7

D. D.

DISSERTATIO

DE

ÆQUILIBRIO CORPORUM AQUÆ INNATANTIUM,

QUAM

Consensu Ampl. Fac. Philos. in Reg. Academ. Aboënsi,

PRÆSIDE

MAG. ANDREA PLANMAN,

PHYS. PROFESS. REG. & ORD.

PRO GRADU

Ventilandam sistit

ESAIAS WEGELIUS,

OSTROBOTNIENSIS.

In Audit. Maj. die XXVI. Aprilis MDCCLXVI.

Horis Ante Meridiem Consvetis.

ABOÆ impressit JOH. CHRISTOPH. FRENCKELL.

§. I.

Corporum aquæ innatantium ſtatus generaliter duo ſunt, alter *motus*; *quietis* vero alter. In illo plures motus conſiderandi occurrunt, qui tamen ad binas claſſes referri poſſunt; quarum una ſub ſe comprehendat omnes motus progreſſivos, &, circa axem aliquem verticalem, rotatorios, quatenus a potentiis ſollicitantibus externis unice dependent, nec deſcenſum aſcenſumve corporis in aqua adficiunt. Ad alteram claſſem revocentur omnes aſcenſum hunc deſcenſumve modo quocunque adficientes motus: atque huc pertinent varii motus oſcillatorii tam verticales, quam horizontales; quorum illi efficiunt, ut corpus in aqua alternatim deſcendat aſcendatque; hi vero producunt corporis declinationem huc illucque, circa axem aliquem horizontalem ſive longitudinalem ſive latitudinalem factam & a Gallis, navium reſpectu, *le Roulis* & *le Tangage* dictam. In utroque oſcillationum genere, patet, centrum gravitatis totius corporis, nec non centrum gravitatis partis, aquæ

quæ ſubmerſæ, quam ſemper ſupponimus eſſe homogeneam, ſitum ſuum mutare: nempe in illo centra hæc in una eademque recta verticali, alternis vicibus ad ſe invicem accedunt, & a ſe recedunt; in hoc autem a verticali iſta huc illucque deferuntur. Motus itaque ad hanc alteram claſſem pertinentes deturbant æquilibrium corporum in aqua, quippe quod requirit, ut data pars corporis aquæ ſemper ſit ſubmerſa, unde non poteſt non ſequi, quod, durante hoc æquilibrio, centra hæc utriusque gravitatis immota maneant in una eademque recta verticali, id quod ex ſequentibus clarius patebit. Quod vero attinet ſtatum *quietis*, patet hunc non dari absque tali æquilibrio; quamvis æquilibrium corporis in aqua perſiſtere poſſit absque ejus quiete i. e. cum motibus ad primam claſſem relatis; haud aliter, ac pondera lancibus impoſita æquilibrium tenebunt, licet bilanx motu quodam deferatur.

§. II.

Dum in hac opella paucis duntaxat attingere conſtituimus æquilibrium corporum aquæ innatantium; omnium primo nobis perpendendæ occurrunt vires, corpora, aquæ libere commiſſa, urgentes; quæ ſunt *vires gravitatis corporis* & *preſſionum aquæ*. Illæ efficiunt, ut ſingulæ particulæ corpus conſtituentes, in directionibus ad horizontem normalibus, deorſum tendant; quæ ſi in ſummam colligantur, ponderi totius corporis æquantur, atque in centro gravitatis ipſius unitæ cenſendæ ſunt. Proprio itaque

pondere corpus deorsum, in verticali per centrum gravitatis ipsius transeunte, sollicitatur. De *pressionibus* vero *aquæ* ex *Hydrostatica* constat, quod quælibet particula aquea deorsum urgeatur vi, ponderi cylindruli aquei superincumbentis æquali; quæ particulæ deinde, ob fluiditatem suam, eadem, qua premuntur, vi quaquaversum diffluere conantur particulasque adjacentes tantumdem premunt & ab his vicissim æque præmuntur; adeo, ut æqualis, ab omni parte, adsit singularum particularum pressio. Hinc itaque sequitur, corporis aquæ submersi, singula superficiei elementa tanta vi, & quidem in directionibus ad ista normalibus, a particulis aqueis premi, quanta hæ ipsæ particulæ premuntur. Data proinde pressionis quantitate & directione in singulis superficiei punctis, haud difficile erit determinare vim, quam corpus aquæ submersum a pressionibus ejus sustinet.

§. III.

