20

Dissertatio Gradualis

De

LOXODROMIIS

In

Superficie Ellipsoidica

Quam

Venia Ampl. Fac. Philos. Aboëns.

Præside

Mag. JOH. HENR. LINDQUIST,

Math. Prof. R. & O. nec non R. Acad. Scient. Svec. Membro.

Publicæ submittit censuræ

NICOLAUS MAGNUS TOLPO,

Stip. Reg. Borea-Fenno.

In Auditorio Majori die V Junii MDCCXCII.

H. A. M. S.

ABOÆ, Typis FRENCKELLIANIS.

§. I.

Loxodromiæ nomine insigniri solet linea, in superficie telluris omnes meridianos sub eodem angulo secans. Cursus navis, quamdiu versus eandem plagam dirigitur, hujusmodi lineam sequitur: quamobrem ejus in arte navigandi præcipuus est usus. Regulas pro calculo loxodromico, assumta tellure perfecte sphærica, plerique tradunt scientiæ nauticæ Auctores. Figuram vero terræ quum a sphærica abludere & ad ellipsoidicam propius accedere compertum sit; theoriam loxodromiarum etjam sub hac hypothesi pertractare haud neglexerunt Mathematici. Quomodo autem, posita figura terræ ellipsoidica, versus polos compressa, concinnior, nostro judicio, & ad praxin nauticam magis accommodata obtineatur motum loxodromicum computandi methodus, paucis jam specimine hoc Academico dispicere constituimus.

§. II.

Loxodromias esse curvas & quidem, quoties obliquus est angulus loxodromicus, lineas duplicis curva-

vaturæ, ex allata (§. 1.) definitione sequitur. Earum igitur delineatio in mappis vulgaribus difficillima & admodum intricata foret; quamobrem alius generis mappæ hydrographicæ excogitatæ sunt, quæ secundum inventorem mappæ MERCATORIS seu *reductæ* dicuntur, omnes loxodromias per lineas rectas repræsentantes. In hujusmodi mappis itaque omnes meridiani erunt rectæ æquidistantes, gradusque longitudinum ubique æquales. Quum autem revera meridiani versus polos convergant, adeoque gradus longitudinum continuo minuantur; ad hunc errorem mapparum corrigendum justamque proportionem servandam in ratione inversa crescentes latitudinum gradus sumuntur. Hinc ratio deducitur hujusmodi mappas reductas pro figura telluris ellipsoidica construendi. Posita scilicet semidiametro æquatoris $= 1$ & semiaxi terræ $= n$, si fuerit loci cujusvis latitudo $= L$, arcus meridiani elliptici, inter eundem locum atque æquatorem interceptus $= s$, longitudo vero hujus arcus in mappa reducta repræsentati seu numerus, ut dicitur, partium meridionalium eidem latitudini L respondens $= u$, quæraturque angulus M talis ut sit $tgM = n\,tgL$; assumto Sinu toto $= 1$, erit (per naturam Ellipseos) in Latitudine $= L$ radius circuli ad æquatorem paralleli $=$ $CosM$, adeoque $du : ds :: 1 : CosM$. Porro est $ds : dM :: SinM : SinL$ & $dM : dL :: nCosM^2 : CosL^2$; quibus analogiis compositis eruitur $du : dL :: n\,SinM\,CosM : SinL\,CosL^2$, vel (ob $tgM = n\,tgL$), $du : dL :: n^2 :$

 $CosL$

$Cos L (Cos L^2 + n^2 Sin L^2)$. Si ulterius ponatur $n^2 = 1 - r^2$ seu excentricitas ellipseos dicatur r, erit $Cos L^2 + n^2 Sin L^2 = 1 - r^2 Sin L^2$; adeoque $du = \frac{(1-r^2)dL}{Cos L (1 - r^2 Sin L^2)}$ $= \frac{dL}{Cos L} - \frac{r^2 Cos L\, dL}{1 - r^2 Sin L^2}$.

