuudessa on esitetty päästöjen vähentämisen yksikkötuen ja päästömaksun samanarvoisuus päästöjen vähentämisessä. Näin on tehty mm. ympäristötalouden 'pääteoksessa' Baumol & Oatesissa (1988), mutta päästönormiongelman ja vastaavan päästömaksun asettamisen yhdenvertaisuus on jäänyt vähemmälle huomiolle. Tämä johtunee siitä, että päästömaksuongelman ja vastaavan päästönormin asettamisongelman yhteydet, kuten toisen kertaluvun ehtojen toisistaan riippuvuus, ovat varsin selvät. Tässä työssä nämä yhteydet on esitetty.

Ympäristötalouskirjallisuudessa esitettyjen tuotanto- ja päästöfunktioiden taustalla olevan tuotantomahdollisuuksien joukon ominaisuuksia ei ole seikkaperäisesti käsitelty. Mikäli päästöjen vähentäminen on yhteiskunnallinen hyvinvointiongelma tuotantomahdollisuuksien joukko ei voi toteuttaa panosten ja lopputuotteiden täysin vapaata hävitettävyyttä, mikä on tavanomainen oletus tuotantoteknologiasta. Tuotantomahdollisuuksia koskevissa esityksissä yhteiskunnan hyvinvoinnin näkökulmasta haitallisia yhteistuotteita on käsitelty heikon hävitettävyyden käsitteen avulla. Siksi tässä työssä on käsitelty sekä ko. funktioita että myös tuotantomahdollisuuksien joukon ominaisuuksia. Tuotantomahdollisuuksien joukko sekä päästö- ja tuotantofunktiot esitellään myös graafisesti, joka lienee havainnollisin tapa esittää ne.

Työssä johdetaan komparatiivisen statiikan tulokset sekä päästömaksun että päästönormin tapauksessa. Komparatiivisen statiikan tulokset kuten se, että lopputuotteen hinnan nousu lisää kummankin panoksen käyttöä, ovat tavanomaiset. Lagrangen kertoimeen, päästönormin ja päästömaksun muutokseen liittyvät komparatiivisen statiikan tulokset ovat yhteydessä toisen kertaluvun ehtojen toteutumiseen. Mikäli toisen kertaluvun ehdot ovat päästömaksun tapauksessa voimassa päästömaksun korotus alentaa päästöjä ja vastaavasti päästönormin kiristys kohottaa Lagrangen kertoimen arvoa.

Sekä päästönormi- että päästömaksuongelmasta voidaan johtaa yrityksen epäsuora voittofunktio. Endress (1983) käyttää hyväkseen päästömaksun sisältävää voittofunktiota johtaessaan päästömaksusta aiheutuvia toimialapäästövaikutuksia. Luvuissa kaksi ja kolme osoitetaan, että kummassakin tapauksessa voittofunktio on tavanomainen, eli hintojen suhteen homogeeninen astetta yksi. Päästömaksuongelmasta voidaan johtaa myös epäsuorapäästöfunktio, joka ilmaisee yrityksen päästöt hintojen ja päästömaksun funktiona. Päästömaksun tapauksessa inflaatio, jota ei korjata vastaavalla päästömaksun korotuksella, johtaa päästöjen ja voittojen kasvuun. Politiikkaimplikaatio on se, että teknisen kehityksen puuttuessakin viranomaisten tulee seurata panosten ja lopputuotteen hintojen kehitystä ja heidän muutettava päästömaksua hintakehityksen mukaisesti. Päästönormin tapauksessa inflaatio johtaa yrityksen voittojen kasvuun ja Lagrangen kertoimen alentumiseen, mikä merkitsee sitä, että päästönormin marginaalinen muutos vaikuttaa aikaisempaa vähemmän yrityksen voittoon.

Luvussa kolme johdetaan myös tavanomainen usein käytetty kustannusfunktio tuotanto- ja päästöfunktioiden avulla. Kyseessä oleva kustannusfunktio ilmaisee minimikustannukset, jotka liittyvät tiettyyn päästö- ja tuotantoyhdistelmään.