Repræsentet figura ACBD (*Fig. I.*) sectionem corporis in superficie aquæ factam, atque sit ejus axis recta AB; cui agantur parallelæ rectæ sibi infinite propinquæ GF & *gf*, quas una cum axi AB, ad angulos rectos secent rectæ pariter propinquæ CD & *cd*; deinde ex intersectionum punctis Q, *q*, R, *r* concipiantur deorsum ductæ rectæ verticales QM, *qm*, RN & *rn*, in superficie corporis sub aqua abscindentes elementum MN*nm*, cujus profunditatem infra superficiem aquæ definiet recta QM, quæ dicatur *z*. Proinde pressio aquæ in elementum superficiei M*n*, quod di-

dicatur dS, erit æqualis ponderi prismatis aquei, cujus altitudo z & basis dS est (§. II.), quod pondus itaque designetur per zdS, Cumque directio hujus pressionis erit normalis ad superficiei elementum Mn (§. II.) necesse est, determinetur recta normalis ad superficiem in M puncto, quo sic rite æstimari queant effectus ex tali pressione oriundi. Sit itaque $AP = x$; & $PQ = y$, quarum relatio detur per hanc æquationem differentialem $dz = Pdx + Qdy$, (Cfr. EULERI Sc. Nav. P. & pr. Prop. 3), in qua P & Q sint functiones ipsarum x & y, non involventes z; atque concipiatur per puncta DMC nec non per GMF, prout figura monstrat, sectiones verticales DEC & GHF, factæ in superficie partis submersæ; quo facto perspicuum est, respectu istius sectionis x, ast hujus respectu y fore constantem, adeo ut natura sectionis CED æquatione $dz = Qdy$ (I), sectionis vero GHF per æquationem $dz = Pdx$ (II) exhibeatur. Hinc facile definiuntur rectæ normales ad utramque sectionem in M puncto. Etenim per *Meth. Tang. Dir.* habetur subnormalis, ratione puncti M in sectione CED, $QK = -\frac{zdz}{dy} = -zQ$, ob $\frac{dz}{dy} = Q$ per (I); eritque recta ex M ad K ducta normalis ad curvam CED in M puncto; atque si ex K, in plano ACBD, ducatur ad CD perpendicularis KV, erunt omnes rectæ ex M ad KV ductæ pariter normales ad CED curvam in M puncto. Pari modo invenitur subnormalis respectu puncti M, in sectione GHF considerati, quæ si sit QI, erit

$QI = \frac{zdz}{dx} = zP$, ob $\frac{dz}{dx} = P$ per (II); quare ducta IL perpendiculari ad GF, erunt omnes rectæ ex M ad IL ductæ normales ad curvam GHF in M puncto. Cum autem KV & IL sese intersecent in puncto S, erit recta MS tam ad curvam CED, quam ad GHF in M puncto normalis; & consequenter erit MS quoque normalis ad superficiem corporis in hoc eodem puncto. Ut autem valor ipsius MS habeatur, ex S ad Q agatur recta QS, eritque ob figuram QISK rectangulam $QS = \sqrt{QKq + KSq} = z\sqrt{Q^2 + P^2}$; atque hinc, ob *Ang.* MQS rectum, habetur $MS = \sqrt{MQq + QSq} = z\sqrt{1 + Q^2 + P^2}$. Per hæc data jam definiendum est elementum superficiei dS; in quem finem observamus inclinationem istius seu areolæ MN nm, ad planum ACBD, æqualem esse angulo QMS, quare rectangulum infinite parvum $QRrq = dx\,dy$ ita se habet ad areolam $MN\,nm = dS$ ut $QM = z$ ad MS; unde $dS = dx\,dy\sqrt{1 + Q^2 + P^2}$; atque hinc erit vis aquæ premens areolam hanc in directione MS, nempe $zdS = zdx\,dy\sqrt{1 + Q^2 + P^2}$; quæ vis resolvatur in binas alias, quarum una urgeat areolam Mn sursum in directione MQ, altera vero agat in illam horizontaliter secundum directionem ipsi QS parallelam, quas vires patet esse ut MQ & QS respective. Quod primum attinet hanc posteriorem vim, quæ habetur $= zdx\,dy\sqrt{Q^2 + P^2}$, liquet istius directionem QS variari pro vario situ elementi superficiei; convenit itaque hanc

hanc denuo resolvere in vires horizontales secundum DC & GF, quæ ipsi AB est parallela, agentes. Vis, quæ areolam M*n* horizontaliter in directione ipsi DC parallela urget, est ut QK, adeoque $= -zQ\,dx\,dy = -z\,dx\,dz$, ob $Q = \frac{dz}{dy}$ per (I). Concipiatur nunc sectionem transversalem quoque factam esse per puncta *c m d*, sectioni CED parallelam; atque distabunt hæ sectiones a se invicem intervallo $Pp = dx$, nec non intercipient portionem superficiei sub zonula CD *dc* sitam; vis vero pressionis aquæ qua hæc portio horizontaliter secundum directionem CD sollicitatur, datur, ita integrando differentialem $-z\,dx\,dz$, ut x maneat constans; quo pacto obtinetur $-\frac{z^2 dx}{2}$, ad exprimendam vim istam, quam integralem patet evanescere, translato puncto Q in D vel in C, ob $z = 0$ in utroque casu; quapropter quoque vis, horizontaliter premens istam superficiei portionem, evanescit, pressionibus hinc & inde sese mutuo destruentibus. Atque hinc manifestum est corpus aquæ submersum actione fluidi, quæ fit in directionibus ipsi CD parallelis ad motum neutiquam sollicitari. Pari modo liquet vires horizontales, portionem superficiei corporis, sub zonula GF *fg* sitam, in directione GF urgentes sese destruere; nam vis in hac directione premens elementum superficiei M*n* est $Pz\,dy\,dx$, cujus integrale $dy \int Pz\,dx = \frac{z^2 dy}{2}$, [ob $P =$

