D. A. G.

DISSERTATIO ALGEBRAICA,

De

LIMITIBUS ÆQUATIONUM,

Quam,

Consent. Ampliss. Facult. Philosoph. in Reg. Academia Aboënsi.

Publice ventilandam sistunt

AUCTOR

ISAACUS NORDBERG,

Phil. Mag.

Et

RESPONDENS

Carolus Henr. Brunou,

Wiburgensis.

In AUDITORIO MAJORI Die XXVIII. Aprilis An. MDCCLXXXI.

H. A. M. C.

ABOÆ,

Impressa apud Viduam Reg. Acad. Typ. J. C. Frenckell.

3.

S:Æ R:Æ M:TIS

SUMMÆ FIDEI VIRO,

REGIS REGNIQUE SVIO-GOTHICI SENATORI,

REGIÆ CANCELLARIÆ PRÆSIDI,

ACADEMIÆ ABOËNSIS CANCELLARIO,

ORDINUM REGIORUM EQUITI ET COMMENDATORI,

ILLUSTRISSIMO ATQUE *EXCELLENTISSIMO*

COMITI AC HEROI

DOMINO

ULRICO SCHEFFER,

MÆCÆNATI SUMMO,

SACRUM.

§. I.

Eximiam illam, quæ Algebræ nomine insignitur, scientiam circa æquationum resolutionem versari notum est. Utilitatem ejusdem in omni Mathesi monstratu inutile foret omnino atque prolixum. Neque enim quis in ea vel leviter versatus usum ejusdem quovis se momento prodentem ignorare potest, nec parvulæ hæ pagellæ omnia, (quibus in summam conferendis ne volumen quidem sufficeret) utilitatem ejusdem concernentia possunt complecti. Dixisse tantum sit satis rapidos, quos sublimior Geometria fecit progressus eidem haud minima ex parte acceptos esse referendos; quorum scilicet caussam a facilitate repetendam esse patet, qua hujus scientiæ ope, arte quadam signorum combinatoria, certis tamen atque indubitatis principiis innixa, sine longa ratiociniorum serie atque ingenii contentione difficilia alias problemata solvi possunt, atque demonstrationes theorematum concinnari, in quibus rite adornandis veteres primi ordinis Mathematici omnes ingenii nervos intendere coacti fuere, quorumque scripta quam plurima, vel ob hujus scientiæ defectum, difficillime omnino, saltim haud sine summa attentionis opera in-

 telli-

telliguntur. Artis Analytices objectum æquationes earumque ſolutionem eſſe ſub initium diximus. Has ad certos referri gradus ex ſumma quantitatis incognitæ dignitate, reductione adhibita, æſtimandos notum eſt, atque ſic æquationem $x^3 + bx^2 - cx - d = o$ tertii eſſe gradus. Æquationum primi ordinis ſolutionem antiquiſſimam eſſe debere ex natura rei patet, revera autem eſſe atque inde a temporibus DIOPHANTI pro *Algebræ* auctore vulgo habiti, quamvis potius pro inventore ſingularis illius methodi, qua problemata ſolvit indeterminata, habendi, repetendam hiſtoria docet. Quod æquationes ſecundi gradus attinet, earum ſolutionem a DIOPHANTO non niſi promiſſam apud LUCAM PACCIOLUM alias LUCAM *de Burgo Sancti ſepulchri* dictum invenimus demum in libro, qui vocatur *Summa de Arithmetica & Geometria*, ubi pro hocce gradu regulæ jam habentur, quæ adhuc in uſu ſunt, quamvis in unam generalem compactæ, non tantum pro caſibus $x^2 + ax - b^2 = o$, $x^2 - ax - b^2 = o$, & $x^2 - ax + b^2 = o$ huic Analyſtæ notis, verum etiam pro caſu $x^2 + ax + b^2 = o$ ab eodem ob ignoratum radicum negativarum uſum omiſſo. Cubicarum æquationum reſolutione, Analytices ſcientiam a CARDANO locupletatam legimus. In tractatu ſuo de *Arte Magna*, (nomen præeunte LUCA PACCIOLO Algebræ impoſitum) omnes harum æquationum caſus pertractat, pro unoquoque horum regulas tradens certiſſimas, quamvis non amplius uſurpatas præter unam, quæ caſum a TARTALEA

eidem

eidem communicatum, cum ſcilicet fuerit $x^3 \pm px = q$, concernit, ad quem etiam omnes cubicæ æquationes commode reduci poſſunt. Neque caſum hujus gradus *irreductibilem* vocatum reliquit intactum, eum ſcilicet in quo radicis quadraticæ formulam ingredientis extractio eſt impoſſibilis. Expreſſionem namque pro eo tradit Algebraicam, radicem continentem maximam.