Komparatiivisen statiikan tulokset ja voittofunktion ominaisuudet voidaan yhdistää. Päästönormin tapauksessa voittofunktio on lopputuotteen hinnan suhteen ei-laskeva funktio ja päästönormin suhteen ei-nouseva funktio. Lisäksi tavanomaisilla päästöjen vähentämisen yksikkötukipolitiikkaa koskevilla oletuksilla oikean päästömaksun kokoinen päästöjen vähentämisen yksikkötuki johtaa liian suureen kompensaatioon yrityksen menetettyihin voittoihin verrattuna.

Koska päästöt eivät ole täysin vapaasti hävitettävissä, päästöjen vähentäminen edellyttää resurssien käyttöä ja/tai tuotannon vähentämistä. Yrityksen voitto riippuu käänteisesti päästömaksusta, koska lopputuotteen hinta oletetaan vakioksi. Tässä perustapauksessa päästöjen vähentäminen maksaa yhteiskunnalle alhaisempana tuotantona ja alempana voittona. Päästöjen vähentäminen perustuu yhteiskunnan jäsenten hyvinvoinnin kokonaisvaltaiseen tarkasteluun eikä yhden yrityksen näkökulmaan, joten nämä seuraukset ovat oikeansuuntaisia. Toimialaa koskevassa analyysissa voidaan käyttää hyväksi edellä mainittua kustannusfunktiota (kiinteillä kustannuksilla lisättynä), jolloin muuttujina ovat sekä hinta että tuotantomäärä (ml. yritysten lukumäärä).

Tässä työssä on analyysin yksinkertaistamiseksi tehty useita oletuksia. Yhden yrityksen tapauksessa voidaan kaikki hinnat sekä panos- että lopputuotemarkkinoilla ottaa annettuina. Samoin voidaan menetellä päästönormin ja päästömaksun suhteen. Epävarmuutta päästöjen vähentämisen kustannuksista, ympäristövaikutuksesta tai hinnoista ei ole. Yritys toimii hinnanottajana kaikilla markkinoilla, joten hinnat ja päästömaksu voidaan olettaa parametreiksi. Tuotanto- ja päästöfunktioiden hyväksikäyttö merkitsee sitä, että tuotannon oletetaan tapahtuvan aina teknisesti tehokkaasti. Sen sijaan tuotantomahdollisuuksien joukkoon perustuva esitys mahdollistaa sellaisen tilanteen käsittelyn, jossa yritys toteuttaa päästönormin teknisesti tehottomasti.

Mikäli esimerkiksi lopputuotteen hinta on epävarma eli yritys maksimoi odotettavissa olevaa voittoa ja asettaa tuotannon ja päästöt tämän mukaisesti, tilanne muuttuu melkoisesti. Päästönormin tapauksessa yrityksen voitto on se muuttuja, joka vaihtelee lopputuotteen hinnan mukaan, koska yritys toteuttaa päästönormin riippumatta lopputuotteen hinnasta. Hintaohjauksessa myös päästötasosta sekä päästömaksusta tulee epävarma muuttuja, joka täytyy asettaa odotettavissa olevan päästötason mukaisesti. Tällöin riskiä kantaa ikäänkuin myös yhteiskunta, koska myös toteutuva päästötaso ja aiheutuva päästöhaitta on epävarma. Mikäli yhteiskunnan haittafunktio on lineaarinen ja yritys on riskineutraali päästömaksu kannattaa asettaa odotetun hinnan mukaisen päästötason mukaan ja muissa tapauksissa ex ante päästömaksu voi poikkeaa tästä käytännöstä. Onko ex ante päästömaksu suurempi vai pienempi kuin varman hinnan (joka on epävarman tapauksen odotusarvon suuruinen) mukainen päästömaksu riippuu siitä onko yhteiskunnan haittafunktio konkaavi vai konveksi sekä siitä onko yritys riskinkaihtaja vaiko riskinrakastaja. Panoshintoja koskevan epävarmuuden vaikutus riippuu ongelman luonteessa kuten luvun kolme tulokset päästöjen ja panoshinnan suhteesta osoittavat. Jälleen perustapauksessa yhteiskunnan kannattaa asettaa päästömaksu ex ante panoshinnan odotusarvon mukaisesti.