dz

$\frac{dz}{dx}$ per (II)] exhibet vim, qua ſuperficiei portiuncula, ſub elemento GR ſita ſollicitatur. Quia vero hoc integrale evaneſcit poſito puncto R in G vel in F, ob $z = 0$ in utroque caſu, actio quoque horizontalis & ipſi GF parallela, qua portio ſuperficiei ſub G*f* ſita urgetur, evaneſcet. Unde ulterius ſequitur actionem fluidi, qua pars corporis aquæ ſubmerſa in hac eadem directione ſollicitatur, deſtructum iri. Pari modo liquet actiones fluidi horizontales in quamcunque aliam plagam, ſe deſtruere; niſi enim ſe deſtruerent, corpus aquæ ſtagnanti ſubmerſum perpetuo progrederetur; quod experientiæ quoque repugnat. Solæ proinde actiones aquæ verticales æſtimandæ remanent. Jam autem per ſupra allata patet, vim aquæ, qua areola M*n* ſurſum in directione MQ urgetur, fore $= z\,dy\,dx =$ prismati, cujus baſis eſt rectangulum infinite parvum Q*r* & altitudo QM, i. e. æqualem ponderi prismatis aquei Q*m*; quapropter capiendo ſummam omnium prismatum; habentur vires ſeu preſſiones aquæ, ſuperficiem partis ſubmerſæ, ſurſum urgentes; quæ proinde æquales ſunt ponderi voluminis aquei, partem hanc ſubmerſam magnitudine adæquantis. Tota itaque actio aquæ, in corpus eidem ſubmerſum, conſiderari poteſt ſita in centro gravitatis partis ſubmerſæ ac corpus in recta verticali, per centrum iſtud transeunte, ſurſum ſollicitans, idque vi, æquali ponderi aquæ, cujus volumen æquale eſt parti prædictæ.

§ IV.

§. IV.

Quo itaque jam corpus aquæ libere immersum in quiete seu æquilibrio persistat, necesse est, hæc bina virium genera (§§. II. & III.) se mutuo destruant. Hoc autem fieri nequit, nisi vis gravitatis corporis sit æqualis & directe contraria vi pressionum aquæ, i. e. volumen aquæ, parti submersæ æquale, æquiponderare ipsi corpori; nec non centra gravitatis hujus partis & totius corporis in eadem recta verticali sita esse oportet. Nam sit corporis AFBE (Fig. 2.), aquæ utcunque insidentis, pars submersa FBG; C centrum gravitatis totius corporis, & M centrum gravitatis partis submersæ FBG; per quæ centra rectæ verticales CB & MD transeant; atque fiat pondus totius corporis, urgens id deorsum in directione CB (§. II.) = P; sit quoque pondus voluminis aquei, partem submersam adæquans & pellens corpus sursum in directione MD (§. III.), = S. Eritque ex allatis manifestum, corpus non maneri in æquilibrio cum aqua, nisi primo sit P = S, alias enim fortior vis corpus in sua directione promoveret. Deinde necesse est, recta CB cum MD coincidat, quo vires hæ fiant sibi e diametro oppositæ corpusque ad convertendum non sollicitent. Corpus igitur aquæ submersum toties quiescet seu erit in æquilibrio, quoties tanta pars aquæ immergatur, quantam definivimus; simulque ambo ista centra in unam eandemque rectam verticalem incidant.

§. V.

Attendenti ad ea, quæ jam allata ſunt, plurimorum corporum ſitus æquilibrii in aqua, ſe facile dabunt; ſic ex. gr. haud difficulter colligitur, quod

I. *Omne corpus ſpecifice levius aqua, cujus ſingularum ſectionum transverſalium centra gravitatis homogeneæ incidunt in unam eandemque rectam, ad has ſectiones normalem, ſitu erecto verticali aquæ inſiſtere poteſt; ſi modo centrum gravitatis corporis fuerit in eadem hac recta verticali.* Huc pertinent *cylindri recti*, nec non *coni recti* tam *integri* quam *truncati*, qui in ſitu axium verticali quæ inſiſtent, ſi modo centra eorum gravitatis incidant in ipſos axes. Ad hanc corporum claſſem referenda quoque ſunt omnia *priſmata recta* baſium ſive regularium ſive irregularium; & in genere omnia ſolida, quæ generantur, a figura plana quacunque, motu ſibi ſemper parallelo, ſecundum ductum lineæ rectæ ad planum figuræ normalis, delata, quæ ſitu axis erecto aquæ ſubmerſa, toties quieſcent, quoties centra gravitatis eorum incidunt in hunc eundum axem; quippe in quo ſingularum ſectionum transverſalium centra gravitatis quoque dari patet. Quod vero ſphæras attinet homogeneas, eas quocunque ſitu aquæ inſidere poſſe manifeſtum eſt.