Facta denique substitutione $r Sin L = Sin \lambda$, erit

$$du = \frac{dL}{Cos L} - \frac{r\, d\lambda}{Cos \lambda},$$

unde, existente radio æquatoris $= 1$, erit $u = Log.hyp. Tg (45^\circ + \frac{1}{2} L) - r\, Log.hyp. Tg (45^\circ + \frac{1}{2} \lambda)$. Si vero, ut mos est in arte navigandi, exprimendus sit u in milliaribus maritimis, quorum 60 æquantur uni gradui æquatoris & pro Logarithmis hyperbolicis desiderentur Briggiani seu tabulares, multiplicandus erit hic valor u per $3437,74677 \times 2,302585$ seu per $7915,70446$.

§. III.

Ex allata (§. 2.) formula patet, qua ratione ex vulgaribus latitudinum crescentium tabulis pro figura terræ sphærica computatis, facile inveniri queant partes meridionales pro Ellipsoide utcunque compressa. Existente scilicet ratione diametri æquatoris ad axin in Ellipsoide $:: 1 : \sqrt{1 - r^2}$, si ad datam quamvis latitudinem $= L$ quæratur angulus λ talis ut sit $Sin \lambda = n Sin L$, sintque latitudinibus L & λ in sphæra compe-

ten-

tentes partes meridionales φL & $\varphi\lambda$ respective, erit pro latitudine L in Ellipsoide numerus partium meridionalium $u = \varphi L - r\varphi\lambda$; in qua formula terminus $r\varphi\lambda$ exhibet correctionem distantiæ meridionalis pro figura ellipsoidica. Secundum hanc regulam sequentem construximus tabellam pro correctione ista ad singulos quinos gradus latitudinis invenienda, ponendo rationem diametri æquatoris ad axin = 200: 199, quam quidem rationem institutis observationibus atque mensuris optime convenire ostendit Cel. MALLET in *K. Sv. Wet. Acad. Handl.* A. 1767 p. 158. 193 & *Mathem. Werlds Beskr.* p. 93-95.

L	$r\varphi\lambda$	*Diff.*		L	$r\varphi\lambda$	*Diff.*		L	$r\varphi\lambda$	*Diff.*	
0°	0	3′,0									
5°	3′,0	3′,0		35°	19′,7	2,4		65°	31′,1	1.2	
10°	6′.0	2′ 9		40	22,1	2,2		70	32.3	0.9	
15	8′,9	2′,8		45	24,3	2,0		75	33.2	0.6	
20	11,7	2,8		50	26,3	1,8		80	33.8	0.4	
25	14,5	2,7		55	28,1	1,6		85	34.2	0.2	
30	17,2	2,5		60	29,7	1,4		90	34.4		

Ex hac tabella ope interpolationis facili negotio invenitur $r\varphi\lambda$ pro singulis gradibus & minutis.

Ex. gr. Si quæratur distantia meridionalis u pro latitudine = 56° 15′; invenitur in tabb. vulgaribus

$\varphi\lambda$ - - - - - - - - - - - - - - - = 4100,9
& in tabula nostra, - - - - - - - $r\varphi\lambda$ = 28,5
quamobrem erit in Ellipsoide, - - - - u = 4072,4.

Hujusmodi tabellæ auxilio pro figura terræ Ellipsoidica facile construi potest tabula partium meridionalium, loco tabularum vulgarium ad figuram sphæricam accommodatarum adhibenda.

§. IV.

Quum via navis sit loxodromica (§. I.), manifestum est, spatium a navi percursum secundum arcum loxodromiæ mensurari. Ob constantem vero angulum loxodromicum, hic arcus ad arcum meridiani inter eosdem parallelos interceptum erit in data ratione. Quamobrem in hac doctrina, posita figura terræ ellipsoidica, rectificatio Ellipseos supponitur. Variæ quidem in scriptis analyticis occurrunt formulæ pro rectificandis Ellipsibus; in re autem nautica id inprimis postulatur, ut ex data loci cujusvis latitudine $= L$ directe inveniatur arcus meridiani elliptici inter æquatorem & eundem locum interjacens $= s$. Huic fini præcipue accommodatam sequentem adferre lubet regulam a Dn. Præside mecum communicatam: Si posita semidiametro æquatoris $= 1$ & semiaxi telluris $= \sqrt{1 - r^2}$, sumatur