Hintojen eksogeenisuus on oleellinen ero toimialanalyysiin verrattuna. Toimialan tasolla hinnat sen paremmin kuin päästönormi tai -maksukaan eivät ole parametrejä, ja lisäksi ympäristöpolitiikka vaikuttaa toimialalla toimivien yritysten lukumäärään. Eri instrumentit eivät enää tuota samaa lopputulemaa päästöjen rajoittamisen näkökulmasta, vaan päästömaksu ja päästöoikeuksien kauppa toteuttavat optimin. Yrityskohtainen päästönormi johtaa aina tehottomaan ratkaisuun. Tämän on Spulber (1989) selkeästi osoittanut. Tulos johtuu siitä, että päästömaksu vaikuttaa oikealla tavalla yrityksen voittoa alentavasti, jolloin toimialan yritysten lukumäärä on oikea.

Kirjallisuudessa analyysia on monipuolistettu useaan eri suuntaan. Päästöjen rajoittamisen rajakustannuksiin liittyvän epävarmuuden vaikutuksesta on tärkeä Weitzmanin artikkeli vuodelta 1977. Tuloksena on se, että päästönormin ja päästömaksun paremmuus riippuu rajahaitta- ja rajakustannusrelaatioiden kulmakertoimista. Käytännössä suurempi epävarmuus vallitsee päästöjen rajahaitasta ja tämän epävarmuuden suhteen kummatkin instrumentit ovat samassa asemassa. Yksi laajennus on olettaa, että yritys tietää todelliset päästöjen rajoittamisen kustannukset, mutta viranomaiset eivät näitä tiedä. Näissä tapauksissa analysoidaan mekanismeja, joilla yritys saadaan paljastamaan todelliset päästöjen vähentämisen kustannuksensa (esim. Spulber 1989).

Tässä työssä päästöjen rajoittamisen tekniikka oli annettu eikä yrityksen tarvinnut tehdä valintoja eri tekniikoiden ja niihin liittyvien kehittämis- ja käyttöönottokustannusten välillä. Yhden oikean lopputuotteen tapaus yksinkertaistaa analyysia huomattavasti, mutta käytännössä yrityksillä lienee mahdollisuuksia siirtyä johonkin toiseen lopputuotteeseen (joko osittain tai kokonaan) saavuttaakseen päästönormin tai alentaakseen päästömaksutaakkaansa. Tällöin järkevin tapa analysoida tilannetta on käyttää teknologiasta tuotantomahdollisuuksienjoukkoon perustuvaa esitystä. Ympäristöpolitiikasta aiheutuvia lopputuotekomposition muutoksia ei ole alan kirjallisuudessa tietääkseni analysoitu kovinkaan paljon.

Tässä työssä oletetaan, että tuotanto- ja investointipäätöksiä tehdään ilman aikahorisonttia. Myöskään päästöjen vaikutuksia yli ajan ei käsitellä. Todellisuudessa varsin suuri osa päästöistä on kumuloituvia kuten hapanta laskeumaa aiheuttavat päästöt ja kasvihuonekaasut, joten sekä yhteiskunnan että yrityksen optimointiongelma on dynaaminen. Yhteiskunnan näkökulmasta katsoen esimerkiksi maaperän hapanta laskeumaa neutraloiva kyky on ikäänkuin varanto, joka on käytetty lähes loppuun. Yhden yrityksen tai toimialan tilanne voidaan dynamisoida. Tästä ovat esimerkkejä Krutillan (1991) ja Uimosen (1992) artikkelit.

Tekniikka on tällä hetkellä joillakin toimialoilla niin kehittynyttä, että lähes täysin suljetut kierrot (tietyn elementin kuten veden suhteen) ovat teknisesti toteutettavissa. Korkea päästömaksu johtaisi uusien laitosten kohdalla suljettujen prosessien käyttöönottoon. Oma mielenkiintoinen ongelma onkin milloin luonnontaloutta jäljittelevät suljetut kierrot ovat talouden ja ympäristön näkökulmasta mielekkäitä.

LÄHTEET

Baumol W J & Oates W E. The Theory of Environmental Policy. Cambridge University Press. Cambridge 1988.

Chiang A C. Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw-Hill Book Company. 1984

Dixon P, Bowles S & Kendrick D. Notes and Problems in Microeconomic Theory. North-Holland 1980.

Endress A. Do Effluent Charges (Always) Reduce Environmental Damage? Oxford Economic Papers 1983 volume 37, no. 4, 254 - 261.