II. *Corpus omne plano quodam in duas partes ſimiles & æquales diviſibile aquæ ita ſubmerſum, ut hoc planum ſit verticale, quieſcere poteſt; ſi modo centrum*

trum gravitatis corporis sit situm in hoc eodem plano. Huc pertinent, inter alia, omnes naves, quas ita constructas & oneratas esse oportet, ut centrum gravitatis ipsarum cadat in planum verticale per spinam transiens & navem quamcunque in duas partes similes & æquales dividens; quo hoc situ erecto aquæ innatent.

§. VI.

Ast non uno duntaxat situ corpus, aquæ submersum, æquilibrium tenet; dantur enim plures: quos omnes, pro ratione corporis cujuscunque, determinare, haud raro est difficillimæ pariter ac prolixissimæ indaginis. Casum itaque simplicissimum exempli loco adduxisse sufficiat: nempe

Determinare omnes situs, quibus prisma triangulare rectum & homogeneum aquæ ita innatet, ut una eademque hedra supra aquam maneat axisque horizonti sit parallelus. Quoniam prisma hoc supponitur homogeneum; patet centrum gravitatis ipsius esse situm in centro gravitatis sectionis mediæ transversalis, quæ est triangulum basi simile & æquale atque proinde datum, quod sit ABC (Fig. 3.). In hoc idem triangulum & quidem in centrum gravitatis ejus partis trianguli, quæ aquæ est submersa cadet quoque centrum gravitatis partis submersæ prismatis, ob homogeneitatem ipsius & situm axis horizontalem. Quapropter solutio problematis propositi eo reducta est, ut *determinentur casus, quibus triangu-*

lum ABC ita aquæ innatet, ut latus AB extra illam emineat. Sit itaque DCE pars aquæ immergenda, & fiat $AC = a$; $BC = b$; $DC = x$; $EC = y$; atque sit prismatis gravitas specifica ad aquam ut g ad h. Quoniam eadem quoque erit trianguli propositi gravitas specifica; sequitur triang. ACB ita esse ad triang DCE :: $ab : xy :: h : g$; unde $hxy = abg$ (I). Transeat nunc recta PQ per utriusque trianguli centra gravitatis, & occurrat lateri BC in R; fiatque *Sinus Ang.* AQP = Q; ejus *Cosinus* = q; *Sin.* ACB = C; *Cos.* = c; *Sin.* BRP = R; *Cos.* = r; & *Sinus totus* = 1; atque obtinebitur $aQ - bR = xQ - yR$ (*); unde $Q = \frac{b-y}{a-x} R$. Ob suppositum æquilibrium in hoc situ,

(*) Sit trianguli ACB centrum gravitatis in F, per quod itaque rectæ AK & BH ductæ efficient triangulum CAK = KAB, & ABH = HBC, unde triang. AFH = BFK; nec non, ducta recta FC, triang. AFC = duplo triangulo FCK; atque hinc AF = 2FK. Itaque *Sin.* AQP = Q : (*Sin.* AFQ =) *Sin.* KFR :: 2FK : AQ = a − QC; unde *Sin.* KFR = $\frac{a.Q - Q.QC}{2FK}$. Pariter est R : *Sin.* KFR :: FK : (KR = $\frac{1}{2}b$ + CR =) $\frac{1}{2}b + \frac{Q.QC}{R}$, unde *Sin.* KFR = $\frac{\frac{1}{2}b.R + Q.QC}{FK}$ = $\frac{a.Q - Q.QC}{2FK}$; atque hinc prodibit $QC = \frac{aQ - bR}{3Q}$. Quoniam QP supponitur quoque transire per centrum gravitatis trianguli DCE, prodibit valor ipsius QC, respectu hujus trianguli, substituendo, in valore invento, x & y, pro a & b respective; unde constat propositum.

ſitu, atque ea propter PQ normalem ad ſectionem aquæ DE, obtinebitur $xq = yr$. Præterea ex *Elem. Trig.* conſtat, quod ſit $Q = Cr - cR$; nec non $q = CR + cr$. Hæ quatuor poſteriores æquationes rite collatæ, præbent, facta debita reductione & ſubſtitutione, ſequentem æquationem inter x & y, $x^2 - ax - bcx = y^2 - by - acy$; vel $x^2 - \left(\frac{3a^2 + b^2 - e^2}{2a}\right) x = y^2 = \left(\frac{a^2 + 3b^2 - e^2}{2b}\right) y$ (II) ſubſtituendo pro c ejus valorem $\frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab.}$, in quo e denotat latus AB. Jam autem per æquationem (I) eſt $y = \frac{abg}{bx}$, & hinc $y^2 = \frac{a^2b^2g^2}{b^2x^2}$, quibus valoribus ſubſtitutis in æquatione (II), prodibit æquatio ſolam x involvens: $x^4 - \left(\frac{3a^2 + b^2 - e^2}{2a}\right) x^3 + \left(\frac{a^2 + 3b^2 - e^2}{2b}\right) agx - \frac{a^2b^2g^2}{b^2} = 0$. Quot itaque hæc æquatio continet radices reales & affirmativas ipſius x, minores quam a, quibus valores ipſius y, minores quam b, reſpondent; tot quoque modis triangulum propoſitum & conſequenter prisma, de quo quæritur, aquæ, ſub hypotheſi allata, innatabit. Perſpicuum enim eſt, neque valores negativos ipſarum x & y; neque earundem valores ipſis a & b reſpective majores, quæſtioni ſatisfacere; quia ſectio a-