§. II.

Cum vero jam numerus graduum æquationum infinitus ſit, atque præterea caſus uniuscujusque gradus in ſpecie perquam multi, tædioſum, ne impoſſibile dicam, eſſet regulas pro unoquoque uniuscujusque gradus caſu adornare. Methodo igitur generali æquationes ſolvendi omnes quid fingi poſſet melius? Quid vero exſpectandum minus? De ejusmodi methodo, quantumvis neceſſaria ſit, neque ante CARDANUM ullum, neque CARDANUM ipſum cogitaſſe legimus. Neque hoc mirum. Notum namque eſt nullam ejusmodi methodum, excepta approximationis methodo, quantumvis in ea invenienda deſudarint Mathematici *(a)* inventam eſſe adhuc, nec forte unquam poſthac inventum iri. In multiplici namque differentia conſtitutæ deprehenduntur æquationes: vel

 enim

(*a*) Inter eos, qui maximam Methodo generali inveniendæ operam dedere, eminent D:ni *de Lagny*, *Laloubere* & *Rolle*.

enim radicibus gaudent impossibilibus vel possibilibus, atque ex his vel surdis vel rationalibus, qui diversi casus efficiunt methodum generalem, si non impossibilem plane inventu, attamen quam sæpissime incommodam applicatu. Post CARDANUM (cujus quidem observationes circa pluralitatem radicum ansam quid novi de æquationum formatione cogitandi suppeditare potuere) ad generales, quales haberi possunt, methodos propius indirecte saltem itur, quibus inveniendis multum omnino conduxisse VIETÆ circa naturam æquationum considerationes, negativos tantum valores quamvis concernentes, nemo inficias iverit. Observabat namque hic quantitatem secundi termini cognitam summam esse omnium valorum signo — affectam, cognitam tertii esse summam productorum ex singulis binis &c. atque ultimum terminum omnium radicum factum esse, docebatque præterea, methodum æquationes præparandi radices earundem quantitate data augendo vel minuendo, atque per quantitatem datam multiplicando vel dividendo, (qua adhibita præparatione cubicæ æquationes atque etiam biquadraticæ facile omnino solvuntur), ut methodum ejusdem generalem ingeniosam alias, multo quamvis obnoxiam labori æquationes quascunque affectas resolvendi silentio præteream (a). His cognitis difficile non erat ulterius pro-

(a) Hanc methodum regulasque pro ea videre licet in libro ejus de *Numerosa potestatum affectarum resolutione*.

progredi. Id vero fecit *D:nus* HARRIOTUS Analyſta peritiſſimus, quamvis laudibus Compatriotæ ſui *D:ni* WALLISII longe inferior, obſervans primus æquationes ſuperiorum graduum productas eſſe ex multiplicatione ſimplicium; unde clare ſequitur æquationes tot habere radices, quot ſunt earum dimenſiones. Hinc etiam methodus illa generalis æquationes, quarum radices commenſurabiles ſunt reſolvendi, tentando diviſionem æquationis per incognitam auctam vel minutam diviſore quodam ultimi termini, cujus diviſionis ope æquationes ad inferiores deprimuntur gradus. Sic in æquatione $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24 = 0$, cum ultimi termini diviſores ſint 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. tentanda eſt diviſio per $x \pm 1$, $x \pm 2$ &c. quæ cum ſuccedat cum $x + 1 = 0$, atque $x + 2 = 0$, ſequitur radices eſſe 1. atque 2. Reliquæ inveniri poſſunt reſolvendo æquationem quadraticam $x^2 + 7x + 12 = 0$. Clarum vero eſt, quando æquatio per incognitam + vel − diviſore quodam ultimi termini dividi non poteſt, eam nullam habere radicem integram vel rationalem, in quo caſu ad approximationes recurrendum eſſe patet. Hanc methodum pro æquationibus radices integras atque rationales habentibus anſam limitibus æquationum inveniendis ſuppeditaſſe unusquisque jam videt. Sunt vero hi nihil aliud, quam quantitates, intra quas radicum æquationis maxima & minima continentur. Cum enim accidit ut ultimi termini diviſores per quam multi ſint, omnes tentare tædio eſſet, cogni-

tis vero intra quos limitibus radices consistant, tentandi tantum sunt qui inter illos contineantur ultimi termini divisores.

§. III.