Endress A. Effluent Charges and Environmental Damage: A Further Clarification. Oxford Economic Papers 1985 volume 35 no. 2, 700.

Färe R. Fundamentals of Production Theory. Berlin Springer - Verlag 1988.

Kreps D M. A Course in Microeconomic Theory. Harvester Wheatsheaf 1990.

Krutilla J E. Environmental Regulation in Open Economy. Journal of Environmental Economics and Management 20 1990.

Martin R E. Externality Regulation and the Monopoly Firm. Journal of Public Economics volume 29 No. 3 1986, 347 - 362.

Mattila E. Polluting Firm and Environmental Policy. Helsingin kauppakorkeakoulun julkaisuja B 38. Helsinki 1979.

Silberberg E. The Structure of Economics. A Mathematical Analysis. Mc-Graw-Hill Book Company 1978.

Spulber D F. Regulation and Markets. The MIT Press. Cambridge Massachusetts 1989.

Takayama A. Mathematical Economics. The Dryden Press 1974.

Tähtinen M. Suomen SO_2- ja NO_x - päästöjen kehitysarviot ja päästöjen rajoittamisen kustannukset. Valtion Teknillinen Tutkimuskeskus, Tiedotteita 1199. Espoo 1991.

Uimonen S. Pollution Control in the Firm and Industry. Suomalainen tiedeakatemia 1992.

Varian H R. Microeconomic Analysis. W-W-Norton & Company 1992.

Weitzman M. Prices vs. Quantities. The Review of Economic Studies XLI, 1974,477-489.

Ympäristönsuojelun taloudellinen ohjaus. Ympäristötalouskomitean mietintö. Komiteanmietintö 1989:18. Valtion painatuskeskus, Helsinki 1989.

LIITTEET

LIITE 1. PÄÄSTÖJEN VÄHENTÄMISEN TUKIREGIIMI

Päästöjen vähentämisen tukemisen vaihtoehdossa yrityksen voitonmaksimointia kuvaa seuraava ongelma:

(1) $$VMT = px(k,l) - wk - wl + s[e^{**} - e(k,l)]$$

$$px(k,l) - wk - wl - se(k,l) + se^{**},$$

jossa parametrejä ovat yksikkötuki s ja päästöraja e^{**}, josta lähtien päästöjen vähentäminen lisää yrityksen voittoa. On luonnollista olettaa, että $e^{**} \leq e(k^0,0)$. Siis päästöraja on korkeintaan vapaan optimin mukainen päästötaso. Viimeinen termi eli se^{**} on yrityksen kannalta vakio, jonka se lisää suoraan voittoonsa.

Funktion (1) ensimmäisen kertaluvun ehdot ovat

(2) $$px'_k(k,l) - w - se'_k(k,l) = 0$$

(2) $$px'_l(k,l) - w - se'_l(k,l) = 0$$

Kuten havaitaan, jos on voimassa $s = t = L^*$, yrityksen päästötaso on sama kuin päästönormin ja päästömaksun tapauksessa. Yrityksen voitto on $te^{**} = se^{**} = L^*e^{**}$:n verran korkeampi kuin päästönormin tapauksessa. Asettamalla e^{**} sopivaksi yrityksen on mahdollista saavuttaa alkuperäinen päästönormittoman tilanteen mukainen voitto huolimatta päästöjen vähentämisestä aiheutuneista kustannuksista ja tuotannon muutoksesta.

Komparatiivinen statiikka on yksikkötuen tapauksessa samantyyppinen kuin päästömaksunkin tapauksessa. Yksikkötuki s vaikuttaa samalla tavoin kuin päästömaksukin. Päästönormin tapauksessa yrityksen voittoon vaikuttavat päästönormin saavuttamisen panoskustannukset sekä alentuneen tuotannon voittovaikutus. Päästömaksun tapauksessa voittoja alentaa lisäksi 'jäännöspäästöjen' e^* mukainen päästömaksu te^*. Päästöjen vähentämisen tukemisen vaihtoehdossa panoskustannukset ovat kuten edellä mainituissa optimeissa, mutta yritys saa summan $s[e^{**} - e]$ lisättäväksi voittoonsa.