$$A = 1 - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} r^2 - \frac{1.1}{2.4}.\frac{1.3}{2.4} r^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}.\frac{1.3.5}{2.4.6} r^6 - \&c;$$

$$B = \frac{1.3}{1.4}\left(\tfrac{1}{2} r^2 + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{2}.\frac{r^4}{2.3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{3.5}{2.4}.\frac{r^6}{3.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{r^8}{4.5} + \&c\right);$$

$$C = \frac{3.5}{2.4}\left(\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{2}.\frac{1.r^4}{2.3.4} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{3.5}{2.4}.\frac{2r^6}{3.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{3.r^8}{4.5.6} + \&c\right);$$

$$D = \frac{5.7}{3.4}\left(\frac{1.3}{2.4}.\frac{3.5}{2.4}.\frac{1.2r^6}{3.4.5.6} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{2.3r^8}{4.5.6.7} + \&c\right);$$

$E =$

$E = \frac{7.9}{4.4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{1.2.3r^8}{4.5.6.7.8} + \frac{1..7}{2..8}.\frac{1..9}{2..8}.\frac{2.3.4r^{10}}{5.6.7.8.9} + \&c\right)$;
erit $s = AL - BSin2L + CSin4L - DSin6L + ESin8L - \&c.$

Ut vero ſecundum hanc formulam arcus s in milliaribus maritimis ſeu minutis primis æquatoris inveniatur, ipſe arcus L in termino primo AL itidem in ſcrupulis primis exprimendus, & in reliquis terminis coëfficientes B, C, D, E &c. per numerum 3437,74677 (ſeu arcum radio æqualem) multiplicandi erunt. Hinc poſita $\sqrt{1 - r^2} = \frac{199}{200}$ ſequentes invenimus horum coëfficientium valores:

$A = 0,9975016$ ſeu $1 - A = 0.0024984$;
$B = 12'.86189$; $C = 0'.02019$; $D = 0'.00005$;
adeo ut ſit $L - s = 0,0024984 L + 12'.86189 Sin2L - 0'.02019 Sin4L + 0'.00005 Sin6L - \&c.$

Per hanc igitur formulam facile computari poteſt longitudo arcus meridiani inter datos duos parallelos comprehenſi, ſi pro utraque latitudine quæratur arcus s & dein ſumatur horum arcuum differentia. Quum vero in re nautica quæſtio plerumque ſit de minoribus latitudinum differentiis, in praxi commodior erit ſequens methodus: Si datarum latitudinum differentia ſit $= x$ earumque ſemiſumma $= L$ & quæſitus arcus meridiani $= z$ atque pro latitudine L ponatur $ds = (1 - p)\, dL$; erit ſatis exacte $z = x - px$. Invenitur autem (§. 2.) $p = 1 - \frac{n^2 CosM^3}{CosL^3}$, exiſtente $ntgL = tgM$.

Vel

Vel etiam differentiando æquationem $s = AL - B\,Sin\,2L + C\,Sin\,4L - \&c$ obtinetur $p = 1 - A + 2B\,Cos\,2L - 4C\,Cos\,4L + 6D\,Cos\,6L - \&c$. Posita itaque $n = \frac{199}{200}$, erit $p = 0,0024984 + 0.0075\,Cos\,2L - 0.000006\,Cos\,4L + \&c$.