Primam limites inveniendi methodum peritissimo *Gallico* Geometræ FLORIMUNDO *a Beaune* acceptam esse referendam Historia docet. Agit autem de ea in posteriori *Tractatuum*, qui ab eo habentur, posthumorum, illam tantum ad æquationes cubicas, quadraticas & biquadraticas tam completas, quam terminis quibusdam carentes extendens. Eam vero heic afferre instituti postulat ratio. Sint e. g. inveniendi limites æquationis $x^2 - lx + m^2 = o$ erit $m^2 = lx - x^2$ atque cum m^2 sit quantitas affirmativa $lx - x^2$ realis, unde $lx > x^2$ & denique, utroque membro per x diviso, $l > x$. Porro cum sit $x^2 = lx - m^2$ atque x^2 affirmativa, $lx - m^2$ etiam affirmativa erit, atque igitur $lx > m^2$ & denique $x > \frac{m^2}{l}$; unde patet radices æquationis propositæ $x^2 - lx + m^2 = o$ contineri inter l atque $\frac{m^2}{l}$, cum sit $x < l$, & $x > \frac{m^2}{l}$. Pari modo si inveniendi sint limites æquationis quadraticæ $x^2 - lx - m^2 = o$. erit $x^2 = lx + m^2$ & $x^2 > m^2$, ac proinde $x > m$ & $mx > m^2$. Hinc $x^2 < lx + mx$ & denique $x < l + m$. Rursus quo-

quoniam $x^2 = lx + m^2$, erit $x^2 > lx$, $x > l$ & $lx > l^2$, unde $x^2 = (lx + m^2) > l^2 + m^2$ atque $x > \sqrt{l^2 + m^2}$. Denique cum $x > m$ & sic $lx > lm$ erit $x^2 > lm + m^2$ & $x > \sqrt{lm + m^2}$. Unde radicem æquationis propositæ invenimus majorem quam maxima harum duarum $\sqrt{l^2 + m^2}$ & $\sqrt{lm + m^2}$, sed minorem quam $l + m$. Sint postremo inveniendi limites æquationis $x^2 + lx - m^2 = o$, erit $x^2 + lx = m^2$, $lx < m^2$ & $x < \frac{m^2}{l}$. Rursus cum $x^2 + lx = m^2$ erit $m^2 > x^2$, $m > x$ & proinde $mx > x^2$, unde $mx + lx > m^2$ & denique $x > \frac{m^2}{l + m}$. Quare limites æquationis propositæ sunt $\frac{m^2}{l + m}$ minor quam x & $\frac{m^2}{l}$ atque m majores eadem. Quartum æquationum secundi ordinis casum auctor non considerat, cum fuerit nimirum $x^2 + lx + m^2 = o$, in quo ambæ radices negativæ sunt, quoniam transmutatione negativarum in affirmativas hic casus ad primum reducitur, hac observata differentia, quod x minor sit quam $-\frac{m}{l}$ atque major quam $-l$. Inventorem limitum celeberrimum per æquationes cubicas atque biquadraticas sequi necesse non est; sufficiat quædam tantum speciminis loco adtulisse, ut natura methodi intelligeretur. Observationes quasdam circa illam subjun-

jungere præſtat. Sciendum ſcilicet eſt eam non exhibere niſi limites radicum affirmativarum in æquationibus negativis etiam gaudentibus, atque adeo ſi negativarum limites inquirere velimus neceſſe eſſe terminorum alternorum ſigna mutare. Sit enim $x = a$, $x = -b$ atque inde formetur æquatio $x^2 \left.\begin{matrix}+b\\-a\end{matrix}\right\} x - ab = o$, erit vi hujus methodi ſi $b > a$ $x < \frac{ab}{b-a}$ & $> \frac{ab}{\sqrt{ab} + b - a}$ vel ſi $b < a$, $x > \sqrt{\overline{b-a}^2 + ab}$ vel $\sqrt{\overline{b-a}\sqrt{ab} + ab}$ & $< b - a + \sqrt{ab}$. Cum vero jam neutra harum quantitatum $\frac{ab}{b-a}$, $\frac{ab}{\sqrt{ab} + b - a}$ &c. negativa ſit, omnes radicem negativam excedunt, atque adeo ejusdem limites eſſe non poſſunt. Mutatis vero ſignis terminorum alternorum, b affirmativa evadit & a negativa, quare rurſus limites radicis b utpote affirmativæ haberi poſſunt. Deinde obſervandum eſt hanc methodum in æquationibus, quarum omnes radices imaginariæ ſunt, limites etiam exhibere, qui tamen pro imaginariis utpote nulla vel affirmativa vel negativa quantitate explicabilibus, neceſſario impoſſibiles ſunt. Sic in æquatione $x^2 - ax + b = o$ limites habentur a atque $\frac{b}{a}$, cum tamen, poſito $b > a^2$, omnes valores ſint imaginarii atque hanc ob cauſſam nullis circumſcribi poſſint limitibus. Denique hoc defectu hæc eadem laborat Metho-