quæ DE ſupponitur cadere intra angulum C aquæ ſubmerſum, & latus extra aquam eminens AB. Valores itaque hos limites excedentes ceu inutiles rejiciendi ſunt.

§. VII.

Sed libet rem ſpeciatim explanare. Sit igitur triangulum ACB æquicrurum, ita ut $a = b$: & habebitur ex æquatione inventa ſequens: $x^4 - \left(\frac{4a^2 - e^2}{2a}\right) x^3 + \left(\frac{4a^2 - e^2}{2b}\right) a g x - \frac{a^4 g^2}{b^2} = 0$, quæ per diviſionem reſolvitur in $x^2 - a^2 g = 0$ (III); & $x^2 - \left(\frac{4a^2 - e^2}{2a}\right) x + \frac{a^2 g}{b} = 0$ (IV); quarum æquationum utraque dat binos valores ipſius x: nempe iſta præbet $x = \pm a \sqrt{\frac{g}{b}}$; hæc vero exhibet $x = \frac{1}{4} a (4a^2 - e^2) \pm \frac{1}{4a} \sqrt{4a^2 - e^2)^2 - 16 \frac{a^4 g}{b}}$. Jam vero in priore iſto valore ſignum + valet; — vero rejiciendum, quia DC non ultra C producta eſſe concipitur; adeoque ex æquatione (III) unicus duntaxat prodit valor; nempe $x = a \sqrt{\frac{g}{b}}$. Quo vero alteri conditioni etiam ſatis-

fiat,

fiat, quæ requirit, ut sit $x < a$, debet esse $1 > \sqrt{\frac{g}{b}}$ vel $1 > \frac{g}{b}$. Data x dabitur y per æquationem (I); est enim $y = \frac{abg}{bx} = a\sqrt{\frac{g}{b}}$. Quare pars submersa quoque est triangulum æquicrurum. Quod autem valores ipsius x, ex æquatione (IV.) dependentes, attinet, ipsa rei natura ostendit, alterum sumendum esse pro y, si pro x assumatur alter; adeo ut vel uterque valor, vel neuter valeat. Ut autem hi valores seu radices ipsius x vel y intra justos maneant limites: 1:o necesse est, sit $(4a^2 - e^2)^2 > \frac{16a^4g}{b}$, vel $\frac{g}{b} > \left(1 - \frac{e^2}{4a^2}\right)^2$ quo radices evadant reales; 2:o oportet esse $\frac{g}{b} > 1 - \frac{e^2}{2a^2}$, ne fiat x vel $y > a$. Hinc itaque sequitur, si ratio gravitatis specificæ prismatis & aquæ i. e. si $\frac{g}{b}$ contineatur intra limites $1 - \frac{e^2}{2a^2}$ & $\left(1 - \frac{e^2}{4a^2}\right)^2$, triangulum æquicrurum, & consequenter etiam prisma rectum & homogeneum, cujus sectiones transversales efficiunt hujusmodi triangula, sub hypothesi assumta, tribus sequentibus modis aquæ immersum, in æquilibrio manere: nempe ut sit

$x =$

$$\left.\begin{aligned} x &= a\sqrt{\frac{g}{b}} \\ y &= a\sqrt{\frac{g}{b}} \end{aligned}\right\} \text{1:mus Modus.}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{4a}(4a^2 - e^2) + \frac{1}{4a}\sqrt{\overline{4a^2 - e^2}^2 - 16a^4\frac{g}{b}} \\ y &= \frac{1}{4a}(4a^2 - e^2) - \frac{1}{4a}\sqrt{\overline{4a^2 - e^2}^2 - 16a^4\frac{g}{b}} \end{aligned}\right\} \text{2:dus Modus}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{4a}(4a^2 - e^2) - \frac{1}{4a}\sqrt{\overline{4a^2 - e^2}^2 - 16a^4\frac{g}{b}} \\ y &= \frac{1}{4a}(4a^2 - e^2) + \frac{1}{4a}\sqrt{\overline{4a^2 - e^2}^2 - 16a^4\frac{g}{b}} \end{aligned}\right\} \text{3:tius Modus.}$$

Cor. I. Si in expressionibus præcedentibus pro g substituatur $h - g$; prodibunt casus, quibus triangulum æquicrurum, atque consequenter etiam prisma similium sectionum transversalium, situ inverso aquæ innatet: nempe ut angulus C supra aquam emineat, basis vero AB eidem sit immersa. Nam in hoc situ patet, triangulum extra aquam eminens DCE fore ad totum triang. ACB ut $h - g$ ad h; parte trianguli aquæ submersa ADEB se habente ad totum ut g ad h. Præterea facile perspicitur, rectam verticalem PQ, quæ nunc concipitur ducta per centra gravitatis totius trianguli atque trapezii ADEB, quoque transire per centrum gravitatis trianguli, supra aquam eminentis DCE. Unde applicatio aliatæ solutionis ad præsentem casum manifesta est.