Pari ratione ex data arcus meridiani longitudine $= z$, dataque latitudine $= G$ pro alterutro termino hujus arcus, invenitur differentia latitudinis $= x$. Ob differentiam scilicet $x - z$ admodum exiguam, si ponatur $G \pm \frac{1}{2}z = L$ (adhibito signo $+$ ubi terminus datus ipsius z fuerit æquatori propior, signo vero $-$ in casu contrario), sine notabili errore assumi poterit $x = z + pz$, existente $p = 1 - A + 2B\,Cos\,2L - 4C\,Cos\,4L + \cdots$

Usibus vero practicis convenientissimum erit, Tabulam construere, ex qua pro quavis latitudine L tam longitudinem arcus elliptici s quam coëfficientem illum p mox depromere licet. Specimen hujusmodi tabulæ pro quinto quovis latitudinis gradu sequens addere lubet, assumto $n = \frac{199}{200}$.

L	s	p	L	s	p	L	s	p
0°	0′	0.0100	35°	2082′.7	0.0051	70°	4181′.2	--0.0032
5	297′,0	0.0098	40	2381.3	0.0038	75	4482.3	--0.0040
10	594,1	0.0095	45	2680.4	0.0025	80	4783.6	--0.0045
15	891,3	0.0090	50	2979.8	0.0012	85	5085.0	--0.0049
20	1188.7	0.0083	55	3279.6	0.0000	90	5386.5	--0.0050
25	1486.4	0.0073	60	3579.8	-0.001			
30	1784.4	0.0062	65	3880.4	-0.023			

§. 5.

§. V.

Principiorum jam allatorum ope singula haud difficulter solvi possunt problemata motum loxodromicum in ellipsoide spectantia. Illustrationis caussa bina horum adferemus, ex quibus theoriæ hujus applicatio ad ceteros casus facile intelligitur.

PROBL. 1. *Invenire distantiam loxodromicam* = y *& angulum Rhombi* = ϱ *inter duo loca, quorum dantur latitudines G & H atque differentia longitudinum* = m.

Sol. Quærantur primo (§. 3.) latitudinibus G & H respondentes partes meridionales, quarum sumatur differentia, quæ sit = v, & dein inferatur: $v : m :: Rad : Tg\varrho$. Porro investigetur (§. 4.) inter latitudines G & H arcus meridiani longitudo quæ sit = z, quo facto invenitur y per analogiam: $Cos\varrho : Rad :: z : y$.

PROBL. 2. *Dato angulo Rhombi* = ϱ *& distantia loxodromica* = y *nec non latitudine G termini a quo, invenire latitudinem H loci, ad quem pervenit navis, & longitudinum differentiam m.*

Sol. Inferendo $R : Cos\varrho :: y : z$ obtinetur arcus ellipticus z, ex quo & data latitudine G invenitur (§. 4.) latitudinum differentia x, adeoque altera latitudo H. His porro latitudinibus G & H respondentes (§. 3.) quærantur partes meridionales, quarum sit differentia = v, qua cognita ulterius inferatur $Rad : tg\varrho :: v : m$.

Exempl. 1. Si quæratur Rhombus & distantia loxodromica inter *Brestiam* Galliæ sub latitudine 48°

22′55″ Bor. ſitam atque *Cayennam* in America ſub latitudine Bor. 4° 56′ 18″, exiſtente differentia longitudinum = 47° 44′ 12″ = 2864′,2; invenitur ad majorem harum latitudinum $u = 3300,3$ & $s = 2881,9$, atque ad minorem $u = 293,7$ & $s = 293,3$ adeoque $v = 3006,6$ & $z = 2588,6$, unde ſequitur $\varrho = 43° 36′ 40″$ & $y = 3575,2$. Poſita figura terræ ſphærica foret hoc in caſu $v = 3029,3$; $z = 2606,5$; $\varrho = 43° 23′ 40″$ & $y = 3587,2$, adeoque differentia Rhombi = 0° 13′ & diſtantiæ = 12 mill.

Exempl. 2. Si ex loco, cujus latitudo Bor. 5° = G in Rhombo S 40° W navigatione facta per diſtantiam 150′, quæratur latitudo H loci, ad quem perventum eſt & differentia longitudinum; invenitur $z = 114′,9$; $x = 116′ = 1° 56′$; H = 3° 4′ Bor. $v = 115,1$ & $m = 96′,6 = 1° 36′,6$.