thodus, quod qui ejus ope exhibentur limites non ſatis ſint arcti. Sic e. g. in æquatione $x^2 - px + q = o$, $x < p$ atque $> \frac{q}{p}$; jam vero poſitis ambabus radicibus æqualibus atque poſitivis, limes major p duplo major fit radicibus ſingulis, quarum limites igitur admodum laxi evadunt. Pariter in æquatione cubica $x^3 - px^2 + qx - r = o$, ſi ſupponitur $x < p$, limites ſunt p atque $\frac{r}{q}$ & ſic, poſitis omnibus radicibus æqualibus atque poſitivis, limes major triplo eſſet major radice, cujus limites quærendi forent. Sed ſatis de hac prima methodo limites æquationum inveniendi. Ad alias meliores afferendas atque explicandas progregiendum.

§. IV.

Poſt Florimundum *a Beaune* neminem doctrinam ejus magis quam ille ipſe excoluiſſe legimus. Cel. *Dnus* Newtonus vero in Mathematicis longe verſatiſſimus aliam excogitavit methodum ex inventione poteſtatum radicum dependentem atque hoc unico fere principio ſuperſtructam: *quadrata & biquadrata ſeu in genere poteſtates radicum eas, quæ numeris exprimuntur paribus ſemper eſſe affirmativas.* Facile vero invenitur ſumma poteſtatum quarumvis radicum æquationis poſſibilium. Significent enim p, q, r, s, t, v &c. quantitates cognitas termi-

norum cujuscunque æquationis ſub ſignis mutatis, p ſcilicet ſecundi, q tertii, r quarti & ſic deinceps, atque vocetur ſumma radicum A, & ſumma quadratorum radicum B, erit $B = pA + 2q$. Nam ſit æquatio e. g. cubica $x^3 \left.\begin{matrix} -a \\ -b \\ -c \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +ab \\ +ac \\ +bc \end{matrix}\right\} x - abc = o$, ſumma radicum eſt $a + b + c$, quæ in ſe ducta producit $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$; jam vero quantitas cognita ſecundi termini ſub ſignis mutatis bis ſumta eſt $-2ab - 2ac - 2bc$, qua ſummæ radicum quadrato addita, habetur $a^2 + b^2 + c^2$ ſeu ſumma quadratorum radicum, quæ igitur, ut dixi, ſignis rite obſervatis æqualis eſt $pA + 2q$. Pari modo etiam probari poſſet, poſitis C Summæ Cuborum radicum, D ſummæ quadrato-quadratorum, E ſummæ quadrato-cuborum atque F ſummæ cubo-cuborum æqualibus, fore $C = pB + qA + 3r$, $D = pC + qB + rA + 4s$; $E = pD + qC + rB + sA + 5t$, $F = pE + qD + rC + sB + tA + 6v$, atque ſic porro ſecundum eandem legem progrediendo. Harum formularum ope facile jam erit, quantitates litteris A, B, C, D, E, F repræſentatas in æquatione quacunque e. g. $x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = o$ invenire. Eſt namque $p = 14$, $q = -71$, $r = 154$ atque $s = -120$, unde ſumma quadratorum radicum $(= pA + 2q)$ æqualis $196 - 142 = 54$; ſumma cuborum radicum ſeu $C = pB + qA + 3r = 224$, atque $D = 978$. Pari modo pro iisdem inveniendis