Cor. II.

Cor. II. Casus de prismate allati pertinent quoque ad cuneum, ceu prisma triangulare exiguæ altitudinis. Cuneus itaque homogeneus æqualium laterum tribus modis, in §. hac definitis, aquæ innatabit, manente basi ipsius supra aquam & acie, quæ aquæ submersa supponitur, horizonti parallela. Tot quoque natationis modi pro situ cunei inverso prodibunt, si modo ratio $h - g$ intra præscriptos contineatur limites.

Cor. III. Si sectiones transversales prismatis efficiant triangula æquilatera; erit $e = a$; quapropter bini posteriores natationis modi, pro hoc casu, evadunt

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{4}a \pm \tfrac{1}{4}a\sqrt{9 - 16\tfrac{g}{h}} \\ y &= \tfrac{3}{4}a \mp \tfrac{1}{4}a\sqrt{9 - 16\tfrac{g}{h}} \end{aligned}\right\} \text{II \& III Mod.}$$

Ne autem hi modi fiant aut impossibiles aut alias inutiles seu hypothesi minus satisfacientes, oportet, in casu hedræ extra aquam eminentis, $\frac{g}{h}$; in situ vero prismatis inverso, $\frac{h-g}{h}$ contineri intra limites $\frac{8}{16}$ & $\frac{2}{16}$.

§. VIII.

Fiat nunc transgressus ad unum alterumve casum particularem, atque sit $a = 2e$. Quo itaque pri-

 sma,

ſma, tribus modis, hedra ſupra aquam eminente, aquæ innatet, neceſſe eſt, $\frac{g}{h}$ contineatur intra limites $\frac{224}{256}$ & $\frac{225}{256}$. Sit ex. gr. $\frac{g}{h} = \frac{224}{255}$, atque prodibit triplex hæc innatatio. Pro ſitu autem inverſo, quo $\frac{h-g}{h} = \frac{31}{255}$ tum foret, non niſi unicus reſtat natationis modus, nempe quo ſectio aquæ eſt hedræ ſubmerſæ parallela. Si vero $\frac{g}{h}$ contineatur intra limites $\frac{31}{256}$ & $\frac{32}{256}$, triplici quidem modo prisma aquæ innatabit in caſu *Coroll. I;* aſt tum pro altero iſto caſu, quo hedra ſupra aquam eminere ſupponitur, non niſi unicus relinquitur æquilibrii ſitus. Manente itaque ratione gravitatis ſpecificæ, prismatis propoſiti & aquæ, intra limites $\frac{224}{256}$ & $\frac{225}{256}$, vel $\frac{31}{256}$ & $\frac{32}{256}$, quatuor, non pluribus modis, prisma aquæ innatabit, quorum tres, reſpective ad hos limites, competunt hedræ extra aquam eminenti vel eidem immerſæ, quartus autem pro ſitu inverſo remanet. Si vero $\frac{g}{h}$ hos limites transgrediatur non niſi duplex dabitur æquilibrii ſtatus: unicus nempe pro quovis caſu. Quo autem ratio gravitatis ſpecificæ utrique caſui æque ſatisfaciat, oportet eſſe $\frac{g}{h} = \frac{h-g}{h} = \frac{1}{2}$: numerus vero ſituum æquilibrii nunc dependet a ratione quam

quam tenent latera trianguli æquicruri ad basin. Si $e < a$, primus duntaxat relinquitur modus (§. VII. & Cor. I.), quo triangulum hoc aquæ innatare demonstravimus, sive angulus C sit aquæ submersus, sive extra eam emineat. Ut autem reliqui modi quoque locum habeant, necesse est, sit $e > a$, sed ita tamen, ut $\frac{e^2}{a^2}$ contineatur intra limites $4 - \sqrt{8}$ & 1 i. e. intra $\frac{293}{250}$ & $\frac{250}{250}$ fere. Itaque si $\frac{e^2}{a^2} = \frac{11}{10}$, sex prodeunt natationis modi: tres scilicet pro casu, quo angulus C aquæ est submersus; totidemque pro situ inverso. Hinc 18 diversis modis prisma triangulare, in situ axis horizontali, aquæ innataret: si modo conditiones allatæ æque satisfacerent reliquis hedris & angulis: quod tamen fieri non posse ex antecedentibus facile colligitur, nisi in casu Coroll. 3, quo sectiones transversales prismatis, sunt triangula æquilatera. Etenim tum $\frac{g}{b} = \frac{b-g}{b} = \frac{1}{2}$ coincidit cum ipso limite $\frac{8}{10}$, et altera ipsarum x & y evadit $= a$; altera vero $= \frac{1}{2}a$ in II & III natationis modo (*Cor.* 3). Hinc itaque patet, rectam ex quocunque angulo ductam normaliter ad latus oppositum. efficere sectionem aquæ pro singulis lateribus atque angulis huic rectæ oppositis, in situ alterutro quem II & III modus exhibet. Unde unus idemque modus natationis fit & angulo & lateri vicino communis, sive aquæ immergantur, sive extra aquam emineant; bi-