Mikäli $e^{**} = e(k^0,0)$, yritys saa 'ylikompensaation' päästöjen vähentämisestä aiheutuvasta voiton menetyksestä. Tämä johtuu siitä, että päästötasolla e^* Lagrangen kerroin L^* ilmaisee marginaalisen voiton muutoksen, kun päästönormia hieman muutetaan. Luonnollisesti, kun $e = e^0$, Lagrangen kerroin on nolla. Voidaan hahmotella laskeva (luvun 2.3. tulokset) Lagrangen kertoimen kuvaaja, joka alkaa nollasta ja on päästöillä e^* tasolla L^*. **Yritykselle maksetaan päästöjen vähentämisestä $L^*[e^0 - e^*]$, siis enemmän kuin mitä on voittofunktion avulla laskettu päästönormin vaikutus yrityksen voittoon.**

LIITE 2. PÄÄSTÖMAKSUUN LIITTYVÄT KOMPARATIIVISEN STATIIKAN TULOKSET

Komparatiivisen statiikan yhtälöt ovat hintaohjauksen tapauksessa seuraavat. Kyseessä on seuraavien matriisien determinanttien suhde. Nimittäjässä on matriisin H determinantin arvo H*, joka on aina suurempi kuin nolla toisen kertaluvun ehtojen perusteella (liite 3).

(1) $$dk/dp = \begin{bmatrix} -x'_k & M''_{lk} \\ -x'_l & M''_l \end{bmatrix} / H^*,$$

jonka osoittaja $x'_l M''_{kl} - x'_k M''_l$ on aina suurempi kuin nolla silloin, kun $x'_l \geq 0$, joten tällöin yksiselitteisesti $dk/dp > 0$.

(2) $$dl/dp = \begin{bmatrix} M''_k & -x'_k \\ M''_{lk} & -x'_l \end{bmatrix} / H^*,$$

jonka osoittaja $x'_k M''_{kl} - x'_l M''_k$ on suurempi kuin nolla samalla ehdolla kuin yhtälö 1.

Riittävät ehdot sille, että lopputuotteen hinnannousu lisää puhdistuspanoksen käyttöä, ovat: a) päästöfunktion ristikkäisderivaatta on negatiivinen eli tuotantopanoksen käytön lisääminen kohottaa puhdistuspanoksen rajatuottavuutta ja b) tuotantofunktio on tavanomainen.

(3) $$dk/dw = \begin{bmatrix} 1 & M''_{lk} \\ 1 & M''_l \end{bmatrix} / H^*,$$

jonka osoittaja $[M''_l - M''_{kl}]$ on aina pienempi kuin nolla.

(4) $$dl/dw = \begin{bmatrix} M''_k & 1 \\ M''_{kl} & 1 \end{bmatrix} / H^*,$$

jonka osoittaja $[M''_k - M''_{kl}]$ on aina negatiivinen.

Päästömaksun muutoksen vaikutus tuotantopanoksen käyttöön on

(5) $$dk/dt = \begin{bmatrix} e'_k & M''_{lk} \\ e'_l & M''_l \end{bmatrix} / H^*,$$

jonka osoittaja on negatiivinen jos on voimassa $M''_{kl} > 0$ ja $-[e'_k/e'_l] > -[M''_{kl}/M''_l]$. Jos $M''_{kl} < 0$ niin dk/dt on aina negatiivinen.

(6) $$dl/dt = \begin{bmatrix} M''_k & e'_k \\ M''_{kl} & e'_l \end{bmatrix} / H^*,$$

jonka osoittaja on positiivinen, jos on voimassa $M''_{kl} > 0$ ja $-[e'_k/e'_l] < -[M''_{ll}/M''_{kl}]$. Jos $M''_{kl} < 0$, niin dl/dt on aina positiivinen.

LIITE 3. FUNKTIOIDEN KONKAAVISUUS/KONVEKSISUUS JA TOISEN KERTALUVUN EHDOT

Päästöfunktion konveksisuus

Matriisin M determinantin M* tulee olla positiivinen ja lävistäjäalkioiden tulee olla suurempia kuin nolla:

(1) $$M = \begin{bmatrix} e''_k & e''_{kl} \\ e''_{lk} & e''_l \end{bmatrix} > 0 \quad M^* = (e''_k)(e''_l) - (e''_{kl})^2 > 0, \quad e''_k, e''_l > 0$$