in

in æquationibus terminis quibusdam carentibus procedendum eſt e. g. in æquatione $x^3 - 19x + 30 = o$ ponendo ſcilicet $p = o$, $q = 19$, atque $r = -30$. unde habetur $B = 38$. &c. Modo adeo ſummam quarumvis poteſtatum radicum inveniendi tradito, quomodo ex hac data limites æquationum colligantur videndum. Ex potentiarum geneſi notum eſt, poſſibilium radicum quadrata ſemper eſſe affirmativa, unde porro patet radicum quadratorum ſummam utpote affirmativam etiam exiſtentem majorem eſſe maximæ radicis quadrato; & etiam ob ſimilem rationem ſummam quadrato-quadratorum vel cubo-cuborum majorem eſſe quadrato-quadrato vel cubo-cubo maximæ radicis; ut adeo limes major obtineatur extrahendo radicem vel quadratam ex ſumma quadratorum, vel quadrato-quadraticam ex ſumma quadrato-quadratorum vel cubo-cubicam ex ſumma cubo-cuborum radicum & ſic in infinitum. Sint porro duæ radices, a, b, quarum quadrato-quadratorum ſumma eſt $a^4 + b^4$ & quæratur inter $a^2 + b^2$ atque $a^4 + b^4$ media proportionalis $\sqrt{a^6 + a^2b^4 + a^4b^2 + b^6}$, erit ea paullo major ſumma cuborum radicum poſitive ſumtorum, ſeu erit $\sqrt{a^6 + a^2b^4 + a^4b^2 + b^6} > a^3 + b^3$. Quadratum enim ex $a - b$ ſcilicet $a^2 - 2ab + b^2$ ſemper poſitivum eſt, unde etiam ſi multiplicetur per a^2b^2 productum $a^4b^2 - 2a^3b^3 + a^2b^4$ poſitivum erit, atque ſic $a^4b^2 + a^2b^4 > 2a^3b^3$ & addita quantitate $a^6 + b^6$, $a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6 > a^6 + 2a^3b^3$

 $+ b^6$

$+ b^6$ ac consequenter $\sqrt{a^6 + a^4 b^2 + a^2 b^4 + b^6} >$ $\sqrt{a^6 + b^6 + 2a^3 b^3} (= a^3 b^3)$. Hinc patet etiam limitem radicum affirmativarum maximæ fore radicem cubicam ex semisumma hujus mediæ proportionalis & summæ cuborum sub propriis signis, atque limitem minimæ negativarum æqualem eidem radici ex semi-differentia earundem quantitatum. Sit e. g. æquatio jam antea allata $x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0$, in qua summa quadratorum radicum $= 54$, & summa quadrato-quadratorum $= 978$, inter quas media proportionalis est 229, 8. circiter. Summa cuborum dimidia ($= 112$) mediæ proportionalis dimidio addita habetur 226,9, cujus radix cubica 6,099. major est quam maxima radicum affirmativarum, quæ in hac æquatione est $= 5$. Atque hinc clarum est, quam proxime ad unam æquationis radicem accedi, reliquis in negativas mutatis. Circa hanc vero methodum observandum, eam nec satis commodam ob difficilem atque prolixum calculum esse nec ad æquationes radicibus gaudentes imaginariis applicari posse.

§. V.

Duabus hisce atque omnibus aliis detectis methodis limites inveniendi æquationum palmam præripit illa Cel. *D:ni* Newtoni quæ a nobis jam adferetur. Est vero hæc atque totidem verbis legenda exstat

exſtat in *Arithmetica* Viri hujus *Univerſali: multiplicetur æquationis terminus unusquisque per numerum dimenſionum ejus & dividatur factum per radicem æquationis. Dein rurſus multiplicetur unusquisque terminorum prodeuntium per numerum unitate minorem quam prius & factum dividatur per radicem æquationis. Et ſic pergatur ſemper multiplicando per numeros unitate minores quam prius & factum dividendo per radicem, donec tandem termini omnes deſtruantur quorum ſigna diverſa ſunt a ſigno primi ſeu altiſſimi termini præter ultimum. Et numerus ille erit omni affirmativa radice major, qui in terminis prodeuntibus ſcriptus pro radice, efficit eorum, qui ſingulis vicibus per multiplicationem producebantur aggregatum eſſe ſemper ejusdem ſigni cum primo ſeu altiſſimo æquationis termino.* Hujus methodi principia inveſtigare explicare atque demonſtrare noſtrum jam erit. Sit hunc in finem æquatio generalis $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - - - - K = o$, quæ in aliam transformetur cujus valores minores ſint quam x quantitate p, ponendo $x = y + p$, & transformata inverſo terminorum ordine erit:

$$p^n + n.p^{n-1}y + n.\frac{n-1}{2}p^{n-2}y^2 - - \&c.$$

$$- Ap^{n-1} - \overline{n-1}.Ap^{n-2}y - \overline{n-1}.\frac{n-2}{2}Ap^{n-3}y^2 - - \&c.$$

$$+ Bp^{n-2} + \overline{n-2}.Bp^{n-3}y + \overline{n-2}.\frac{n-3}{2}Bp^{n-4}y^2 - - \&c.$$

$$- Cp^{n-3} - \overline{n-3}.\, Cp^{n-4}y - \overline{n-3}.\, \frac{n-4}{2}\, Cp^{n-5}y^2 \text{ - - \&c.}$$

$$+ Dp^{n-4} + \overline{n-4}.\, Dp^{n-5}y + \overline{n-4}.\, \frac{n-5}{2}\, Dp^{n-6}y^2 \text{ - - \&c.}$$

&c. &c. &c.