nis modis in eundem ſitum quaſi coaleſcentibus. Hinc proinde priſma rectum homogeneum, cujus ſectiones transverſales ſunt triangula æquilatera, cujusque gravitas ſpecifica eſt ad aquæ gravitatem ſpecificam ut 1 ad 2, duodecim diverſis ſitibus, axe manente horizontali, aquæ innatabit, quos exhibet Fig. 4. in qua linea quævis punctata exhibet ſectionem aquæ pro ſingulis binis ſitibus.

§. IX.

Patet vel ex allatis, plures dari ſitus, quibus corpus quodvis datum aquæ inſidere poteſt. Aſt non omnes ſitus ſunt ejusdem indolis alii enim ſunt firmi & ſtabiles; alii inſtabiles: haud ſecus ac, ſi conus rectus homogeneus baſi ſua plano horizontali inſiſtat, ſitus adeſt firmus; ſi vero vertice ſuo huic plano inſiſtat, ſitus ipſius merito dicitur inſtabilis, quippe ex quo minima vi facile deturbabitur. Sic quoque baculus quantumvis levis aquæ verticaliter immiſſus æquilibrium tenere poteſt (§. V.); at ſi vel tantillum ex hoc ſitu inclinetur, ſua quaſi ſponte procumbet, atque ſic ſitum ſuum fuisſe inſtabilem prodit. Stabilem vero habet ſitum corpus aquæ innatans, dum a ſitu æquilibrii depulſum in eundem æquilibrii ſitum a presſione aquæ iterum reſtituitur. Quo juxta manifeſtum eſt ſtabilitatem hanc eſſe eo majorem quo majus eſt momentum potentiæ hujus reſtituentis. Plures

res itaque dantur ſtabilitatis gradus, qui pro diverſis corporibus, diverſoque corporum ſitu variari poſſunt. Immo vero pro uno eodemque corporis ſitu haud raro evenit, ut æquilibrii ſtabilitas ſit varia; quippe corpus aquæ innatans inclinationi verſus unam plagam magis reſiſtere poteſt, quam verſus alias: unde ſtabilitas quam aliæ plagæ dant poſitivam reſpectu aliarum plagarum fieri poteſt nulla, immo negativa. Sed hanc de ſtabilitate æquilibrii corporum aquæ innatantium materiem ulterius proſequi non eſt noſtri inſtituti. Quo juxta reticendum non eſt *Celebr.* EULERUM, hæc & alia huc pertinentia, in præſtanti opere, quod *Scientiæ Navalis* nomine inſignivit, ſolide expoſuiſſe, ſimulque regulas exhibuiſſe, ad quas navium conſtructio & oneratio exigenda eſt, ſi juſta gaudeant æquilibrii ſtabilitate.

§. X.

Coronidis loco haud abs re erit, obſervaſſe, dari natationes, quæ per vires, in §§. II. III & IV expoſitas, unice explicari nequeunt. Exemplo erunt exiguæ acus chalybeæ, quas aquæ innatare notiſſimum eſt, quamvis gravitate ſpecifica aquam plus quam ſepties ſuperent. Quapropter, ad hunc producendum effectum, præter vim gravitatis acuum & preſſionis aquæ, neceſſe eſt, concurrant aliæ vires, quas alii tenacitati particularum aquearum, alii vero repulſioni inter has & particulas chalybeas

adſcribunt. Eorum, qui poſteriori ſententiæ favent, unus eſt THOMAS MELVILL, cujus hac de re verba, in *Nov. Actis Edimburg. T. II. & pag. 32.* verſionis Germanicæ, quæ nobis eſt ad manus, digna ſunt, quæ adferantur: Auf gleiche art können wir ſchließen/ das eine glatte Nadel/ die auf dem Waſſer zu ſchwimmen ſcheinet/ eigentlich daſſelbe nirgends berührt/ ſondern durch ihr zuruckſtoßen/ um ſich eine art von graben oder bette machet/ deßen höhlung viel größer iſt als der raum/ der die Nadel einnimmt. Ut vel quadantenus conſtet, quo jure hæc dicantur, fecimus & nos nonnulla huc ſpectantia pericula, acubus variæ magnitudinis, quarum maxima erat longitudinis 1 pollic. & 5 lin. Geom. nec non diametri $\frac{3}{8}$ lin. Geom., quæ tamen aquæ niſi ſebo ſaltem leviter illita, innatare non potuit. Minorum vero acuum natatio absque ſebo facta eſt. Succeſſus experimentorum is fuit, ut ad latera acuum ſuperiora, in ſuperficie aquæ cavitates diſtincte conſpicerentur; id quod innuere videtur, repulſionem quandam adeſſe ſaltem inter ſuperiores partes acuum natantium & aquam. Quo autem ſimul exploraremus, an eadem repulſio quoque adſcribenda ſit inferioribus partibus, volſella quadam paulatim & horizontaliter elevari curavimus acus haſce natantes, quo pacto, pluries repetitis experimentis, non ſine voluptate, animadvertimus, aquam in formam dor-