Päästöfunktion kvasikonveksisuus

Matriisien M1, M2 ja M3 determinanttien tulee kaikkien olla negatiivisia

(2) $$M1 = \begin{bmatrix} 0 & e'_k \\ e'_k & e''_k \end{bmatrix} \le 0 \quad M2 = \begin{bmatrix} 0 & e'_l \\ e'_l & e''_l \end{bmatrix} \le 0 \quad M3 = \begin{bmatrix} 0 & e'_k & e'_l \\ e'_k & e''_k & e''_{lk} \\ e'_l & e''_{kl} & e''_l \end{bmatrix} \le 0$$

Ehdot M1 ja M2 ovat aina voimassa ja ehto M3 on purettuna seuraava

(3) $$M3^* = -e'_k \begin{bmatrix} e'_k & e'_l \\ e''_{kl} & e''_l \end{bmatrix} + e'_l \begin{bmatrix} e'_k & e'_l \\ e''_k & e''_{lk} \end{bmatrix}$$

$$= -[(e'_k)^2 e''_l + (e'_l)^2 e''_k - 2e'_k e'_l e''_{kl}]$$

Hakasulkeissa oleva lauseke saadaan neliömuodolla

(4) $$[u \;\; v] \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix} [u \;\; v]^T ,$$

jossa $u = e'_k$, $v = e'_l$, $a = e''_l$, $b = e''_k$ ja $h = - e''_{kl}$. Neliömuoto on positiivisesti definiitti, jos $ab - h^2 > 0$ sekä $b,a > 0$.

Tuotantofunktion konkaavisuus

Tavalliset ehdot ovat $x''_k < 0$, $x''_l < 0$ sekä matriisin M determinantin M* positiivisuus.

(5) $$M = \begin{bmatrix} x''_k & x''_{kl} \\ x''_{lk} & x''_l \end{bmatrix} > 0, \quad M^* = x''_k x''_l - (x''_{kl})^2 > 0$$

Kustannusfunktion konveksisuus

Matriisin M determinantin M* tulee olla positiivinen sekä te''_k, $te''_l > 0$.

(6) $$M = \begin{bmatrix} te''_k & te''_{lk} \\ te''_{kl} & te''_l \end{bmatrix}, \quad M^* = t^2[(e''_k e''_l) - (e''_{kl})^2] > 0$$

Voittofunktion konkaavisuus

Matriisin H determinatin H* tulee olla positiivinen.

(7) $$H = \begin{bmatrix} px''_k - te''_k & px''_{kl} - te''_{kl} \\ px''_{kl} - te''_{kl} & px''_l - te''_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & r \\ r & q \end{bmatrix}$$

Konkaavisuuden ehtoina ovat myös lävistäjäalkioiden negatiivisuus. Kun determinantti H* lasketaan auki saadaan ehto

(8) $$H^* = t^2[e''_k e''_l - (e''_{kl})^2] + p^2[x''_k x''_l - (x''_{kl})^2]$$
$$- pt[x''_k e''_l + x''_l e''_k - 2x''_{kl}e''_{kl}]$$

Kaksi ensimmäistä termiä ovat edellä esitetyn perusteella positiivisia,. Viimeisessä sulkulausekkeessa kaksi ensimmäistä termiä ovat negatiivisia ja vain viimeinen on positiivinen.

Lagrangen ongelman toisen kertaluvun ehdot

Rajoitefunktion e(k,l) ja Lagrangen funktion $px(k,l) - wk - wl + \lambda[e^* - e(k,l)]$ avulla saadaan rajoitettu Hessin matriisi

(9) $$J = \begin{bmatrix} 0 & -e'_k & -e'_l \\ -e'_k & px''_k - \lambda e''_k & px''_{kl} - \lambda e''_{kl} \\ -e'_l & px''_{lk} - \lambda e''_{lk} & px''_l - \lambda e''_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -u & -v \\ -u & z & r \\ -v & r & q \end{bmatrix} = JJ$$

Tämän (n+1)(n+1) matriisin rajan säilyttävien k:n asteen (poistetaan n - k riviä ja saraketta, k = 2....n) alideterminattien tulee vaihdella merkkiään alkaen positiivisesta arvosta. Matriisin J determinantin J* tulee olla suurempi kuin nolla, koska yhden rajoitteen ja kahden muuttujan tapauksessa ko. alideterminantteja on vain yksi eli edellä esitetyn matriisin ylin determinantti. Matriisin J determinantti muodostaa neliömuodon, jonka tulee olla positiivisesti definiitti (maksimi päästönormipinnan e* suhteen). Tämä toteutuu, kun on voimassa ehdot $L''_k < 0$ ja $L''_l < 0$ sekä $(L''_k)(L''_l) - (L''_{kl})^2 > 0$.