Ponatur jam $n = 4$. & hæc æquatio generalis determinati erit gradus quarti ſcilicet atque habebitur:

$$\begin{array}{l} p^4 + 4\, p^3y + 6\, p^2y^2 + 4\, py^3 + y^4 = o. \\ - Ap^3 - 3Ap^2y - 3Ap\, y^2 - Ay^3 \\ + Bp^2 + 2Bpy + B\, y^2 \\ - Cp - C\, y \\ + D \end{array}$$

Ex æquationum natura jam patet, quantitatem illam, quæ pro p in hac æquatione biquadratica ſubſtituta omnes terminos ſigno $+$ afficiat, majorem esſe quocunque valore radicis x. Cum enim nulla ſit ſignorum variatio omnes y valores negativi ſunt, unde cum $x - p = y$, $x - p$ erit quantitas negativa atque igitur p major quam x. Pariter etiam clarum eſt quantitatem illam negativam, quæ pro p in hac eadem æquatione ſubſtituta terminos illius alternatim $+$ $-$ afficiat, minorem fore quovis valore radicis x. Ob variationem namque ſignorum omnes valores y affirmativi ſunt, quare, cum $x - p = y$, $x - p$ affirmativa erit, atque p minor quam x. Hinc etiam patet ſi ſigna terminorum alternorum mutentur, (qua

arte

arte radices negativæ in affirmativas convertuntur & viciſſim,) eam quantitatem affirmativam, quæ pro p ſubſtituta omnes terminos affirmativos efficiat, ſigno $-$ affectam minorem eſſe minimo valore radicis x. Atque hinc jam ratio intelligitur methodi NEWTONIANÆ limites æquationis cujuscunque e. g. $x^3 - 7x^2 - 6x + 72 = o$, inveniendi. Transformationis namque vices adimplet multiplicatio æquationis propoſitæ per progreſſionem Arithmeticam decreſcentem, cujus primus terminus æquatur ſummo incognitæ exponenti cujusque terminorum differentia $= 1$. Transformata namque hæc æquatio $x^3 - 7x^2 - 6x + 72 = o$, hanc induit formam;

$$\begin{array}{l} p^3 + 3p^2 y + 3py^2 + y^3 = o. \\ -7p^2 - 14p\,y - 7\,y^2 \\ -6p - 6\,y \\ +72 \end{array}$$

atque multiplicata per Arithmeticam progreſſionem 3, 2, 1, 0, & 2, 1, 0, reductione adhibita, hæc efficit producta

$$\begin{array}{l} x^3 - 7x^2 - 6x + 72. \\ 3x^2 - 14x - 6. \\ 3x - 7. \end{array}$$

quorum cum terminis transformatæ identitatem unusquisque animadvertit. Terminus enim $p^3 - 7p^2 - 6p + 72$ reſpondet ipſi æquationi, excepto quod loco p^3, p^2, p, habeatur x^3, x^2, x; terminus ſecundus $3p^2 - 14p - 6$ producto $3x^2 - 14x - 6$, eadem obſervata differentia, ſimilis deprehenditur, & denique

que $3p - 7$ producto $3x - 7$; perinde igitur eſt ſive in transformata pro p ſive in propoſitæ productis pro x ejusmodi ſubſtituatur quantitas, quæ omnes terminos in illa vel omnia producta in hac affirmativa, vel alternatim affirmativa & negativa efficiat. Cum vero facilius ſit æquationem multarum dimenſionum per Arithmeticam progreſſionem dicto modo multiplicare quam in aliam transformare, merito illa huic præfertur methodo. Clarum eſt eandem valere methodum in æquationibus terminis quibusdam carentibus e. g. in æquatione $x^3 - 49x + 120 = 0$ modo obſervetur terminos deficientes ſeu *Zero*, etiam multiplicandos eſſe. Sic æquatio propoſita $x^3 \pm 0x^2 - 49x + 120 = 0$ multiplicanda eſt per 3. 2. 1. 0. & dividenda per x unde $3x^2 \pm 0x - 49$ habetur & hæc rurſus per 2, 1, 0 unde demum $6x$ ſeu x. Hanc methodum optimam eſſe unusquisque fatebitur, utpote omnibus æquationibus applicabilem atque etiam ſic limites radicum realium in æquationibus impoſſibiles habentibus radices exhibentem, cum ſignum producti ex factoribus radices impoſſibiles continentibus utpote ſemper numero paribus nunquam mutari poſſit. Denique certo omnino ſenſu pro methodo quadam limites inveniendi habendus eſt modus ille a Celeb. *D;no* NEWTONO inventus æquationes reſolvendi, quo ſupponitur incognita æqualis ſucceſſive terminis quibusdam progreſſionis Arithmeticæ, atque quæruntur omnes diviſores homogeneorum comparationis ex his ſuppoſitionibus oriundorum, iique diviſores homogenei,