ſi

ſi verſus inferiores partes acuum elevari iisque adhærere, quod omnino contrariatur ſententiæ *Melvillianæ*, qua natatio hæc, absque quadam tactione fieri contenditur. Neque opus eſt omnimodam tactionem hinc tollere: ſufficit, ſi inter latera acus & aquam ea adſit repulſio, qua loco ſuo expellatur tantum aquæ ambientis, quantum addendum eſt volumini aqueo parti ſubmerſæ æquali, ut pondere adæquet acum natantem. Sic enim acuum natatio, per principia ſupra expoſita, manifeſta foret.

S. D. G.

adſcribunt. Eorum, qui poſteriori ſententiæ favent, unus eſt THOMAS MELVILL, cujus hac de re verba, in *Nov. Actis Edimburg. T. II. & pag. 32.* verſionis Germanicæ, quæ nobis eſt ad manus, digna ſunt, quæ adferantur: Auf gleiche art können wir ſchließen/ das eine glatte Nadel/ die auf dem Waſſer zu ſchwimmen ſcheinet/ eigentlich daſſelbe nirgends berührt/ ſondern durch ihr zuruckſtoßen/ um ſich eine art von graben oder bette machet/ deßen höhlung viel größer iſt als der raum/ der die Nadel einnimmt. Ut vel quadantenus conſtet, quo jure hæc dicantur, fecimus & nos nonnulla huc ſpectantia pericula, acubus variæ magnitudinis, quarum maxima erat longitudinis 1 pollic. & 5 lin. Geom. nec non diametri $\frac{3}{8}$ lin. Geom., quæ tamen aquæ niſi ſebo ſaltem leviter illita, innatare non potuit. Minorum vero acuum natatio absque ſebo facta eſt. Succeſſus experimentorum is fuit, ut ad latera acuum ſuperiora, in ſuperficie aquæ cavitates diſtincte conſpicerentur; id quod innuere videtur, repulſionem quandam adeſſe ſaltem inter ſuperiores partes acuum natantium & aquam. Quo autem ſimul exploraremus, an eadem repulſio quoque adſcribenda ſit inferioribus partibus, volſella quadam paulatim & horizontaliter elevari curavimus acus haſce natantes, quo pacto, pluries repetitis experimentis, non ſine voluptate, animadvertimus, aquam in formam dor-

ſi

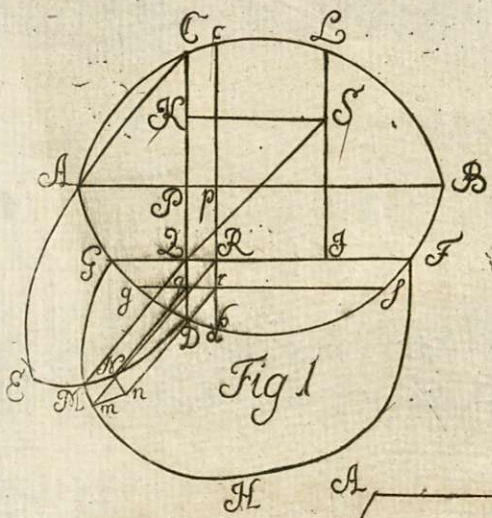

Fig 1

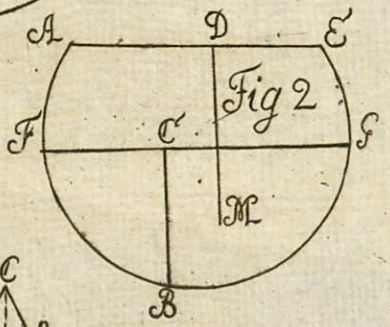

Fig 2

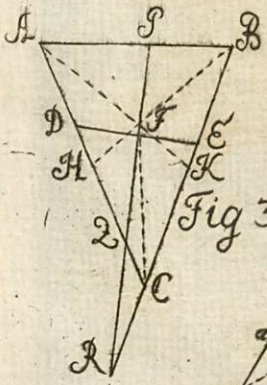

Fig 3

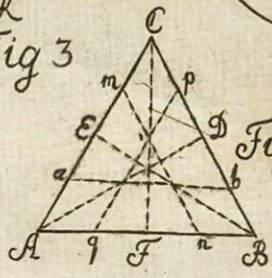

Fig 4