Kun determinantti J* lasketaan auki, havaitaan sen koostuvan kahdesta neliömuodosta:

(10) $$[u \;\; v]\begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}[u \;\; v]^T,$$

(11) $\quad [u \ v]\begin{bmatrix} c & j \\ j & d \end{bmatrix}[u \ v]^T,$

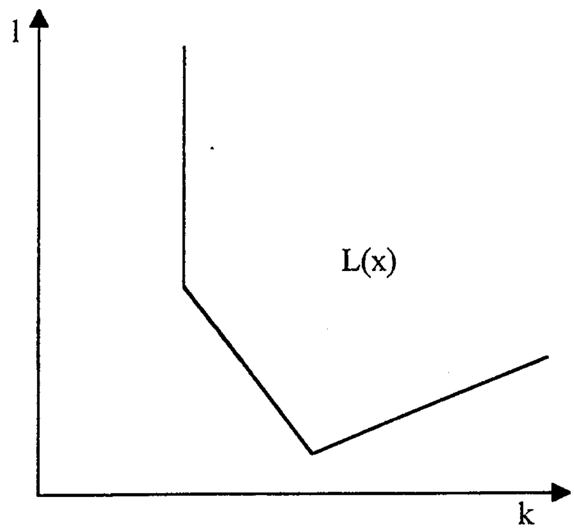
jossa u = e'_k, v = e'_l sekä a = $\lambda e''_l$, b = $\lambda e''_k$, h = $-\lambda e''_{kl}$, c = $-px''_l$, d = $-px''_k$, j = px''_{kl}.

Neliömuodot ovat positiivisesti definiitteja, kun on voimassa a,b,c,d > 0 sekä ab - $h^2 > 0$, cd - $j^2 > 0$.

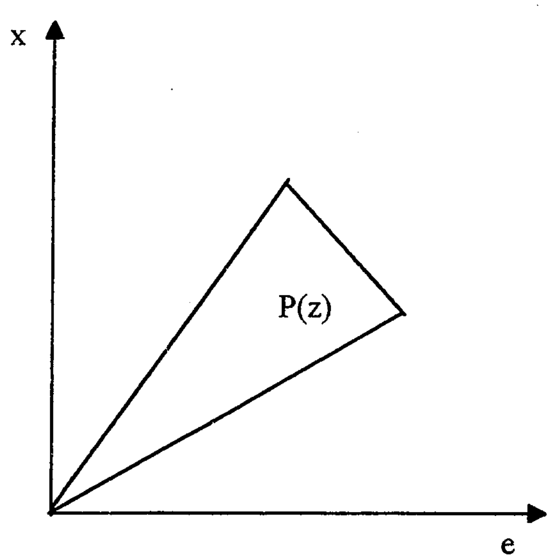
Toinen tapa tarkastella matriisia (9) on laskea oikeanpuoleisen matriisin JJ determinantti. Tällöin voidaan todeta sen olevan seuraava neliömuoto:

(12) $\quad [u \ v]\begin{bmatrix} -q & r \\ r & -z \end{bmatrix}[u \ v]^T$

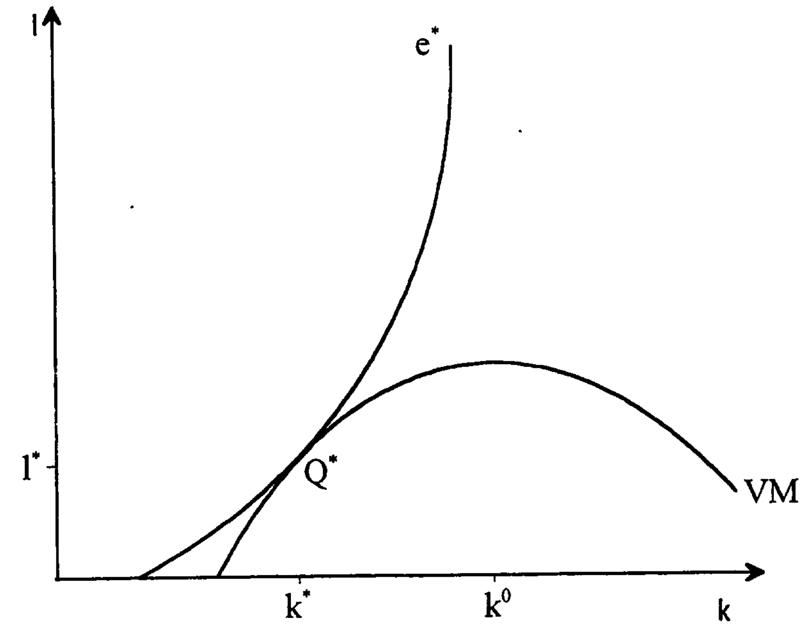
Päästömaksuongelman toisen kertaluvun ehtojen mukaan q,z < 0, joten edellä oleva neliömuoto on positiivisesti definiitti eli toisen kertaluvun ehto on voimassa. Kuten havaitaan myös toisen kertaluvun ehdot päästömaksu- ja päästönormiongelmassa ovat toistensa muunnoksia, kuten päästömaksun ja päästönormin duaalisen luonteen perusteella voi olettaakin.



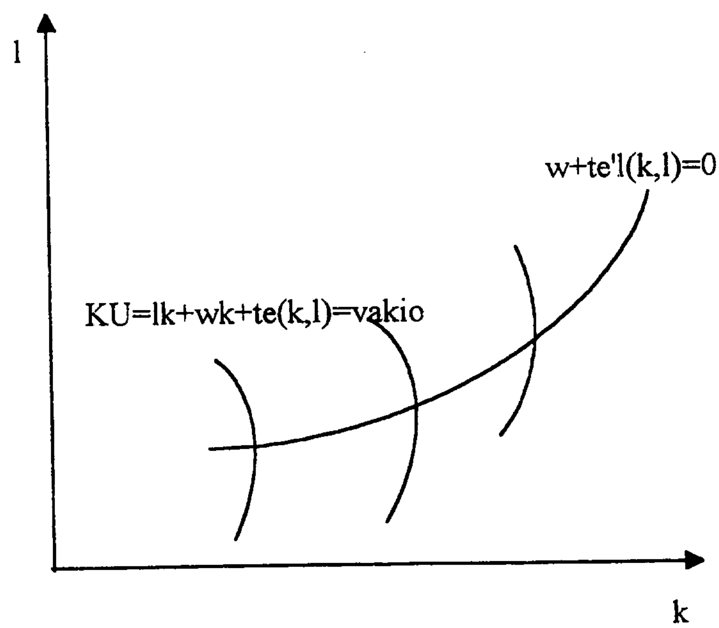
Kuvio 2.1



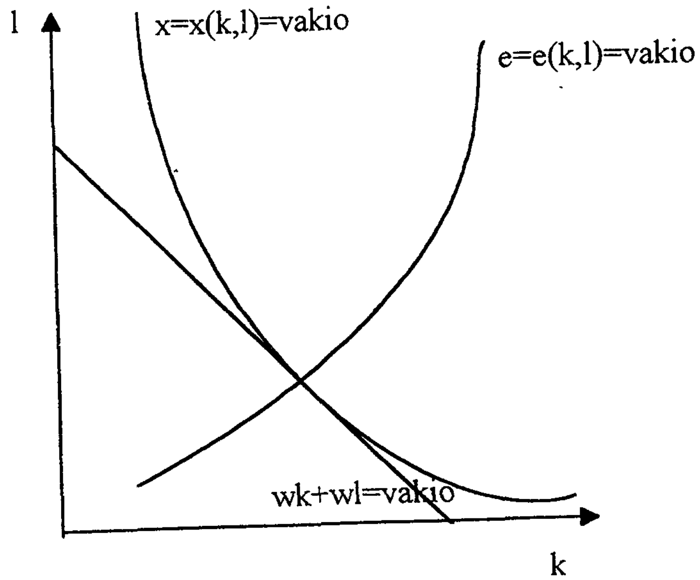
Kuvio 2.2



Kuvio 2.3



Kuvio 3.1



Kuvio 3.2