nei, quod oritur ex ſuppoſitione $x = o$ tentandi eliguntur, qui Arithmeticam vel creſcentem vel decreſcentem cum diviſoribus reliquorum homogeneorum conſtituant progreſſionem. Hoc namque modo diviſores rationales intra arctiſſimos omnino coguntur limites. Antequam limitum doctrinam dimittam, duas afferam obſervationes, quarum una Cel. *Dn.* MACLAURIN debetur atque altera *Dn.* DE LA GRANGE, quorum ille probat maximum negativum coëfficientem æquationis unitate auctum, majorem ſemper eſſe maxima æquationis radice, atque hic ſimpliciter tantum aſſerit (a) ſi $- py^{r-m} - qy^{r-n} -$ &c. termini negativi ſint æqnationis cujuscunque, ſummam duarum maximarum quantitatum $\sqrt[m]{p}$, $\sqrt[n]{q}$ &c. majorem maxima æquationis radice eſſe. Cum vero hiſce modis prope ad maximam radicem rariſſime accedatur, nihil aliud his ſolis obtinetur, quam ut tentationis labor in aliis methodis inſtituendæ minuatur, cognito ſcilicet quantitates tentandas extra laxum hunc limitem non eſſe quærendas. Atque hæ fere omnes ſunt, præcipuæ ſaltem methodi limites æquationum inveniendi, quæ ab Algebriſtis ſunt detectæ & de quibus pro virili ſatis dictum putaverim. De limitibus ipſarum radicum inter ſe agendum reſtat.

§. VI.

Quod limites radicum inter ſe attinet, obſervandum

(a) *Miſcell. Berol.* Vol. XXIII. pag. 326.

dum eſt ſicut & facile probari poteſt, ſi fuerint a minima b ſecunda c tertia &c. radicum æquationis $\overline{x - a}.\overline{x - b}.\overline{x - c}$ ----&c. $= o$ quantitatem quamcunque minorem quam a in æquatione hac pro x ſubſtitutam, quantitatem reſultantem eodem, ac ultimus gaudet, terminus afficere ſigno: quantitatem deinde a majorem, minorem vero b, c &c. pro x ſubſtitutam, quantitatem ſigno ultimi termini ſigno contrario affectam producere: atque quantitatem denique quamcunque majorem a & b minorem vero c &c. productum ex ejusdem ſubſtitutione oriundum ultimi termini ſigno afficere; unde in genere ſequi clarum eſt, duas ejusmodi quantitates, quæ in æquatione quadam pro incognita ſubſtitutæ, quantitates producant ſignis affectas contrariis, hujus æquationis limites eſſe. Cum vero limitibus inter radices ipſas inveniendis ſubſtituendo multum neceſſe ſit impendatur laboris, alia & facilior eſt methodus eosdem inveniendi. Probat namque Cel. *Dn.* MACLAURIN tam in epiſtola ſua *Dn.* MARTINO FOLKES data, atque una cum NEWTONI *Arithmetica Univerſali* edita *(a)* quam in ſuo *Traité de l'Algebre*, in genere radices æquationis $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + sx^{n-4}$ &c. $= o$ limites eſſe radicum æquationis $nx^{n-1} - \overline{n-1}.px^{n-2} + \overline{n-2}.qx^{n-3} - \overline{n-3}.rx^{n-4} + \overline{n-4}.sx^{n-5}$---$= o$, ſeu æquationis cujuscunque ex priori productæ multiplicatione terminorum ejusdem

(*a*) Pag. 298. Edit. 3.

dem per progreſſionem quamcunque Arithmeticam $a \mp b$, $a \mp 2b$, $a \mp 3b$ &c. atque reciproce radices hujus ultimæ æquationis limites eſſe propoſitæ $x^n - px^{n-1}$ ---&c. $= o$. Hinc facilis erit limitum inter radices ipſas inventio. Ut vero res clarior evadat reſolvenda proponatur æquatio cubica $x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = o$. Cum non omnes radices, ut ſigna oſtendunt, poſitivæ ſint, in poſitivas convertantur omnes, ponendo $x = 4 - y$, (cum 3 maximus negativus coëfficiens ſit) atque transformando propoſitam in $y^3 - 9y^2 + 22y - 10 = o$. Hæc transformata reſolvatur in producta,

$3y^2 - 18y + 22$
$y - 3$

& habebitur 3 (radix æquationis $y - 3 = o$) limes tam æquationis $3y^2 - 18y + 22 = 0$ quam transformatæ $y^3 - 9y^2 + 22y - 10 = 0$, adeo ut numerus 3 major ſit minore radicum prioris æquationis, minor vero majore, & major minima æquationis poſterioris radice atque minor reliquis. Ut vero limites pro omnibus radicibus iuvicem habeantur, quærendæ ſunt radices æquationis $3y^2 - 18y + 22 = 0$, qnæ ſunt 4. 29, & 1. 71, circiter. Deinde limitis maximi inveniendi gratia ſubſtituatur numerus major quam 4. 29, (6 e. g. qui heic ſuccedit) omnia transformatæ producta affirmativa efficiens, & erunt limites æquationis transformatæ 0, (cum omnes radices poſitivæ ſint) 1. 71, 4. 29. & 6; adeo ut radicum mini-

ma inter 0 & 1. 71, proxime major inter 1. 71, & 4. 29, atque maxima inter 4. 29 & 6 contineantur. Ipsis vero radicibus inveniendis inservient deinde approximationis methodi. Radicibus autem transformatæ inventis, facile habentur valores incognitæ in proposita $x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = 0$, cum sit $x = 4 - y$. Sed de usu atque utilitate limitum paucis disserere juvabit.

§. VII.

In hisce tribus inprimis, *reductione scilicet æquationum per radices rationales, extractione radicum surdarum per approximationes & investigatione radicum impossibilium*, limitum inventio maximo est usui. Cum enim radices æquationis rationales necessario esse debeant ultimi termini divisores; hi autem perquam multi esse possint, tentandi labor magnus omnino esset. Minuitur autem cognitis, intra quos, limitibus consistant radices, si admodum inæquales non sint. Inventionem limitum magnæ præterea esse utilitatis in approximatione radicum surdarum vel ex eo patet quod facilius sit intra quam extra limites constituto ad radices accedere. Inventioni porro numeri radicum impossibilium in æquationibus, ultima a nobis allata limites inveniendi methodus quam sæpissime inservit. Probari namque facile potest, æquationem $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + sx^{n-4} - - -$ &c. $= 0$ radicibus gaudere impossibilibus si æquatio limitum ejus

jus $nx^{n-1} + \overline{n-1}.px^{n-2} + \overline{n-2}.px^{n-3} \ldots$ &c. $= 0$ tæ-
libus gaudeat. Hoc etiam principio regula Cel. NEWTONI pro impossibilium radicum inventione ope seriei fractionum &c. inniti censenda est. Docet enim ille, si sit æquatio e. g. cubica $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ & super terminis mediis secundum regulam ejus formatæ constituantur fractiones $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, ut habeatur $x^3 - Ax^{\frac{1}{3}} + Bx^{\frac{1}{3}} - C = 0$, atque sub quolibet terminorum mediorum collocetur signum $+$ quoties quadratum ejus in fractionem capiti imminentem ductum, majus sit rectangulo terminorum utrinque consistentium, signum vero $-$ quoties minus sit, tot radices dari impossibiles quot in subscriptorum signorum serie occurrunt variationes, terminis primo & ultimo signo $+$ affectis. Jam vero æquatio limitum $3x^2 - 2Ax + B = 0$ radicibus gaudet imaginariis si $\frac{1}{3}A^2 < B$; clarum igitur est regulam a Cel. NEWTONO pro radicibus impossibilibus inveniendis traditam in Methodo ejusdem (ut diximus) ultima limites æquationum investigandi fundari. Denique præter alios hunc etiam limitum inventio habet usum, ut eorundem ope omnes æquationis cujuscunque radices in positivas converti possint. Invento namque majori limite p ponatur in æquatione e. g. $x^3 - 3x^2 - 4x - 15 = 0$, $x = p - y$ atque substituatur $p - y$ pro x, transformata

$$\begin{aligned} & p^3 - 3p^2y + 3py^2 - y^3 = 0 \\ & - 3p^2 + 6p\,y - 3\,y^2 \\ & - 4p + 4\,y \\ & - 15 \end{aligned}$$

 omnes

omnes radices positivas habebit, quoniam p utpote limes major æquationis excedit x, unde $p - x$, seu y positiva erit quantitas. Idem effici posset etiam limites minoris q ope, ponendo scilicet $x = y - q$ atque eodem modo propositam transformando. Multa adhuc usum limitum concernentia addi possent, quæ vero tam dissertationis magnitudo, quam temporis brevitas omittere cogunt.

TANTUM.